Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO AND CONFORTO, F.

Le superficie razionali

Zanichelli, Bologna, 1939. ([Testo pubblicato con la sola indicazione del nome di F. Conforto in seguito all'introduzione delle leggi razziali])

EDIZIONE NAZIONALE OPERE DI
FEDERIGO ENRIQUES

L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

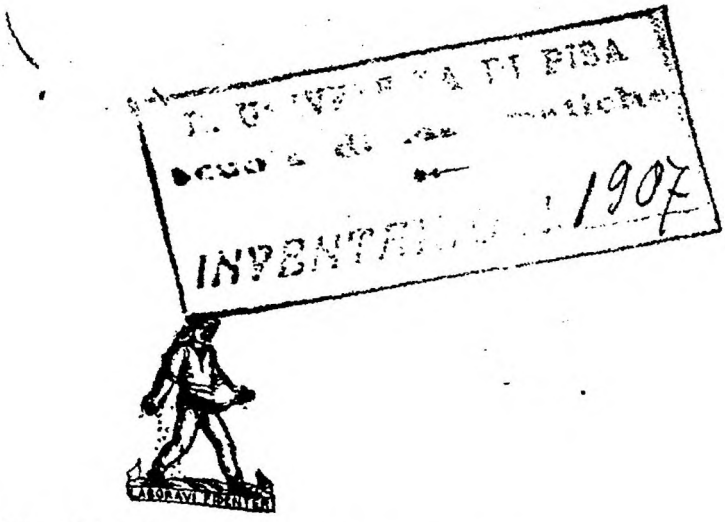
Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

14
J
8

FABIO CONFORTO

SCUOLA MATEMATICHE

SUPERFICIE RAZIONALI



NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA 1939-XVII

Ful. 05824

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

Nº 71

Cooperativa Tipografica Azzoguidi - Bologna - marzo 1939-XVI

PREFAZIONE

1.2

Queste Lezioni trattano delle superficie razionali, incominciando dalle superficie del secondo e terz'ordine e da quelle del quart'ordine dotate di curva doppia, ed elevandosi, a grado a grado, ad argomenti superiori: superficie con un fascio di curve razionali, superficie a sezioni piane di genere zero ed uno, classificazione del BERTINI *delle involuzioni del second'ordine nel piano, piani doppi di* CLEBSCH-NOETHER *ecc. fino al teorema sulla razionalità delle involuzioni piane d'ordine qualunque. Qui ci si arresta di fronte ai teoremi che caratterizzano le superficie razionali mediante l'annullamento dei generi e che appartengono alla teoria generale delle superficie algebriche.*

Ordinare questa materia, in rapporto alle esigenze della scienza d'oggi, implicava non soltanto di riprendere ed esporre i classici teoremi di CREMONA, CLEBSCH, BERTINI *ecc., che risalgono ad oltre mezzo secolo indietro, ma anche di metterli a punto secondo le vedute più moderne e di sottoporli ad una revisione critica per supplire a dimostrazioni che lasciavano lacune talvolta gravi, ristabilendo in via diretta la certezza di resultati verificati non di rado attraverso il confronto con teorie diverse e più elevate.*

È mio dovere dichiarare che in questo lavoro di coordinazione e di revisione mi sono valso delle lezioni, che su questi argomenti ha svolto, durante più anni successivi, il prof. F. ENRIQUES *alla R. Università di Roma, dalle quali in particolare ho attinto le nuove dimostrazioni che si riferiscono alla classificazione delle involuzioni del second'ordine di* BERTINI, *ai piani doppi razionali, nonchè la semplificazione notevole che l'uso del principio di continuità permette di portare alla dimostrazione della razionalità delle involuzioni piane d'ordine qualunque, quale si trova esposta nell'ultimo capitolo del libro.*

In accordo colle vedute del mio Maestro si riconoscerà una nuova considerazione dei problemi anche nelle parti più elementari di questo trattato: per esempio, in quanto concerne le superficie razionali del quart'ordine, si imponeva di presentarne lo studio sotto un aspetto più moderno, collegandole ampiamente alle vedute iperspaziali e guardandole secondo il concetto maturo che abbiamo oggi della geometria algebrica.

*Per quel che concerne il mio contributo originale ad alcune parti del libro mi sia consentito ricordare le ricerche, ispirate al concetto di riconoscere nel modo più largo il principio supremo della continuità, che domina lo studio del campo algebrico; e così specialmente le due memorie sui casi limiti dei fasci d'*HALPHEN*, nonchè la nota che concerne le superficie comuni alle due famiglie di quartiche razionali con punto doppio, scoperte da* NOETHER*. Aggiungasi il complemento critico portato alla riduzione dei piani doppi razionali, la nota sulla bisezione della serie canonica sopra gli enti di genere quattro ecc.: lavori che, al loro luogo, vengono citati nel testo. Mi auguro che queste lezioni, cui ho dedicato lunghi anni di lavoro, ricevano buona accoglienza dai docenti di Geometria e dai giovani che si preparano ad approfondire questo ramo delle Matematiche. A questi ultimi non sarà inutile fermare il pensiero sui problemi e sulle idee onde mosse lo spirito creatore di* LUIGI CREMONA*, da cui la scuola italiana ha tratto impulso ai più alti sviluppi: giacchè la rappresentazione piana delle superficie più elementari comunica a chi la studia per la prima volta una certa commozione dell'animo come promettente scoperta; e l'approfondimento di tale studio implica un esercizio fecondo, che allarga le idee, potenzia i metodi di ricerca ed educa il gusto dello studioso traverso l'esame di casi speciali interessanti, mercè i quali si riesce anche a cogliere il senso profondo delle dottrine più astratte. In particolare è questa la migliore preparazione per chi voglia affrontare, e comprendere nella sua genesi, la teoria generale delle superficie algebriche rispetto alle trasformazioni birazionali.*

F. CONFORTO

INDICE DEI CAPITOLI

LIBRO PRIMO

LE SUPERFICIE RAZIONALI DEI PRIMI ORDINI

CAPITOLO I.

LE QUADRICHE

Prefazione . . . . . pag. V

1. Rappresentazione piana della quadrica . . . . . » 3
2. Immagini delle sezioni piane e delle curve di dato ordine tracciate sopra la superficie . . . . . » 6
3. Rappresentazione piana del cono quadrico . . . . . » 12
4. Risoluzione parametrica dell'equazione $F_2(x, y, z) = 0$ . . » 14
5. Trasformazioni quadratiche dello spazio . . . . . » 17
6. I sistemi omaloidici di quadriche . . . . . » 18
7. La trasformazione quadratica ordinaria o di prima specie . » 22
8. La trasformazione quadratica di seconda specie . . . . » 28
9. La trasformazione quadratica di terza specie . . . . . » 30

CAPITOLO II.

LE SUPERFICIE CUBICHE NON RIGATE

10. La superficie cubica con punto doppio . . . . . pag. 35
11. Rappresentazione piana della superficie cubica generale in base alla sua generazione proiettiva di Grassmann-Steiner . . . » 41
12. Le 27 rette appartenenti alla superficie cubica . . . . . » 46
13. Rappresentazione piana della superficie cubica generale mediante la proiezione sghemba . . . . . » 50
14. Curve tracciate sulla superficie cubica . . . . . » 53
15. Casi particolari . . . . . » 56

CAPITOLO III.

LA RIGATA CUBICA

16. Rappresentazione piana della rigata cubica generale . . . pag. 61
17. Trasformazione del sistema rappresentativo della rigata in un sistema di coniche per un punto base . . . . . » 64

18. Casi particolari: rigata cubica di Cayley . . . . . pag. 68
19. Trasformazioni proiettive della rigata cubica . . . . . » 71
20. La rigata razionale normale dello spazio a quattro dimensioni » 73

CAPITOLO IV.

LA SUPERFICIE ROMANA DI STEINER

21. Introduzione: costruzione di superficie razionali del quarto ordine a partire da sistemi lineari di curve nel piano . . pag. 77
22. La superficie di Steiner: sua rappresentazione piana . . . » 80
23. La superficie di Veronese e le sue proiezioni . . . . . » 85

CAPITOLO V.

LA SUPERFICIE DEL QUARTO ORDINE
CON CUBICA GOBBA DOPPIA O RETTA TRIPLA

24. Rappresentazione piana della superficie del quarto ordine con cubica gobba doppia . . . . . pag. 89
25. Rappresentazione piana della superficie del quarto ordine con retta tripla . . . . . » 97
26. Invarianti assoluti . . . . . » 100
27. La rigata razionale normale dello spazio S_5 . . . . . » 103
28. Casi particolari di una superficie del quarto ordine con cubica gobba doppia: proiezioni di una rigata normale generale . . » 107
29. Particolari rigate normali e loro proiezioni . . . . . » 119
30. Nota storica . . . . . » 125

CAPITOLO VI.

LA SUPERFICIE DEL QUARTO ORDINE CON CONICA DOPPIA

31. La superficie del quarto ordine con conica doppia e la sua trasformazione in una cubica . . . . . pag. 133
32. Le 16 rette della superficie . . . . . » 136
33. Invarianti assoluti . . . . . » 140
34. La superficie di Segre, intersezione di due quadriche dello spazio S_4 . . . . . » 144
35. Casi particolari . . . . . » 147
36. Nota storica . . . . . » 157

CAPITOLO VII.

LA SUPERFICIE DEL QUARTO ORDINE CON RETTA DOPPIA

37. Trasformazione della superficie del quarto ordine con retta doppia in una cubica . . . . . pag. 161
38. Curve tracciate sulla superficie del quarto ordine con retta doppia » 167
39. Cenno di alcuni casi particolari . . . . . » 171

Capitolo VIII.

SULLE SUPERFICIE DEL QUARTO ORDINE CON UN SOLO PUNTO SINGOLARE

40. Introduzione . . . . . pag. 177
41. Generalità sulle superficie razionali del quarto ordine a sezioni piane di genere tre . . . . . » 179
42. La superficie del quarto ordine con punto triplo . . . . . » 184
43. La superficie del quarto ordine con tacnodo . . . . . » 187
44. Superficie razionali del quarto ordine dotate di un punto doppio con un fascio di sezioni razionali . . . . . » 193
45. Superficie razionali del quarto ordine dotate di un punto doppio con un fascio di sezioni ellittiche . . . . . » 202
46. Digressione sulle curve, che si staccano, come componenti fisse, dall'aggiunto di un sistema lineare . . . . . » 209
47. Sui tipi delle superficie razionali del quarto ordine a sezioni di genere tre . . . . . » 223

LIBRO SECONDO

LA TEORIA GENERALE DELLE SUPERFICIE RAZIONALI SVILUPPO STORICO ED ESPOSIZIONE SISTEMATICA

Capitolo I.

LE SUPERFICIE CON UN FASCIO DI CURVE RAZIONALI

1. Il teorema di Noether: introduzione . . . . . pag. 241
2. Irrazionalità numeriche, che intervengono nella rappresentazione parametrica di una curva di genere zero, mediante funzioni razionali . . . . . » 243
3. Dimostrazione del teorema di Noether . . . . . » 245
4. Le superficie con un fascio irrazionale di curve razionali . . » 253
5. Il caso ellittico . . . . . » 260
6. Fascio di genere qualunque . . . . . » 262

Capitolo II.

LE SUPERFICIE A SEZIONI RAZIONALI

7. Il teorema di Picard ed il teorema di Kronecker-Castelnuovo pag. 269
8. Le superficie d'ordine n dello spazio S_{n+1} . . . . . » 271
9. Riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane di genere zero . . . . . » 286
10. Nota storica . . . . . » 300

Capitolo III.

LE SUPERFICIE A SEZIONI PIANE ELLITTICHE

11. Razionalità delle superficie non rigate a sezioni ellittiche . pag. 305
12. Le superficie non rigate d'ordine n normali in S_n . . . . . » 308
13. Riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve ellittiche piane . . . . . » 314
14. I fasci di curve ellittiche . . . . . » 320
15. Nota sui fasci d'Halphen, i cui punti base appartengono ad una cubica ellittica degenere . . . . . » 323
16. Nota storica . . . . . » 328

Capitolo IV.

LE INVOLUZIONI PIANE DEL SECONDO ORDINE

17. Un lemma generale sui sistemi lineari di curve piane . . . pag. 337
18. Classificazione delle involuzioni piane del secondo ordine: posizione del problema . . . . . » 350
19. Le involuzioni di De Jonquières . . . . . » 352
20. Le involuzioni del terzo tipo di Bertini . . . . . » 356
21. Le involuzioni del quarto tipo di Bertini . . . . . » 364
22. Nota storica . . . . . » 378

Capitolo V.

I PIANI DOPPI RAZIONALI

23. Rappresentazione delle involuzioni del secondo ordine su di un piano doppio . . . . . pag. 383
24. I tipi di piani doppi razionali . . . . . » 385
25. Generalità sui piani doppi . . . . . » 391
26. Dimostrazione diretta della razionalità dei tipi di piani doppi razionali . . . . . » 410
27. Condizioni di razionalità di un piano doppio . . . . . » 439

Capitolo VI.

ALTRE CLASSI NOTEVOLI DI SUPERFICIE RAZIONALI COMPLEMENTI

28. Le superficie a sezioni iperellittiche . . . . . pag. 459
29. I sistemi lineari di curve piane rappresentativi di superficie razionali, a sezioni iperellittiche . . . . . » 463
30. Superficie del quinto ordine a sezioni razionali . . . . . » 469
31. Superficie del quinto ordine a sezioni ellittiche . . . . . » 473
32. Superficie del quinto ordine a sezioni di genere due . . . . » 476
33. Superficie del quinto ordine a sezioni di genere tre . . . . » 482
34. Nota sulle superficie a sezioni di genere tre . . . . . » 489
35. Superficie del quinto ordine a sezioni di genere quattro . . » 492

36. Superficie del quinto ordine a sezioni di genere cinque e sei . pag. 495
37. Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in sè . . » 496
38. Sulle irrazionalità numeriche, che intervengono nella rappresentazione di una superficie razionale su di un piano . . . » 501
39. Superficie razionali reali . . . . . » 513

Capitolo VII.

RAZIONALITA' DELLE INVOLUZIONI PIANE

40. Introduzione . . . . . pag. 523
41. Regolarità delle superficie unirazionali . . . . . » 525
42. Un secondo lemma sulla superficie F . . . . . » 532
43. Caso in cui $p = 0, 1, 2$ . . . . . » 535
44. Caso in cui $p > 2$ . . . . . » 539
45. Le condizioni di razionalità nella teoria generale delle superficie » 548

LIBRO PRIMO

LE SUPERFICIE RAZIONALI DEI PRIMI ORDINI



CAPITOLO I

LE QUADRICHE

1. Rappresentazione piana della quadrica.

La proiezione stereografica della sfera, usata a scopi astronomici e geografici da TOLOMEO nel suo *Planisfero* e forse ancora prima da IPPARCO, è nella storia della scienza il primo caso di *rappresentazione piana* di una superficie.

Ma il concetto di studiare le curve algebriche tracciate su di una superficie algebrica, mediante la sua rappresentazione piana, è molto posteriore; per rintracciare i primi passi di questa dottrina, che successivamente si è allargata fino a divenire una *teoria generale delle superficie razionali*, occorre risalire a J. PLUECKER (1847), a M. CHASLES e ad A. CAYLEY (1861), che insegnarono ad usare per tale scopo la rappresentazione piana della quadrica.

La rappresentazione piana di una quadrica irriducibile F_2 dello spazio ordinario S_3 si ottiene proiettando da un punto O di F_2 i punti della quadrica sopra un piano π. Così viene a stabilirsi una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano π ed i punti di F_2; infatti il raggio che proietta da O un punto generico P di F_2 incontra il piano in un unico punto P', corrispondente di P. Viceversa, un punto generico P' del piano è proiezione di un unico punto di F_2, giacchè il raggio OP' incontra la quadrica oltre che in O in un unico punto P.

Nella proiezione di F_2 da O su π vi sono delle eccezioni, che importa subito rilevare. Se ad un punto P' del piano π corrisponde su F_2 *più* di un punto, ciò significa che la retta OP' ha almeno tre intersezioni con la quadrica e quindi giace per intero su di essa. Le eccezioni sul piano π si hanno perciò solamente in quei punti, i quali sono intersezioni del piano π con rette di F_2,

passanti per O. Poichè per O passano *due* generatrici a e b della quadrica (reali o immaginarie), avremo *nel piano* π *due punti* A e B *eccezionali* per la corrispondenza, nel senso che a ciascuno di essi non corrisponde un *punto* della quadrica, ma un'intera *retta*.

Passiamo ai punti eccezionali su F_2. Sulla quadrica, qualunque punto P può essere congiunto ad O mediante una retta, la quale diviene indeterminata solamente se P coincide con O. Il punto O è perciò l'*unico punto eccezionale su* F_2.

Le eccezioni, delle quali abbiamo constatato l'esistenza, devono, per quanto è possibile, essere rimosse con considerazioni di continuità. Nell'intento di esaminare la eccezione presentata dai punti A e B, supponiamo tracciata sopra F_2 una curva γ, la quale incontri la generatrice a in un punto T. Proiettando da O i vari punti di γ, otteniamo la curva γ' nel piano π. Un punto P mobile su γ, ha come corrispondente un punto P', mobile su γ'. Vediamo cosa succede quando P si avvicina a T, cioè il raggio OP tende ad a. Il punto P' su γ' si avvicinerà al punto A in una certa direzione t, tangente alla curva γ' in A, ed il raggio OP tenderà a disporsi nel piano tangente ad F_2 in T, sicchè P' starà al limite sulla traccia di questo piano tangente su π. La tangente t a γ' in A è perciò la traccia sul piano π del piano tangente alla quadrica nel punto comune a γ e ad a.

Se ora si fa variare la curva γ su F_2 in maniera però da passare sempre per T, vediamo che a tutte queste curve corrispondono su π delle curve, che in A hanno la medesima tangente t. Infatti il punto infinitamente vicino a T su ognuna di queste curve, giace sempre sul piano tangente a F_2 in T, e questo porta che la sua proiezione stia sopra la traccia di questo piano su π. In altre parole: a curve di F_2 passanti per T corrispondono curve di π con la medesima tangente t in A.

Ciò che si è fatto per il punto T si può ripetere per qualunque punto di a. Così si genera una corrispondenza fra le direzioni delle rette uscenti da A ed i punti T di a, in cui al punto T generico di a corrisponde la retta t per A, traccia su π del piano tangente a F_2 in T. La corrispondenza è biunivoca ed algebrica ed è quindi

una *proiettività*, che non può essere degenere, se F_2 è una quadrica generica. Se infatti la proiettività di cui si discorre fosse degenere, in ogni punto di a esisterebbe lo *stesso* piano tangente ad F_2, che dovrebbe perciò essere un *cono*. Usando il linguaggio infinitesimale potremo esprimere il risultato ottenuto così: *Nella proiezione da O di F_2 su π ai punti delle generatrici a e b corrispondono i punti infinitamente vicini ad A e B, costituenti i loro rispettivi intorni del primo ordine.*

Volgiamoci ora a considerare il punto O di F_2, che, come si è visto, è eccezionale per la corrispondenza. Una curva γ, che passi per O, abbia come immagine la curva γ'. Indichiamo con t la tangente a γ in O. Adottando questa volta senz'altro il linguaggio infinitesimale, osserviamo che il punto di γ, infinitamente vicino ad O, giacente cioè su t, ha una proiezione ben determinata nel punto d'intersezione T della retta t con il piano π. Il punto T giace anche sulla traccia del piano tangente in O ad F_2, che non è altro che la retta AB, essendo il piano tangente in O ad F_2 il piano che contiene le generatrici a e b. Se ora γ varia su F_2 conservando però la tangente t in O, γ' varierà nel piano π, passando sempre per il punto T di AB. La tangente t può essere una generica delle ∞^1 tangenti uscenti dal punto O e vediamo così nascere una corrispondenza tra le tangenti t in O ed i punti T della retta AB, traccie di queste tangenti sul piano π. Questa corrispondenza è una prospettività e potremo pertanto enunciare: *i punti della retta AB corrispondono prospettivamente ai punti dell'intorno di primo ordine del punto O*: l'omologo di un punto T di AB è il punto infinitamente vicino ad O, sulla retta t che congiunge T con O.

Riassumendo, possiamo dire che la corrispondenza fra il piano e la quadrica è generalmente biunivoca con l'eccezione di punti, che assumono il nome di punti *fondamentali*, cioè: un punto fondamentale sopra la quadrica, che cade nel centro O, e due punti fondamentali A e B sul piano, che sono le tracce delle generatrici a e b passanti per O. Ad un punto fondamentale corrisponde una retta e vi è *proiettività fra i punti propri di questa ed i punti infinitamente vicini a quello*, costituenti il suo intorno del primo

ordine. Soltanto nel caso del cono vedremo come la proiettività fra l'intorno di A e la generatrice corrispondente a diventi degenere.

2. Immagini delle sezioni piane e delle curve di dato ordine tracciate sopra la superficie.

La sezione di F_2 con un piano generico è una conica. La proiezione di questa conica da O ci dà sul piano ancora una conica, tuttavia non qualunque, giacchè la sezione piana generica incontra in un punto le generatrici a e b e di conseguenza l'immagine della sezione piana passa per i punti A e B. Viceversa, una conica C'_2 per A e B è sempre immagine di una sezione piana; infatti tre punti generici P', Q', R' di essa saranno immagini di tre punti P, Q, R della F_2, per i quali passerà un piano, intersecante la F_2 secondo una conica C_2. L'immagine di C_2 è necessariamente la C'_2 dovendo essere una conica per A, B, P', Q', R'.

Concludendo: *Le sezioni piane di F_2 hanno come immagini le coniche del sistema lineare ∞^3, che ha come punti base i punti fondamentali A e B.*

La conoscenza delle immagini delle sezioni piane permette agevolmente di determinare in maniera sistematica tutte le curve gobbe giacenti su F_2.

Se sulla F_2 esiste una curva C di ordine n, essa ha n punti d'intersezione con la generica sezione piana, ai quali corrisponderanno n punti d'intersezione della sua immagine C' con la conica generica per A, B, fuori (1) dei punti fondamentali A e B.

Per trovare le curve gobbe di un dato ordine n, appartenenti ad F_2, dovremo perciò ricercare le curve del piano π che hanno n intersezioni variabili (fuori dei punti base) con le coniche per A e B.

Questo principio permette già di ritrovare nella rappresen-

(1) La parola « fuori » è adoperata qui in senso largo, senza escludere che per particolari coniche per A e B, qualcuno dei punti d'intersezione vada a cadere infinitamente vicino ad A, avendosi dunque una tangente comune alla C' ed alle dette coniche.

tazione piana le *rette* della quadrica. Infatti le rette di F_2 hanno come immagini delle curve che intersecano in *un* punto variabile le coniche per A e B. Si conclude da qui immediatamente che su F_2 esistono due sistemi di rette, le cui immagini sono le rette di π passanti rispettivamente per il punto A ed il punto B. Le rette per A (o B) sono immagini di rette della F_2, incidenti ad a (o b) e rappresentano quindi rette della F_2 appartenenti al sistema che contiene b (o a).

Ma veniamo alle curve propriamente gobbe, prime tra le quali si presentano le *cubiche gobbe*. Se sulla F_2 esistono delle cubiche gobbe, non passanti per O, le loro immagini devono essere curve del terzo ordine, aventi tre intersezioni variabili con le coniche per A e B. In altre parole, tre delle intersezioni di queste cubiche con le coniche devono essere assorbite dai punti base. Così per le *cubiche irriducibili* si avranno due possibilità: *cubiche con A doppio e B semplice* e *cubiche con A semplice e B doppio*, o, come si usa scrivere:

$$C_3(A^2B) \quad \text{e} \quad C_3(AB^2).$$

Le cubiche gobbe particolari passanti per O sono invece rappresentate dalle coniche passanti per A o per B, cui si aggiungerebbe la retta fondamentale AB, immagine del punto O: invero se la C_3 passa per O, essa viene proiettata da O secondo un cono quadrico.

Dalla rappresentazione piana delle cubiche gobbe di F_2 ricaviamo subito: le cubiche gobbe di F_2, che hanno come immagini le $C_3(A^2B)$ incontrano in un punto le generatrici rappresentate dalle rette per A, cioè le generatrici del sistema a cui appartiene b, ed in due punti le generatrici del sistema a cui appartiene a.

Così le cubiche gobbe appartenenti alla quadrica F_2 si distribuiscono in due famiglie: quelle di una famiglia hanno per bisecanti le generatrici di un sistema ed unisecanti quelle dell'altro.

Si osserverà che due cubiche gobbe della stessa famiglia si segano in quattro punti e due cubiche gobbe di famiglie diverse in cinque punti: tante sono infatti le intersezioni delle due cubiche immagini sul piano π, fuori dei punti A e B.

OSSERVAZIONE. - Le cubiche di π che possiedono A o B come *cuspide* sono immagini di cubiche gobbe *tangenti* alla generatrice a o b.

NOTA. - Per mezzo della rappresentazione piana di una quadrica è facile dimostrare che *per ogni punto O dello spazio passa una corda di una cubica gobba K_3*.

Si osservi a questo scopo che per la K_3 passano ∞^2 quadriche: infatti le quadriche dello spazio sono ∞^9 (dipendendo dai mutui rapporti dei 10 coefficienti dell'equazione), e una quadrica per sette punti della K_3 la contiene completamente. Ciò posto, consideriamo una quadrica F_2 che contenga la K_3 ed il punto O: nella rappresentazione piana della F_2, ottenuta per proiezione dal punto O, la K_3 diviene una cubica con un punto doppio in un punto fondamentale A; ed il punto A è l'immagine di una retta per O, bisecante la K_3.

Passiamo a determinare le quartiche K_4 tracciate sulla F_2. Le K_4, che non passano per O, sono rappresentate da quartiche del piano π, che hanno quattro intersezioni variabili con le coniche per A e B. Ciò significa che quattro intersezioni di queste quartiche devono essere assorbite in questi punti base. Avremo perciò le seguenti famiglie di quartiche, immagini di altrettante famiglie di quartiche gobbe (irriducibili) tracciate sulla F_2:

famiglia delle $C_4(AB^3)$
famiglia delle $C_4(A^2B^2)$
famiglia delle $C_4(A^3B)$.

Appare di qua che le quartiche gobbe della F_2 si dividono in due specie:

I) *quartiche gobbe di prima specie,* rappresentate dalle $C_4(A^2B^2)$, *le quali sono bisecate dalle generatrici della* F_2 e

II) *quartiche gobbe di seconda specie,* rappresentate dalle $C_4(AB^3)$ e dalle $C_4(A^3B)$, *per le quali le generatrici di un sistema della F_2 sono unisecanti, mentre le generatrici dell'altro sono trisecanti.*

Le quartiche gobbe di prima specie appartengono tutte ad una

stessa famiglia; le quartiche gobbe di seconda specie si dividono invece in due famiglie distinte.

È facile mostrare che le quartiche gobbe di prima specie si possono anche definire come le intersezioni complete della quadrica F_2 con le quadriche dello spazio. Sia infatti F_2' una quadrica generica. Essa interseca la F_2 in una quartica gobba K_4, che è di prima specie: invero la F_2' sega le rette a e b in due punti e quindi la immagine della K_4 è una curva del quart'ordine che passa doppiamente per A e B. Inversamente, sia data sulla F_2 una generica K_4 di prima specie. Vogliamo dimostrare che essa è segata sulla F_2 da una seconda quadrica. Osserviamo, a questo scopo, che l'immagine della K_4 è una $C_4(A^2B^2)$, la quale risulta determinata da otto suoi punti generici $A_1, A_2, \ldots, A_8$: infatti il sistema di tutte le $C_4(A^2B^2)$ dipende linearmente da $14 - 3 - 3 = 8$ parametri. Si consideri ora una quadrica F_2' (diversa dalla F_2), la quale passi per gli otto punti le cui immagini sono $A_1, A_2, \ldots, A_8$: la F_2' intersecherà la F_2 in una quartica di prima specie, la cui immagine (passando per $A_1, A_2, \ldots, A_8$ e doppiamente per A e B) coincide con la $C_4(A^2B^2)$ immagine della K_4. Le quadriche F_2 ed F_2' si intersecano dunque secondo la K_4.

Riassumendo, possiamo dire: *le curve, intersezioni complete di una quadrica F_2 con le altre quadriche dello spazio, sono tutte e sole quartiche gobbe di prima specie, tracciate sulla F_2.*

Se si interseca la F_2 con una quadrica generica F_2', la intersezione completa è una quartica di prima specie, la quale risulta di genere uno, essendo rappresentata da una quartica con due punti doppi. Ma la F_2' può, in particolare, *toccare* la F_2 in un punto P: le due generatrici della F_2, passanti per P, segano allora la K_4 in due punti coincidenti nel punto P, il quale risulta *doppio* per la K_4, essendo in esso indeterminata la tangente della K_4. In questo caso la K_4 è rappresentata sul piano da una $C_4(A^2B^2)$, la quale ha un punto doppio nel punto immagine di P, risultando così di genere zero. Inversamente, è facile dimostrare che una quartica razionale, la quale abbia come punti doppi i punti A, B ed un terzo punto P' di π, è immagine di una quartica di prima specie segata sulla F_2 da una quadrica, toccante la F_2 nel punto P omologo di P'.

Possiamo dunque dire: *Le quartiche gobbe di prima specie di una F_2 sono generalmente di genere uno; esistono però delle quartiche gobbe di prima specie dotate di un punto doppio e quindi razionali, le quali si ottengono intersecando la F_2 con una quadrica che la tocchi in un punto.*

Quanto alle quartiche gobbe di seconda specie, esse sono tutte *razionali* e, escluso il caso in cui acquistino un punto doppio diventando anche di prima specie, la F_2 è l'unica quadrica che le contiene. Le nominate quartiche si ottengono segando la F_2 con superficie cubiche contenenti due generatrici della F_2, che appartengano allo stesso sistema (1).

Chiudiamo con ciò la nostra trattazione delle quartiche giacenti sopra una quadrica. Proponiamo al lettore le seguenti questioni:

Quale è l'immagine di una quartica di prima o di seconda specie:

a) passante per il punto O?

b) passante per il punto O e tangente ivi alla retta a?

Quale è l'immagine di una quartica, tracciata sulla quadrica, con un punto doppio sopra la retta a? (Lo studioso richiami le nozioni elementari sulle singolarità).

OSSERVAZIONE. - La classificazione delle quartiche appartenenti ad una quadrica in quartiche di prima e di seconda specie trae con sè una classificazione di tutte le quartiche gobbe dello spazio. Infatti ogni quartica gobba K_4 è contenuta in (almeno) una quadrica: basta infatti che una quadrica contenga nove punti della K_4 perchè la contenga per intero e per nove punti passa sempre (almeno) una quadrica. Si può dunque definire in generale la quartica gobba di prima specie come quella curva che è comune a due e quindi ad infinite quadriche costituenti un fascio. Invece la quartica gobba di seconda specie (senza punti doppi) appartiene solamente ad *una* quadrica.

---

(1) Cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Bologna 1924 (in seguito citata con *Teoria...*), Vol. II, Lib. III, Cap. II, pagg. 145-46.

Per quanto riguarda le curve tracciate su F_2, il cui ordine è maggiore di quattro, osserviamo che in generale *le curve d'ordine n tracciate sulla F_2 saranno rappresentate sul piano da curve d'ordine n, passanti per A e B con molteplicità r ed s, tali che* $r + s = n$. Le immagini delle curve irriducibili d'ordine n della F_2 si distribuiscono dunque in $n - 1$ famiglie:

$$C_n(AB^{n-1}), \qquad C_n(A^2B^{n-2}), \ \ldots, \qquad C_n(A^{n-1}B);$$

ed è facile dimostrare che le intersezioni complete della F_2 con le superficie d'ordine m sono rappresentate dalle curve:

$$C_{2m}(A^mB^m).$$

Ma non ci indugeremo su ciò.

Mostreremo piuttosto come la rappresentazione piana della quadrica possa servire allo studio della residua intersezione della F_2 con un'altra superficie, quando queste due superficie abbiano una parte comune conosciuta.

Senza dare su questo argomento una trattazione generale, forniremo alcuni esempi atti ad illustrare il partito che si può trarre dalla rappresentazione piana della F_2.

a) Dimostreremo la seguente proposizione: *Se due quadriche hanno a comune una retta d, esse si intersecano ulteriormente in una cubica gobba K_3, per la quale la retta d è corda.*

Infatti, riferendoci alla rappresentazione piana di una delle due quadriche mediante coniche per due punti fondamentali A e B, sappiamo che l'immagine della intersezione completa delle due quadriche deve essere una quartica C'_4 con A e B doppi; se quindi l'immagine della retta comune d è una retta d' per A, l'immagine della K_3 residua deve essere una cubica piana K'_3, passante doppiamente per B e semplicemente per A; e la K'_3 interseca la d' in *due* punti, che sono immagini di due punti comuni alla d ed alla K_3.

In modo analogo si può dimostrare:

b) *Se una quadrica F_2 ed una superficie cubica F_3 hanno a comune una cubica gobba K_3, esse si intersecano ulteriormente*

in una cubica gobba L_3 appartenente all'altra famiglia ed intersecante la prima in 5 punti.

Nella solita rappresentazione piana della F_2 sia K_3' (A^2B) l'immagine della K_3. L'immagine della intersezione completa della F_2 con la F_3 è una sestica C_6', passante triplamente per A e B, la quale deve contenere la $K_3'(A^2B)$. La C_6' è quindi spezzata nella K_3' (A^2B) ed in una L_3' (AB^2), che è immagine della cubica gobba L_3 di F_2. Risulta così evidente, dalla rappresentazione piana, che L_3 e K_3 appartengono a famiglie diverse e s'intersecano in cinque punti.

Dimostriamo infine che:

c) *Una superficie del quart'ordine F_4, passante doppiamente per una cubica gobba K_3, ed una quadrica F_2, contenente la K_3, si segano ulteriormente in una coppia di rette sghembe, corde della cubica gobba K_3.*

Infatti l'immagine della intersezione completa della F_2 con la F_4 è una linea dell'ottavo ordine passante quattro volte per i punti A e B; se K_3' (A^2B) è l'immagine della K_3, la nominata linea si spezza nella $K_3'(A^2B)$ contata due volte ed in una residua conica, la quale — dovendo passare doppiamente per B — si riduce a due rette uscenti da B; e queste due rette sono immagini di due corde della K_3, intersecando in due punti la sua immagine $K_3'(A^2B)$.

3. Rappresentazione piana del cono quadrico.

Anche se la quadrica F_2 è un cono, essa può venir rappresentata su di un piano per proiezione da un suo punto O. In questo caso però i due sistemi di generatrici vengono a coincidere e la generatrice b diventa così infinitamente vicina alla generatrice a. Corrispondentemente il punto $B \equiv A_1$ si avvicina indefinitamente al punto A e quindi: *Le sezioni piane del cono F_2 hanno come immagini le curve del sistema lineare ∞^3, costituito dalle coniche che passano per il punto A con la tangente fissa $a \equiv AA_1$, traccia del piano tangente al cono nel punto O.*

I punti della retta AA_1 sono, come nel caso generale, in corrispondenza proiettiva con i punti dell'intorno di O; ad ogni punto

T di AA_1 corrispondendo il punto infinitamente vicino ad O sulla tangente TO.

Consideriamo i due punti fondamentali A e A_1. Le coniche del sistema lineare $|C|$, rappresentativo del cono, non si distinguono nell'intorno del primo ordine di A (passando tutte per il punto infinitamente vicino A_1), ma si distinguono invece nell'intorno di primo ordine di A_1, che riesce del secondo ordine per A; e precisamente per ogni punto P dell'intorno di primo ordine di A_1, ne passa una rete, che varia al variare del punto P. Ne viene che l'intorno di primo ordine di A_1 rappresenta una linea fondamentale del cono F_2. La nominata linea è una retta, giacchè ogni conica del sistema lineare $|C|$ passa una sola volta per l'intorno del primo ordine di A_1; e questa retta, proiettandosi in un punto, passa necessariamente per O. Troviamo dunque che *l'intorno di primo ordine del punto fondamentale A_1 (che è di secondo ordine rispetto ad A) rappresenta la generatrice del cono, passante per il centro di proiezione O.*

Consideriamo ora l'intorno di primo ordine di A. Il sistema lineare ∞^2, contenuto in $|C|$ e determinato da un punto generico P di questo intorno, è costituito dalle ∞^2 coniche spezzate in due rette per A: e risulta così indipendente dalla scelta del punto P. Ne viene che *l'intorno di A* (fatta eccezione del punto A_1) *rappresenta l'intorno del vertice del cono F_2*: infatti solamente per il vertice del cono avviene che le ∞^2 sezioni piane per esso siano spezzate in due generatrici.

Anche per il cono la conoscenza delle immagini delle sezioni piane permette di determinare agevolmente tutte le curve gobbe di dato ordine n giacenti sulla superficie. Queste curve sono infatti rappresentate dalle curve del piano, che hanno n intersezioni variabili (fuori dei punti base) con le coniche per A e A_1, ossia dalle curve d'ordine n, passanti per A e A_1 con molteplicità r ed s, tali che $r + s = n$. Qui però occorre osservare che — essendo $B \equiv A_1$ infinitamente vicino ad A — è necessariamente $s \leq r$.

Le curve del tipo $C_n\,(A^r A_1^s)$ sono immagini di curve K_n,

le quali passano $r-s$ volte per il vertice e sono s-secanti le generatrici del cono: infatti le curve $C_n(A^r A_1^s)$ passano per r punti dell'intorno di A, dei quali s cadono in A_1 ed $r-s$ corrispondono a rami delle K_n passanti per il vertice del cono; le rette per A segano poi le $C_n(A^r A_1^s)$ (fuori di A) in $n-r=s$ punti, immagini di s punti comuni alle K_n ed alle generatrici del cono.

Da queste proprietà generali, discendono come casi particolari le seguenti proprietà, relative alle cubiche ed alle quartiche gobbe, appartenenti ad un cono:

1) *Sopra un cono quadrico esiste una unica famiglia di cubiche gobbe, le quali passano per il vertice e sono unisecanti le generatrici.*

2) *Le quartiche gobbe di un cono quadrico sono in generale quartiche gobbe di prima specie e di genere uno, le quali non passano per il vertice e bisecano le generatrici; in particolare quartiche gobbe passanti doppiamente per il vertice, le quali sono segate (fuori del vertice) in un punto da ogni generatrice.*

Se il cono si rappresenta sul piano mediante le coniche passanti per due punti A e $B \equiv A_1$, infinitamente vicini, si ha che:

1) *La famiglia delle cubiche gobbe del cono è rappresentata dal sistema lineare* ∞^5 *delle* $C_3(A^2 A_1)$;

2) *La famiglia delle quartiche gobbe ellittiche è rappresentata dal sistema lineare* ∞^8 *delle* $C_4(A^2 A_1^2)$ (quartiche, che hanno in A un tacnodo con la tangente tacnodale AA_1), *mentre la famiglia delle quartiche razionali con punto doppio, che rientra come caso particolare nella precedente ed insieme nella famiglia delle quartiche di seconda specie dello spazio, è rappresentata dal sistema lineare* ∞^7 *delle* $C_4(A^3 A_1)$.

4. Risoluzione parametrica dell'equazione $F_2(x, y, z) = 0$.

La rappresentazione punto per punto sul piano di una quadrica $F_2(x, y, z) = 0$, che abbiamo ottenuto mediante proiezione da un suo punto O, si traduce algebricamente nella *risoluzione* dell'equazione $F_2(x, y, z) = 0$ *mediante tre funzioni razionali di*

due parametri u *e* v:

$$x = \frac{\varphi_1(u, v)}{\varphi_0(u, v)}, \qquad y = \frac{\varphi_2(u, v)}{\varphi_0(u, v)}, \qquad z = \frac{\varphi_3(u, v)}{\varphi_0(u, v)},$$

dove u e v risultano a lor volta univocamente, e perciò razionalmente, esprimibili in funzione delle coordinate x, y, z del punto corrispondente della F_2. In breve si può dire che la rappresentazione piana della superficie F_2 mostra che questa *superficie* è *razionale* (proprietà che è ben lungi dall'essere verificata per una superficie algebrica qualsiasi). Qualora l'equazione della superficie F_2 venga espressa in coordinate omogenee x_0, x_1, x_2, x_3 (sostituendo dunque x, y, z con $\frac{x_1}{x_0}$, $\frac{x_2}{x_0}$, $\frac{x_3}{x_0}$ e moltiplicando per x_0^2), e si ponga analogamente $u = \frac{u_1}{u_0}$, $v = \frac{u_2}{u_0}$, la sua rappresentazione vien data dalle formule:

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \varphi_0 : \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3$$

dove le $\varphi_i (i = 0, 1, 2, 3)$ sono forme di secondo grado nelle variabili omogenee u_0, u_1, u_2. Qui giova avvertire che se si prendono ad arbitrio quattro forme omogenee di secondo grado φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 e si pone:

$$x_i = \varphi_i, \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

si ottiene sempre la rappresentazione parametrica di una superficie algebrica F, rappresentata punto per punto sul piano u, v. Ma questa F è in generale una superficie del quarto ordine, giacchè una retta, intersezione di due piani, ha con essa a comune quattro punti, come le coniche, immagini delle loro sezioni. Per avere una quadrica F_2 bisogna prendere le forme φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 in modo che rappresentino quattro coniche (linearmente indipendenti) che abbiano due punti a comune. Il sistema lineare definito da queste coniche, che così viene assunto a priori, sarà il sistema delle immagini delle sezioni piane di F_2; il suo *grado*, numero delle intersezioni variabili di due coniche, essendo l'*ordine* della superficie F_2.

ESERCIZI. - I. La superficie:

$$ax + by + cz + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0$$

è una quadrica, passante per il punto all'infinito dell'asse delle z, che può essere rappresentata sul piano $z = 0$ per proiezione (ortogonale) da questo punto. Scrivere le formule della rappresentazione parametrica.

II. La superficie:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = d$$

è una quadrica, che può rappresentarsi sul piano $z = 0$, per proiezione da uno dei suoi punti d'intersezione con l'asse z. Scrivere le formule della risoluzione parametrica ed osservare che esse contengono nei coefficienti una irrazionalità quadratica, cioè la $\sqrt{\frac{d}{c}}$. Discutere le formule dal punto di vista della realtà.

NOTA STORICA. - Un caso particolare della rappresentazione piana di una quadrica fu considerato da TOLOMEO nel suo « Planisfero », e forse anche prima da IPPARCO, nello studio della proiezione stereografica della sfera a scopi astronomici e geografici (1).

La rappresentazione piana di una quadrica qualsiasi e l'idea di adoperarla per determinare le curve gobbe algebriche giacenti

(1) La proiezione stereografica consiste, come è noto, nella proiezione della sfera dal polo nord sopra un piano parallelo all'equatore; essa gode della proprietà di mutare cerchi in cerchi e di conservare gli angoli col loro senso. In base a quanto conosciamo, la prima proprietà riesce per noi evidente: infatti le due rette appartenenti alla sfera, che partono dal centro di proiezione sono le due rette isotrope ed incontrano il piano, su cui si eseguisce la proiezione, nei due punti ciclici. In altre parole, i due punti fondamentali A e B della nostra trattazione generale sono i punti ciclici del piano π, sicchè le coniche per A e B, immagini dei cerchi sezioni piane della sfera, sono ancora cerchi.

Per dimostrare la seconda proprietà, osserviamo che nella proiezione stereografica della sfera il fascio delle tangenti in un punto ed il fascio delle proiezioni sono direttamente uguali: ciò consegue immediatamente dal fatto che le generatrici della sfera (che sono rette isotrope) uscenti da un punto P si mutano nelle rette isotrope uscenti dal punto P', immagine di P.

su di essa è però molto posteriore: si trova in J. PLÜCKER [1] (1847), M. CHASLES [2] ed A. CAYLEY [3] (1861).

La scoperta delle quartiche gobbe (di seconda specie) che *non* sono intersezione di due quadriche, devesi in ispecie a G. SALMON (1849). Queste quartiche gobbe di seconda specie hanno formato poi oggetto di studio approfondito da parte L. CREMONA e di E. BERTINI [4].

5. Trasformazioni quadratiche dello spazio.

Come diretta applicazione della rappresentazione piana delle quadriche ci proponiamo di determinare le trasformazioni algebriche e biunivoche, e perciò *birazionali*, di uno spazio S in uno spazio S' (eventualmente coincidente con S), nelle quali al sistema dei piani di S' corrisponde proiettivamente un sistema lineare ∞^3 di quadriche (irriducibili) di S. Queste trasformazioni si dicono *trasformazioni quadratiche* o *del secondo ordine* e furono incontrate da L. CREMONA, da A. CAYLEY e da M. NOETHER nelle loro prime ricerche sulle trasformazioni birazionali dello spazio.

Consideriamo nello spazio $S(x, y, z)$ un sistema lineare triplamente infinito $|F|$ di quadriche irriducibili e poniamo una proiettività tra il sistema lineare ∞^3 delle quadriche di $|F|$ ed il sistema ∞^3 dei piani dello spazio $S'(x', y', z')$. Si ottiene così una trasformazione (univoca) T, precisamente una *trasformazione quadratica*, che fa passare dallo spazio S allo spazio S': infatti per un punto P di S (che non sia comune a tutte le quadriche di $|F|$)

---

(1) Cfr. J. PLÜCKER: *Die analitysche Geometrie der Kurven auf den Flächen zweiter Ordnung und Klasse*; «Journal für Mathematik», Bd. 34, 1847.

(2) Cfr. M. CHASLES: *Théorie analytique des courbes à double courbure des tous les ordres tracées sur l'hyperboloïde à une nappe*, «Comptes Rendus», T. 53, 1861.

(3) Cfr. A. CAYLEY: *On the curves situated on a Surface of the Second Order*, «Phil. Mag.», T. 22, 1861.

(4) Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...* Vol. III, Lib. V, Cap. III, pag. 214 e segg. e pag. 237.

passano ∞^2 quadriche di $|F|$ alle quali corrispondono gli ∞^2 piani di una stella di centro P'. Viceversa ad un punto generico P' di S' corrisponde un numero finito di punti, variabili con P'. Se si vuole che anche l'inversa della trasformazione T sia univoca, è necessario e sufficiente che le quadriche di una rete generica contenuta in $|F|$ abbiano un sol punto comune, fuori di eventuali punti o curve base di $|F|$, ossia che tre quadriche generiche di $|F|$ si intersechino in un sol punto *variabile*; in questo caso la corrispondenza fra S' ed S riesce univoca quando si prescinda dai fattori degeneri che da essa si distaccano. Un sistema triplamente infinito di superficie irriducibili, che soddisfaccia alla condizione sopra enunciata, si dice un sistema *omaloidico*.

Possiamo dunque dire che *i tipi possibili di trasformazioni quadratiche dello spazio univocamente invertibili, si ottengono in corrispondenza ai possibili tipi di sistemi* ∞^3 *omaloidici di quadriche.*

Siamo così condotti a ricercare i sistemi omaloidici di quadriche dello spazio.

6. I sistemi omaloidici di quadriche.

Secondo un'osservazione dovuta a L. CREMONA [1], i sistemi omaloidici di superficie a cui appartiene una superficie razionale di dato tipo si possono costruire, quando esistono, nel modo seguente: sia F_n una superficie razionale d'ordine n, della quale si conosca una rappresentazione punto per punto su di un piano; la rappresentazione piana della F_n permette agevolmente di determinare (se esistono) le reti omaloidiche [2] Σ, segate su F_n (a pre-

---

[1] Cfr. L. CREMONA: *Sulle trasformazioni razionali dello spazio*, Nota 1ª; «Rend. Ist. Lomb.», Serie II, Vol. IV (1871) = Opere di L. CREMONA: Tomo III, pag. 241.

[2] Chiamasi rete omaloidica di curve, una rete di curve irriducibili, le quali si seghino a due a due in un punto variabile. Giova notare che le curve di una rete omaloidica sono certamente *razionali*: infatti una rete omaloidica dà luogo ad una trasformazione cremoniana, che trasforma le curve della rete in rette; cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria*.... Vol. III, Lib. V, Cap. II pag. 156 e segg.

scindere da parti fisse) da superficie F dello stesso ordine n, aventi gli stessi punti multipli e le stesse linee multiple; ora, se si combina linearmente questa rete di F colla F_n data, si ottiene un sistema lineare ∞^3 di superficie, che è *omaloidico*. Inversamente, se è dato a priori un sistema omaloidico di superficie F, questo sistema sega sopra una superficie del sistema stesso (a prescindere da parti fisse) una rete omaloidica Σ.

Applichiamo il procedimento del CREMONA al caso più semplice delle quadriche ($n = 2$). Per quanto si è detto, la determinazione di tutti i tipi di sistemi omaloidici di quadriche equivale alla determinazione di tutti i tipi di reti omaloidiche segate su di una data quadrica F_2 da ∞^2 quadriche. Riferiamoci alla rappresentazione piana della quadrica F_2 mediante il sistema lineare ∞^3 delle coniche per due punti A e B (distinti o infinitamente vicini); si tratta allora di ricercare tutte le reti omaloidiche, che (con l'eventuale aggiunta di una parte fissa) siano contenute nel sistema lineare ∞^8 delle quartiche passanti doppiamente per A e B: l'ordine n delle nominate reti deve essere ≤ 4.

Abbiamo dunque un numero limitato di casi, i quali corrispondono, sul piano rappresentativo, ai sistemi seguenti:

a) la rete delle rette del piano, (da completarsi con una conica per A e B e con la retta fondamentale AB) che rappresenta la rete delle coniche segata sulla F_2 dalle quadriche passanti per una conica K_2 fissa e per il punto di proiezione O;

b) la rete delle coniche per A, B ed un terzo punto fisso C, che equivale al caso *a*) ed anzi si riduce a questo con la trasformazione quadratica che ha i punti fondamentali in A, B, C (1).

c) la rete delle coniche per A e due altri punti fissi P_1 e P_2, distinti da A e B (da completarsi con una retta r per B e con la

(1) Si osservi che la quadrica F_2 è rappresentata punto per punto non solo sul piano rappresentativo π ma su ogni piano π', il quale sia in corrispondenza biunivoca con il piano π; basta all'uopo pensare come immagini di uno stesso punto della F_2 punti corrispondenti dei piani π e π'. In altre parole: la rappresentazione piana della quadrica è definita a meno di una trasformazione cremoniana del piano π in un altro piano π' (eventualmente coincidente con π).

retta AB), che rappresenta la rete delle cubiche gobbe segate sulla quadrica F_2 dalle quadriche passanti per una generatrice fissa e per tre punti fissi, uno dei quali è il centro di proiezione;

d) la rete delle coniche per tre punti P_1, P_2, P_3 (distinti da A e B), (da completarsi con la retta AB contata due volte) che rappresenta la rete di quartiche gobbe dotate di un punto doppio nel centro di proiezione O, segata sulla quadrica F_2 dalle quadriche tangenti ad essa in O e passanti per altri tre punti fissi;

c) la rete delle cubiche $C_3(A^2BP_1P_2P_3)$, che riporta al caso *c*) e che si trasforma nella rete delle coniche per un punto fondamentale e per due punti fissi, mediante la trasformazione quadratica che ha i punti fondamentali A, B, P_1;

f) la rete delle quartiche $C_4(A^2B^2P_1^2P_2P_3P_4)$; questa rete rappresenta una rete di quartiche gobbe della F_2, le quali hanno un punto doppio nel punto che si rappresenta in P_1 e passano per i tre punti fissi, che hanno come immagini P_2, P_3, P_4; la nominata rete di quartiche gobbe è segata sulla F_2 dalle quadriche che toccano la F_2 in un punto fisso, passando per tre punti fissi di essa. Siamo dunque nel caso *d*), al quale del resto ci si riduce con una trasformazione quadratica, che ha i punti fondamentali in A, B, P_1 [1].

Riassumendo i risultati della nostra ricerca, possiamo dire: *Un sistema omaloidico di quadriche è:*

a) *un sistema lineare di quadriche, che hanno a comune una conica K_2 ed un punto O, ovvero*

b) *un sistema lineare di quadriche, che hanno a comune una retta d e tre punti P_1, P_2, P_3, ovvero*

c) *un sistema lineare di quadriche, che passano per tre punti P_1, P_2, P_3 e toccano un piano fisso in un punto O.*

---

[1] Se A e B sono infinitamente vicini la F_2 è un cono e tra le curve $C_4(A^2B^2)$ sono contenute le $C_4(A^3B)$; si presenta quindi a priori anche la rete omaloidica delle $C_4(A^3BP_1P_2P_3P_4P_5)$. Questa dà luogo ad un sistema ∞^3 di quadriche, passanti per i cinque punti, che si rappresentano in $P_1 \dots P_5$, e per il vertice V del cono; e questo sistema *non* è evidentemente *omaloidico*

Un sistema lineare di quadriche, il quale appartenga ad uno dei tre tipi anzidetti è certamente un sistema omaloidico, se le linee ed i punti comuni a tutte le quadriche del sistema sono in posizione generica: ma per posizioni particolari di questi elementi vi possono essere delle eccezioni. A prescindere dalla degenerazione delle quadriche del sistema in piani, tali eccezioni possono aversi:

a) quando le condizioni offerte dalle linee e dai punti base non sono più indipendenti, ovvero

b) quando le intersezioni di tre quadriche del sistema sono tutte assorbite dal gruppo base, costituito dagli elementi base assegnati e da quelli che ne derivano di conseguenza.

Senza entrare in una discussione minuta, giova qui rilevare, che entrambi questi due tipi di eccezioni possono effettivamente presentarsi.

Precisamente, se i punti base siano punti *propri* (fuori della linea base), si possono avere eccezioni soltanto se il passaggio delle quadriche per gli elementi base assegnati porti di conseguenza una linea base che venga ad aggiungersi alla linea data. Un esempio di ciò si ha nel sistema lineare delle quadriche, che debbano passare per una retta d e per tre punti P_1, P_2, P_3, qualora si ammetta che P_1, P_2, P_3 stiano su di una retta d': se la retta d' è incidente alla retta d, il sistema è ∞^4 e le condizioni non sono più indipendenti; se invece la d' è sghemba alla d, il sistema è bensì ∞^3, ma tre quadriche di esso non si segano in un punto variabile.

Se invece si ammettano anche punti base infinitamente vicini alla linea base, le eccezioni possono presentarsi senza che la linea base si amplii. Riferendoci sempre al sistema lineare delle quadriche passanti per una retta d e per tre punti P_1, P_2, P_3, supponiamo ad es. che P_1 e P_2 si avvicinino in direzioni distinte ad un punto P della retta d, in modo però che al limite i punti P_1 e P_2 giacciano in un piano π, passante per la retta d; il sistema lineare delle quadriche, passanti per d e per P_1, P_2, P_3, è allora il sistema ∞^4 delle quadriche, che contengono la retta d, toccano in P il piano π e passano per P_3: il passaggio per il punto P_2 diviene qui una conseguenza delle altre condizioni.

Per mostrare un esempio, in cui si verifichi il secondo tipo di eccezione, consideriamo le quadriche, passanti per una conica K_2 ed un punto O, e supponiamo anzitutto che la conica K_2 si spezzi in due rette intersecantisi in un punto P. Se ora il punto O si prende infinitamente vicino a P, fuori del piano della conica spezzata K_2, il sistema delle quadriche per K_2 ed O diventa un sistema lineare ∞^3 di *coni*; e tre coni generici di questo sistema non si segano in un punto variabile, ma nel punto fisso P.

7. La trasformazione quadratica ordinaria o di prima specie.

Nello spazio $S(x, y, z)$ consideriamo un sistema omaloidico $|F|$ di quadriche, che abbiano a comune una conica K_2 ed un punto O. Ponendo una proiettività tra il sistema $|F|$ ed il sistema dei piani dello spazio $S'(x', y', z')$, si definisce tra lo spazio S e lo spazio S' una trasformazione quadratica (univocamente invertibile), che dicesi *trasformazione quadratica ordinaria o di prima specie.*

Ai piani di S' corrispondono le quadriche del sistema $|F|$: ne segue che le rette di S' (assi di un fascio di piani) si trasformano in coniche, comuni ad un fascio di quadriche F, ossia in coniche passanti per O e bisecanti la K_2.

Per trovare come si trasformino i piani e le rette dello spazio S premettiamo la seguente osservazione generale, che ci sarà utile anche nella discussione degli altri tipi di trasformazioni quadratiche.

Un sistema omaloidico di superficie $|F|$, in uno spazio S, dà luogo ad una trasformazione birazionale T dello spazio S, in un altro spazio S'. Alla trasformazione T si associano i due *ordini r ed s*, che denotano rispettivamente *l'ordine delle superficie del sistema* $|F|$ *e l'ordine della curva variabile, secondo la quale si segano due superficie di* $|F|$: si dice così che la trasformazione T è una trasformazione (r, s). Giova ora osservare come *l'inversa* T^{-1} *di una trasformazione T di ordini r ed s sia sempre una trasformazione* (s, r).

Per dimostrarlo osserviamo che *i piani e le rette dello spazio S*

si trasformano per la T in superficie d'ordine s (formanti un sistema omaloidico e) *segantisi a due a due in una curva variabile d'ordine r*. Invero i piani di S incontreranno in s punti le curve che rispondono in S alle rette di S', e si trasformeranno perciò in superficie di S', che saranno appunto d'ordine s. Similmente le rette di S incontreranno in r punti le superficie di S che si trasformano in piani, e diverranno perciò, in S', delle curve d'ordine r.

Ritornando dopo ciò alla trasformazione quadratica di prima specie, possiamo dire che essa è una trasformazione $(2,2)$: la sua inversa sarà quindi anch'essa una trasformazione (2,2). Ne segue che i piani e le rette dello spazio S si mutano in quadriche e coniche dello spazio S'. Più precisamente, il sistema dei piani di S si trasforma in un sistema omaloidico di quadriche, due delle quali si segano in una conica variabile. Il nominato sistema omaloidico appartiene quindi al primo tipo e possiederà una conica base K_2' ed un punto base O'.

Per la costruzione effettiva della conica K_2' e del punto O', osserviamo che tutte le rette per O, che si appoggiano alla conica K_2, offrono *una* condizione alle quadriche F, che devono contenerle; ne viene che le nominate rette corrisponderanno ai *punti* di una certa curva del secondo ordine L_2: infatti ogni quadrica di F si trasforma in un piano di S e contiene due rette per O che si appoggiano a K_2; ogni piano di S' interseca perciò la curva L_2 in due punti. Ma le rette per O che si appoggiano alla K_2 sono intersecate in un punto da un piano generico di S: le quadriche F', che sono immagini dei piani di S, contengono dunque la L_2, che coincide così con la K_2' la cui esistenza ci era già nota a priori.

Consideriamo ora il piano ω della conica K_2. Lo spezzamento di una quadrica F nel piano ω ed in un piano per O equivale ad una condizione lineare. Al piano ω corrisponde perciò il punto O', per il quale devono passare tutte le quadriche F'. Le conclusioni precedenti ci permettono di esaminare gli elementi eccezionali della trasformazione quadratica.

a) Ad ogni punto dello spazio S corrisponde sempre *un* punto

dello spazio S'; fanno eccezione il *punto fondamentale* O, che dicesi *centro della trasformazione*, ed i punti della *conica fondamentale* K_2, per cui passano *tutte* le quadriche del sistema omaloidico $|F|$. In modo analogo, nello spazio S' si ha il punto fondamentale O' e la conica fondamentale K_2'.

Abbiamo già veduto che al punto O' ed ai punti della conica K_2' corrispondono il piano ω della conica K_2 e le generatrici del cono che da O proietta la K_2. Analogamente si mostra che al punto O ed ai punti della conica K_2 corrispondono il piano ω' della conica K_2' e le generatrici del cono che da O' proietta la K_2'. I piani ω e ω' si dicono perciò *piani fondamentali* della trasformazione: ed i coni $O(K_2)$ e $O'(K_2')$ *coni fondamentali*: le generatrici dei coni fondamentali sono le *rette fondamentali* della trasformazione.

b) Ad un piano π dello spazio S corrisponde generalmente una quadrica di S', contenente la K_2' e passante per O'. Ma se il piano π passa per il centro O, la quadrica omologa si spezza in un piano per O', luogo dei punti omologhi ai punti generici di π, e nel piano fisso ω' corrispondente al punto fondamentale O. Appare così che *le due stelle di piani per* O *ed* O' *si corrispondono*; e, poichè ad un fascio risponde un fascio, le due stelle risultano omografiche.

c) Consideriamo infine una retta dello spazio S. Ad una retta a di S corrisponde in generale una conica per O' bisecante la K_2'. Vi è eccezione se la retta passa per O senza intersecare la K_2, ovvero incontra la conica K_2 senza passare per O, ovvero passa per O e si appoggia alla K_2. Nel primo caso — per la proiettività tra la stella di centro O e la stella di centro O' — ai punti generici della a corrispondono i punti di una retta a' per O'. Se invece la a incontra la K_2 (senza passare per O), alla a corrisponde una conica per O', bisecante la K_2', che degenera in una retta a' (non passante per O'), luogo dei punti omologhi dei punti generici di a, ed in una generatrice del cono $O'(K_2')$, corrispondente al punto fondamentale comune ad a e K_2: infatti ai piani per la a (che sono piani generici dello spazio S) corrispondono quadriche F' irriducibili, cioè senza parti comuni, la cui intersezione, fuori della K_2', resta

sempre una conica. Infine nel caso in cui la a sia una generatrice del cono $O(K_2)$, ad essa corrisponde un punto fondamentale della conica K_2'.

È da osservare che nello spazio S' si hanno le analoghe eccezioni.

In ciò che precede ci siamo tacitamente riferiti alla *trasformazione quadratica generale,* in cui:

a) il centro O è fuori del piano ω;

b) la conica fondamentale K_2 è irriducibile.

In queste ipotesi anche il punto O' è fuori del piano ω' e la conica K_2' è irriducibile. Il primo fatto segue dal considerare che fra due rette corrispondenti generiche a ed a' per O ed O' intercede una proiettività non degenere, dove al punto O' corrisponde il punto d'intersezione della a con ω, mentre al punto comune alla a' ed al piano ω' corrisponde il punto O. Quanto alla seconda osservazione, essa è evidente quando si pensi che alla conica K_2 corrisponde nella trasformazione il cono $O'(K_2')$.

Le possibili *specializzazioni della trasformazione quadratica di prima specie* si ottengono quando il punto O si avvicina indefinitamente al piano ω, ovvero la K_2 è riducibile, ovvero sono verificate entrambe queste circostanze.

Se il centro O cade sul piano ω, fuori della conica K_2, il piano ω si stacca da tutte le quadriche F' e perciò la trasformazione si riduce ad una omografia.

Ma il punto O può avvicinarsi alla conica K_2 (secondo una linea, che non sia tangente alla K_2); si ottiene allora una trasformazione quadratica speciale, nella quale il sistema trasformante $\{F\}$ è costituito da quadriche passanti per la conica K_2 e tangenti in un punto O di questa ad un piano π, che tocchi la conica K_2. In questa trasformazione, che è limite di una trasformazione quadratica ordinaria generale, ai piani di S rispondono delle quadriche F' di S' passanti per una conica K_2' e tangenti in un punto O' di questa ad un piano π', che tocchi la conica K_2'. Il piano della K_2 si trasforma nell'intorno di O' e l'intorno di O nel piano della K_2'; un piano generico per O si trasforma in un piano

per O'. Quanto ai punti della conica K_2' (che nel caso generale provengono dalle generatrici del cono $O(K_2)$), essi sono i trasformati delle rette di π passanti per O: infatti una retta siffatta offre una sola condizione alle quadriche F che debbano contenerla, ed è intersecata in un punto da un piano generico di S. Analogamente i punti della conica K_2 si trasformano nelle rette del piano π', passanti per O'.

Supponiamo nuovamente il punto O fuori del piano della K_2 e passiamo a discutere brevemente il caso, nel quale la conica K_2 si spezza in due rette r ed s. Si ottiene allora una seconda specializzazione della trasformazione quadratica, nella quale anche la conica K_2' di S' degenera in due rette r' ed s'. Ad un piano per la retta r, unisecante le coniche sezioni variabili di due F, corrisponde nello spazio S' un piano; questo passa per una retta r', parte di K_2', perchè le sue rette riescono incidenti a K_2'. Possiamo dunque dire che nella trasformazione quadratica speciale si corrispondono proiettivamente i fasci di piani r, r' ed s, s'; quindi alle rette della stella che ha per centro il punto $Q(r, s)$ corrispondono le rette della stella $Q'(r', s')$; fra le due stelle si ha una trasformazione quadratica con le rette fondamentali $p = QO$, r, s e $p' = Q'O'$, r', s'. Il lettore completerà facilmente la discussione degli elementi fondamentali, nel caso in cui il punto O si avvicini ad una delle rette r od s. Giova notare che il punto O può avvicinarsi anche al punto Q, comune alle due rette r ed s, cadendo nell'intorno del *secondo ordine* di una linea generica, uscente da Q, con tangente situata nel piano rs. Il sistema omaloidico è allora costituito dalle quadriche, che hanno in Q un *contatto del secondo ordine*: se si proietta una quadrica F_2 del sistema dal suo punto Q sopra un piano π, le quartiche, intersezioni della F_2 con le altre quadriche del sistema omaloidico, hanno come immagini delle quartiche spezzate in una retta generica di π e nella retta per i due punti fondamentali A e B contata *tre* volte. Questo caso fu notato da L. CREMONA.

Noi accenneremo solamente al caso, in cui — il punto O rimanendo fuori del piano della K_2 — la conica K_2 degeneri in una

retta r contata due volte. Anche la K_2' degenera allora in una retta r' contata due volte. Le quadriche F si riducono a coni sottoposti alla condizione di toccare lungo la r un piano fisso e di passare per il punto O; questa condizione definisce appunto un sistema lineare omaloidico ∞^3 di coni, col vertice sopra la r.

NOTIZIA STORICA. - La trasformazione quadratica ordinaria si è presentata ai geometri per la prima volta nel caso della *inversione rispetto ad una sfera*. Qui i due spazi S ed S' coincidono e tutte le sfere omologhe ai piani di S e di S', passano per un punto fisso (che è il centro della inversione) e per un cerchio immaginario fisso, sul piano all'infinito (il cerchio *assoluto*).

La inversione o trasformazione per raggi vettori reciproci è alla base del gruppo conforme dello spazio, giacchè ogni trasformazione dello spazio che conservi gli angoli si può decomporre nel prodotto di movimenti, di similitudini e di inversioni. Ciò spiega l'importanza della detta trasformazione in ricerche di Geometria Differenziale e di Fisica Matematica.

Dal punto di vista algebrico-geometrico il caso generale della trasformazione quadratica di prima specie viene studiato da I. L. MAGNUS [1], da G. V. SCHIAPARELLI [2] e soprattutto da L. CREMONA [3], da A. CAYLEY [4] e da M. NOETHER [5].

Il caso in cui il punto O si avvicina indefinitamente alla conica K_2 fu esplicitamente rilevato da L. CREMONA.

---

[1] Cfr. I. L. MAGNUS: *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie der Raumes*; Berlino, 1837.

[2] Cfr. G. V. SCHIAPARELLI: *Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica*; « Memorie della R. Acc. Sc. di Torino », Serie II, T. 21, 1864.

[3] Cfr. L. CREMONA: *Sulle trasformazioni razionali dello spazio*; Nota 1ª e 2ª; « Rend. R. Ist. Lombardo », Serie II, Vol. IV (1871), = Opere di L. CREMONA, Tomo III, pagg. 241 e segg.

[4] Cfr. A. CAYLEY: *On the rational transformation between two spaces*; « Proceedings of the London Math. Society », T. 3, 1870.

[5] Cfr. M. NOETHER: *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen*; « Math. Ann. », Bd. II, 1870 e *Über die eindeutigen Raumtransformationen*; « Mat Ann. », Bd. III, 1871.

8. La trasformazione quadratica di seconda specie.

Designamo col nome di *trasformazione quadratica di seconda specie* la trasformazione che si ottiene riferendo proiettivamente il sistema dei piani di uno spazio S' ad un sistema omaloidico di quadriche irriducibili, F, che passano per una retta (fondamentale) d e per tre punti generici P_1, P_2, P_3.

Due quadriche di $|F|$ si intersecano (oltre che nella retta fondamentale d) in una cubica gobba, la quale passa per P_1, P_2, P_3 ed ha la retta d come corda (cfr. cap. I, n. 2); inversamente una cubica gobba che abbia la d come corda e passi per P_1, P_2, P_3 appartiene ad ∞^1 quadriche del sistema $|F|$ e si trasforma in una retta.

La trasformazione quadratica di seconda specie è quindi una trasformazione (2, 3). La sua inversa sarà pertanto una trasformazione (3, 2). Ne segue che il sistema dei piani di S si trasforma in un sistema omaloidico di superficie cubiche $|F'|$; e due superficie cubiche di $|F'|$ si intersecano (a prescindere da parti fisse) in una conica.

Si può vedere più precisamente che *le superficie F' sono rigate cubiche, passanti doppiamente per una retta d' e semplicemente per tre rette a'_1, a'_2, a'_3, sghembe tra loro ed appoggiantisi alla d'.*

Si consideri a questo scopo, nel piano $P_1P_2P_3$, il fascio di coniche determinato dai punti base P_1, P_2, P_3, O, essendo O il punto comune al detto piano ed alla retta d. Una conica L_2 del fascio $P_1P_2P_3O$ offre *una* condizione alle quadriche del sistema omaloidico $|F|$ che devono contenerla e si trasforma per ciò in *un* punto dello spazio S': questo punto risulta *doppio* per tutte le superficie cubiche F', perchè la conica L_2 è incontrata in *due* punti da un piano generico di S, che si trasforma appunto in una F'. Le superficie cubiche F' possiedono dunque una linea doppia, cioè una retta doppia d': esse risultano di conseguenza rigate, giacchè un piano qualunque per la retta doppia d' sega una F' in una retta residua. Le tre generatrici a'_1, a'_2, a'_3, comuni a tutte le F', provengono invece dai piani P_1d, P_2d, P_3d: infatti

ogni retta del fascio $P_1 d$ offre una condizione alle quadriche F, che devono contenerla ed è intersecata in *un* punto dai piani di S, sicchè si trasforma in un punto semplice per le superficie F'; al fascio $P_1 d$ corrisponde una retta a'_1, perchè ogni quadrica F contiene una sola retta di tale fascio; il punto comune ad a'_1 ed a d' corrisponde infine al raggio $P_1 O$.

A riprova dei ragionamenti fatti osserviamo che due rigate cubiche, che hanno a comune la direttrice doppia e tre generatrici si segano effettivamente in una conica, come abbiamo trovato dianzi: la nominata conica risulta incidente alla direttrice doppia d'.

Siamo ora in grado di completare l'esame delle *eccezioni nella trasformazione quadratica di seconda specie.*

Osserviamo all'uopo che ai piani per la retta d (secanti in un punto variabile le cubiche gobbe intersezioni di due F) corrispondono dei piani, i quali passano per la d': infatti questi piani devono segare in un punto variabile le coniche intersezioni di due F' e le nominate coniche si appoggiano alla d'. Vi è dunque proiettività fra il fascio di piani per d ed il fascio di piani per d'; tra due piani omologhi vi è anzi omografia, poichè alle rette del primo — sezioni delle F — corrispondono le rette del secondo segate dai piani omologhi.

Si voglia ora studiare come si trasforma l'intorno della retta fondamentale d. La retta omologa della d, considerata in un piano per d, varierà con questo descrivendo una superficie rigata Φ' a cui appartengono a'_1, a'_2, a'_3. La rigata Φ' è una quadrica: infatti le cubiche gobbe intersezioni di due F si appoggiano a d in due punti e quindi le rette di S' incontrano la Φ' in due punti.

Si può dunque dire che la Φ' è la quadrica determinata dalle tre rette sghembe a'_1, a'_2, a'_3. Il sistema delle generatrici della Φ', che si appoggiano ad a'_1, a'_2, a'_3, corrisponde ai punti di d: invero ad un punto P di d, e al suo intorno sopra un piano per d risponde un punto, variabile con questo piano, che descrive una retta p' di Φ' appoggiantesi ad a'_1, a'_2, a'_3.

Quanto ai punti fondamentali P_1, P_2, P_3, essi si trasformano nei piani fondamentali $a'_1 d'$, $a'_2 d'$, $a'_3 d'$.

Riassumendo, possiamo dunque dire: nella trasformazione quadratica di seconda specie, nella quale alle quadriche per una retta d e tre punti P_1, P_2, P_3 di S corrispondono i piani di S' ed ai piani di S corrispondono le rigate cubiche che passano doppiamente per una retta d' e semplicemente per tre rette a'_1, a'_2, a'_3 (sghembe tra loro ed appoggiantisi alla d'), i punti della retta d rispondono alle rette, sghembe con la d', che sono generatrici della quadrica determinata da a'_1, a'_2, a'_3, mentre gli intorni dei punti P_1, P_2, P_3 si trasformano nei piani a'_1d', a'_2d', a'_3d'; nello spazio S' gli elementi fondamentali sono la retta doppia d' e le rette a'_1, a'_2, a'_3; ed i punti della d' rispondono alle coniche passanti per i punti P_1, P_2, P_3, O, designando con O il punto comune al piano $P_1P_2P_3$ ed alla d, mentre i punti di a'_1, a'_2, a'_3 rispondono rispettivamente a rette per P_1, P_2, P_3 giacenti nei piani P_1d, P_2d, P_3d.

Occorrerebbe ora esaminare come si modifichino questi risultati quando i punti P_1, P_2, P_3 si avvicinino tra di loro o alla retta d, in modo che il sistema lineare delle quadriche passanti per d e per P_1, P_2, P_3 continui ad essere un sistema omaloidico. Ma non ci indugeremo su questa discussione, che potrà essere un utile esercizio per il lettore.

La trasformazione quadratica di seconda specie costituisce, in ordine storico, il primo esempio di trasformazione birazionale dello spazio, il cui ordine è diverso dall'ordine della trasformazione inversa. Essa fu ampiamente studiata da A. CAYLEY, L. CREMONA ed M. NOETHER nelle stesse memorie già citate nella notizia storica sulla trasformazione quadratica di prima specie.

9. La trasformazione quadratica di terza specie.

Ci rimane ora da discutere l'ultimo tipo di trasformazione quadratica (univocamente invertibile), che si ottiene facendo corrispondere proiettivamente al sistema dei piani di S' il sistema delle quadriche, F, che passano per tre punti generici P_1, P_2, P_3 toccando in un punto O un piano fisso π. È questa la cosidetta *trasformazione quadratica di terza specie*, che fu considerata la prima volta

da L. CREMONA (1). Le quadriche F costituiscono un sistema omaloidico $|F|$ e due di esse si intersecano in un quartica gobba razionale, che passa per i punti P_1, P_2, P_3 ed ha il punto O come doppio, le due rette osculatrici risultando contenute nel piano π; inversamente per una quartica gobba L_4 di questo tipo passano ∞^1 quadriche F, sicchè la L_4 si trasforma in una retta dello spazio S'.

Risulta quindi che la trasformazione quadratica di terza specie è una trasformazione (2, 4). La sua inversa è perciò una trasformazione (4, 2) nella quale cioè il sistema omaloidico dei piani si trasforma in un sistema omaloidico di superficie del quarto ordine, F'; e due superficie di $|F'|$ si segano (a prescindere da parti fisse) in una conica.

Più precisamente, si può vedere che le superficie del quarto ordine F' sono superficie non rigate, le quali hanno a comune tre rette doppie d'_1, d'_2, d'_3, concorrenti in un punto triplo O', ed una conica K'_2, la quale si appoggia alle rette d'_1, d'_2, d'_3.

Poichè le superficie del quarto ordine non rigate dotate di tre rette doppie concorrenti in un punto (cfr. Lib. I, Cap. IV) si chiamano, dal loro scopritore, superficie di STEINER, si può anche dire che *nell'inversa della trasformazione quadratica di terza specie i piani si trasformano in superficie di* STEINER, *le quali hanno a comune le tre rette doppie ed una conica, che vi si appoggia.*

Per giustificare questa affermazione, dimostriamo anzitutto che il piano $\pi_3 \equiv P_1P_2O$ si trasforma in una retta doppia d'_3, comune a tutte le F'. A questo scopo consideriamo nel piano π_3 il fascio delle coniche L_2, le quali passano per P_1, P_2, O, avendo come tangente in O la retta d'intersezione dei piani π e π_3. Una conica L_2 offre *una* condizione alle quadriche del sistema $|F|$, che devono contenerla ed è intersecata in *due* punti da un piano generico: essa si trasforma dunque in *un punto*, il quale risulta *doppio* per le superficie F', che sono le trasformate dei piani di S;

(1) Cfr. L. CREMONA: *Sulla trasformazione razionale di 2° grado nello spazio, la cui inversa è di 4° grado*; « Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna », Serie III, Tomo I, 1871 = Opere di L. CREMONA, Tomo III, pag. 276.

e poichè una quadrica F contiene una sola conica L_2; tutti i punti doppi delle superficie F', che provengono dalle coniche L_2, stanno su di una retta d'_3. Analogo ragionamento vale per i piani $\pi_2 \equiv P_1P_3O$ e $\pi_1 \equiv P_2P_3O$, che si trasformano nelle rette doppie d'_2 e d'_1; e poichè i piani π_1, π_2, π_3 si intersecano nel punto O, le tre rette d'_1, d'_2, d'_3 concorrono in un punto O', il cui intorno è l'immagine di O.

La conica K'_2, comune a tutte le superficie F', proviene invece dal piano π. Le rette del piano π, passanti per O, offrono alle quadriche F, che devono contenerle, una condizione e sono segate dai piani in un punto: esse si trasformano pertanto in punti di una curva irriducibile, la quale è una conica K'_2, perchè ogni quadrica F contiene due delle nominate rette; i punti comuni alla K'_2 ed alle rette d'_1, d'_2, d'_3 provengono dalle rette intersezioni del piano π con i piani π_1, π_2, π_3.

Il punto O' risulta triplo per le F', giacchè il cono osculatore è per esso del terzo ordine, risultando composto con i piani $d'_1d'_2$, $d'_1d'_3$, $d'_2d'_3$. Il dubbio che il punto O' sia quadruplo, le F' riducendosi così a coni, si rimuove osservando che su questi coni non può esistere una conica irriducibile, quale è la K'_2. Non possono poi le F' essere rigate senza essere coni. Ne segue che le F' sono effettivamente superficie di STEINER.

Esaminiamo ora le *eccezioni* che s'incontrano *nella corrispondenza quadratica*. Nello spazio S gli elementi eccezionali sono il punto O con il suo intorno sopra il piano π ed i punti P_1, P_2, P_3.

È chiaro anzitutto che gli intorni dei punti P_1, P_2, P_3 si trasformano nei piani fondamentali $d'_2d'_3$, $d'_1d'_3$, $d'_1d'_2$: infatti un piano per P_1 è incontrato dalle quartiche gobbe che si trasformano in rette (e che passano quindi per P_1) in tre punti variabili e si trasforma dunque in una superficie cubica, a cui si aggiunge un piano fondamentale fisso, trasformato dell'intorno di P_1; la superficie cubica ha come retta doppia la d'_1 e quindi il piano fisso è il piano $d'_2d'_3$.

Consideriamo ora l'intorno di O. Sappiamo che ad esso corrisponde l'intorno di O'. Più precisamente, ci proponiamo di dimostrare che tra la stella di centro O e la stella di centro O' vi è

una trasformazione quadratica, nella quale ai piani per O corrispondono i coni quadrici passanti per d'_1, d'_2, d'_3. Osserviamo a questo scopo che le rette per O (unisecanti le quadriche F) si trasformano in curve unisecanti i piani di S', cioè in rette, che — per la corrispondenza tra O ed O' — debbono passare per O'. Ad un piano per O corrisponde perciò un cono col vertice in O'; e poichè un piano per O è segato in due punti dalle quartiche gobbe, che si trasformano in rette, si tratta di un cono quadrico. Ma i piani per O segano in una retta il piano $\pi_1 \equiv P_2P_3O$, che si trasforma nella retta d_1; i coni quadrici, trasformati di questi piani, contengono dunque la retta d'_1 e analogamente la d'_2 e la d'_3.

Tra una retta per O e la sua corrispondente per O' vi è una proiettività, in generale non degenere, nella quale al punto O corrisponde il punto O'. La nominata proiettività diventa degenere per le rette passanti per O e contenute nel piano π, le quali si trasformano nelle generatrici del cono, che da O' proietta la K'_2. Siano infatti p e p' due rette corrispondenti di questo tipo; si ha allora che i punti della p diversi da O si trasformano nel punto fisso comune alla p' ed alla K'_2, mentre il punto O (o se si vuole il punto infinitamente vicino ad O nella direzione della retta p) si trasforma nella retta p' (da cui si escluda il punto $p'K'_2$).

Lasciamo al lettore di determinare i casi particolari della nostra trasformazione in cui, alcuni o tutti, i punti P_1, P_2, P_3 si avvicinano indefinitamente fra loro o al punto O, senza cessare di costituire il gruppo base d'un sistema omaloidico ∞^3 di quadriche. Si notino pure i casi d'eccezione in cui il passaggio delle quadriche F per P_1, P_2, P_3 e il loro contatto in O portano di conseguenza che esse non abbiano intersezioni variabili, cessando perciò di formare un sistema omaloidico: ad es. P_1, P_2 allineati con O, ovvero P_2, P_3 infinitamente vicini a P_1 in direzioni distinte ecc.

Capitolo II

LE SUPERFICIE CUBICHE NON RIGATE

10. La superficie cubica con punto doppio.

Passiamo dallo studio delle quadriche, che — come abbiamo veduto — sono tutte razionali, allo studio delle superficie cubiche F_3 dello spazio ordinario S_3. Osserviamo che tra queste superficie è certamente razionale quella dotata di punto doppio (e non triplo) O, giacchè se ne ottiene semplicemente la rappresentazione su di un piano π mediante la proiezione da O.

Prima di cercare su π, il sistema lineare costituito dalle immagini delle sezioni piane di F_3, incominciano a riconoscere se esistano su π e su F_3 degli elementi eccezionali.

Chiamato P un punto generico di F_3, il raggio OP non ha ulteriori intersezioni con F_3 e interseca il piano π nel punto P', corrispondente di P. Viceversa un punto generico P' di π congiunto con O dà origine a un raggio OP', che interseca la F_3 (fuori di O) in un unico punto P. Si avrà un'eccezione soltanto se la retta OP' intersechi la F_3 in più di tre punti e quindi appartenga completamente a F_3. *Gli elementi eccezionali sul piano sono pertanto le traccie delle rette della F_3 passanti per O.* È facile ora dimostrare che per O passano 6 rette di F_3. Se infatti poniamo O nell'origine, l'equazione della F_3 è del tipo:

$$u_2 + u_3 = 0$$

indicando con u_2 e u_3 polinomi omogenei di grado due e tre rispettivamente nelle variabili x, y, z. Allora $u_2 = 0$ è l'equazione del *cono osculatore* a F_3 in O. Le generatrici di questo cono hanno tutte contatto tripunto con la F_3, meno le generatrici comuni a $u_2 = 0$ ed al cono cubico $u_3 = 0$, le quali, avendo contatto qua-

dripunto, appartengono totalmente a F_3. I coni $u_2 = 0$ e $u_3 = 0$ hanno sei generatrici $a_1, a_2, ..., a_6$ in comune e quindi per O passano sei rette di F_3. Nel piano π abbiamo perciò *sei punti fondamentali* $A_1, A_2, ..., A_6$, *che rappresentano* non punti, ma *rette di* F_3. Col linguaggio infinitesimale si può dire che ai punti dell'intorno di primo ordine di A_i $(i = 1, 2, ..., 6)$ corrispondono i punti della retta a_i; questa corrispondenza si ottiene infatti associando ad ogni direzione t, uscente da A_i, il punto T di a_i, nel quale il piano di O e t risulta tangente ad F_3. Il punto T è univocamente determinato, giacchè i piani per una retta a_i di F_3 segano la F_3 ulteriormente secondo una conica, la quale però deve sempre passare per O, che è punto doppio, sicchè ognuno di questi piani risulta tangente ad F_3 in un ben determinato punto T di a_i.

Passiamo alle eccezioni sulla F_3. Ogni punto P di F_3 può essere congiunto con un raggio ad O, tranne nel caso che P coincida con O, caso in cui OP risuta indeterminata. *L'unico punto eccezionale su* F_3 *è perciò il centro* O *di proiezione.* Questo punto avrà come corrispondente su π, non un punto, ma una curva, cioè la *conica* C_2 intersezione del piano π con il cono osculatore $u_2 = 0$. La corrispondenza biunivoca fra le generatrici del cono $u_2 = 0$ ed i punti di C_2, che si genera mediante la proiezione da O, si può interpretare come una corrispondenza fra i punti dell'intorno di O ed i punti della conica C_2, sicchè appare legittimo il dire che al punto O, ovvero alla curva infinitesima che ne costituisce l'intorno, corrisponde la conica C_2.

Riassumendo: *Per la superficie cubica* F_3 *dotata di un punto doppio* O, *la rappresentazione piana ottenuta proiettando dal punto* O *su di un piano* π *possiede come elementi fondamentali su questo sei punti* $A_1, A_2, ..., A_6$ *giacenti su di una conica* C_2. *L'intorno (di primo ordine) di un punto* A_i *corrisponde ad una retta* a_i *di* F_3 *passante per* O, *mentre la conica* C_2 *è in corrispondenza biunivoca con l'intorno di* O.

Facile è ora trovare il sistema lineare rappresentativo delle sezioni piane di F_3. Un piano generico sega la F_3 secondo una cubica, che incontra in un punto ciascuna retta a_i. Proiettando da O, si otterrà quindi, come immagine, una cubica passante sem-

plicemente per $A_1, A_2, ..., A_6$. E le cubiche di π per $A_1, A_2, ..., A_6$ sono precisamente ∞^3. Dunque: *Le immagini delle sezioni piane di F_3 sono le cubiche di π per i punti base $A_1, A_2, ..., A_6$, cubiche che formano un sistema lineare ∞^3.* Denoteremo questo sistema lineare con $|C_3|$. Le ∞^2 sezioni piane per il punto doppio hanno come immagini le rette di π (cui si aggiunge la conica fondamentale C_2).

Reciprocamente, se sul piano π si considera un qualunque sistema lineare $|C_3|$ di ∞^3 cubiche per sei punti base $A_1, A_2, ..., A_6$ giacenti su di una conica C_2, questo sistema si può sempre interpretare come rappresentativo delle sezioni piane di una superficie cubica, dotata di un punto doppio. Se infatti il sistema $|C_3|$ è rappresentato da:

$$\lambda_1\varphi_1(x_1x_2x_3) + \lambda_2\varphi_2(x_1x_2x_3) + \lambda_3\varphi_3(x_1x_2x_3) + \lambda_4\varphi_4(x_1x_2x_3) = 0$$

dove $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$, sono quattro cubiche per $A_1, A_2, ..., A_6$ linearmente indipendenti, costruiamo la superficie F ponendo:

$$X_i = \varphi_i(x_1x_2x_3) \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

La superficie F rappresentata da queste equazioni è razionale e le sezioni piane sono rappresentate dalle curve di $|C_3|$. Di più la superficie è del terzo ordine (F_3), perchè due sezioni piane generiche si incontrano in tre punti (corrispondenti alle 3 intersezioni delle due cubiche immagini, fuori di $A_1, A_2, ... A_6$). È poi chiaro che la F_3 riuscirà dotata di punto doppio, perchè in $|C_3|$ è contenuta una rete di cubiche degeneri nella conica fondamentale C_2 e nelle rette del piano, due qualunque delle quali si incontrano in un punto variabile; sicchè alla C_2 dovrà corrispondere un punto tale che le rette per esso abbiano soltanto una ulteriore intersezione con la superficie.

Possiamo pertanto enunciare: *Ogni sistema lineare ∞^3 di cubiche per sei punti $A_1, A_2, ..., A_6$ appartenenti ad una conica C_2 rappresenta una superficie cubica con punto doppio; e viceversa.*

Ottenuto questo risultato, sorge spontanea la questione di determinare che tipo di superficie si ottenga quando *si lasci cadere la condizione che i sei punti base del sistema $|C_3|$ siano sopra*

una conica. Preso cioè il sistema lineare:

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 + \lambda_4\varphi_4 = 0$$

dove $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$ rappresentano quattro cubiche linearmente indipendenti per sei punti *in posizione generica,* e posto:

$$X_i = \varphi_i(x_1x_2x_3), \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

si tratta di sapere quale superficie F dello spazio S_3 venga descritta quando il punto di coordinate x_1, x_2, x_3 percorre tutto il piano π. Anzitutto F è ancora di terzo ordine (F_3): infatti due generiche sezioni piane si incontrano, come prima, in tre punti fuori dei punti base e quindi una retta generica dello spazio S_3 incontra la F in tre punti.

Ciò premesso, dimostriamo che, nella nostra ipotesi, la F_3 *è priva di punti doppi* ed anzi *è la superficie generale di terzo ordine.*

A tal uopo notiamo che l'esistenza di un punto doppio di F_3 porta qualche legame fra i punti base del sistema rappresentativo, che abbiamo supposti in posizione generica. Se invero F_3 possiede un punto doppio, il sistema lineare $|C_3|$ delle immagini delle sezioni piane dovrà contenere una rete di cubiche razionali $|C'_3|$ (corrispondenti alle sezioni piane della stella, che ha il centro nel punto doppio), tale che due curve generiche di essa s'incontrano in *un* punto, fuori degli elementi base. Poichè $|C_3|$ è costituito tutto da cubiche, $|C'_3|$ può essere formata soltanto:

a) dalla rete delle rette completata con una conica fissa,

b) o da ∞^2 coniche completate da una retta,

c) o da ∞^2 cubiche di genere zero e perciò dotate di un punto doppio (fisso) (1).

Il caso *a*) porta che i punti base A_1, A_2, ..., A_6 stiano sulla conica fissa, ipotesi che riconduce al caso trattato precedentemente.

---

(1) Il punto doppio risulta fisso per il teorema di BERTINI sui punti doppi delle curve d'un sistema lineare. Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria....*, Vol. I, Lib. II, Cap. I, pag. 180.

Nella eventualità *b*), poichè due curve generiche di $|C'_3|$ devono incontrarsi in un punto fuori dei punti base, le coniche di $|C'_3|$ passeranno per tre dei punti A_i e di conseguenza gli altri tre apparterranno a una retta fondamentale, immagine del punto doppio.

Finalmente, venendo al caso *c*), osserviamo che il punto doppio O delle cubiche deve certamente essere uno dei punti A_i, per es. A_1, giacchè *non* esistono ∞^2 cubiche passanti per sei punti distinti $A_1, A_2, \ldots, A_6$ ed aventi altrove un punto doppio, che assorbirebbe quattro intersezioni di due tali curve. Ora, combinando linearmente la rete delle cubiche con A_1 doppio con un'altra cubica del sistema $|C_3|$ esterno ad essa, risulta che le ∞^3 cubiche di $|C_3|$ posseggono la medesima tangente in A_1, sicchè fra i punti base del sistema ve ne sarà uno, ad es. A_2, infinitamente vicino ad A_1. Appare quindi che la F_3 possiede un punto doppio O, che ha come corrispondente sul piano il punto A_1, nel senso che ai punti infinitamente vicini ad O corrispondono in relazione proiettiva i punti infinitamente vicini ad A_1 (1).

Dall'analisi precedente risulta intanto che *la superficie cubica F_3, rappresentata sul piano dal sistema ∞^3 delle cubiche con sei punti base generici, è priva di punti doppi.*

Ci rimane da dimostrare che la F_3 da noi costruita è la superficie *generale* del terzo ordine. Ci accontenteremo qui di un computo di costanti, riservandoci nei prossimi numeri di costruire direttamente a partire da una F_3 data la sua rappresentazione piana. Si osservi al nostro scopo che ogni sistema $|C_3|$ è atto a rappresentare ∞^{15} superficie cubiche proiettivamente identiche: infatti, dato il sistema $|C_3|$, la superficie F_3, di cui abbiamo indicato la rap-

(1) La corrispondenza fra la conica infinitesima, che costituisce l'intorno del punto O sopra la F_3 e l'intorno del punto A_1 del piano si stabilisce come segue. Preso un punto B infinitamente vicino ad O, c'è un fascio di sezioni piane di F_3 per O che hanno la medesima tangente OB; a queste corrispondono nel piano le cubiche di un fascio, che passano per A_2, A_3, A_5, A_6 ed hanno in A_1 un punto doppio con una determinata retta osculatrice t (l'altra retta osculatrice restando variabile); il punto infinitamente vicino ad A_1 sopra t è l'omologo di B.

presentazione parametrica, risulta definita ponendo una proiettività arbitraria fra le cubiche di $|C_3|$ ed i piani dello spazio. Ma una superficie F_3, rappresentata da un certo $|C_3|$, è anche rappresentata da tutti i $|C_3|$ che si ottengono dal dato con trasformazioni birazionali; poichè i sistemi lineari, birazionalmente distinti, di ∞^3 cubiche per sei punti base A_1, A_2, ..., A_6 dipendono — come giustifichiamo subito — da quattro moduli, ne segue che la totalità delle superficie cubiche rappresentate sul piano dai sistemi lineari $|C_3|$ dipende da 19 parametri, appunto come la superficie cubica generale.

L'affermazione che i sistemi lineari $|C_3|$ birazionalmente distinti siano ∞^4 si giustifica osservando che uno qualunque di questi sistemi $|C_3|$ è determinato quando siano fissati i punti A_1, A_2, ..., A_6 e viene trasformato in un sistema dello stesso tipo dalle ∞^8 omografie del piano e da i prodotti di queste per un numero *finito* di trasformazioni cremoniane.

Noi abbiamo così ottenuto questo risultato: *La superficie cubica generale dello spazio S_3 è razionale e si può rappresentare sul piano mediante un sistema lineare ∞^3 di cubiche con sei punti base.*

Resta a vedere in qual modo questa rappresentazione si potrà ottenere a partire da una superficie cubica data.

Frattanto osserviamo che dalla rappresentazione piana risulta immediatamente la proprietà che *sulla superficie cubica generale F_3 esistono* 27 *rette.*

Invero le rette della F_3, appartenendo ad ∞^1 sezioni piane, possono essere rappresentate solamente da curve d'ordine minore o uguale a tre, che risultino unisecanti le cubiche per A_1, A_2, ..., A_6. Un facile esame mostra allora che le immagini delle rette della F_3 sono:

a) le 6 curve infinitesime costituenti gli intorni del primo ordine dei punti $A_i (i = 1, 2, ..., 6)$;

b) le $\binom{6}{2} = 15$ rette c_{ik}, passanti per i punti A_i ed A_k $(i, k = 1, 2, ..., 6)$;

c) le 6 coniche b_i $(i = 1, 2, ..., 6)$, passanti per i cinque punti base, che si ottengono escludendo A_i.

NOTA. - Dall'analisi da noi svolta per concludere che un sistema lineare di ∞^3 cubiche per 6 punti base A_1, A_2, ..., A_6 rappresenta una superficie cubica generale, conviene trarre la seguente proposizione: *dato in un piano un sistema lineare di ∞^3 cubiche per sei punti base, esso rappresenta sempre una superficie cubica priva di punti doppi, a meno che non si presenti qualcuna delle tre circostanze seguenti:*

a) *i sei punti base sono su di una conica,*

b) *tre dei punti base sono su di una retta,*

c) *due punti base sono infinitamente vicini.*

Giova notare che questi tre casi si riducono l'uno all'altro mediante trasformazioni quadratiche, che abbiano come fondamentali tre punti base scelti fra i punti A_1, A_2, ..., A_6. Se infatti i sei punti A_1, A_2, ..., A_6 stanno sopra una conica e si prende la trasformazione quadratica con i punti fondamentali A_1, A_2, A_3, i trasformati dei punti A_4, A_5, A_6 stanno su di una retta; e se A_4, A_5, A_6 stanno su di una retta, una trasformazione che abbia due punti fondamentali in A_4 ed A_5 ed il terzo in un punto A_t diverso da A_6 muta la retta A_4A_5 in un punto base, nell'intorno del quale si trova il trasformato di A_6.

11. Rappresentazione piana della superficie cubica generale in base alla sua generazione proiettiva di Grassmann-Steiner.

Storicamente la rappresentazione della superficie cubica generale su di un piano è stata scoperta in base alla generazione proiettiva di essa, come luogo dei punti comuni a tre piani corrispondenti di tre stelle omografiche (1).

---

(1) Il metodo induttivo adoperato nel precedente paragrafo per risalire dal sistema delle immagini piane alla superficie rappresentata, appartiene ad una riflessione posteriore, che è contenuta nella veduta della geometria sopra una superficie secondo M. NOETHER (1872) e che esplicitamente viene messa in rilievo da E. CAPORALI (Cfr. E. CAPORALI: *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane*, Coll. Math. in Mem. D. CHELINI, Milano, 1881).

Siano O, O', O'' i centri di tre stelle omografiche: il luogo dei punti comuni a tre piani corrispondenti è una superficie F del terzo ordine (F_3); e una generica superficie del terzo ordine può essere così generata. Valutiamo anzitutto l'ordine della superficie F, trovando il numero delle intersezioni della F con una retta generica r dello spazio. Sia P un punto qualunque di r. Al fascio di piani, che ha la retta OP come asse, corrisponde un fascio di piani per O' ed un fascio di piani per O''; questi due fasci risultano proiettivi e le rette, intersezioni di piani corrispondenti, generano per conseguenza una quadrica F_2. Al punto P facciamo corrispondere i *due* punti P' e P'', intersezioni della retta r con la quadrica F_2. Reciprocamente, un punto della r, considerato come un punto P', proviene solamente da *un* punto P della r: infatti per il punto P' passa una (ed in generale una sola) coppia di piani π' e π'', corrispondentisi nella omografia fra la stella di centro O' e la stella di centro O''; se P è il punto d'intersezione del piano π, corrispondente a π' nella omografia fra le stelle di centro O ed O', con la retta r, il punto P' proviene solamente dal punto P così costruito.

Sulla retta r vi è una corrispondenza [1, 2] ed i punti comuni alla r ed alla superficie F sono i punti uniti di tale corrispondenza: una corrispondenza [1, 2] su di una retta possiede tre punti uniti (1) e ne segue che la superficie F è del terzo ordine (F_3).

Il fatto che la generazione con tre stelle proiettive di piani conduca alla superficie cubica *generale* risulta da ciò: che la sopradetta generazione porta a scrivere l'equazione della superficie cubica nella forma:

$$\begin{vmatrix} a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \\ c_x & c'_x & c''_x \end{vmatrix} = 0$$

dove i termini del determinante sono forme lineari nelle coordinate omogenee x_1, x_2, x_3, x_4; e in questa forma rientra in parti-

(1) Cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...* Vol. I, Lib. II, Cap. I, pag. 157.

colare *l'equazione canonica di* CAYLEY-SALMON:

$$y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3 = \begin{vmatrix} 0 & y_1 & z_1 \\ z_2 & 0 & y_2 \\ y_3 & z_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

alla quale si può ricondurre la più generale superficie del terzo ordine. Quest'ultima affermazione si giustifica nel modo più rapido con un computo di costanti. Infatti la forma canonica di CAYLEY-SALMON dice che una superficie cubica generale appartiene ad un fascio contenente due terne di piani: e combinando linearmente due terne di piani (dipendenti ciascuna da nove parametri) si ottengono appunto ∞^{19} superficie cubiche. Questo computo di costanti — per essere rigoroso — esige però che una superficie cubica generale non possa considerarsi in *infiniti* modi una combinazione lineare di due terne di piani: ma ciò è evidente, giacchè, nella ipotesi contraria, la superficie cubica generale sarebbe rigata.

La generazione della più generale F_3 mediante tre stelle omografiche offre un semplice mezzo — indicato dal CLEBSCH ed approfondito e chiarito geometricamente dal CREMONA — di dimostrare la razionalità di questa superficie. Si facciano corrispondere omograficamente ai piani della stella di centro O i punti di un piano π. Ad ogni punto P' di π è allora associato un piano per O, e quindi anche un piano per O' e uno per O''; questi tre piani s'incontrano in un punto P della F_3, corrispondente di P'; viceversa, preso un punto P di F_3, in esso si incontrano tre piani corrispondenti, uno dei quali appartiene alla stella di centro O: a questo piano è associato un punto P' di π, che sarà il corrispondente di P. Così si stabilisce una corrispondenza generalmente biunivoca fra i punti della F_3 ed i punti di π, che dimostra come la F_3 generale sia razionale; lo stesso ragionamento prova anche la razionalità di ogni F_3 *particolare, la quale sia generabile mediante tre stelle omografiche.*

Ricerchiamo quali curve di F_3 abbiano come immagini le rette di π. Se il punto P' percorre una *retta* generica di π, il punto P percorre una curva di F_3, che è il luogo dei punti comuni ai piani

corrispondenti di tre fasci proiettivi: questa curva è perciò una *cubica gobba* di F_3, della quale gli assi dei tre fasci proiettivi sono corde (1).

Pertanto sulla F_3 esiste una rete $|L|$ di cubiche gobbe e la omografia tra le stelle di centro O, O', O'' si ottiene facendo corrispondere le rette per O, O', O'', che sono corde di una medesima cubica gobba di $|L|$.

Quanto alle immagini C delle sezioni piane, esse devono intersecarsi a due a due in tre punti variabili; inoltre, poichè le rette sono immagini di cubiche gobbe, le curve C debbono incontrare le rette in tre punti: ne segue che le immagini delle sezioni piane della F_3 generale costituiscono un sistema lineare ∞^3 di cubiche C_3 passanti per 6 punti semplici A_1, A_2, ..., A_6, in accordo con quanto si è concluso precedentemente in base al computo di costanti.

Abbiamo veduto che *su di una superficie cubica F_3, generabile mediante tre stelle omografiche di centri O, O', O'', esiste una rete $|L|$ di cubiche gobbe, tale che ogni terna di rette corrispondenti per O, O', O'' è costituita da corde di una medesima cubica gobba di $|L|$.*

Inversamente il CREMONA dimostra che: *se è data su di una F_3 una rete $|L|$ di cubiche gobbe e da tre punti O, O', O'' dati ad arbitrio sulla F_3 si mandano le corde relative a ciascuna cubica gobba di $|L|$, le tre stelle di centri O, O', O'' risultano riferite omograficamente e la F_3 viene generata come luogo delle intersezioni di tre piani omologhi.*

Osserviamo anzitutto che la corrispondenza stabilita fra una qualsiasi delle stelle e la rete delle cubiche gobbe è biunivoca: infatti, fissata una cubica gobba L, vi è una sola corda di L passante ad es. per O ed una retta per O sega ulteriormente la F_3 in due punti, per i quali passa *una* cubica gobba di $|L|$.

Dimostriamo ora che la corrispondenza fra le stelle e la rete $|L|$ è proiettiva. Occorre a questo scopo che alle rette per O, giacenti

---

(1) Cfr. ad es. F. ENRIQUES: *Lezioni di Geometria Proiettiva*, pag. 340, Bologna, 1925.

in un piano π, corrispondano delle cubiche di $|L|$, costituenti un fascio lineare, cioè passanti per un medesimo punto. Osserviamo perciò che la g_2^1 segata sulla cubica K_3, intersezione del piano π con la F_3 dalle rette di π per O è parzialmente contenuta nella g_3^2 segata sulla K_3 dalle cubiche gobbe della rete $|L|$: esiste perciò sulla K_3 un punto fisso T, che è il residuo della nominata g_2^1 rispetto alla g_3^2 segata dalle cubiche gobbe della rete $|L|$. Per il punto T passano le ∞^1 cubiche gobbe di un fascio, corrispondenti alle rette di π appartenenti al fascio di centro O. Vi è dunque proiettività fra le stelle di centro O, O', O'' e la rete $|L|$ e di conseguenza le tre stelle di centro O, O', O'' risultano riferite omograficamente. È poi chiaro che tre piani omologhi π, π', π'' rispettivamente per O, O', O'' si incontrano in un punto della superficie F_3 e cioè nel punto T dianzi costruito, che riesce base per il fascio di cubiche corrispondenti ai tre piani.

Ricapitolando, possiamo dire: *condizione necessaria e sufficiente perchè una superficie cubica F_3 sia generabile mediante tre stelle omografiche è che sulla F_3 esista una rete di cubiche gobbe.*

Se una superficie cubica F_3 è definita come luogo dei punti comuni ai piani corrispondenti di tre stelle omografiche, sappiamo che la rappresentazione piana di questa superficie si può ottenere ponendo una omografia fra i punti di un piano ed i piani di una delle tre stelle generatrici. Ma quando si voglia rappresentare con questo metodo una F_3 data a priori, della quale si sappia che può essere generata mediante tre stelle omografiche, non però assegnate, la definizione di una omografia fra le stelle di centro O, O', O'', che generi la F_3, esige *la conoscenza di una rete di cubiche gobbe*; e a priori non si vede come questa possa costruirsi su F_3, tanto più che si presenta in realtà un *caso* d'eccezione. (Cfr. più avanti pag. 59). Donde la convenienza di arrivare in altro modo — più diretto e semplice — alla rappresentazione piana di una F_3 razionale.

NOTA STORICA. - La possibilità di generare una superficie cubica generale con tre stelle omografiche fu dimostrata nel 1855 dal

GRASSMANN (1); questa generazione risulta per lui come caso particolarissimo di un metodo generale, che permette la generazione di curve algebriche piane e superficie algebriche d'ordine qualunque. Tuttavia GRASSMANN non insegna il modo di definire le omografie generatrici per una superficie data, limitandosi semplicemente a mostrare, in base a un computo di costanti, la possibilità della generazione.

Il CLEBSCH (2) ed il CREMONA (3) hanno veduto che dalla generazione con tre stelle proiettive discende la possibilità di rappresentare la superficie cubica generale in modo che alle cubiche gobbe generate da tre fasci proiettivi di piani entro le dette stelle rispondano le rette del piano rappresentativo.

Il CREMONA si pone per il primo il problema di assegnare in fatto la costruzione delle tre stelle generatrici per una F_3 data, dimostrando che la generazione riesce definita in corrispondenza di una delle 72 reti di cubiche gobbe che appartengono alla superficie. Una lieve lacuna nella sua dimostrazione fu rilevata dallo STURM (4) nel 1905 e colmata da C. SEGRE (5) e dallo stesso STURM (6).

12. Le 27 rette appartenenti alla superficie cubica.

Abbiamo veduto che, partendo dalla rappresentazione piana di una F_3 generale mediante cubiche per 6 punti base A_1, A_2, ...,

---

(1) Cfr. H. GRASSMANN, *Die stercometrischen Gleichungen dritten Grades und die dadurch erzeugten Oberflächen*, « Crelles Journal f. Mathematik », Bd. 49 (1855) e « Werke », Bd. II.

(2) Cfr. A. CLEBSCH, *Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung*, « Journ. f. Math. », Bd. 65 (1866).

(3) Cfr. L. CREMONA, *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre*, « Opere matematiche », Tomo III, pag. 3.

(4) Cfr. R. STURM: *Luigi Cremona*; « Archiv der Mathematik und Physik », s. 3ª, Vol. 8. (1905).

(5) Cfr. C. SEGRE: *Sur la génération projective des surfaces cubiques*; ibidem, Vol. 10. (1906).

(6) Cfr. R. STURM: *Über die Erzeugung der Fläche. 3. Ordnung durch kollineare Bündel und trilineare Büschel*; ibidem.

A_6, si riconosce l'esistenza di 27 rette appartenenti alla superficie. Ci proponiamo di stabilire direttamente l'esistenza di queste rette e di dedurne reciprocamente la rappresentazione piana della F_3 generale. Anzitutto un semplice computo di costanti permette di affermare che sulla F_3 generica esiste un numero finito di rette: le rette dello spazio sono infatti ∞^4 e quattro condizioni sono necessarie perchè una retta giaccia su di una F_3 data (1).

Un procedimento semplice che permette di determinare il numero delle rette di F_3 è la *rappresentazione di F_3 su di un piano doppio* π, mediante la proiezione da un suo punto generico O: ogni punto di F_3 si proietta in *un* punto di π, mentre un punto di π è immagine di *due* punti di F_3.

I punti di π, che sono immagini di un sol punto di F_3 (ossia di due coincidenti) costituiscono la immagine del *contorno apparente* di F_3 vista da O. Dimostriamo che tale immagine è una *quartica C_4 senza punti doppi*. Infatti le sezioni piane di F_3 per O segano la F_3 secondo cubiche, ed esistono, come è noto, *quattro* tangenti a queste cubiche, passanti per O; esse costituiscono la intersezione completa con il piano della cubica del cono circoscritto da O alla F_3, sicchè questo risulta del quarto ordine e dello stesso ordine sarà quindi la sua intersezione con π: l'immagine del contorno apparente è dunque una quartica C_4. Dimostriamo che generalmente essa è priva di punti doppi. Invero un punto doppio di C_4 potrebbe provenire:

a) da una retta bitangente alla F_3, passante per O, oppure

b) da una retta congiungente O con un punto doppio di F_3.

---

(1) Il dubbio che il numero delle rette di F_3 sia nullo si rimuove così: se le equazioni, che esprimono l'appartenenza di una retta ad una F_3 fossero incompatibili per valori generici dei coefficienti della F_3, il principio di PLÜCKER-CLEBSCH (cfr. ENRIQUES-CHISINI: *Teoria...*, Vol. I, Lib. I, Cap. III, pag. 149) ci assicura che il sistema di queste equazioni potrebbe diventar compatibile per valori particolari dei coefficienti, solamente divenendo indeterminato. Ciò significa che una superficie del terzo ordine o non possiederebbe rette o sarebbe rigata. Ma si prova subito l'esistenza di particolari F_3 non rigate, sulle quali esiste un numero finito non nullo di rette, costruendo la loro equazione. Ne segue che anche sulla F_3 generale esiste un numero finito e non nullo di rette.

La prima eventualità è da escludersi, perchè una retta bitangente alla F_3 dovrebbe appartenere completamente alla F_3. Il punto O sarebbe perciò su di una retta di F_3, contrariamente all'ipotesi che sia scelto in modo generale sulla F_3.

Il secondo caso poi non può verificarsi, se la F_3 è generale.

Dunque *la quartica C_4, contorno apparente* della superficie cubica generale, veduta da un suo punto generico, *è priva di punti doppi e possiede* per conseguenza 28 *bitangenti.*

Una di queste bitangenti è la traccia su π del piano tangente in O a F_3; infatti questo piano, contenendo le due tangenti principali nel punto O, riesce bitangente al cono circoscritto da O a F_3 e quindi ha come traccia su π una bitangente a C_4. Le altre 27 bitangenti di C_4 corrispondono invece a piani bitangenti non solo al cono circoscritto, ma anche a F_3. Ora un piano bitangente a F_3, la sega secondo una cubica con due punti doppi, che si deve perciò necessariamente spezzare in una retta ed in una conica. Quindi per ogni bitangente a C_4, esclusa quella che è la traccia del piano tangente in O alla F_3, si ha *una* retta su F_3. Viceversa se esiste una retta r su F_3, il piano determinato da r e da O è bitangente a F_3, e passando per O, è bitangente anche al cono circoscritto a F_3 da O e dà perciò origine ad una bitangente di C_4. Ne discende la proposizione fondamentale: *La superficie cubica generale (cioè priva di punto doppio) possiede 27 rette.*

Data l'importanza di questo teorema, ne offriamo un'altra dimostrazione.

Il metodo è il seguente: prese quattro sezioni piane generiche di F_3, cioè C_1, C_2, C_3, C_4, le rette di F_3 sono evidentemente tutte le rette che si appoggiano a queste quattro curve in punti distinti; queste rette infatti, avendo quattro intersezioni con F_3, giacciono intieramente su di essa. Viceversa una retta di F_3, ha una intersezione comune con ogni sezione piana e si appoggia quindi a C_1, C_2, C_3, C_4; e i quattro punti d'appoggio risultano certo distinti se le sezioni piane sono generiche. Per valutare ora il numero delle rette che si appoggiano a C_1, C_2, C_3, C_4, calcoleremo il grado della rigata Φ formata dalle rette appoggiate a C_1, C_2, C_3 e interseche-remo la Φ con C_4.

Ricordiamo perciò il seguente teorema di G. SALMON (1): La rigata definita da tre curve algebriche irriducibili C_1, C_2, C_3 degli ordini r_1, r_2, r_3, tali che esistano:

s_1 punti comuni a C_2 e C_3
s_2 » » » C_3 e C_1
s_3 » » » C_1 e C_2

è di grado $2r_1r_2r_3 - s_1r_1 - s_2r_2 - s_3r_3$.

Invero questo grado appartiene alla rigata, privata dei coni, che da un punto comune a due curve direttrici proiettano la terza direttrice. Nel caso nostro C_1, C_2 e C_3 sono del terzo ordine ed hanno a due a due tre punti a comune. Perciò il grado di Φ sarà:

$$n = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 - 3 \cdot 3 - 3 \cdot 3 - 3 \cdot 3 = 27.$$

Intersecando la Φ con C_4, che è del terzo ordine, si ottengono perciò $27 \cdot 3 = 81$ punti d'intersezione, ai quali a prima vista si farebbero corrispondere 81 rette di F_3; mentre abbiamo già dimostrato per altra via che il numero delle rette è 27.

Il fatto che si trovino più rette del previsto è indice dell'esistenza di soluzioni improprie, che devono essere scartate.

Ponendoci dal punto di vista geometrico, scorgiamo immediatamente l'origine dell'errore. Infatti è vero che ogni retta che si appoggia a C_1, C_2, C_3, C_4 è una retta di F_3, ma soltanto se i quattro punti d'intersezione sono *distinti*, perchè se ciò non fosse la retta non avrebbe quattro ma tre punti d'intersezione con F_3 e quindi non apparterrebbe ad essa. Ora si sono già scartate, valutando il grado (27) di Φ:

a) le rette che si appoggiano a C_3 e C_4 e passano per i punti comuni a C_1 e C_2;

b) le rette che si appoggiano a C_2 e C_4 e passano per i punti comuni a C_1 e C_3;

c) le rette che si appoggiano a C_1 e C_4 e passano per i punti comuni a C_2 e C_3;

ma non si è tenuto conto delle rette che si appoggiano a C_1,

(1) Cfr. per es. F. ENRIQUES: *Lezioni di Geometria descrittiva* (Bologna, 1925), pag. 313.

C_2, C_3, C_4 passando per i punti comuni alle coppie di curve C_1 e C_4, C_2 e C_4, C_3 e C_4;

queste rette si ottengono quando si contano le intersezioni di Φ con la C_4, ma non corrispondono a rette di F_3 e quindi sono da scartare.

È ora facile trovare il numero delle rette da scartare, arrivando così al risultato esatto.

La curva C_4 ha tre punti comuni con C_1. Ognuno di questi punti è vertice di due coni di terzo ordine, che proiettano rispettivamente C_2 e C_3. Questi due coni si intersecano in nove generatrici, tre delle quali vanno ai punti comuni di C_2 e C_3 e sono già state scartate fra le rette che passando per i punti comuni a C_2 e C_3 si appoggiano a C_1. Per ogni punto comune a C_4 e C_1 si devono perciò scartare 6 rette. Considerando anche le intersezioni di C_4 con C_2 e C_3, vediamo che in totale si debbono scartare:

$$3 \cdot 3 \cdot 6 = 54$$

rette, e *le rette di F_3 diventano* di conseguenza:

$$81 - 54 = 27$$ c. v. d.

13. Rappresentazione piana della superficie cubica generale mediante la proiezione sghemba.

È importante riconoscere che fra le 27 rette di una superficie cubica generale vi sono coppie di rette sghembe: infatti le 27 rette non possono essere tutte incidenti a due a due, giacchè più di tre non possono stare in un piano e tre di esse non complanari non possono passare per un punto senza che questo risulti doppio, riuscendo indeterminato il relativo piano tangente.

L'esistenza di una coppia di rette sghembe permette di costruire semplicemente una corrispondenza biunivoca fra i punti di F_3 ed i punti di un piano π, mediante la proiezione sghemba. (Clebsch, 1866).

Siano a e b due rette sghembe di F_3. Fissato un piano π qualunque ed un punto generico P di F_3, esiste una retta per P, che si appoggia ad a e b ed interseca il piano π nel punto P', im-

magine di P. Reciprocamente, preso un punto P' di π la retta per P' che si appoggia ad a e b interseca ulteriormente F_3 in un unico punto P, corrispondente a P'. *Abbiamo così ottenuto un metodo per costruire geometricamente la rappresentazione piana di F_3, appena si conosca una coppia di rette sghembe di F_3.*

Ricerchiamo prima quali sono le eccezioni nella rappresentazione sul piano π e procediamo poi a trovare le immagini delle sezioni piane. Se un punto P' di π è eccezionale, deve avvenire uno di questi due casi:

1) o la retta per P' che si appoggia ad a e b interseca ulteriormente F_3 in più di un punto e quindi appartiene intieramente a F_3;

2) oppure questa stessa retta è indeterminata, nel qual caso P' deve essere la intersezione di a o di b con π.

Le eccezioni su π si hanno dunque nei punti d'intersezione delle rette di F_3, che si appoggiano ad a e b e nei punti d'incontro di a e b col piano π. Importa perciò conoscere quante rette di F_3 si appoggiano ad una coppia di rette sghembe come a e b.

A tal fine si consideri la rigata Φ determinata da due sezioni piane C_1 e C_2 e da a e la si intersechi con b. Il grado n di Φ tenendo conto che C_1 e C_2 si intersecano in tre punti e che C_1 e C_2 hanno entrambe un punto comune con a, è dato da:

$$n = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 9.$$

La rigata Φ avrebbe perciò nove intersezioni con b; non tutte però corrispondono a rette di F_3, che si appoggiano ad a e b: infatti dal punto comune a C_1 e b, a e C_2 vengono proiettati secondo un piano e un cono cubico, che si intersecano in tre rette, una delle quali però passa per il punto comune ad a e C_2 ed è stata già tolta; solamente le altre due sono quindi da scartare; ripetendo l'analogo ragionamento per il punto comune a C_2 e b, troviamo che: *Esistono cinque rette di F_3 che si appoggiano ad a e b.* Esse sono a due a due sghembe: se infatti due di esse si incontrassero in un punto fuori di a o b, a e b sarebbero complanari; se si incontrassero in un punto di a o b, questo punto sarebbe doppio.

In base a queste sole osservazioni possiamo trovare le immagini delle sezioni piane. Valutiamo perciò il grado della rigata ψ, che ha una generica sezione piana C_1 e le due rette a e b come curve direttrici. La curva sezione della ψ con π è l'immagine di C_1. Se si applica il solito teorema, avremo per il grado di ψ, tenendo conto che a e b sono sghembe e che C_1 incontra in un punto a e b:

$$n = 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 4.$$

Le immagini delle sezioni piane di F_3 sono dunque delle quartiche di π; ora, poichè ogni sezione piana interseca in un punto ciascuna delle cinque rette di F_3, che si appoggiano ad a e b, le quartiche immagini passeranno tutte semplicemente per i punti P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 in cui queste cinque rette intersecano il piano π. Inoltre dimostriamo che esse passano doppiamente per i punti A e B comuni a π e ad a e b. Dal punto A, infatti, b e C_1 vengono proiettate secondo un piano ed un cono cubico, che hanno tre generatrici in comune; una di queste è la retta che congiunge A con il punto comune a b e C_1 ed è stata tolta nel valutare il grado della rigata ψ; le altre due fanno invece parte della ψ e questo ci dimostra che la quartica immagine di C_1 passa effettivamente due volte per il punto A. Concludendo: *le immagini delle sezioni piane di F_3, rappresentata sul piano mediante la proiezione sghemba, sono quartiche passanti semplicemente per cinque punti P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e doppiamente per due punti A e B.*

Questo sistema lineare è, come il sistema dei piani dello spazio, di dimensione 3; ed il suo grado è 3, cioè due quartiche di esso si intersecano in 3 punti (fuori dei punti base).

Ci si può ricondurre immediatamente al sistema lineare delle cubiche per sei punti base semplici, che abbiamo trovato precedentemente, mediante una trasformazione quadratica, nella quale si prendano i punti A, B, P_1, come fondamentali.

Secondo un'osservazione fatta dallo stesso CLEBSCH, si può arrivare direttamente alla rappresentazione piana della superficie F_3 mediante il sistema delle cubiche per 6 punti; a tal uopo basta prendere il piano π in modo che passi per una delle 5 rette, della F_3, incidenti ad a e b.

Indichiamo con c_{12} una delle nominate rette. La retta c_{12} fa parte della rigata ψ delle rette, che si appoggiano a C_1, a e b. Le quartiche sezioni di ψ con π si spezzano perciò nella c_{12} ed in una residua cubica, che deve passare per i punti A_1, A_2 (che ora designano i punti comuni a c_{12} e ad a e b rispettivamente) e per i punti A_3, A_4, A_5, A_6, traccie su π delle altre quattro rette a_3, a_4, a_5, a_6 di F_3, che si appoggiano ad a e b e non giacciono in π. A parte la retta c_{12} fissa, le immagini delle sezioni piane sono qui precisamente le cubiche passanti semplicemente per i punti A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6.

Abbiamo così ottenuta direttamente quella rappresentazione che più sopra avevamo preveduta come possibile per una superficie cubica generale, in base ad un computo di costanti.

14. Curve tracciate sulla superficie cubica.

Per quanto abbiamo veduto, presi sei punti A_1, A_2, ..., A_6 in posizione generica in un piano π, le cubiche per questi sei punti si possono sempre considerare come le immagini delle sezioni piane di una superficie cubica, che è rappresentata punto per punto sul piano π. Ne segue che le proprietà delle curve tracciate sulla superficie F_3 si devono riflettere in proprietà relative al sistema lineare predetto e viceversa. Ci proponiamo di fornire alcuni esempi dell'uso che può farsi in questo senso della rappresentazione piana di F_3.

Ricordiamo intanto come vengano determinate le 27 rette della superficie; le loro immagini sono:

a) le 6 curve infinitesime costituenti gli intorni del primo ordine dei punti A_i $(i = 1, 2, ..., 6)$,

b) le $\binom{6}{2} = 15$ rette c_{ik}, passanti per i punti A_i ed A_k $(i, k = 1, 2, ..., 6)$ e

c) le 6 coniche b_i $(i = 1, 2, ..., 6)$ passanti per i cinque punti base, che si ottengono escludendo A_i.

Passiamo a ricercare le coniche di F_3. Esse hanno come immagini delle curve che segano le cubiche per A_1, A_2, ..., A_6 in due punti variabili: l'ordine delle nominate curve è certamente

minore o uguale a tre, essendo ogni conica della superficie contenuta in una sezione piana.

Le coniche della superficie cubica sono perciò tutte e sole rappresentate:

a) dai 6 fasci di cubiche, che hanno A_i come doppio e gli altri punti base come semplici,

b) dai $\binom{6}{4}=\binom{6}{2}=15$ fasci di coniche aventi quattro punti base fra i punti A_1, A_2, ..., A_6,

c) dai 6 fasci di rette di centro $A_i (i=1, 2, ..., 6)$.

La superficie cubica generale possiede quindi 27 *fasci di coniche.*

Ogni fascio di curve, immagini di coniche, del tipo *a*) o *b*) o *c*) si può completare con l'immagine di una retta del tipo *a*) o *b*) o *c*) rispettivamente, in modo da dar luogo ad un fascio di cubiche per A_1, A_2, ..., A_6, immagine di un fascio di sezioni piane.

Tutto ciò risulta anche direttamente dalla superficie cubica F_3. Una conica di F_3 fa parte di un piano, che sega ulteriormente la F_3 in una retta, la quale è sostegno di un fascio di piani, su ognuno dei quali si trova una conica di F_3. Le coniche di F_3 si distribuiscono quindi in 27 fasci, ognuno dei quali è segato sulla F_3 da un fascio di piani, che ha come sostegno una delle 27 rette di F_3. Le coniche del fascio, completate con la retta sostegno, danno luogo ad un fascio di sezioni piane.

Veniamo a ricercare le *cubiche gobbe* di F_3. Esse hanno come immagini delle curve, che intersecano le cubiche per A_1, A_2, ..., A_6 in *tre* punti variabili. Poichè ogni cubica gobba dello spazio appartiene ad ∞^2 quadriche e le immagini delle curve intersezioni di una quadrica con la F_3 sono sestiche, passanti doppiamente per A^1, A_2, ..., A_6 [1], ne segue che le immagini delle cubiche gobbe avranno un ordine minore o uguale a 6.

---

[1] Questo asserto si giustifica rapidamente così: tra le quadriche dello spazio vi sono le quadriche spezzate in una coppia di piani; l'immagine dell'intersezione completa di F_3 con una quadrica spezzata in due piani è costituita da una sestica C_6 con A_1, A_2 ..., A_6 doppi, spezzata nelle due cubiche C_3, immagini delle sezioni piane, ottenute con i piani, che costituiscono la qua-

Fatta questa osservazione è facile trovare che le cubiche gobbe di F_3 sono tutte e sole rappresentate dai seguenti sistemi lineari:

1) *la* rete delle rette di π;

2) le $\binom{6}{3} = 20$ reti di coniche per tre punti base;

3) le $6 \times 5 = 30$ reti di cubiche passanti doppiamente per uno e semplicemente per quattro punti base;

4) le $\binom{6}{3} = 20$ reti di quartiche con tre punti base doppi e tre punti base semplici;

5) *la* rete delle quintiche, che passano doppiamente per i sei punti base.

Concludiamo dicendo che: *sulla superficie cubica generale esistono* 72 *reti di cubiche gobbe.*

Uno sguardo ai sistemi lineari immagini di queste reti, permette di dire che esse sono tutte *omaloidiche,* cioè due curve di ogni rete si incontrano in un solo punto variabile.

Un'altra proprietà delle reti di cubiche gobbe risulta però dalla loro rappresentazione piana. Presa ad es. una retta di π, essa rappresenta una cubica gobba C_3 di F_3, per la quale passano ∞^2 quadriche, che segano ulteriormente F_3 in cubiche gobbe formanti una rete. Ma, poichè l'intersezione completa di F_3 con una quadrica deve essere una curva, la cui immagine ha A_1, A_2, ..., A_6 come punti doppi, l'immagine della rete di cubiche gobbe segata dalle ∞^2 quadriche contenenti C_3, deve essere la rete delle quintiche che hanno A_1, A_2, ..., A_6 come doppi. Troviamo così: *le* ∞^2 *quadriche passanti per una generica cubica gobba della rete del tipo* 1) *segano su* F_3 *le cubiche gobbe della rete del tipo* 5).

Analogamente ognuna delle venti reti comprese nel tipo 2) è associata ad una ben determinata rete fra le venti del tipo 4),

---

drica. Ne segue che anche l'immagine della intersezione completa di una quadrica qualunque con la F_3 è una C_6 con i punti A_1, A_2, ..., A_6 doppi ed anzi il sistema lineare delle curve segate sulla F_3 dalle ∞^9 quadriche dello spazio ha come immagine il sistema lineare ∞^9 di sestiche passanti doppiamente per A_1, A_2, ..., A_6.

mentre una rete del tipo 3) è associata ad una rete dello stesso tipo. Ciò è sempre conseguenza del fatto che le ∞^9 sestiche per $A_1, A_2, \ldots, A_6$ doppi sono le immagini delle intersezioni di F_3 con le ∞^9 quadriche dello spazio.

Possiamo enunciare il nostro risultato anche così:

Sopra una superficie cubica generale F_3 una rete di cubiche gobbe si può sempre ritenere segata da ∞^2 quadriche, aventi una cubica gobba di F_3 a comune.

Non ci indugeremo a studiare le quartiche giacenti su di una superficie cubica generale, lasciando questo argomento come esercizio al lettore (1).

ESERCIZIO. - Determinare le trasformazioni cubiche in cui ai piani corrispondono superficie generali del 3° ordine. Il primo tipo è costituito da trasformazioni (3,3) in corrispondenza al sistema omaloidico delle F_3 passanti per una sestica di genere 3.

15. Casi particolari.

È interessante notare come si modificano i risultati del numero precedente, quando i sei punti base non sono più in posizione generica.

Nel caso generale le sei rette a_i di F_3, che nella rappresentazione piana hanno come immagine l'intorno di primo ordine dei punti A_i, sono sghembe a due a due. Ma se i sei punti A_i giacciono su di una conica, allora sappiamo che la superficie acquista un punto doppio e i sei punti A_i rappresentano *le sei rette che concorrono nel punto doppio.* In altre parole, le sei rette per il punto doppio possono essere considerate come posizione limite di sei rette *sghembe a due a due* sopra una superficie priva di punto doppio, ma tendente a quella dotata di un punto doppio. Ciò fa apparire anche la proiezione dal punto O mediante la quale abbiamo ottenuto la rappresentazione piana della superficie cubica con punto doppio, come limite della proiezione sghemba, che

(1) Per lo studio di curve d'ordine più alto v. del resto F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. V, pag. 558.

ci ha permesso di costruire la rappresentazione piana della superficie cubica generale.

L'acquisto di un punto doppio, il cui intorno è rappresentato da una conica passante per A_1, A_2, ..., A_6, riduce il numero delle rette della superficie.

Nel caso generale le 27 rette sono rappresentate:

a) dai 6 punti A_i,

b) dalle 15 rette, che li congiungono a due a due in tutte le maniere possibili,

c) dalle 6 coniche per 5 punti base.

Se i punti A_1, A_2, ..., A_6 sono su di una conica, essi continuano a rappresentare sei rette della superficie, e lo stesso vale per le quindici rette del caso *b*). Invece le sei coniche del caso *c*) coincidono in una, e questa rappresenta non una retta, ma l'intorno del punto doppio.

Ne viene la proposizione: *Una superficie cubica con un punto doppio, rappresentata su di un piano da* ∞^3 *cubiche per sei punti base giacenti su di una conica, possiede* 21 *rette.*

Ma una F_3 rappresentata su di un piano da cubiche per 6 punti può essere dotata di un punto doppio anche senza che i sei punti base siano su di una conica. Sappiamo infatti che la superficie cubica generale acquista un punto doppio non solamente quando i sei punti A_1, A_2, ..., A_6 vengono a disporsi su di una conica, ma anche quando tre punti A_i sono in linea retta ovvero due punti A_i sono infinitamente vicini (cfr. pag. 41); abbiamo però osservato che questi tre casi si riducono l'uno all'altro con trasformazioni quadratiche, sicchè si può sempre ritenere che l'intorno di un punto doppio di una F_3 sia rappresentato da una conica per A_1, A_2, ..., A_6; pertanto si ha in ogni caso che *la superficie cubica dotata di un punto doppio possiede* 21 *rette.*

Una superficie cubica F_3 può possedere più di un punto doppio. Se ad es. esistono *due* punti doppi, i 6 punti base del sistema rappresentativo debbono assumere una posizione reciproca tale che sia possibile il contemporaneo verificarsi di due delle seguenti circostanze:

a) i sei punti A_1, A_2, ..., A_6 stanno su di una conica,

b) tre punti A_i stanno su di una retta,

c) due punti A_i sono infinitamente vicini.

Facilmente si potrebbe determinare la riduzione subìta dal numero delle rette di una F_3 con punto doppio, per la presenza di un secondo punto doppio ed eventualmente di un terzo o quarto. Ma non ci indugeremo su ciò, limitandoci ad osservare che *una superficie cubica senza linea doppia* (non rigata) *può avere al massimo quattro punti doppi.*

La dimostrazione diretta di questa proposizione segue dall'osservare che la classe di una superficie cubica è 12 (tanti essendo i punti comuni alla F_3 e ad una coppia di sue quadriche polari); ogni punto doppio cala di due la classe, ma questa non può ridursi a due, giacchè le superficie di classe due sono d'ordine due.

Un punto di molteplicità superiore (cioè triplo) può sorgere soltanto nel caso del cono (cfr. pag. 71).

Come si è studiata la riduzione subita dalle 27 rette di una F_3 per l'acquisto di uno o più punti doppi, si può studiare la riduzione delle reti di cubiche gobbe. Due circostanze possono concorrere a tale riduzione:

a) la coincidenza di due reti,

b) la riduzione a cubiche piane.

Supponiamo che la F_3 possieda un punto doppio O, il cui intorno sia rappresentato dalla conica per A_1, A_2, ..., A_6. La rete delle rette del piano e la rete delle quintiche passanti doppiamente per A_1, A_2, ..., A_6 non rappresentano più una rete di cubiche gobbe ma una stessa rete di *cubiche piane.*

Invero le quintiche si compongono nel nostro caso della conica per A_1, A_2, ..., A_6 e di una retta e le rette rappresentano cubiche piane, passanti per il punto doppio.

Le $\binom{6}{3} = 20$ reti di coniche per tre punti base sono ancora immagini di cubiche gobbe, ma esse coincidono con le 20 reti di quartiche con tre punti base doppi e tre semplici; infatti le nominate quartiche si spezzano nella conica A_1, A_2, ..., A_6 ed in coniche per tre punti base.

Invece le 30 reti di cubiche continuano ad essere immagini di 30 reti di cubiche gobbe.

Riassumendo i risultati ottenuti, troviamo: *Sopra una superficie cubica con punto doppio ordinario esistono* 50 *reti di cubiche gobbe.*

Ora la conica per A_1, A_2, ..., A_6 può spezzarsi in due rette distinte e anche coincidenti, e tra i punti base possono avvenire degli avvicinamenti ecc., ecc.; e questo porterà ad ulteriori riduzioni del numero delle reti di cubiche gobbe. Senza entrare in una discussione minuta di tutti i casi che si possono presentare, avvertiamo, senza svilupparne la dimostrazione, che rimane sempre *almeno una rete di cubiche gobbe, tranne nel caso che le immagini delle sezioni piane siano delle cubiche passanti per i sei punti comuni a una cubica* C_3 *e ad una sua tangente di flesso, contata due volte.*

Il punto doppio della superficie cubica è qui un punto uniplanare, cioè il cono osculatore si spezza in un piano contato due volte; inoltre questo piano, che interseca in generale la superficie in tre rette distinte, la sega in un'*unica* retta.

Sappiamo ora che la possibilità di generare una superficie cubica generale mediante tre stelle omografiche, dipende unicamente dall'esistenza su questa superficie di una rete di cubiche gobbe. Ne segue che *una superficie cubica non rigata si può sempre generare con tre stelle omografiche, salvo un'unica eccezione: la superficie con un punto doppio uniplanare, per cui passano tre rette coincidenti.*

Questa proposizione, che precisa le circostanze in cui è possibile la generazione della F_3 con tre stelle omografiche, appartiene a C. SEGRE [1].

NOTA. - La considerazione dei casi particolari a cui conduce la rappresentazione piana della F_3 con punti doppi, si trova già in SCHLÄFLI [2]; ma un esame sistematico di tutti i casi possibili

---

[1] Cfr. C. SEGRE: *Sur la génération projective des surfaces cubiques;* « Archiv der Math. und Phys. », 1906.

[2] Cfr. L. SCHLÄFLI: *On the distribution of surfaces of the third order*

è stato fatto da J. DIEKMANN (1). L'autore anzichè la proiezione sghemba fra due rette adopera per la rappresentazione il sistema delle corde di una cubica gobba, che conduce ad una costruzione affatto analoga.

NOTA. - Come si spiega la riduzione del numero delle rette appartenenti ad una superficie cubica F_3 che acquisti un punto doppio, dal punto di vista della continuità?

Su questa F_3, abbiam veduto, ci sono sei rette passanti per il punto doppio, che prendono il posto di 12. Orbene la nostra F_3 possiede accanto a codeste rette, ed a ciascuna di esse, altrettante rette infinitamente vicine. Infatti la corrispondenza proiettiva che intercede fra i punti di una di tali rette a e i relativi piani tangenti, definisce una retta infinitamente vicina ad a, che appartiene a tutti gli iperboloidi tangenti ad F_3 lungo la retta.

---

into species, in reference to the absence or presence of singular points; « Philos. Transact. of the R. Society », 1863.

(1) Cfr. J. DIEKMANN: *Über die Modificationen welche die ebene Abbildung einer Fläche 3-ter Ordnung durch Auftreten von Singularitäten erhält;* « Math. Ann. » Bd. IV, 1871.

Capitolo III

LA RIGATA CUBICA

16. Rappresentazione piana della rigata cubica generale.

Le superficie del terzo ordine, delle quali ci siamo finora occupati, avevano come sezioni piane *generiche* cubiche generali, cioè di genere uno.

Passiamo ora allo studio delle superficie cubiche, nelle quali *tutte* le sezioni piane sono dotate di un punto doppio. Il luogo di questi punti doppi è una linea doppia della superficie, cioè una *retta doppia* a. I piani per a segano la superficie in cubiche spezzate nella retta a contata due volte ed in un'ulteriore retta, che si appoggia ad a, sicchè la superficie risulta *rigata*.

Inversamente, una rigata cubica F_3, che non sia un cono, è certamente a sezioni piane razionali, giacchè essa possiede una *direttrice doppia*. Consideriamo all'uopo quattro generatrici della F_3, sghembe a due a due e non appartenenti ad una quadrica: esistono due rette a e b (generalmente distinte) che si appoggiano ad esse; e le rette a e b, avendo quattro intersezioni con la F_3, vi giacciono per intero. Le rette a e b non possono variare al variare della quaterna di generatrici, che è servita alla loro costruzione: in caso contrario esisterebbero sulla F_3 due sistemi di generatrici e la F_3 sarebbe una quadrica. Ne segue che la F_3 possiede due *direttrici rettilinee*; e non può esistere una terza direttrice rettilinea, altrimenti la F_3 sarebbe una quadrica. È facile ora dimostrare che delle due direttrici rettilinee l'una è doppia e l'altra semplice. Supponiamo perciò a e b distinte. Il piano di a e di una generatrice generica g della F_3 sega la F_3 in una retta residua. Se questa retta (che non può coincidere con la g data la genericità di questa) coincide con a, la a è direttrice dop-

pia. Se ciò non avviene, il piano di a e g sega la F_3 in una generatrice g', la quale deve necessariamente passare per il punto comune alla g ed alla b; e la b risulta così doppia. Riassumendo, possiamo dire: *Una rigata cubica generale possiede una direttrice doppia ed una direttrice semplice, risultando così a sezioni razionali.*

Il caso in cui le due direttrici rettilinee divengono infinitamente vicine dà luogo alla rigata di CAYLEY, che è anche essa a sezioni razionali e di cui parleremo più avanti. Aggiungeremo qui che la retta doppia di una rigata cubica non può essere *cuspidale,* tranne il caso in cui la rigata stessa si riduca ad un cono: infatti, escluso questo caso, al variare del punto sopra la retta doppia si otterrebbero ∞^1 piani tangenti e ciascuno di questi piani sarebbe tangente lungo tutta una generatrice; la nostra superficie risulterebbe così sviluppabile: ma una superficie sviluppabile algebrica d'ordine tre non può essere che un cono (1).

Tutto ciò premesso, osserviamo subito che la rigata cubica F_3 è razionale, giacchè se ne ottiene la rappresentazione su di un piano qualunque per semplice proiezione da un punto O della direttrice doppia a: infatti, preso un punto P di F_3, il raggio OP non interseca ulteriormente F_3 ed interseca π in P', corrispondente di P; viceversa un punto P' di π, congiunto ad O, dà origine ad un raggio OP', che incontra F_3 — fuori di O — in un unico punto P, corrispondente di P'.

Troviamo le immagini delle sezioni piane di F_3. Data una generica sezione piana, proiettandola da O si ottiene un cono cubico Φ_3 che ha a come generatrice doppia; l'intersezione di Φ_3 con il piano π sarà quindi una curva del terzo ordine che ha il punto A, intersezione di a con π, come punto doppio. Inoltre osser-

(1) Questa conclusione è confermata dall'esame della rappresentazione piana della rigata, che esponiamo più avanti. Appare da questa che la retta doppia della superficie (che ha per immagine una retta, su cui le coniche di un sistema lineare ∞^3 segano un'involuzione) è certamente nodale, sia nel caso generale, sia nel caso speciale della rigata di CAYLEY, purchè questa non si riduca ad un cono.

viamo che da O partono due generatrici a_1 ed a_2 di F_3; ogni sezione piana incontra a_1 ed a_2 e perciò a_1 ed a_2 sono generatrici di Φ_3 e le immagini delle sezioni piane passano per conseguenza per i punti A_1 ed A_2, intersezioni di a_1 ed a_2 con π.

Riassumendo, abbiamo: *le immagini delle sezioni piane di* F_3 *sono cubiche, che hanno* A *come punto doppio e* A_1 *ed* A_2 *come punti base semplici.* Però, *non* tutte le cubiche che passano doppiamente per A e semplicemente per A_1 ed A_2 sono immagini di sezioni piane: infatti le cubiche di questo tipo sono ∞^4, mentre le sezioni piane sono ∞^3. Ricaviamo di qui che le cubiche, che sono immagini di sezioni piane, devono essere assoggettate ad un'ulteriore condizione lineare, che non può però essere il passaggio per un punto base, giacchè in tal caso due sezioni piane si incontrerebbero in due punti variabili, anzichè in tre.

Quale sia l'ulteriore condizione risulta subito dal seguente ragionamento. Per ogni punto P della generatrice a esistono due piani π_1 e π_2 determinati dalla retta a con le due generatrici p_1 e p_2, passanti per P; le coppie di piani π_1 e π_2 sono in corrispondenza biunivoca ed algebrica con i punti di a e sono perciò coppie di un'involuzione: i due punti doppi di questa involuzione rispondono all'esistenza sulla rigata F_3 di due punti, per i quali i piani tangenti coincidono, cioè di *due punti cuspidali*. Proiettando ora dal punto O di a, ogni coppia di piani per a dà origine ad una coppia di rette per A, sicchè si avrà nel piano π una involuzione di raggi ω intorno al centro A. Preso ora un punto P generico di a, le ∞^2 sezioni piane passanti per P, hanno tutte P come punto doppio; le loro tangenti principali in P devono essere contenute nei piani π_1 e π_2, e le tangenti principali delle loro immagini devono perciò coincidere con le due rette p_1', p_2', che sono le traccie su π dei piani π_1 e π_2 e formano una coppia della involuzione ω.

L'ulteriore condizione per le cubiche, immagini di sezioni piane, è dunque la seguente: le tangenti principali nel punto doppio A, *sono coniugate in una involuzione* ω; e le ∞^2 cubiche, immagini di sezioni piane, le quali hanno come tangente cuspidale nel punto doppio A una retta doppia dell'involuzione ω, rispon-

dono alle sezioni piane per un punto cuspidale della direttrice doppia.

Noi abbiamo così caratterizzato completamente le immagini delle sezioni piane di F_3 su π. Importa fare qualche osservazione complementare:

a) le rette AA_1 ed AA_2 sono coniugate nella involuzione ω, giacchè sono le traccie su π di due piani determinati da a con le rette a_1 ed a_2 di F_3;

b) la retta A_1A_2 è l'immagine della direttrice semplice b: ciò è evidente quando si pensi la rappresentazione di F_3 ottenuta mediante proiezione da O, giacchè b incontra a_1 ed a_2. D'altronde la retta A_1A_2 è incontrata in un solo punto dalle rette per O, che sono le immagini delle generatrici di F_3: la retta A_1A_2 è perciò l'immagine della direttrice semplice di F_3;

c) l'intorno di primo ordine dei punti A_1 ed A_2 rappresenta la retta a_1 ed a_2 rispettivamente;

d) l'intorno del punto A è invece in corrispondenza [2, 1] con i punti della direttrice doppia a;

e) infine le rette AA_1 ed AA_2 rappresentano complessivamente l'intorno del punto O; tale intorno si compone di una retta infinitesima nel piano determinato da a ed a_1, che è rappresentata su π dalla retta AA_1, e da una retta infinitesima nel piano determinato da a ed a_2, che è rappresentata dalla retta AA_2.

Le ∞^2 sezioni piane per O sono rappresentate dalle ∞^2 rette del piano: invero queste rette fanno parte di ∞^2 cubiche spezzate del nostro sistema ∞^3, che contengono come parti fisse le rette AA_1 e AA_2.

17. Trasformazione del sistema rappresentativo della rigata in un sistema di coniche per un punto base.

Con una trasformazione quadratica si può ottenere che le cubiche immagini delle sezioni piane di F_3 diventino *coniche*.

Si consideri all'uopo la trasformazione quadratica, che ha A, A_1 ed A_2 come punti fondamentali. Chiamando A', A'_1, A'_2 i punti immagini delle rette A_1A_2, AA_2, AA_1 otteniamo come immagini delle sezioni piane di F_3 delle coniche, C_2, che passano semplice-

mente per A' e segano sopra la retta $A'_1A'_2$ (immagine dell'intorno di A) le coppie di una involuzione ω', per la quale la coppia A'_1 ed A'_2 è una coppia di punti coniugati. I punti dell'intorno di primo ordine di A' sono ora immagini dei punti della direttrice semplice b, mentre le coppie di punti della retta $A'_1A'_2$, coniugati nella involuzione ω', rispondono ai punti della direttrice doppia a; i due punti doppi dell'involuzione sono immagini dei *due punti cuspidali della direttrice doppia.*

OSSERVAZIONE. - La trasformazione quadratica, che ha i punti fondamentali in A, A_1 ed A_2, si può ancora eseguire se il punto A_1 si avvicina indefinitamente al punto A [1] od anche se A_1 ed A_2 si avvicinano entrambi ad A succedendosi *sopra un ramo lineare.* Nel primo caso la trasformazione quadratica si ottiene facendo corrispondere alla rete delle rette la rete delle coniche *irriducibili,* che passano per A ed A_2, avendo in A la medesima tangente AA_1; nel secondo caso basta far corrispondere alla rete delle rette la rete delle coniche *irriducibili,* che si osculano in A, avendo ivi la medesima tangente AA_1 ed il medesimo cerchio osculatore AA_1A_2.

Ma i punti A_1 ed A_2 possono avvicinarsi ad A in due direzioni distinte (o succedendosi sopra un ramo cuspidale): in questo caso la trasformazione riduttrice viene a mancare, giacchè i punti A, A_1, A_2 non possono essere presi come punti base di una rete di coniche non degeneri. La superficie rappresentata è un *cono cubico razionale*: infatti le cubiche del sistema lineare rappresentativo, che passano per un punto dell'intorno di A, si spezzano in tre rette per A, qualunque sia questo punto; ne viene che l'intorno del punto A è l'immagine di un punto triplo della F_3, la quale è dunque un cono.

Concludendo, possiamo dire: *ogni rigata cubica che non sia un cono può essere rappresentata sul piano in modo che le immagini delle sezioni piane siano coniche per un punto; ma questa rappresentazione non è più possibile per il cono cubico razionale.*

---

[1] Questa ipotesi dà origine alla rigata di CAYLEY, di cui si discorre più avanti.

Diamo un'applicazione elegante della rappresentazione della rigata di terzo grado F_3 determinando le asintotiche della superficie (1).

Ricordiamo che sopra una superficie F (non sviluppabile), algebrica (o no), le asintotiche sono quelle curve, che in ogni punto hanno come tangenti le tangenti principali di F. Su ogni superficie (convenientemente limitata in senso differenziale) esistono pertanto *due* fasci di asintotiche. Uno di questi è costituito dalle generatrici, quando la superficie è rigata. Per trovare sulla rigata cubica F_3 le asintotiche del secondo fascio, incominciamo a ricercare le immagini di quelle sezioni piane, che sono ottenute mediante piani tangenti ad F_3. Un piano tangente sega F_3 secondo una cubica, che deve avere un punto doppio nel punto d'incontro del piano tangente con la direttrice doppia a ed un altro punto doppio nel punto di tangenza: tale cubica si *spezza* perciò in una conica ed in una retta.

Per trovare le immagini di sezioni piane ottenute con piani tangenti, dovremo perciò, nel piano rappresentativo, cercare le coniche del sistema lineare $|C_2|$ più sopra considerato, che si spezzano in due rette; ogni punto del piano sarà il punto doppio di una di queste coniche.

Preso un punto P qualunque del piano, lo si congiunga con A'; la retta PA' seghi la retta $A'_1A'_2$ nel punto U e sia U' il punto coniugato di U nella involuzione esistente sulla retta $A'_1A'_2$. *La retta PA' insieme alla retta PU' costituisce una conica spezzata, che rappresenta evidentemente una sezione piana, ottenuta sulla F_3 mediante un piano tangente.*

Ad ogni punto P abbiamo così associato due direzioni PA' e PU' e le immagini delle asintotiche sul piano rappresentativo saranno quelle linee, che in ogni punto P hanno come tangenti le rette PA' e PU'. Noi possediamo in altre parole la concreta visione dell'equazione differenziale del primo ordine e del secondo grado, dalla quale dipende la determinazione delle asintotiche.

---

(1) Cfr. L. CREMONA: *Rappresentazione di una classe di superficie gobbe sopra un piano e determinazione delle loro curve assintotiche;* « Ann. di Mat. » Serie II, T. I, 1868. = Opere di L. CREMONA, T. II, pag. 409.

Ma anche l'integrazione si lascia qui effettuare immediatamente per via geometrica.

Le curve, che in ogni punto P hanno la retta PA' come tangente sono evidentemente le rette per il punto fisso A', cioè le immagini delle generatrici della rigata.

Rimangono da trovare le curve che in ogni punto P hanno la retta PU' come tangente. Nella fig. 1 sono disegnati i punti M, N, punti doppi della involuzione, determinata sulla retta $A'_1A'_2$ dalle coniche, immagini di sezioni piane della F_3.

La coppia di punti UU' separa armonicamente la coppia MN; ne segue che la conica passante per il punto P e tangente in N

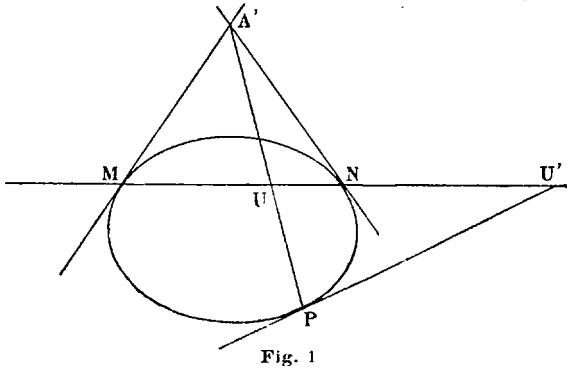


Fig. 1

alla retta $A'N$ ed in M alla retta $A'M$ ha in P precisamente la retta PU' come tangente. Ciò avviene per un punto qualunque di codesta conica. Da ciò segue che:

Nella rappresentazione piana della rigata cubica generale F_3, dove le sezioni piane sono rappresentate da coniche per un punto A', seganti una involuzione coi punti doppi M, N sopra una retta r, il secondo fascio delle asintotiche vien dato dal fascio delle coniche tangenti in N ed M alle rette $A'N$ ed $A'M$.

Le coniche del tipo indicato sono incontrate dalla immagine della generica sezione piana in quattro punti e perciò sulla nostra F_3 *le asintotiche del secondo fascio sono delle curve gobbe del quarto ordine, di genere zero.*

La rigata cubica presenta l'esempio più semplice di superficie algebrica con asintotiche algebriche.

ESERCIZIO. - Lo studioso determini i diversi tipi di trasformazioni cubiche dello spazio, in cui ai piani rispondono ∞^3 rigate cubiche (necessariamente colla retta doppia fissa), formanti un sistema omaloidico. Il primo tipo è la trasformazione (3, 2) la cui inversa dà la trasformazione quadratica di 2ª specie.

18. Casi particolari: rigata cubica di Cayley.

Abbiamo veduto che la retta doppia a di una rigata F_3 è sempre nodale, se la rigata non è un cono cubico. Per conseguenza da un punto generico di a escono due generatrici distinte. In generale queste sono anche distinte da a e danno luogo a due piani tangenti, che risultano coniugati in un'involuzione ω. Per esaminare il caso in cui una delle generatrici divenga infinitamente vicina alla a, supponiamo che l'involuzione ω data nel fascio di asse a degeneri. In questo caso le coppie di piani coniugati in ω contengono un piano fisso, che risulta tangente alla F_3 in tutti i punti di a. Pertanto in un punto generico P di a vi sarà un secondo piano tangente variabile π, e fra P e π intercederà una corrispondenza biunivoca e quindi proiettiva. Ciò vale quanto dire che le generatrici di F_3 si appoggiano, oltre che alla direttrice doppia a, ad una seconda direttrice rettilinea, che è una retta b, sghemba ad a ed infinitamente vicina ad essa. Si ricordi infatti (1) che una retta sghemba infinitamente vicina ad una retta data a resta definita da una proiettività non degenere fra la punteggiata a ed il fascio di piani per a: codesta retta infinitamente vicina b diventa incidente ad a quando degeneri la anzidetta proiettività tra il punto P di a ed il suo piano tangente variabile π. Ma per la F_3 questo equivale ad avere in ogni punto di a due piani tangenti fissi; ed in questa ipotesi la F_3 sarebbe un *cono*.

Riteniamo intanto la conclusione a cui siamo pervenuti:

La rigata cubica dà luogo ad un caso particolare, in cui, senza diventare un cono, *la sua direttrice semplice b diventa una retta*

---

(1) Cfr. ad es. F. ENRIQUES: *Lezioni di Geometria Descrittiva* (Bologna, 1925) pag. 309.

infinitamente vicina alla direttrice doppia a e sghemba rispetto ad essa: questo caso è *caratterizzato dalla circostanza, che vi è una falda della superficie* F_3, *la quale tocca lungo una retta a un piano fisso*. La rigata così definita prende il nome da A. CAYLEY, che la scoprì.

La rigata di CAYLEY si può anche caratterizzare in rapporto ai punti cuspidali, che si riducono qui ad un punto cuspidale doppio (1).

È facile vedere come si particolarizzi la rappresentazione piana di una rigata cubica nel caso di una rigata di CAYLEY. Riferiamoci da prima alla rappresentazione mediante cubiche, che passano doppiamente per A e semplicemente per A_1 ed A_2. Ricordiamo che si perviene a questa rappresentazione quando si proietti la F_3 da un punto O della sua direttrice doppia a: i punti A, A_1, A_2 sono allora il punto d'incontro di a e delle due generatrici a_1 ed a_2 uscenti da O, con il piano su cui si proietta.

Sia ora la F_3 una rigata di CAYLEY. Da un punto generico O di a partono due generatrici, una delle quali ad es. a_1 è infinitamente vicina alla a. Il sistema rappresentativo è ancora costituito da cubiche passanti doppiamente per A e semplicemente per A_1 ed A_2; il punto A_1 è però infinitamente vicino ad A, in guisa che le immagini delle sezioni piane hanno in A una tangente fissa AA_1. Poichè le cubiche $C_3(A^2A_1A_2)$ sono ∞^4, è necessario che esse soddisfino ancora una condizione lineare, per rappresentare sezioni piane della F_3. Per trovare questa condizione lineare ricordiamo che nel caso generale gli intorni dei punti A_1 ed A_2 rispondono proiettivamente ai punti delle rette a_1 ed a_2. Nel caso della rigata di CAYLEY la retta a_1 è infinitamente vicina alla a e vi è dunque proiettività tra i punti della retta a ed i punti dell'intorno di A_1. D'altra parte vi è anche corrsipondenza proiet-

(1) Per la discusione della singolarità cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. II, Cap. VI, pag. 626. Altri casi interessanti di superficie dotate di punto cuspidale doppio si vedranno in seguito.

tiva tra i punti di a e le direzioni uscenti dal punto A: infatti le immagini delle sezioni piane che passano per un punto P di a hanno in A una retta osculatrice fissa, che è la AA_1, ed una retta osculatrice p variabile con P, che è la traccia sul piano di proiezione del piano tangente in P, diverso dal piano tangente fisso; e tra la retta p ed il punto P vi è corrispondenza proiettiva.

In definitiva: *ad ogni punto dell'intorno di A corrisponde proiettivamente un punto dell'intorno di* A_1, *e le cubiche, immagini di sezioni piane, devono contenere coppie di punti corrispondenti.*

Se si eseguisce una trasformazione quadratica, che ha i punti fondamentali in A, A_1, A_2, l'intorno di A si trasforma nell'intorno di un punto O, l'intorno di A_1 in una retta p passante per O e la proiettività tra i punti dei due intorni in una proiettività tra i punti dell'intorno di O ed i punti della retta p. Allora: *il sistema lineare rappresentativo della rigata di* CAYLEY *è costituito da* ∞^3 *coniche, passanti per O ed assoggettate all'ulteriore condizione che la tangente in O ed il punto d'incontro con una retta p uscente da O si corrispondano in una proiettività che intercede tra fascio e punteggiata.*

ESERCIZIO. - Riferendosi alla rappresentazione piana della rigata di CAYLEY, nella quale le immagini delle sezioni piane sono coniche per un punto O, si dimostri che *il fascio rappresentativo delle asintotiche* (diverso dal fascio delle generatrici) *è costituito da coniche tangenti in O alla retta p e aventi tra loro un contatto quadripunto.*

Si osservi che queste asintotiche sono immagini di *cubiche gobbe* della superficie.

Dato un sistema lineare ∞^3 di cubiche $C_3(A^2A_1A_2)$, rappresentativo di una rigata F_3 generale, abbiamo veduto che se A_1 si avvicina indefinitamente ad A, la F_3 si riduce ad una rigata di CAYLEY.

Se A_1 ed A_2 si avvicinano entrambi ad A succedendosi sopra un ramo lineare, la superficie rappresentata è ancora una rigata

di CAYLEY (1): infatti questo caso si ottiene dal precedente con una trasformazione quadratica, nella quale si prendono come fondamentali i punti A, A_1 ed un punto generico della retta AA_2. Nell'uno e nell'altro caso poi l'ordine del sistema può essere abbassato con un'opportuna trasformazione quadratica.

Ma A_1 ed A_2 possono avvicinarsi ad A in direzioni distinte o succedendosi sopra un ramo cuspidale.

Abbiamo già detto che allora la F_3 diventa un cono razionale. L'intorno di A_1 è in corrispondenza proiettiva con l'intorno di A_2, ciascuno di questi intorni essendo in corrispondenza proiettiva con i punti della direttrice doppia. L'ordine del sistema lineare non può qui essere abbassato con alcuna trasformazione quadratica.

Termineremo con qualche osservazione relativa al caso in cui la rigata cubica è un *cono ellittico* (senza retta doppia). Non abbiamo mai incontrato questa superficie discutendo il sistema lineare rappresentativo di una rigata cubica generale, per una ragione essenziale: *il cono ellittico è una superficie non razionale.* Se infatti questa superficie fosse razionale, il sistema delle sue ∞^1 rette che è *irrazionale di genere uno* (come una sua sezione piana) sarebbe rappresentato da un sistema ∞^1 di curve, tali che per ogni punto generico del piano ne passi una ed una sola; ma questa proprietà caratterizza (2) nel piano i fasci *lineari* cioè *razionali*, sicchè si cade in un assurdo.

19. Trasformazioni proiettive della rigata cubica.

La rigata cubica generale possiede un invariante (relativo) che viene espresso dal discriminante della forma quadratica rappresentante la coppia dei punti cuspidali sopra la retta doppia: il suo annullamento dà la rigata di CAYLEY.

---

(1) Perchè questa ipotesi si verifichi basta proiettare la rigata di CAYLEY dal suo punto cuspidale doppio.

(2) Conseguenza del *principio di* LAMÈ o del teorema di LÜROTH. Cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol I, Lib. II, cap. II, pag. 231.

Non vi è altro invariante indipendente, perchè la rigata non possiede invarianti assoluti. Infatti: *due rigate cubiche generali si possono trasformare proiettivamente l'una nell'altra in* ∞^2 *modi.* A tal uopo si consideri la coppia dei punti cuspidali A, B, di una rigata cubica F_3, e la coppia dei punti A', B', segati dalle generatrici per A e B sulla direttrice semplice: e per una seconda rigata cubica $\bar{F}_3$ si considerino i punti analoghi $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{A}'$, $\bar{B}'$. Vi sono ∞^3 omografie che fan corrispondere ad $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{A}'$, $\bar{B}'$ risp. A, B, A' B' (ovvero B, A, B', A'); esse mutano la rigata $\bar{F}_3$ in un'altra rigata, che appartiene con F_3 ad un fascio con curva base costituita dalle rette AB, $A'B'$, ed AA', BB', dove la retta doppia AB conta per quattro e le generatrici AA' e BB' ciascuna per due. Pertanto vi sono ∞^2 omografie che trasformano la $\bar{F}_3$ nella F_3. In particolare: *una rigata cubica generale viene trasformata in se stessa da* ∞^2 *omografie* (componenti un gruppo misto); d'accordo col fatto che il sistema ∞^{13} delle rigate cubiche è trasformato in sè dalle ∞^{15} omografie dello spazio.

Nel caso particolare in cui A e B diventano infinitamente vicini (tra loro e ad A' e B'), si avranno ∞^3 *omografie trasformanti in sè la rigata di* CAYLEY, essendovi ∞^{12} rigate speciali di tale famiglia, permutate fra loro dalle ∞^{15} omografie dello spazio.

La proprietà dimostrata è caratteristica per la rigata di CAYLEY, in quanto sussiste il teorema [1]:

La rigata cubica di CAYLEY *è la sola superficie non sviluppabile che possiede un gruppo* ∞^3 *di trasformazioni proiettive in sè* (e non un gruppo più ampio).

Accenniamo rapidamente alla dimostrazione del teorema. Perciò occorre considerare le asintotiche della superficie, che formano un sistema ∞^1 d'indice due. Fra le $\infty^r (r \geq 3)$ trasformazioni proiettive della superficie se ne avranno ∞^2 (almeno) che lascian ferma un'asintotica; quindi le asintotiche (non potendo essere

---

[1] Cfr. S. LIE: *Theorie der Transformationsgruppen*; Vol. III (1893) e F. ENRIQUES: *Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in se stesse*; « Atti R. Ist. Veneto », t. IV, serie VII, 1892-93 e t. V, serie VII, 1893-94.

linee piane curve) saranno rette ovvero cubiche gobbe (1). Se la superficie non è a punti parabolici (cioè non è un piano o un cono o la sviluppabile delle tangenti ad una cubica gobba) le asintotiche dovranno formare due fasci di rette, o daranno luogo almeno ad un sistema di cubiche gobbe. La prima ipotesi porta che la superficie sia una quadrica, e quindi ammetta ∞^6 trasformazioni proiettive. La seconda ipotesi porta che la superficie appartenga al fascio delle superficie (del 6° ordine) trasformate in sè dalle ∞^2 omografie che lasciano ferma una cubica gobba ed hanno un punto unito sopra di essa. Ma entro questo fascio, all'infuori di superficie sviluppabili c'è una sola superficie con ∞^3 trasformazioni proiettive, che è una rigata di CAYLEY.

20. La rigata razionale normale dello spazio a quattro dimensioni.

Abbiamo già osservato che un sistema lineare $|C_3|$, ∞^5, di cubiche passanti doppiamente per un punto A e semplicemente per due punti A_1, A_2 è — come si suol dire — *incompleto,* essendo contenuto in un sistema lineare più ampio di dimensione quattro, il quale, non essendo ulteriormente ampliabile, si dice *completo.*

Il sistema $|C_3|$ è rappresentativo di una rigata cubica F_3 ed il fatto che esso non sia completo si può dedurre direttamente dalla rigata, osservando che il sistema lineare delle sezioni piane della F_3 si può ampliare in un sistema di dimensione quattro. Si considerino a questo scopo le ∞^4 quadriche, contenenti la direttrice doppia a di F_3 ed una generatrice g: le nominate quadriche segano ulteriormente la superficie in cubiche gobbe, tra le quali sono comprese le sezioni piane della F_3 in corrispondenza alle quadriche che si spezzano nel piano delle rette a e g ed in un piano generico.

Ora il significato geometrico del fatto che il sistema rappresentativo $|C_3|$ è incompleto e contenuto in un sistema completo

(1) Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. III, pagg. 203 e segg., in particolare il teorema a pag. 248.

di dimensione 4 sta in ciò: *La rigata cubica generale F_3 dello spazio ordinario si può considerare come proiezione da un punto esterno di una rigata cubica Φ_3 dello spazio a quattro dimensioni, la quale risulta normale, cioè non può essere considerata come proiezione di una rigata cubica, posta in uno spazio di dimensione più elevata; la rigata Φ_3 può essere rappresentata sul piano in modo che il sistema lineare ∞^4 delle sue sezioni iperpiane abbia per immagine il sistema lineare ∞^4 delle cubiche passanti doppiamente per A e semplicemente per A_1 ed A_2*, ovvero *il sistema lineare ∞^4 delle coniche per un punto O.*

Fissata la superficie F_3, il sistema lineare $|C_3|$, rappresentativo di essa sarà del tipo:

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 + \lambda_4\varphi_4 = 0$$

le curve $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$ essendo quattro cubiche, linearmente indipendenti, passanti doppiamente per A e semplicemente per A_1, A_2, immagini di quattro sezioni piane della F_3. Si potrà sempre supporre, essendo X_1, X_2, X_3, X_4 coordinate omogenee in S_3, che le equazioni parametriche della F_3 siano:

$$X_i = \varphi_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Ciò premesso, essendo $|C_3|$ incompleto, esiste una cubica $\varphi_0 = 0$, passante doppiamente per A e semplicemente per A_1 ed A_2, linearmente indipendente dalle cubiche $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$.

Consideriamo allora la superficie dello spazio a quattro dimensioni definita dalle equazioni:

$$X_i = \varphi_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Si tratta di una superficie razionale, le cui sezioni iperpiane sono rappresentate dalle curve del sistema lineare:

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 + \lambda_4\varphi_4 = 0.$$

La superficie è del terzo ordine (Φ_3) giacchè le immagini di due sezioni iperpiane si incontrano in tre punti variabili; e la Φ_3 è rigata perchè le rette per il punto A sono unisecanti le imma-

gini delle sezioni iperpiane e quindi immagini di curve unisecanti le sezioni iperpiane cioè di rette.

La superficie F_3 è evidentemente la proiezione della Φ_3 dal vertice della piramide fondamentale, opposto all'S_3 in cui giace la F_3.

La Φ_3 è infine normale, essendo il sistema lineare:

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 + \lambda_4\varphi_4 = 0$$

completo. Se infatti la Φ_3 fosse proiezione di una superficie cubica posta in uno spazio di dimensione più elevata, si dovrebbe poter ripetere il ragionamento precedente ed il predetto sistema dovrebbe essere ulteriormente ampliabile.

È facile ora mostrare che da una medesima rigata cubica di S_4 si possono ottenere, per proiezione da un punto esterno, tanto delle rigate cubiche a direttrici distinte quanto delle rigate di CAYLEY: rimane così approfondito il rapporto tra queste due superficie.

Osserviamo a questo scopo che sulla rigata cubica normale di S_4 vi sono ∞^2 coniche (unisecanti le generatrici) ed una direttrice rettilinea: riferendosi infatti alla rappresentazione piana della Φ_3 mediante le ∞^4 $C_3(A^2A_1A_2)$, le ∞^2 coniche per A, A_1, A_2 sono immagini di coniche e sono unisecanti le rette per A, che rappresentano le generatrici della Φ_3; e la retta A_1A_2 è l'immagine di una direttrice rettilinea. Ciò posto, per un punto O dell'S_4, esterno alla Φ_3, passa uno ed un solo piano, segante la Φ_3 in una conica: infatti un S_3 per O sega la Φ_3 in una cubica razionale normale, della quale una sola corda passa per O; ne segue — giacchè ogni corda è comune ad ∞^2 S_3 — che per O passano ∞^1 corde, che devono stare, necessariamente, in un piano, segante la Φ_3 secondo una conica.

Proiettando la Φ_3 da O in un S_3, non passante per O, la conica d, il cui piano passa per O, viene proiettata in una direttrice doppia, mentre la direttrice semplice della Φ_3 dà luogo ad una direttrice semplice. Si ottiene dunque una rigata cubica generale a direttrici distinte.

Ma il punto O può essere scelto in modo che sia contenuto in un piano, il quale contenga una conica della Φ_3, spezzata in

una generatrice e nella direttrice rettilinea; in questa ipotesi, proiettando da O, si ottiene la rigata cubica di CAYLEY.

ESERCIZIO. - Riferiamoci, con F. KLEIN, alla rappresentazione dello spazio rigato sopra una quadrica Q_4^2 dello spazio S_5 (1). Le rette hanno per immagini i punti della detta varietà quadrica Q_4^2. I *complessi lineari* di rette, definiti da un'equazione lineare nelle coordinate di rette p_{ik}, sono rappresentati da quadriche Q_3^2 sezioni della Q_4^2 con iperpiani di S_5; le *congruenze lineari*, definite da due equazioni lineari nelle p_{ik}, sono rappresentate da quadriche Q_2^2 sezioni della Q_4^2 con S_3: esse sono costituite da tutte le rette incidenti a due *direttrici rettilinee*, immagini dei due punti segati sulla Q_4^2 dalla retta polare dello S_3.

Ciò posto, lo studioso si renda conto come la soluzione del problema di « trovare tutte le curve d'ordine n tracciate sopra una superficie del 2° ordine Q_2^2 » — problema risoluto dalla rappresentazione piana (cfr. cap. I, n. 2) — si traduca nella « determinazione di tutte le rigate di grado n, aventi due direttrici rettilinee »: queste rigate (irriducibili) si ottengono dalle corrispondenze $[r, s]$ fra le due direttrici, dove $r+s=n$ $(r=1, 2, ..., n-1)$ e risultano avere due direttrici multiple degli ordini s ed r.

Si considerino in particolare le rigate del 3° grado; si dimostri, in quest'ordine di idee, che tali rigate posseggono sempre due direttrici rettilinee, una doppia e l'altra semplice. Si consideri, in ispecie, il caso della rigata di CAYLEY, e si indichino sopra la Q_4^2 i due punti infinitamente vicini, che rappresentano le due direttrici.

---

(1) Cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. I, Lib. I, Cap. II, pag. 117 e segg.

Capitolo IV

LA SUPERFICIE ROMANA DI STEINER

21. Introduzione: costruzione di superficie razionali del quarto ordine a partire da sistemi lineari di curve nel piano.

Si vede subito che molte superficie algebriche del quarto ordine F_4 (ad es. il monoide) sono razionali, e noi ci proponiamo nel seguito di determinare tutte le F_4 che godono di questa proprietà.

Fissando per ora la nostra attenzione sopra una qualunque F_4 *razionale,* osserviamo che il sistema lineare ∞^3 delle sue sezioni piane sarà rappresentato sul piano π, i cui punti sono in corrispondenza biunivoca con i punti di F_4, da un sistema lineare di curve di *dimensione* tre, le quali si segheranno, fuori dei punti base, in quattro punti variabili: un sistema di questo tipo dicesi di *grado* 4. In generale si chiama dimensione di un sistema lineare $|C|$ di curve algebriche la sua infinità, e *grado* di $|C|$ il numero delle intersezioni variabili di due curve di esso. *A partire da un sistema lineare* $|C|$ (costituito da curve *irriducibili*) *di dimensione* 3 *e grado* 4 *in un piano* π, *rimane definita, a meno di una omografia di* S_3, *una* F_4 *razionale, rappresentata sul piano in guisa che le immagini delle sezioni piane sieno le curve di* $|C|$. Infatti se $|C|$ ha per equazione:

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 = 0$$

e si pone:

$$X_i = \varphi_i \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3) \tag{1}$$

dove le X_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ sono coordinate omogenee di S_3, le (1) determineranno una superficie razionale che ha l'ordine quattro, come il grado di $|C|$. Questa F_4 è definita a meno di una proiet-

tività di S_3, giacchè per determinare $|C|$ si possono prendere quattro curve qualsiansi linearmente indipendenti φ'_0, φ'_1, φ'_2, φ'_3 di questo sistema e porre quindi

$$X_i = \varphi'_i ; \tag{2}$$

allora le due superficie razionali rappresentate dalle equazioni (1) e (2) sono manifestamente trasformate una dell'altra per una omografia di S_3.

Segue da quanto sopra, che per trovare tutte le superficie razionali F_4 di S_3, basta cercare tutti i sistemi lineari di curve piane, di dimensione 3 e grado 4; ed anzi ci potremo limitare ai sistemi lineari di questo tipo *birazionalmente distinti*, giacchè quando una F_4 è rappresentata birazionalmente su di un piano π e si effettua in questo una trasformazione birazionale, la F_4 riesce rappresentata punto per punto su un nuovo piano π' in guisa che le immagini delle sue sezioni piane siano le curve del sistema $|C'|$, trasformato di $|C|$, nella corrispondenza birazionale esistente fra π e π'.

Concludiamo intanto: *il problema della determinazione delle superficie algebriche F_4 razionali proiettivamente distinte equivale alla ricerca di tutti i tipi di sistemi lineari di curve piane di dimensione 3 e grado 4, birazionalmente distinti e costituiti da curve irriducibili.*

Conviene tuttavia aggiungere una avvertenza. Può avvenire per un sistema lineare di curve irriducibili che le C passanti per un punto *generico* P' di π, passino di conseguenza per un punto P'', variabile con P': allora P' e P'' si corrispondono in una involuzione I del piano ed il *sistema* $|C|$ potrà dirsi *appartenente a* questa *involuzione*.

Un sistema $|C|$ che non appartenga ad una involuzione si dirà *semplice*.

Ora ecco che cosa accade per la superficie rappresentata sul piano se il sistema $|C|$ non è semplice. Se $|C|$ appartiene all'involuzione $I = (P' \rightarrow P'')$ le curve C passanti per P' e per P'' sono le immagini di sezioni piane della F_4, passanti per un unico punto P di F_4. Il punto P è doppio per la F_4 e così tutta la su-

perficie F_4 è composta di punti doppi e pertanto si riduce ad una quadrica contata due volte.

Nel seguito considereremo sempre sistemi lineari *semplici*, tralasciando così il caso della quadrica doppia, che tuttavia incontreremo più avanti nello studio delle involuzioni piane.

NOTA. - Merita rilevare che le conclusioni precedenti riguardanti i sistemi lineari si lasciano generalizzare nella seguente proposizione: *un sistema lineare* $|C|$ (irriducibile) *di curve algebriche di un piano* π, *avente il grado* n *e la dimensione* r, *si può sempre considerare come il sistema delle immagini delle sezioni iperpiane di una superficie irriducibile* F_n, *avente l'ordine* n *e posta nello spazio* S_r *ad* r *dimensioni. La superficie* F_n — *che in casi particolari può ridursi ad una superficie multipla,* s - *pla, d'ordine* $\frac{n}{s}$ — *risulta definita a meno di una omografia di* S_r, *mentre* $|C|$ *è determinato a meno di una trasformazione cremoniana di* π.

Se il sistema $|C|$ ha la dimensione massima compatibilmente con la molteplicità dei punti base esso dicesi *completo*. Allora la F_n risulta *normale*, cioè non può essere ottenuta come proiezione di una superficie dello stesso ordine, posta in uno spazio di dimensione più elevata. Invece se il sistema $|C|$ non è completo, la F può ottenersi per proiezione da una superficie dello stesso ordine di uno spazio superiore. Infatti sia r la dimensione di $|C|$ ed r' la dimensione del sistema lineare completo $|C'|$ determinato dagli stessi punti base di $|C|$ presi con le stesse molteplicità ($r \leq r'$). Un sistema di $r'+1$ curve linearmente indipendenti di $|C'|$ si può scegliere in maniera che le prime $r+1$ siano contenute in $|C|$. Il sistema $|C|$ sarà allora rappresentato da:

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_r\varphi_r = 0.$$

e $|C'|$ da:

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_r\varphi_r + \lambda_{r+1}\varphi_{r+1} + \ldots + \lambda_{r'}\varphi_{r'} = 0.$$

Le curve di $|C|$ e $|C'|$ saranno ora immagini delle sezioni iperpiane di due superficie F_n e F'_n degli spazi S_r ed $S'_{r'}$, le cui

equazioni saranno rispettivamente:

$$X_i = \varphi_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, r) \tag{3}$$

e:

$$X_i = \varphi_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, r') \tag{4}$$

ed appare di qua chiaramente che la superficie F_n è proiezione su S_r della superficie F'_n, precisamente proiezione fatta dallo $S_{r'-r-1}$ di $S_{r'}$, opposto allo S_r nella piramide fondamentale delle coordinate.

22. La superficie di Steiner: sua rappresentazione piana.

Per determinare i sistemi lineari di dimensione 3 e grado 4, incominceremo dall'ordine più basso e, giacchè le rette di π sono solamente ∞^2, ci si presenta per primo il caso di un sistema lineare di ∞^3 coniche $|C_2|$, che, quando sia privo di punti base, sarà proprio di grado 4.

La superficie F_4, per la quale le coniche di $|C_2|$ sono le immagini delle sezioni piane, è anzitutto *non rigata*: infatti una retta di F_4 sarebbe rappresentata da una curva unisecante le coniche C_2; ma, essendo $|C_2|$ privo di punti base, ogni curva algebrica ha un numero *pari* di intersezioni con le coniche C_2 e quindi non può esistere una curva unisecante.

Le sezioni piane di F_4 sono delle quartiche di genere zero, e quindi dotate o di un punto triplo o di tre punti doppi; sulla F_4 esisterà di conseguenza o una retta tripla o una linea doppia del terzo ordine. La prima ipotesi è da escludersi, giacchè i piani per la retta tripla segherebbero la F_4 ulteriormente secondo una retta, e la F_4 sarebbe allora rigata. Nella seconda ipotesi non può aversi una cubica gobba doppia *irriducibile,* perchè se ciò fosse da un punto generico della F_4 partirebbe una corda della cubica gobba la quale avrebbe 5 intersezioni con la F_4, e quindi vi apparterrebbe per intero, sicchè la F_4 sarebbe ancora rigata.

È necessario dunque che la linea doppia di F_4 sia spezzata; ma lo spezzamento non può avvenire in una conica e in una retta: infatti per un punto generico di F_4 la retta r e la conica C_2 vengono proiettate secondo un piano ed un cono quadrico, segantisi

in due generatrici, che, avendo 5 intersezioni con la F_4, vi appartengono, resultando la F_4 rigata.

Lo spezzamento deve dunque avvenire in tre rette a_1, a_2, a_3; e non possono due delle tre rette a_1, a_2, a_3 essere sghembe, perchè in questa ipotesi le rette che partono dai punti di F_4 e si appoggiano a questa coppia apparterrebbero ad F_4 e questa sarebbe ancora rigata. Dunque le tre rette doppie passeranno per uno stesso punto, giacchè invero non potrebbero appartenere tutte a uno stesso piano. Si conclude che: *La superficie F_4 rappresentata sul piano da un sistema lineare ∞^3 di coniche privo di punti base possiede tre rette doppie concorrenti in un punto O, il quale risulta triplo per essa*: infatti i tre piani a_1a_2, a_1a_3, a_2a_3 sono tali che le loro rette passanti per O hanno contatto quadripunto con la F_4, e perciò costituiscono insieme un cono cubico, osculatore alla F_4 in O, che risulta di conseguenza punto triplo.

La superficie del quarto ordine non rigata, dotata di tre rette doppie, concorrenti in un punto triplo, dicesi superficie romana di STEINER, dal nome di colui che la scoprì appunto in un viaggio a Roma e perciò la designò come superficie romana.

Il possesso di tre rette doppie concorrenti in un punto triplo (e non quadruplo) caratterizza effettivamente le superficie rappresentabili su di un piano mediante un sistema lineare di coniche senza punti base. Infatti presa una tale superficie, essa si rappresenta sul piano π proiettando i suoi punti dal punto triplo O; viene così a stabilirsi fra i punti della superficie ed i punti del piano π una corrispondenza generalmente biunivoca, con tre punti eccezionali A_1, A_2, A_3, corrispondenti alle intersezioni delle rette doppie a_1, a_2, a_3 con il piano π. Le immagini delle sezioni piane sono quartiche passanti doppiamente per A_1, A_2, A_3, che trasformeremo più avanti in coniche d'un sistema ∞^3 senza punti base; intanto l'intorno del punto triplo è rappresentato dall'intersezione del cono osculatore in O con il piano π, cioè dalle tre rette A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3.

Per trovare le immagini delle tre rette doppie, ragioniamo così: in ogni punto di una retta doppia il cono osculatore si spezza in due piani generalmente distinti; le coppie di piani, che così

risultano, sono in corrispondenza biunivoca ed algebrica con i punti della retta doppia e quindi sono coniugati in una involuzione, che, con la proiezione da O, si converte in una involuzione di rette, passanti per A_1, A_2, A_3. Se ora una sezione piana sega le rette doppie nei tre punti A'_1, A'_2, A'_3, le tangenti principali in uno di essi giacciono nei piani osculatori, passanti per questo punto, e vengono dunque proiettate da O in coppie di rette coniugate nelle anzidette involuzioni. Concludiamo quindi: *le rette per ciascuno dei punti A_1, A_2, A_3, tangenti alle quartiche immagini delle sezioni piane di F_4, sono associate a coppie e costituiscono tre involuzioni φ_1, φ_2, φ_3, nelle quali le rette A_1A_2 e A_1A_3, A_2A_3 e A_2A_1, A_3A_1 e A_3A_2 sono coniugate.* Risulta così quali siano le immagini delle rette doppie: infatti *i punti di a_i sono in corrispondenza* [1, 2] *con i punti dell'intorno di primo ordine di A_i.*

Per ridurre ora il sistema delle quartiche, immagini delle sezioni piane di F_4, ad un sistema di coniche, basta eseguire una trasformazione quadratica, prendendo i punti A_1, A_2, A_3 come fondamentali. Il sistema lineare ∞^3 delle C_4, con i tre punti A_1, A_2, A_3 doppi, si trasforma in un sistema lineare ∞^3 di coniche, C_2, privo di punti base; le rette doppie sono rappresentate da tre particolari rette, costituenti un triangolo $A'_1A'_2A'_3$, sopra le quali le coniche del sistema non segano una g_2^2, ma una involuzione g_2^1; infine il punto triplo ha come immagine la terna dei punti A'_1, A'_2, A'_3.

Ci siamo così ricondotti al sistema lineare di ∞^3 coniche senza punti base $|\, C_2 \,|$, dal quale avevamo preso le mosse. Di più abbiamo trovato che per un sistema di questo tipo esistono sempre *tre* rette particolari, sopra le quali le coniche C_2 segano una involuzione g_2^1, e che sopra ognuna di queste rette una coppia dell'involuzione è costituita dai punti d'incontro con le altre due. Sarebbe facile stabilire direttamente questo risultato, ma non ci tratteniamo su ciò.

NOTA. - *La superficie di* STEINER, *F_4, non possiede invarianti assoluti*: due F_4 qualunque, con rette doppie distinte, sono

sempre proiettive. Ciò risulta subito da un semplice computo di costanti. Osserviamo all'uopo che le F_4 non ammettono infinite trasformazioni proiettive in se stesse e dipendono da 15 parametri come le omografie dello spazio. Per giustificare questa proposizione, consideriamo anzitutto le F_4 con un punto triplo e tre rette doppie assegnate. Esse sono ∞^6: infatti le superficie generali del quarto ordine sono ∞^{34} ed occorrono 10 condizioni lineari per il possesso di un punto triplo assegnato e poi altre 6 condizioni lineari per il possesso di ognuna delle rette doppie uscenti dal punto triplo. Ciò posto, le superficie di STEINER dipenderanno appunto da $6 + 3 + 3.2 = 15$ parametri, c. v. d.

Si può anche riconoscere lo stesso fatto riferendosi al sistema lineare ∞^3 di coniche rappresentativo della F_4 nel piano. C'è fra le coniche del piano, riguardate una volta come luogo e l'altra come inviluppo, una relazione di armonia definita dall'annullarsi di un invariante simultaneo (l'*armonizzante* [1]), per la quale ad ogni sistema lineare ∞^3 viene associata una schiera di coniche inviluppo o dualmente un fascio, e viceversa; così i sistemi lineari ∞^3, al pari dei fasci di coniche, risultano privi d'invarianti assoluti.

La superficie F_4 dà luogo ad un caso particolare, quando due delle tre rette doppie diventano infinitamente vicine. Una particolarizzazione ulteriore corrisponde al caso in cui tutte e tre queste rette si avvicinino indefinitamente succedendosi sopra una falda di cono.

Infine vi è una particolarizzazione, per cui la F_4 cessa di essere una vera superficie di STEINER, contenente ∞^2 coniche C_2: è il cono del 4° ordine con tre rette doppie. In questo caso la superficie è ancora razionale, potendosi agevolmente rappresentare sul piano mediante un sistema lineare ∞^8 di quartiche con un punto triplo e tre punti base semplici infinitamente vicini; ma questo sistema, che pure si ottiene come limite di un sistema lineare di quartiche con tre punti base doppi, non si lascia più

(1) Cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. II, Lib. III, Cap. I, pagg. 61-62.

ridurre ad un sistema di coniche, mediante una trasformazione quadratica (cfr. l'oss. a pag. 94).

NOTIZIA STORICA. - La superficie non rigata del quarto ordine, dotata di tre rette doppie concorrenti in un punto triplo, si chiama superficie di STEINER dal nome di J. STEINER, che (nel 1844) la considerò durante un suo soggiorno a Roma, e' soleva perciò chiamarla la « superficie romana » (*Römerfläche*). Lo STEINER [1] non pubblicò tuttavia nulla dei suoi risultati, giacchè la generazione proiettiva, mediante la quale egli definiva la sua superficie, limitata al campo reale, lasciava dubbio se la superficie fosse del quarto o del sesto ordine. I dubbi dello STEINER furono rimossi da K. WEIERSTRASS [2], il quale stabilì analiticamente che la superficie era effettivamente del quart'ordine e ne diede anche una rappresentazione parametrica con forme quadratiche di tre parametri, dimostrandone così la razionalità. Successivamente la superficie di Steiner fu ritrovata da E. E. KUMMER [3], che si era proposto la determinazione di tutte le superficie del quarto ordine contenenti infinite coniche. Seguirono immediatamente le ricerche di H. SCHROETER [4], di A. CLEBSCH [5] e di L. CREMONA [6]; quest'ultimo in ispecie dimostrò, mediante la rappresentazione piana, che le asintotiche della superficie di Steiner sono curve algebriche del quarto ordine ed osservò i due casi particolari, in cui due o tutte e tre le rette doppie della

---

[1] Cfr. JACOB STEINER'S: *Gesammelte Werke* (Berlino 1882), Vol. II, pag. 723.

[2] Cfr. l'appendice alle opere di J. STEINER sopracitate, pag. 741; e *Mathematische Werke* di K. WEIERSTRASS (Berlino 1903), Bd. III, pag. 179.

[3] Cfr. E. E. KUMMER: *Über die Flächen vierten Grades, auf welche Schaaren von Kegelschnitten liegen;* « Crelle's Journal », Bd. 64, 1865.

[4] Cfr. H. SCHROETER: *Über die Steiner-sche Fläche vierten Grades,* « Crelle's Journal », Bd. 64, 1865.

[5] Cfr. A. CLEBSCH: *Über die Steiner-sche Fläche*; « Crelle's Journal », Bd. 67, 1867.

[6] Cfr. L. CREMONA: *Rappresentazione della superficie di Steiner e delle superficie gobbe di terzo grado sopra un piano*; « Rend. Ist. Lomb. », Serie I, Vol. IV (1867). Opere di L. CREMONA. Tomo II, pag. 389.

superficie si avvicinano indefinitamente. (Tuttavia il primo dei nominati due casi era già stato indicato dal CLEBSCH).

Sulla superficie di STEINER *le sezioni piane ottenute con piani tangenti* (essendo delle quartiche con quattro punti doppi ed essendo la superficie non rigata) *sono spezzate in due coniche.* L'importanza di tale proprietà deriva dal fatto che *il possesso di* ∞^2 *sezioni piane spezzate caratterizza la superficie di* STEINER, quando si prescinda dalle superficie rigate, per le quali le sezioni tangenti sono evidentemente riducibili, contenendo la generatrice che passa per il punto di contatto. Su questo teorema di KRONECKER-CASTELNUOVO, ritorneremo più avanti; rimandiamo pertanto anche le relative notizie storiche.

ESERCIZI. - I) Dimostrare che in un sistema lineare ∞^3 di coniche, rappresentativo di una superficie di STEINER, esistono *quattro rette doppie.* La schiera delle coniche tangenti alle nominate rette è associata per *armonia* al dato sistema lineare ∞^3. Sulla superficie di STEINER le coniche della schiera rappresentano delle curve gobbe del quarto ordine, che sono le *asintotiche* della superficie.

II) Determinare le trasformazioni birazionali dello spazio in cui ai piani corrispondono superficie di STEINER. Il primo tipo che si incontra è una trasformazione (4,2), che nasce dall'inversa della trasformazione quadratica di terza specie.

23. La superficie di Veronese e le sue proiezioni.

Un sistema lineare ∞^3 di coniche, privo di punti base, non è completo, essendo contenuto nel sistema lineare ∞^5 di tutte le coniche del piano. Di qui segue che la *superficie di* STEINER *non è normale,* ma si può considerare come proiezione (da una retta generica) di una superficie normale F'_4 di S_5, la quale è rappresentata sul piano dal sistema completo ∞^5 di tutte le coniche. Questa superficie dicesi *superficie di* VERONESE.

La superficie di VERONESE si può anche costruire direttamente a partire dalla superficie di STEINER F_4, osservando che il sistema lineare ∞^3 delle sezioni piane della F_4 si lascia ampliare in un

sistema lineare completo di dimensione 5. Si considerino infatti le ∞^5 superficie cubiche, che hanno un punto doppio nel punto triplo della F_4 e passano per le tre rette doppie e per una conica K_2 (che si appoggia in un punto a ciascuna retta doppia) della F_4 (1). Le nominate superficie cubiche segano ulteriormente la F_4 in ∞^5 quartiche gobbe, fra le quali sono però contenute le ∞^3 quartiche sezioni piane della F_4, in corrispondenza alle superficie cubiche spezzate nel cono quadrico, che dal punto triplo proietta la conica K_2, ed in un piano qualunque. Ponendo una omografia tra le ∞^5 superficie cubiche e gli ∞^5 iperpiani dello spazio S_5, otteniamo direttamente la superficie di VERONESE, della quale la superficie di STEINER è proiezione (da una retta esterna).

Risulta evidente dalla rappresentazione piana che la superficie di STEINER e la superficie di VERONESE possiedono ∞^2 coniche: le ∞^2 rette del piano, le quali bisecano le coniche immagini delle sezioni piane, rappresentano infatti (tutte e sole) le coniche delle nostre superficie.

Nel caso della superficie di STEINER le rette del piano rappresentativo hanno un punto comune con le rette, immagini delle rette doppie della superficie, e quindi si ha che: le coniche della superficie di STEINER si appoggiano alle tre rette doppie della superficie. Il lettore potrà giustificare immediatamente questo risultato anche sulla superficie stessa.

Il possesso di ∞^2 coniche caratterizza la superficie di VERONESE e le sue proiezioni, cioè: *Una superficie che contiene* ∞^2 *coniche è la superficie di* VERONESE *od una sua proiezione.* Se invero su di una superficie F esiste un sistema algebrico Σ (irriducibile) ∞^2 di coniche, per un punto generico di F debbono passare ∞^1 coniche di Σ. Le coniche passanti per i punti di una conica di Σ costituiscono perciò tutto il sistema stesso, in guisa che due coniche di Σ si segano almeno in un punto. Due ipotesi possono allora pre-

(1) Si vede subito (e lo facciamo osservare più avanti) che sulla superficie di STEINER esistono ∞^2 coniche irriducibili, non passanti per il punto triplo ed appoggiantisi in un punto a ciascuna retta doppia.

sentarsi: due coniche di Σ si segano in un punto variabile, ovvero in più di un punto variabile.

Supponiamo da prima che due coniche di Σ si intersechino in un punto variabile. Questa ipotesi basta a dimostrare che la F è razionale e rappresentabile punto per punto su di un piano, in modo che alle curve del sistema Σ corrispondano le rette del piano ed alle sezioni iperpiani delle coniche. Osserviamo all'uopo che per due punti generici di F passa una ed una sola conica; inoltre le ∞^1 coniche, che escono da un punto P_1 generico di F costituiscono un fascio *razionale*, ogni conica potendosi far corrispondere alla sua tangente uscente da P_1.

Scelti allora due punti P_1 e P_2 di F e due punti P'_1 e P'_2 in un piano π, è possibile porre una proiettività tra il fascio delle coniche uscenti rispettivamente da P_1 e P_2 ed il fascio delle rette uscenti rispettivamente da P'_1 e P'_2 in modo che alla conica comune ai due fasci P_1 e P_2 corrisponda la retta comune ai due fasci P'_1 e P'_2. Ad ogni punto P di F (per il quale passa una conica K'_2 del fascio, che ha centro in P_1 ed una conica K''_2 del fascio, che ha centro in P_2) si faccia corrispondere il punto P' di π il quale è l'intersezione delle due rette p' e p'' corrispondenti a K'_2 e a K''_2 nelle proiettività anzidette. Ad ogni punto generico di F viene così a corrispondere un punto del piano π e, viceversa, ogni punto generico P' di π è immagine di un unico punto P di F. La superficie F è dunque razionale; e le immagini delle sue coniche sono le rette del piano π: le immagini delle sezioni iperpiane sono perciò delle coniche. Ma una superficie rappresentata su di un piano da un sistema lineare di coniche è la superficie di VERONESE o una sua proiezione.

Discutiamo la seconda ipotesi, cioè che due coniche di Σ si seghino in più di un punto variabile.

In questa ipotesi due coniche di Σ si intersecano in *due* punti: se infatti due coniche si intersecassero in più di due punti, tutte le coniche di Σ sarebbero in un piano, ciò che è assurdo se la superficie F stessa non è un piano.

Due coniche di Σ si intersechino dunque in due punti variabili. Due coniche (non complanari) determinano un S_3; ed in

questo S_3 deve stare ogni conica di Σ, giacchè i quattro punti in cui tale conica sega quelle due coniche non possono essere in linea retta. Ne segue che una quadrica passante per due coniche (non complanari) di Σ e per un punto generico di F contiene tutte le coniche di F, coincidendo così con questa superficie. La nostra ipotesi porta dunque a concludere che la F è una quadrica; ma una quadrica si ottiene dalla superficie di VERONESE per proiezione da una sua corda.

NOTIZIA STORICA. - Della superficie di VERONESE si trova un cenno in un lavoro di A. CAYLEY [1]. Successivamente essa venne diffusamente studiata da G. VERONESE [2] e da C. SEGRE [3]. Per molte proprietà caratteristiche della superficie di VERONESE, sia algebriche che differenziali, cfr. E. BERTINI: *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*; II ed., 1923.

---

[1] Cfr. A. CAYLEY: *On the curves which satisfy given conditions*; « Phil. Transactions of the R. Society of London », Vol. 158, 1868.

[2] Cfr. G. VERONESE: *La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario*; « Memorie della R. Acc. dei Lincei », Serie III, Vol. 19, 1884.

[3] Cfr. C. SEGRE: *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano e alla sua rappresentazione sulla geometria dei complessi lineari di rette;* « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », Vol. XX, 1855.

CAPITOLO V

LA SUPERFICIE DEL QUARTO ORDINE CON CUBICA GOBBA DOPPIA O RETTA TRIPLA

24. Rappresentazione piana della superficie del quart'ordine con cubica gobba doppia.

Passiamo allo studio dei sistemi lineari di cubiche C_3, di dimensione 3 e grado 4, rappresentativi di superficie razionali del quarto ordine. In questo capitolo ci occuperemo del caso in cui la curva generica del sistema $| C_3 |$ possegga un punto base doppio O e basterà aggiungere un ulteriore punto base semplice A perchè il grado diventi 4, giacchè delle 9 intersezioni di due cubiche del sistema, 4 sono assorbite dal punto O ed *una* da A.

Le cubiche, che possiedono un punto doppio O ed un punto semplice A, sono $\infty^{9-3-1} = \infty^5$, sicchè un sistema lineare di cubiche di questo tipo che abbia la dimensione 3, riesce *incompleto* e contenuto in un sistema completo di dimensione 5.

Risulta immediatamente che la superficie F_4, rappresentata sul piano in guisa che le immagini delle sue sezioni piane sieno le curve di un tale sistema $\infty^3 | C_3 |$, è *rigata*: infatti le rette del fascio che ha come centro il punto doppio O sono unisecanti le immagini delle sezioni piane di F_4 e perciò danno curve unisecanti le sezioni piane di F_4, cioè rette.

Ma poichè le sezioni piane di F_4 sono di genere zero, la sezione piana generica sarà dotata o di tre punti doppi, ovvero di un punto triplo. Ne segue che la F_4 sarà dotata o di una linea doppia del terzo ordine, che costituirà una cubica gobba riducibile o irriducibile (1), ovvero di una retta tripla.

---

(1) Questa asserzione verrà esaminata e giustificata nella nota che segue a pag. 96.

L'esistenza di F_4 con simili linee multiple si prova a priori costruendo la loro equazione. Ciò non presenta alcuna difficoltà per il caso di una F_4 con retta tripla; una F_4 irriducibile con cubica gobba doppia si ottiene combinando linearmente due particolari F_4, costituite da coppie di quadriche passanti per la medesima K_3.

È chiaro a priori che le F_4 con cubica gobba doppia sono rigate, ove si escluda il caso che codesta cubica degeneri in tre rette per un punto; giacchè, escluso questo caso, le corde della cubica, costituenti una congruenza del primo ordine, si appoggiano alla cubica stessa in punti distinti, e perciò la retta della congruenza che passa per un punto generico di F_4, deve appartenere alla superficie. Abbiamo visto d'altronde che le superficie del quart'ordine con tre rette doppie concorrenti in un punto non sono in generale rigate, costituendo la classe delle superficie di STEINER (cfr. cap. IV, n. 22). Quanto alle superficie F_4 con retta tripla, esse sono evidentemente rigate, perchè i piani per la retta tripla le segano secondo rette.

Ora si domanda se la superficie F_4 rappresentata sul piano da un sistema lineare ∞^3 di cubiche con O doppio ed A semplice sia, in generale, la F_4 dotata di cubica gobba doppia ovvero la F_4 con retta tripla.

La risposta è che la F_4 (rappresentata sul piano dal più generale sistema $|C_3|$) è quella dotata di cubica gobba doppia. Proveremo infatti che i sistemi lineari ∞^3 di $C_3(O^2A)$ birazionalmente distinti sono (almeno) ∞^2, come le F_4 con K_3 doppia proiettivamente distinte; mentre le F_4 con retta tripla dipendono da un solo invariante assoluto.

Sviluppiamo in breve il computo di costanti sopra accennato. Per O ed A passano ∞^5 $C_3(O^2A)$; di conseguenza scegliere un sistema lineare ∞^3 di queste è come scegliere un S_3 in S_5, e ciò importa la determinazione di 8 parametri. Ma un sistema lineare ∞^3 di $C_3(O^2A)$ è trasformato in un altro dello stesso tipo dalle ∞ trasformazioni quadratiche che mutano in sè il sistema lineare delle coniche per O ed A, immagini delle ∞^6 omografie che mutano in sè la quadrica rappresentata sul piano dal detto sistema. Ne

deduciamo che, fissati O ed A, esistono (almeno) ∞^2 sistemi lineari ∞^3 $C_3(O^2A)$ birazionalmente distinti. Ma ogni altro sistema si deduce da uno dei nominati con una omografia. In definitiva vi sono perciò (almeno) ∞^2 sistemi lineari $|C_3|$ birazionalmente distinti.

Ora si prova che le F_4 dotate di cubica gobba doppia, proiettivamente distinte sono pure (almeno) ∞^2. Fissiamo perciò la cubica gobba K_3 e contiamo le F_4 che possiedono questa cubica gobba come doppia.

Le generatrici di una F_4 con la K_3 doppia si appoggiano alla K_3 in coppie di punti, giacchè la corda della K_3 che esce da un punto generico della F_4 appartiene alla rigata; e per ogni punto della K_3 passano due generatrici. Facciamo corrispondere due punti della K_3 quando stanno sulla medesima generatrice. Si genera così una corrispondenza [2, 2] simmetrica; e viceversa è facile riconoscere che congiungendo i punti coniugati di una siffatta corrispondenza sopra K_3 si ottengono le generatrici di una rigata del quarto grado con K_3 doppia. (Infatti le generatrici della rigata così definita, che si appoggiano ad una retta generica a, sono quattro come le coppie comuni a due corrispondenze [2, 2] simmetriche, una delle quali è data in questo caso dalla g^1_3 segata sulla K_3 dai piani per a). Ora le corrispondenze simmetriche sopra una K_3, o sopra una retta proiettiva, si definiscono algebricamente mediante equazioni simmetriche, del secondo grado separatamente rispetto ad x e ad y, dove figurano sei coefficienti omogenei: perciò le nostre F_4 con data cubica gobba doppia K_3 dipendono da cinque costanti.

Ricordando che le K_3 dello spazio sono ∞^{12}, ne deriva che le F_4 con cubica gobba doppia sono ∞^{17} e quindi che le F_4 con K_3 doppia proiettivamente distinte sono (almeno) ∞^2.

Le superficie F_4 con retta tripla r dipendono invece solamente da *un* invariante assoluto: giacchè data la retta, si hanno 12 parametri e non vi sono infinite trasformazioni proiettive della F_4 in sè. Invero se ciò fosse si troverebbe un'infinità (e quindi anche un gruppo continuo ∞^1) di omografie della F_4 in sè, lascianti fermi i punti della retta tripla: infatti le terne di piani tangenti

alla F_4 nei punti di r costituiscono una g_3^1 che avrà 4 coincidenze in corrispondenza ad una quaterna di punti cuspidali sulla r, che deve essere mutata in sè da tutte le omografie che trasformano in sè la F_4. Ora le omografie del nominato gruppo continuo ∞^1 non possono essere biassiali (la F_4 non avendo in generale altre direttrici rettilinee oltre la r); e, dovrebbero dunque trasformare in sè le sezioni piane d'un fascio, mentre queste non soddisfano in generale alle condizioni all'uopo occorrenti (1).

Il precedente computo dî costanti si conferma dimostrando direttamente che è sempre possibile rappresentare su di un piano π una F_4 con cubica gobba doppia, in modo che le immagini delle sezioni piane siano cubiche con un punto base doppio ed uno semplice. Sviluppiamo questa dimostrazione. Prendiamo la K_3 doppia ed una qualunque generatrice g della F_4, che si appoggerà alla K_3 in due punti. Le rette, che si appoggiano alla K_3 ed alla g (non passando per i punti comuni alle due linee) costituiscono una *congruenza del primo ordine* ed incontrano la F_4 in un solo punto variabile, essendo, per la F_4, la K_3 doppia e la g semplice.

Preso ora un piano qualunque π, facciamo corrispondere ad ogni punto P di F_4 il punto P', intersezione di π con la retta p della congruenza passante per P. Ad ogni punto P della superficie corrisponde così un punto P' di π; viceversa per ogni punto P' del piano passa una retta della congruenza, intersecante la F_4, fuori di K_3 e g, in un unico punto P, che corrisponde a P'. Si ottiene così una rappresentazione piana della F_4 con K_3 doppia. Vediamo quali curve siano immagini delle sezioni piane.

Consideriamo a questo scopo la rigata Φ, che ha come curve direttrici una generica sezione piana K_4, la cubica gobba K_3 e la retta g. Tenuto conto che la K_4 ha un punto comune con la g e tre punti doppi comuni con la K_3, mentre la g è corda della K_3, applicando il solito teorema di SALMON troviamo per il grado della rigata Φ :

$$n = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 - 1 \cdot 6 = 7.$$

(1) Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria*.... Vol. III, Lib. V, Cap. III, pag. 210.

La immagine della generica sezione piana su π sarà la sezione di Φ con π e quindi una curva del settimo ordine C_7.

Determiniamo per questa C_7 la molteplicità dei tre punti A_1, A_2, A_3 comuni alla K_3 ed al piano π, e del punto B comune a π ed alla g.

Basta a questo scopo valutare la molteplicità della K_3 e della g per la Φ.

Da un punto generico della K_3, la K_4 e la g sono proiettate secondo un cono del quart'ordine ed un piano, che si intersecano in quattro rette; una di queste rette passa per il punto comune a g ed alla K_4 ed è stata già tolta, valutando a 7 l'ordine di Φ. Ne segue che ogni punto della K_3 è *triplo* per la Φ e quindi i tre punti A_1, A_2, A_3 sono tripli per le immagini delle sezioni piane della F_4.

Preso ora un punto generico della g, da questo la K_4 e la K_3 sono proiettate secondo un cono del quarto e del terzo ordine rispettivamente, aventi dodici generatrici in comune. Son però da togliere le generatrici che vanno ai punti comuni alla K_3 ed alla K_4, il che riduce il numero delle generatrici di Φ, che partono da un punto della g, a sei, giacchè i tre punti comuni alla K_3 ed alla K_4 sono doppi per la K_4. Bisogna inoltre osservare che la stessa g è generatrice comune dei coni, che proiettano la K_3 e la K_4; infatti la K_4 ha un punto comune con g e g è corda della K_3; risulta da qui che g è generatrice doppia del cono proiettante la K_3 e quindi deve essere tolta *due* volte. In definitiva, la g è *quadrupla* per la Φ ed il punto B d'intersezione della g con π è quadruplo per le immagini delle sezioni piane di F_4.

Riepilogando: *Nella rappresentazione piana di F_4 ottenuta mediante la congruenza del primo ordine, che ha per direttrici la K_3 doppia ed una generatrice, le immagini delle sezioni piane di F_4 sono curve C_7 d'ordine 7 con tre punti base tripli A_1, A_2, A_3, un punto base quadruplo B, ed altri due punti base semplici.*

L'esistenza di questi ultimi punti, che non è stata riconosciuta innanzi, risulta dalla condizione che due C_7 si incontrino solamente in quattro punti variabili; d'altronde essi sono le traccie su π

di due generatrici di F_4, appoggiantisi alla K_3 ed alla g, che si potrebbero costruire direttamente.

Ciò posto, è facile — almeno in generale — passare dalla precedente rappresentazione ad un'altra, in cui le immagini delle sezioni piane siano cubiche. All'uopo basta operare due trasformazioni quadratiche.

Una prima trasformazione quadratica, che abbia i punti fondamentali in B, A_1 ed A_2, trasforma il nostro sistema in un *sistema di* C_4 *con un punto base triplo* A'_3 *e tre punti base semplici* B', O'_1, O'_2; una seconda trasformazione quadratica, in cui A'_3, O'_1 e O'_2 siano punti fondamentali, ci riconduce finalmente ad un sistema di C_3 *con un punto base* A''_3 *doppio ed un punto base* B'' *semplice*, che è il sistema dal quale abbiamo preso le mosse.

Osservazione. - La prima riduzione è sempre possibile, anche se A_1, A_2 diventino infinitamente vicini tra loro o a B, poichè questi tre punti, tenuto conto della loro molteplicità per le curve irriducibili C_7, non possono trovarsi in linea retta e, qualora si siano tutti e tre avvicinati, debbono succedersi sopra un ramo lineare.

Invece *la seconda riduzione viene a mancare* in alcuni casi, che occorre esaminare più da vicino. Anzitutto si noti che il punto triplo e due punti base semplici per il nostro sistema di quartiche irriducibili non possono cadere in linea retta. Perciò casi d'eccezione, in cui viene a mancare la trasformazione quadratica, potranno provenire soltanto dall'avvicinarsi indefinito di quei punti. Tuttavia una trasformazione quadratica riduttrice esisterà sempre, se fra i punti semplici base del sistema ve ne sia (almeno) uno proprio, cioè lontano dal punto triplo A'_3. Ugualmente la riduzione sarà ancora possibile se due punti semplici diventano infinitamente vicini ad A'_3, succedendosi sopra un ramo lineare, mentre il terzo è infinitamente vicino ad A'_3, secondo una direzione diversa. I casi d'eccezione sono dunque i seguenti:

a) tre punti semplici infinitamente vicini al punto triplo, in direzioni diverse, e casi particolari in cui (rimanendo sempre prossimi al punto triplo) due di essi vengono a succedersi sopra

un ramo cuspidale del secondo ordine, oppure tutti e tre sopra un ramo cuspidale del terzo ordine;

b) tre punti semplici succedentisi sopra un ramo cuspidale del secondo ordine.

Nel caso *a*) l'ordine del sistema delle quartiche non può essere in alcun modo abbassato, perchè la superficie rappresentata è un *cono razionale del quarto ordine* (1), l'intorno del punto triplo rappresentando un punto della superficie, tale che le sezioni piane per esso vengono spezzate in quattro rette. Invero il cono non può essere rappresentato sul piano mediante un sistema lineare di curve d'ordine minore di quattro, altrimenti le rette del piano sarebbero immagini di curve d'ordine minore di quattro, tracciate sopra il cono, mentre siffatte curve non esistono. D'altronde è facile vedere che i casi particolari, in cui ad es. due o tre dei punti semplici base del sistema di quartiche si succedono sopra un ramo cuspidale, si riducono al caso generale con una o due trasformazioni quadratiche: la particolarità di cui si discorre non è una particolarità della superficie conica rappresentata, ma dipende soltanto dal modo della rappresentazione (cfr. più avanti, n. 29).

Invece nel caso *b*) il nostro sistema può essere trasformato in un sistema di cubiche, non più con una sola, ma con *due trasformazioni quadratiche*. Una prima trasformazione quadratica, con due punti fondamentali A'_3, O'_1 e un terzo punto fondamentale proprio, varrà a trasformare il sistema in un altro, composto ugualmente di quartiche dotate di un punto triplo e di tre punti base (semplici) infinitamente vicini; ma questi si troveranno: due sopra un ramo lineare uscente dal punto triplo ed il terzo infinitamente vicino a questo in una direzione diversa. Per conseguenza i due primi punti semplici, insieme con il punto triplo, definiranno una seconda trasformazione quadratica, mercè la quale il sistema si abbassa al terzo ordine.

---

(1) Questo caso non può effettivamente presentarsi quando si parte da una superficie del quart'ordine con cubica doppia, suscettibile di essere rappresentata sul piano mediante la costruzione, che abbiamo sopra indicato.

NOTA. - A partire da un sistema lineare ∞^3 di cubiche $C_3(O^2A)$, abbiamo definito una rigata del quarto grado così rappresentata sul piano e si è riconosciuto che questa F_4 ammette in generale sezioni piane, dotate di tre punti doppi (che possono in particolare coincidere in un punto triplo); donde abbiamo dedotto che la F_4 stessa possiede una cubica gobba doppia. Ma a priori questa ultima deduzione non è perfetta, giacchè occorre indagare se la F_4 non possa invece possedere una linea doppia del terzo ordine composta di linee d'ordine inferiore, la quale *non* sia caso particolare di una cubica gobba irriducibile. Il dubbio che qui si presenta e che già innanzi accennammo, viene eliminato dalla costruzione diretta che ci ha permesso di rappresentare la F_4 con cubica gobba doppia sopra il piano, tenuto conto del fatto che i sistemi lineari ∞^3 di $C_3(O^2A)$ costituiscono una sola famiglia. Tuttavia giova esaminare direttamente a quali casi possibili conduca l'ipotesi di una F_4 dotata di una linea doppia del terzo ordine.

Premesso che la nostra linea non può certo giacere in un piano (poichè questo intersecherebbe la F_4 secondo una sestica) le curve, essenzialmente spaziali d'ordine tre, che non si riducano ad una retta tripla, danno luogo ai casi seguenti:

a) cubica gobba irriducibile,

b) retta e conica, che soltanto quando siano incidenti costituiscono un caso particolare della cubica gobba (irriducibile),

c) tre rette, due delle quali sghembe tra loro: la linea così formata è un caso particolare della cubica gobba irriducibile soltanto se la terza retta si appoggia alle due nominate,

d) tre rette uscenti da un punto (e non complanari).

Si vede che qualora una superficie del 4° ordine F_4 irriducibile possieda come doppia una curva del tipo *b*), la conica e la retta che la costituiscono devono essere incidenti, giacchè la conica, contata due volte, costituisce una sezione piana completa della F_4 ed una retta della F_4 deve perciò appoggiarsi ad essa.

Quanto al caso *c*) è chiaro che una F_4 irriducibile non può possedere tre rette doppie a due a due sghembe, perchè si ridur-

rebbe ad una quadrica contata due volte. Se due rette sono incidenti si ricade nel caso *b*) già discusso.

Infine nell'ipotesi *d*) la linea del terzo ordine costituita da tre rette per un punto è bensì un caso particolare della linea formata da due rette sghembe e da una terza ad esse incidente (e quindi della cubica gobba irriducibile), ma, come si è visto, esistono tuttavia superficie del quarto ordine, possedenti tre rette doppie a, b, c, per un punto che non sono affatto casi particolari della nostra rigata F_4. Tali sono invero le superficie di STEINER.

Certo è possibile particolarizzare una F_4 con K_3 doppia, in modo che la K_3 si riduca a tre rette a, b, c per un punto O; ma in tal guisa si ottiene come superficie limite un cono razionale di vertice O, che invero rientra come caso particolare (improprio) nella famiglia delle superficie di STEINER.

Fuori dei casi particolari sopra nominati resta ancora da far vedere che la F_4 con retta tripla si presenta come caso limite della F_4 con K_3 doppia. A questo scopo sono rivolte le considerazioni del numero seguente.

25. Rappresentazione piana della superficie del quarto ordine con retta tripla.

Riferiamoci ad una superficie F_4, dotata di retta tripla r, ed incominciamo col provare che questa F_4 è rappresentabile sul piano (come la F_4 con K_3 doppia) in modo che le immagini delle sue sezioni piane siano cubiche per un punto doppio ed uno semplice.

Ciò risulta subito proiettando la F_4 da un generico punto O della retta tripla r. Se la F_4 è generale, per ogni punto della r passano tre rette della F_4 *non complanari* e se il centro di proiezione O è scelto genericamente sulla r, codeste rette saranno *distinte*. Preso un piano generico π, chiamiamo A l'intersezione della r con π ed A_1, A_2, A_3 i tre punti d'intersezione delle tre rette a_1, a_2, a_3 uscenti da O con π. Una sezione piana generica della F_4 ha un punto triplo nella intersezione del suo piano con la r e tre punti semplici nelle intersezioni con a_1, a_2, a_3. Di conseguenza quando si proietta da O si ha un cono del quarto ordine con la r generatrice tripla ed a_1, a_2, a_3 generatrici semplici; e

segando con il piano π si ha una quartica con A triplo ed A_1, A_2, A_3 semplici, che è la immagine della sezione piana generica.

Operando una trasformazione quadratica, per la quale A, A_1, A_2, siano punti fondamentali, le immagini delle sezioni piane diventano cubiche con un punto base doppio ed uno semplice (1).

Poichè le F_4 con retta tripla sono ∞^{16}, mentre le F_4 con K_3 doppia sono ∞^{17}, possiamo dire che le F_4 con retta tripla costituiscono un caso particolare della F_4 con K_3 doppia e si pone di conseguenza il problema di determinare quale particolarizzazione riceva un sistema lineare $\infty^3 \mid C_3 \mid$ per O doppio ed A semplice, affinchè rappresenti una F_4 con retta tripla.

Ritorniamo perciò a supporre $\mid C_3 \mid$ generico e domandiamoci come venga rappresentata la cubica gobba doppia di F_4, per la quale le curve di C_3 sono le immagini delle sezioni piane.

Ragioniamo così: anzitutto le intersezioni della F_4 con le quadriche dello spazio sono rappresentate da sestiche, con O quadruplo ed A doppio: infatti le coppie di piani, che sono delle particolari quadriche, hanno come intersezioni complete due sezioni piane, e l'insieme di due sezioni piane è appunto una sestica con O quadruplo ed A doppio. Ciò premesso, ricordiamo (cfr. cap. I, n. 2) che l'intersezione della F_4 con una quadrica per la K_3 doppia è costituita da due rette, che risultano corde della K_3; ne segue che la K_3 doppia sarà rappresentata da una certa curva, che insieme alle immagini di due generatrici dovrà costituire una sestica con O quadruplo ed A doppio. Ma le generatrici di F_4 sono rappresentate dalle rette per O (che sono curve unisecanti le immagini delle sezioni piane), quindi *l'immagine della K_3 doppia della F_4 è in generale una quartica ellittica C_4 con O ed A doppi.*

Preso un punto P sopra la K_3 doppia di F_4, ad esso ci si può avvicinare sopra l'una o sopra l'altra delle due falde, che si attraversano lungo la K_3. Corrispondentemente a questo punto avremo sulla C_4 due punti P' e P'' e si arriverà per continuità

(1) Abbiamo già discusso a pag. 94 i casi particolari cui può dar luogo questa riduzione ed in ispecie i casi in cui può venire a mancare.

o in P' o in P'' secondo che a P ci si avvicini sulla F_4 su una o sull'altra falda. In altre parole, i punti della linea doppia K_3 sono rappresentati da *coppie di punti* della linea C_4. Se l'immagine di una sezione piana passa per un punto P' di C_4, essa deve passare *necessariamente* anche per il punto coniugato P'', che insieme a P' rappresenta un *unico* punto della K_3.

Le coppie di punti $P'P''$ (*coppie neutre* per il sistema ∞^3 delle immagini delle sezioni piane di F_4) sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una cubica gobba, che è una curva razionale; pertanto esse sono coppie di una involuzione razionale g_2^1 sopra la quartica C_4: i quattro punti doppi della g_2^1 rispondono a quattro punti cuspidali sulla cubica gobba doppia.

Passiamo al caso particolare in cui il sistema di ∞^3 cubiche con O doppio ed A semplice rappresenti una F_4 con retta tripla r. La retta r fa parte di ∞^1 sezioni piane, per le quali la curva intersezione con F_4 consta della r contata tre volte e di una retta residua. Nella rappresentazione piana le generatrici di F_4 sono le rette per O; ne deduciamo che *la retta tripla r è rappresentata da una certa conica C_2 passante per O ed A*, che (contata due volte) si può considerare come limite di una C_4 con O ed A doppi. Con ragionamento analogo a quello seguito nel caso della cubica gobba doppia, troveremo qui che ad un punto della retta tripla corrispondono 3 punti di C_2, costituenti una *terna neutra* per il sistema delle C_3 immagini delle sezioni piane di F_4, sicchè sulla C_2 si avrà una g_3^1 segata dalle dette C_3.

Guardando dunque al piano rappresentativo, possiamo considerare la F_4 con retta tripla come il caso limite della F_4 con K_3 doppia, che si ottiene quando la C_4 con O ed A doppi, immagine della K_3 doppia della F_4, si riduce per continuità ad una conica doppia per O ed A, con quattro punti di diramazione; e la g_2^1 segata nel caso generale dalle C_3 sulla C_4 diventa sopra la conica doppia una particolare corrispondenza $[2, 2]$ involutoria, dove le coppie di punti coniugati appartengono alle terne della g_3^1 segate sulla conica dalle C_3.

Questo passaggio al limite si renderà più chiaro dallo studio, che svolgeremo più innanzi, della rigata razionale normale di S_5,

dalla quale tanto la F_4 con K_3 doppia, quanto la F_4 con retta tripla, provengono per proiezione.

Per ora possiamo enunciare: *Preso un sistema lineare generico di* ∞^3 *cubiche con* O *doppio ed* A *semplice, esiste una* C_4 *passante doppiamente per* O *e per* A, *sulla quale le* C_3 *non segano una* g_6^3 *semplice, ma una serie composta con le coppie di una* g_2^1. *In particolare, la* C_4 *può ridursi ad una conica* C_2 (*contata due volte*) *passante per* O *ed* A, *su cui le* C_3 *seghino una* g_3^1.

È facile anche dimostrare inversamente la seguente proposizione: *Presa ad arbitrio una* C_4 *con due punti doppi* O *ed* A, *si può costruire* (in un numero finito di modi) *un sistema lineare* ∞^3 *di cubiche con* O *doppio ed* A *semplice, che sega la* C_4 *secondo una* g_6^3 *composta con le coppie di una* g_2^1; *e nel caso particolare, in cui la* C_4 *con* O *ed* A *doppi si riduca ad una conica* C_2 (contata due volte), *esistono infiniti sistemi lineari di* ∞^3 C_3 *con* O *doppio ed* A *semplice, che segano sulla* C_2 *una* g_3^1.

Invero, il sistema completo ∞^5 delle $C_3(O^2A)$ sega sulla $C_4(O^2A^2)$ una g_6^5, che si può trisecare [1] in $3^2 = 9$ modi distinti, dando luogo a 9 g_2^1. Le g_6^3, i cui gruppi sono composti con le coppie delle nominate g_2^1, sono segate sulla $C_4(O^2A^2)$ dai sistemi lineari ∞^3 di $C_3(O^2A)$ del tipo richiesto.

Nel caso particolare, in cui si tratti di costruire un sistema lineare $|C_3|$ che seghi su di una data conica C_2 una g_3^1, basta combinare linearmente un fascio generico di cubiche per O doppio ed A semplice, con il fascio costituito dalle rette per O completate con la conica C_2. Si ottiene così sulla C_2 una g_3^1.

26. Invarianti assoluti.

La rappresentazione piana della rigata F_4 dove si è messa in evidenza la immagine della K_3 doppia, porta a riconoscere gli invarianti assoluti da cui dipende la definizione proiettiva della F_4. Si è visto infatti che il sistema ∞^3 rappresentativo della F_4

---

[1] Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. III, pag. 395 e Vol. IV, Lib. VI, Cap. III, pag. 199.

riesce determinato (sebbene soltanto irrazionalmente) dalla scelta della quartica che ha i punti doppi O ed A; ed è chiaro che quartiche trasformabili l'una nell'altra con trasformazioni quadratiche del piano conducono a superficie proiettivamente identiche. Pertanto gli invarianti assoluti della F_4 si riconducono agli invarianti delle C_4 ellittiche con due punti doppi O, A, considerate rispetto alle ∞^6 trasformazioni quadratiche, che mutano in sè il sistema delle coniche per O, A (cfr. pag. 90). Poichè le $C_4(O^2A^2)$ sono ∞^8 e non vi sono infinite delle dette trasformazioni che mutino in sè una $C_4(O^2A^2)$, non essendovi infinite omografie dello spazio che mutino in sè una quartica di prima specie, ne viene che una $C_4(O^2A^2)$ dà luogo a *due invarianti o moduli*: uno è l'invariante della curva ellittica (birapporto delle quattro tangenti condotte da uno dei punti doppi alla curva), l'altro esprime per così dire la *distanza* delle due g_2^1 segnate sulla curva rispettivamente dalle rette per i due punti doppi. Nella teoria delle funzioni ellittiche questa « distanza » viene espressa dalla differenza delle somme dell'integrale ellittico di prima specie relative alle coppie di punti delle due g_2^1 (1).

Passando ora dal piano rappresentativo alla F_4 dotata di cubica gobba doppia, si trova direttamente per questa il significato dei due invarianti assoluti. Invero le generatrici della rigata segano sulla K_3 le coppie di una corrispondenza [2, 2] involutoria. Reciprocamente, segnata ad arbitrio sopra una *cubica gobba* K_3 dello spazio una *corrispondenza* [2, 2] *involutoria*, le rette che uniscono i punti coniugati generano una *rigata di quarto grado*.

Ed in relazione alla corrispondenza [2, 2] che sopra la K_3 definisce la rigata F_4 è facile mettere in evidenza direttamente due invarianti assoluti che rispondono a quelli sopra definiti e che possono sostituirsi ad essi per determinare la F_4. A tale scopo si immagini proiettata la K_3 sopra una conica K_2: una corrispondenza [2, 2] involutoria sopra K_2 è una serie quadratica di cop-

(1) Cfr. F. ENRIQUES e O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. IV, Lib. VI, Cap. I, pag. 71-79.

pie di punti, segata dunque su K_2, dalle rette inviluppanti una seconda conica K'_2; la corrispondenza $[2, 2]$ possiede come punti di diramazione i punti d'intersezione di K_2, e K'_2 e dipende da due invarianti assoluti, che sono quelli del sistema delle due coniche, cioè i due invarianti assoluti della omografia prodotto delle due polarità rispetto a K_2 e a K'_2, ovvero i due birapporti dei quattro punti L, M, N, P (comuni a K_2 e a K'_2) considerati rispettivamente sulle due coniche.

Si possono anche assumere come invarianti assoluti del sistema delle due coniche per L, M, N, P: il birapporto $(L\,M\,N\,P)$ sopra una delle due coniche e il birapporto $(L'\,M'\,N'\,P')$ dei quattro punti intersezioni della conica stessa con le tangenti in L, M, N, P all'altra conica. Questi due ultimi birapporti hanno un chiaro significato per riguardo alla F_4 con K_3 doppia: sono, uno *il birapporto dei quattro punti cuspidali della rigata* F_4 *sopra* K_3, e l'altro *il birapporto dei quattro punti ulteriori intersezioni della* K_3 *con le generatrici per i detti punti cuspidali* [1].

Le rigate F_4 che, in luogo di una cubica gobba doppia, possiedono una retta tripla, corrispondono ad una particolarizzazione della F_4 generale, sicchè la F_4 con retta tripla viene a dipendere da *un solo invariante assoluto.*

Riferendoci al piano rappresentativo abbiamo una conica (doppia) C_2 per O ed A, sopra la quale si ha una corrispondenza $[2, 2]$, definita da una g^4_3. Ora questa g^4_3 dipende essenzialmente dai suoi quattro punti doppi L, M, N, P, che determinano i punti di diramazione per la corrispondenza $[2, 2]$ e quindi dal loro birapporto: s'intende che dati L, M, N, P resta definito un numero finito (*due*) di g^4_3. In conseguenza si può dire che la rigata

---

[1] In ciò che si è detto si è tacitamente supposto che il secondo birapporto $(L'\,M'\,N'\,P')$ sia indipendente dal primo $(L\,M\,N\,P)$. Ciò si verifica riferendosi al sistema delle due coniche considerato innanzi; giacchè, tenendo fissa la prima conica K_2 e sopra di essa i punti L, M, N, P per cui debbono condursi le tangenti alla K'_2, si potrà costruire questa seconda conica in modo che per es. L', M' coincidano, in guisa che il birapporto $(L'M'N'P')$ diventi uguale ad 1.

F_4 con retta tripla dipende da *un invariante assoluto irrazionale, che è il birapporto dei quattro punti della retta tripla, per cui passa una falda cuspidale.*

NOTA. - Giova rilevare esplicitamente che la corrispondenza involutoria [2, 2] segnata sulla cubica gobba doppia K_3 di una F_4 dalle sue generatrici, può ridursi al caso particolare di una g_3^1, indipendentemente dalla degenerazione della cubica in una retta tripla; si ottengono in tal guisa *superficie F_4 con cubica gobba irriducibile, le cui generatrici si appoggiano ad una direttrice rettilinea.*

Se infatti si assumono sulla K_3 quattro punti L, M, N, P come punti cuspidali della rigata F_4, sappiamo che esistono due rette dello spazio, incidenti alle quattro tangenti alla cubica in L, M, N, P, per ognuna delle quali passano quattro piani tangenti alla cubica in L, M, N, P; le corde della cubica gobba, incidenti ad una di queste rette, formano appunto una rigata del tipo di cui si discorre, che ha la proprietà caratteristica di possedere una direttrice rettilinea. Se per questa F_4 particolare consideriamo la rappresentazione piana mediante le ∞^3 cubiche per O doppio ed A semplice, troviamo che il punto A deve cadere infinitamente vicino ad O, perchè soltanto in questa ipotesi la F_4 viene a possedere una direttrice rettilinea, che ha come immagine l'intorno di O. Frattanto in questo caso, la C_4 *ellittica* con O ed A doppi viene ad avere *due punti doppi infinitamente vicini*, sicchè si annulla quell'invariante assoluto di F_4 che abbiamo detto esprimere la « distanza » fra le due g_2^1.

27. La rigata razionale normale dello spazio S_5.

Lo studio della nostra superficie F_4 con cubica gobba doppia e dei suoi casi particolari si renderà più chiaro mercè la considerazione della rigata razionale normale di S_5, da cui la F_4 stessa può dedursi come proiezione.

Abbiamo già osservato che un sistema lineare ∞^3 di cubiche per un punto O doppio ed un punto A semplice non è completo, essendo contenuto in un sistema completo di dimensione 5. La ri-

gata razionale normale Φ_4 di S_5 è quella superficie, che è rappresentata sul piano in modo che il sistema delle sue sezioni iperpiane abbia come immagine il sistema (completo) delle ∞^5 cubiche per O doppio ed A semplice.

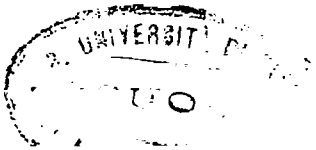
La medesima rigata Φ_4 si può anche costruire direttamente, a partire dalla F_4 con cubica gobba doppia K_3, osservando che il sistema lineare ∞^3 delle sezioni piane di F_4 si lascia ampliare in un sistema lineare completo di dimensione 5. Si considerino infatti le ∞^5 superficie cubiche, passanti per la cubica gobba doppia K_3 e per due generatrici di F_4 (che sono corde di K_3). Esse segano ulteriormente la F_4 in ∞^5 quartiche gobbe, fra le quali sono però contenute le ∞^3 quartiche sezioni piane, in corrispondenza a quelle superficie cubiche, che sono spezzate nella quadrica, contenente K_3 e le due anzidette generatrici, e in un piano qualunque. Ponendo una omografia fra queste ∞^5 superficie cubiche e gli ∞^5 iperpiani della spazio S_5, otteniamo direttamente la superficie Φ_4, della quale la F_4 è proiezione (da una retta esterna).

La Φ_4 contiene un sistema lineare ∞^8 di sestiche ellittiche L_6, normali in S_5, che hanno come immagini le ∞^8 C_4 passanti doppiamente per O e per A e che si ottengono anche direttamente come intersezione delle quadriche di S_5 contenenti due generatrici di Φ_4. Se si assume in S_5 una retta generica p, resta determinata su Φ_4 una L_6, la quale da p viene proiettata in una cubica gobba doppia K_3: questa K_3 sarà definita come luogo dei punti d'appoggio delle corde di Φ_4 che escono dai punti di p, per un punto di S_5 passando *una* corda di Φ_4.

Per giustificare queste asserzioni, studiamo brevemente il sistema delle corde di Φ_4.

Le corde della Φ_4 sono ∞^4; a priori queste corde riempiono tutto lo spazio S_5, ovvero generano una varietà a $5 - r$ dimensioni ($r \geq 1$), tale che per ogni punto di essa ne passino ∞^r. Dimostriamo che si verifica il primo caso, ossia che *la varietà delle corde di Φ_4 coincide con lo spazio S_5, per ogni punto generico di S_5 passando una sola corda.*

Osserviamo perciò che, se per un punto di S_5, fuori della Φ_4,



passano due corde di essa, il piano π di queste corde, avendo quattro punti comuni con la superficie Φ_4, la sega lungo una linea L: altrimenti un iperpiano generico, passante per π, segherebbe la Φ_4 in una quartica (irriducibile) razionale e normale, per la quale esisterebbero quattro punti in un piano, ciò che è assurdo. La linea L deve essere una conica, giacchè una retta, che non stia completamente su Φ_4, non può mai avere tre punti comuni con Φ_4, potendosi, in questa ipotesi, costruire un piano passante per quattro punti di Φ_4, ciò che abbiamo visto essere impossibile. Ne concludiamo che i punti di S_5 per i quali passa più di una corda di Φ_4 sono i punti giacenti in piani secanti la Φ_4 secondo coniche. Ora la Φ_4, rappresentata sul piano dalle cubiche per O doppio ed A semplice, contiene (in generale) un fascio di coniche, che ha come immagine il fascio delle rette per A. I piani di queste coniche formano in S_5 una varietà del terzo ordine V_3^3, che è proiettata da una retta r di S_5 in una serie ∞^1 del terz'ordine di piani, appartenente ad un S_3 triplo; ciò risulta dall'osservazione che per un punto P della F_4 (proiezione della superficie Φ_4) passano tre piani secanti la F_4 secondo coniche: cioè i due piani che contengono la generatrice di F_4 per P e una seconda generatrice incidente ad essa (in un punto d'appoggio alla cubica gobba doppia) e il piano che contiene la conica di F_4 per P.

Risulta di qui che la varietà dei piani di S_5 secanti Φ_4 secondo coniche è la V_3^3 generata dalle ∞^2 rette incidenti a tre piani qualunque della serie: invero se una retta incontra la V_3 (di S_5) in tre punti, essa vi appartiene per intero, giacchè un piano qualunque per essa e per un punto di V_3^3 ha con questa varietà più di tre e quindi infinite intersezioni.

Ora, la varietà delle corde di Φ_4 non può avere una dimensione minore di tre, giacchè deve contenere la V_3^3; non può nemmeno avere la dimensione tre, giacchè in questo caso da ogni punto di V_3^3 dovrebbero partire ∞^2 corde, mentre ne partono effettivamente solo ∞^1. Infine la dimensione della varietà delle corde di Φ_4 non può essere quattro: in questo caso infatti da ogni punto della varietà uscirebbero infinite corde, sicchè la varietà

coinciderebbe con la V_3^3 che è il luogo di tutti i punti di S_5 per i quali passano infinite corde di Φ_4. Ne segue che la varietà delle corde di Φ_4 coincide con lo spazio S_5, da ogni punto generico di S_5 partendo una sola corda di Φ_4.

Dopo ciò siamo in grado di comprendere più profondamente come la Φ_4 venga proiettata da una retta generica p in una F_4 con cubica gobba doppia. Infatti da ogni punto di p parte una corda di Φ_4: i punti d'appoggio di queste corde definiscono una curva di Φ_4, la quale, nella proiezione di Φ_4 da p nello spazio ordinario, dà luogo alla cubica gobba doppia di F_4; perciò il luogo dei punti d'appoggio delle ∞^1 corde anzidette è una curva ellittica normale L_6, cioè una curva di quel sistema lineare ∞^8, che abbiamo veduto essere rappresentato sul piano dalle ∞^8 $C_4(O^2A^2)$.

Inversamente, data una sestica ellittica L_6 di Φ_4 (che ha come immagine sul piano rappresentativo una quartica con O ed A doppi), esistono 9 rette di S_5, le quali godono della proprietà che la Φ_4, proiettata da esse, dà luogo ad una F_4 con cubica gobba doppia, proiezione della data L_6. La costruzione di queste 9 rette dipende dal problema di trisezione, che si è risoluto sul piano rappresentativo e che presenta qui un chiaro senso proiettivo. Si tratta sostanzialmente di determinare sulla L_6 le g_2^1 tali che le rette congiungenti le coppie di punti coniugati si appoggino ad un'altra retta (direttrice della rigata da esse formata): le dette 9 g_2^1 sono le serie dei punti di osculazione degli iperpiani biosculatori a L_6; si definisce una di tali serie prendendo ad arbitrio sulla curva un punto A, ed associandogli uno dei nove punti — B_1, B_2, ..., B_9 — che, per proiezione dal piano osculatore in A, danno flessi della cubica immagine.

Vediamo dunque che fra le rette, elementi dello spazio rigato S_5, e le curve L_6, formanti sopra la Φ_4 un sistema lineare ∞^8, intercede una corrispondenza [9, 1]: ad una retta p di S_5 risponde *una* L_6 (che viene proiettata da p in una cubica gobba K_3, doppia), e viceversa una L_6 nasce in generale da 9 rette di S_5, definite come si è visto innanzi. Ma la Φ_4 contiene un sistema lineare ∞^3 di cubiche L_3, rappresentate sul piano dalle ∞^3 coniche passanti per O ed A; e le L_6, che si riducono ad una

cubica L_3 contata due volte, danno luogo ad una eccezione essenziale per la corrispondenza: a ciascuna di queste L_3 corrisponde non più un numero finito di rette p, ma il sistema ∞^4 di tutte le rette, che giacciono nello spazio S_3 contenente la cubica L_3 (1). Così fra le ∞^8 rette di S_5 si trovano ∞^7 rette particolari, definite dall'appartenere agli ∞^3 spazi S_3 delle cubiche L_3 di Φ_4. Proiettando la Φ_4 da una di queste particolari rette si ottiene nello spazio ordinario una *rigata del quarto ordine F_4 con retta tripla*, che è l'immagine della L_3 corrispondente alla retta p. In tal guisa riesce chiarito in qual modo la F_4 con retta tripla si presenti come particolarizzazione della F_4 con K_3 doppia.

OSSERVAZIONE. - Si noti che due spazi S_3 contenenti una cubica gobba L_3 di Φ_4 non hanno a comune che la retta congiungente le due intersezioni delle L_3; perciò ad un asse di proiezione p, che non sia una corda di Φ_4, non può rispondere che una sola cubica gobba L_3. Se poi si proietta la Φ_4 da una sua corda, nasce evidentemente una quadrica.

28. Casi particolari di una superficie del quart'ordine con cubica gobba doppia: proiezioni di una rigata normale generale.

Giova ora esaminare alcuni casi particolari notevoli della nostra superficie F_4 con K_3 doppia. Le possibili particolarizzazioni si ottengono:

a) o particolarizzando la posizione dell'asse di proiezione p rispetto alla rigata razionale normale Φ_4 di S_5, ovvero

b) particolarizzando la stessa Φ_4.

E naturalmente si possono combinare le due specie di particolarizzazione.

---

(1) Vi sono altre L_6 (riducibili) che danno luogo ad una eccezione analoga, in quanto ad esse risponde non più un numero finito ma infinito di assi p: tali sono le L_6 spezzate in una conica ed in una quartica razionale normale, di cui diremo più avanti.

Riferiamoci da prima alla Φ_4 generale ed esaminiamo le posizioni particolari più notevoli, che possono darsi all'asse di proiezione p.

Se si prende l'asse di proiezione p in modo generico, sappiamo che le corde di Φ_4 uscenti dai punti di p si appoggiano ad una L_6 irriducibile e la Φ_4 per proiezione si riduce ad una F_4 con cubica gobba doppia; sul piano rappresentativo la cubica gobba doppia è rappresentata in questo caso da una quartica ellittica irriducibile passante doppiamente per O ed A, sulla quale le immagini delle sezioni piane segano una g_6^3, che è composta con le coppie di una g_2^1, dotata di quattro punti doppi. Corrispondentemente sulla F_4 la cubica gobba doppia ha un intorno irriducibile e sopra di essa vi sono quattro punti cuspidali.

Ma la sestica ellittica L_6 di Φ_4 può spezzarsi per posizioni particolari dell'asse di proiezione p. Senza sviluppare minutamente l'esame di questa possibilità, osserviamo che se le curve componenti la L_6 si mantengono fra loro distinte, lo spezzamento della L_6 dà luogo a due casi:

a) la superficie F_4 possiede come linea doppia una cubica gobba riducibile,

b) la superficie F_4 possiede una cubica gobba doppia irriducibile (nodale), nella quale si incrociano due falde distinte (in senso integrale e non soltanto differenziale) della superficie.

Si presenta ad es. il primo caso se la L_6 di Φ_4 si spezza in una conica ed in una quartica: è infatti impossibile che la proiezione di una conica da un asse p dia una cubica gobba irriducibile.

Ora si ha: *Data su* Φ_4 *una quartica* (razionale normale) L_4 *ed una conica* L_2, *esistono* ∞^1 *rette, per proiezione dalle quali la* Φ_4 *diventa una* F_4 *con cubica gobba doppia, spezzata in una conica ed in una retta, provenienti per proiezione rispettivamente dalla* L_4 *e dalla* L_2 *di* Φ_4. Infatti gli S_3 dell'S_4, in cui giace la L_4, segano sulla L_4 una g_4^4, la quale si può bisecare in *un* modo, dando luogo ad una g_2^2. Esistono perciò ∞^2 rette di S_4 (e quindi di S_5), le quali proiettano la L_4 in una conica doppia. Fra queste una semplice infinità, riesce formata da rette incidenti al piano π della L_2: infatti, come risulta dalla rappresenta-

zione piana, la conica L_2 sega la L_4 in una coppia di punti; e basta prendere una g_2^1 determinata da questa coppia e da un'altra coppia qualsivoglia di L_4, per determinare una retta p, incidente al piano della L_2 (essendo incidente alla retta che passa per i due punti comuni alla L_4 ed alla L_2) e tale che da essa la L_4 venga proiettata in una conica doppia. Dal punto comune alla p ed al piano π della L_2 partono infinite corde della Φ_4, le quali sono rette secanti la L_2, una sola riuscendo corda anche della L_4. Risulta così evidente che la superficie Φ_4, proiettata dalla retta p, dà come proiezione una rigata F_4 che possiede una linea doppia composta di una conica e di una retta (ad essa incidente).

Le rette p da noi trovate risultano incidenti al piano della conica L_2. Reciprocamente è chiaro che se si prende una retta p, incidente al piano di una conica di Φ_4, ossia incidente alla varietà V_3^3 formata dai piani delle coniche di Φ_4, e si proietta la Φ_4 dalla retta p, si ottiene una rigata F_4 dotata di una conica e di una retta doppie.

Riepilogando, possiamo dunque dire: *Vi sono delle sestiche* L_6 di Φ_4 *spezzate in una quartica* L_4 *ed in una conica* L_2*; ad ognuna di tali* L_6 *corrispondono* ∞^1 *assi e l'insieme di questi assi è caratterizzato dalla incidenza alla varietà* V_3^3 *formata dai piani delle coniche di* Φ_4 [1].

Per chi guardi al piano rappresentativo, la cubica gobba doppia spezzata è rappresentata da una quartica passante doppiamente per O ed A, la quale risulta spezzata in una retta r per A ed in una cubica $\overline{C}_3$ passante doppiamente per O e semplicemente per A: la retta r è l'immagine della retta doppia di F_4 e sopra di essa le immagini delle sezioni piane segano una g_2^1, che contiene la *coppia neutra* costituita dai punti P', P'' comuni alla r ed alla $\overline{C}_3$ (fuori di A); la cubica $C_3(O^2A)$ è invece immagine della

(1) L'esistenza di ∞^1 assi incidenti alla V_3^3 per ogni L_6 spezzata in una L_4 ed in una L_2 si può giustificare rapidamente ed a priori col seguente computo di costanti: le rette di S_5, le quali sono incidenti alla varietà V_3^3 sono ∞^7; d'altra parte le L_4 di Φ_4 sono ∞^5 e le combinazioni di esse con le ∞^1 coniche di Φ_4, ∞^6; poichè ad ogni retta (asse) di S_5 è associata *una* L_6, segue appunto che ad ogni L_6 spezzata in una L_4 ed in una L_2 corrispondono ∞^1 assi.

conica doppia di F_4 e le immagini delle sezioni piane segano sopra di essa una g_4^2 composta con le coppie di una g_2^1 che contiene la coppia neutra P', P''.

Inversamente, data ad arbitrio una $\overline{C}_3(O^2A)$ ed una retta r per A che si intersechino in due punti P', P'', è sempre possibile (in ∞^1 modi) costruire un sistema lineare di $C_3(O^2A)$, rappresentativo di una F_4, la cui linea doppia è spezzata in una retta, che ha per immagine la r, ed in una conica, che ha per immagine la $\overline{C}_3$. Si consideri a questo scopo la g_2^1 determinata sulla $\overline{C}_3$ dalla coppia neutra $P'P''$ e da una coppia di punti qualsivoglia $Q'Q''$.

Il sistema lineare rappresentativo della F_4 è costituito dalle ∞^3 $C_3(O^2A)$, passanti per una generica coppia di coppie della nominata g_2^1; questo sistema lineare $|C_3|$ sega infatti una g_2^1 anche sulla retta r, giacchè tutte le cubiche di $|C_3|$ passanti per P' passano di conseguenza per P''.

I due punti doppi della g_2^1 definita sulla $\overline{C}_3$ corrispondono a due punti cuspidali della F_4 giacenti sulla conica doppia; analogamente si hanno altri due punti doppi per la g_2^1 segata dal sistema $|C_3|$ sulla r ed a questi corrispondono due punti cuspidali della F_4 posti sulla sua retta doppia.

Abbiamo veduto che agli assi p, incidenti in *un* punto alla varietà V_3^3, corrispondono le L_6 spezzate in una conica L_2 ed in una quartica L_4; reciprocamente ad ogni L_6 così spezzata corrispondono ∞^1 assi. In particolare si può scegliere un asse p, il quale sia incidente alla varietà V_3^3 in *due* punti. La L_6 risulta allora spezzata in due coniche ed in due generatrici (1). Per i due punti comuni alla retta p ed alla V_3^3 passano due piani contenenti due coniche di Φ_4, le quali nella proiezione divengono due direttrici doppie (sghembe); le corde di Φ_4 che partono dai punti di p e non sono corde delle nominate due coniche, si appoggiano a due generatrici della Φ_4, che vengono proiettate in una generatrice doppia. Giungiamo dunque ad un tipo di F_4 *con cubica gobba doppia, spezzata in due direttrici doppie sghembe tra loro*

(1) Si vede dalla rappresentazione piana, nella quale le L_6 sono rappresentate da $C_4(O^2A^2)$, che una L_6 non può spezzarsi in tre coniche irriducibili, ma solamente in due coniche irriducibili e due generatrici.

ed in una generatrice doppia, che ad esse si appoggia. Ed è evidente che se è data a priori sulla Φ_4 una L_6 spezzata in due coniche ed in due generatrici, esistono ∞^2 rette, appoggiate in due punti alla V_3^3, per proiezione dalle quali la Φ_4 diviene una F_4 con cubica gobba doppia spezzata nel modo anzidetto: le ∞^2 rette sono quelle che si appoggiano in due punti generici alle corde delle due coniche determinate dai punti d'incontro con le due generatrici.

Nella rappresentazione piana la linea doppia della F_4 è rappresentata da una $C_4(O^2A^2)$, spezzata in due rette r' ed r'' per O ed in due rette s e t per A.

La retta s è immagine di una direttrice doppia e su di essa le $C_3(O^2A)$ immagini delle sezioni piane della F_4 segano una g_2^1, che contiene la coppia di punti, in cui la s sega le rette r' ed r''. Altrettanto vale per la retta t. La generatrice doppia della F_4 è invece rappresentata dalle rette r' ed r'', le quali risultano riferite proiettivamente, ad ogni coppia di punti omologhi corrispondendo un punto della generatrice doppia della F_4.

Se nel piano rappresentativo sono date a priori le rette r' ed r'' per O ed s e t per A, si può costruire in ∞^2 modi il sistema rappresentativo di una F_4, per la quale le s e t rappresentino due direttrici doppie e le rette r' ed r'' una (unica) generatrice doppia. Si prenda all'uopo una coppia di punti ad arbitrio sulla s ed una sulla t. Le nominate coppie insieme alle coppie di punti in cui la s e la t segano le rette r' ed r'' determinano una g_2^1 sulla s ed una sulla t. Il sistema rappresentativo richiesto è quello costituito dalle ∞^3 $C_3(O^2A)$ contenenti una coppia della g data sulla s ed una coppia della g_2^1 data sulla t.

Notiamo infine che la F_4 possiede due punti cuspidali sopra ciascuna direttrice doppia, mentre lungo la generatrice doppia si intersecano due falde in generale distinte della superficie. La generatrice doppia diviene *cuspidale* se nella rappresentazione piana le rette associate r' ed r'' divengono infinitamente vicine, riducendosi ad una retta contata due volte; in questo caso la generatrice doppia contiene uno dei due punti cuspidali esistenti su ciascuna direttrice doppia. La linea doppia della F_4 proviene per

proiezione da una L_6 di Φ_4, spezzata in due coniche ed in due generatrici infinitamente vicine.

Lo studioso completi questa discussione esaminando il caso in cui si avvicinino indefinitamente le rette s e t: si otterrà qui una F_4 con due direttrici doppie infinitamente vicine sghembe tra loro ed una generatrice doppia, che, in particolare, può riuscire cuspidale.

OSSERVAZIONE. - Può avvenire che l'asse di proiezione p sia incidente alla V^3, costituita dagli ∞^1 piani delle coniche di Φ_4, in *tre* punti: esso è allora *contenuto* nella V_3^3. Sia l'asse p contenuto nella V_3^3, senza tuttavia essere incidente alla Φ_4, ciò che porterebbe ad un abbassamento dell'ordine della superficie proiezione: in questa ipotesi da ogni punto P di p partono infinite corde della Φ_4 che sono secanti la conica L_2 di Φ_4, giacente nel piano di V_3^3, passante per P. Nella proiezione le coniche di Φ_4 diventano perciò delle rette doppie e quindi la F_4 si riduce ad una *quadrica contata due volte.*

Se in particolare l'asse p, sempre appartenendo alla V_3^3, è incidente alla Φ_4, esso appartiene al piano di una delle coniche di Φ_4 ovvero coincide con una generatrice di Φ_4: la Φ_4 si riduce allora per proiezione ad una quadrica.

Abbiamo esaminato i vari casi, nei quali la superficie F_4, che proviene dalla Φ_4 per proiezione da un asse p, è dotata di una cubica gobba doppia *riducibile,* proiezione di una L_6 di Φ_4 anche essa riducibile. Ma *la L_6 di Φ_4 può essere riducibile e proiettarsi in una cubica gobba doppia irriducibile, nella quale si incrocino due falde distinte* (distinte non solo in senso differenziale, ma anche secondo una veduta integrale) *della superficie.* Ciò succede se la L_6, rappresentata da una $C_4(O^2A^2)$, si spezza in due cubiche gobbe L_3, rappresentate da due coniche passanti per O ed A.

Dimostriamo che in questo caso, cioè quando si assuma su Φ_4, una L_6 costituita da una coppia di L_3, esistono *tre* rette di S_5 dalle quali la Φ_4 viene proiettata in una F_4 con cubica gobba doppia, proveniente dalla proiezione delle due L_3. Infatti due cubiche gobbe di Φ_4 (che sono rappresentate da una coppia di coniche per

O ed A), si segano in due punti P e Q; dal piano osculatore in un punto B di una L_3, l'altra L_3 viene proiettata in una cubica con nodo, dotata di tre flessi, ai quali corrispondono i tre punti B', B'', B'''; ed è facile vedere che (al variare di B) le coppie di punti BB', BB'', BB''' si corrispondono in *tre* proiettività, le quali differiscono tra loro per una proiettività ciclica del 3° ordine, coi punti uniti P e Q: infatti la corrispondenza stabilita fra i piani osculatori delle due cubiche gobbe L_3 è duale di quella che si otterrebbe segando due cubiche coi piani di due fasci proiettivi, aventi per assi le intersezioni di due coppie di piani osculatori corrispondenti. Ciò posto, vi saranno *tre* rette p di S_5 (incidenti rispettivamente alle BB', BB'', BB''') da cui la Φ_4 verrà proiettata in una F_4 con K_3 *doppia* (nodale), proiezione della coppia di L_3, considerata su Φ_4. Nella rappresentazione piana della superficie, la cubica gobba doppia di F_4 avrà come immagine una coppia di coniche C'_2 e C''_2 per O ed A; ogni conica sarà immagine di una delle falde distinte della cubica gobba doppia di F_4; e le $C_3(O^2A)$ immagini delle sezioni piane di F_4, segheranno sulla curva $C'_2 + C''_2$ una g_6^3 composta con le terne di coppie di una g_2^1, per la quale i punti P' e Q', comuni alle C'_2 e C''_2, contati ciascuno due volte, costituiranno due *coppie neutre*.

Viceversa, se sono date a priori due coniche C'_2 e C''_2 per O ed A, si dimostra facilmente che si può costruire — in *tre* modi diversi — un sistema lineare ∞^3 rappresentativo di una superficie F_4 con cubica gobba doppia irriducibile, nella quale si incrocino due falde (integralmente) distinte, ciascuna rappresentata da una delle coniche C'_2 e C''_2. Il problema proposto esige che le coniche C'_2 e C''_2 siano riferite (proiettivamente) l'una all'altra in modo che le $C_3(O^2A)$ seghino sopra la curva $C'_2 + C''_2$ una g_6^5, composta con le terne di coppie di una g_2^1, che possiede due coppie neutre nei punti P' e Q', contati ciascuno due volte. Si vede subito che vi sono tre soluzioni: infatti le $C_3(O^2A)$, che osculano in un punto B la C'_2, segano la C''_2 secondo una g_3^2, che possiede *tre* punti tripli, B', B'', B'''; ed associando al punto B il punto B' o B'' o B''', si individua sulla $C'_2 + C''_2$ (che è dotata delle due coppie neutre P'^2, Q'^2) una g_2^1, che — *triplicata* — dà la g_6^5 se-

gata da tutte le $C_3(O^2A)$. Il sistema lineare ∞^3 richiesto è costituito dalle $C_3(O^2A)$, che passano per tre coppie di una delle nominate g^1_2.

In quanto precede abbiamo considerato sulla Φ_4 una L_6 spezzata in due cubiche gobbe L'_3 ed L''_3 ed abbiamo tacitamente supposto che le due L_3 fossero *distinte*. Se invece L''_3 diventi infinitamente vicina ad L'_3, dimostreremo l'esistenza di *una* retta p di S_5, per proiezione dalla quale la Φ_4 non diverrà più una F_4 con cubica gobba doppia K_3, nella quale si incrocino due falde distinte, ma una F_4 con *cubica gobba cuspidale* K_3, cioè *la sviluppabile generata delle tangenti alla cubica* K_3 (1).

A questo scopo supponiamo che L'_3 ed L''_3 siano ancora distinte, intersecandosi in due punti P e Q. Allora abbiamo dimostrato che le curve L'_3 e L''_3 si possono riferire proiettivamente in tre modi diversi, in guisa che le rette congiungenti punti omologhi risultino tutte incidenti ad una retta; e le tre proiettività anzidette differiscono tra loro per una proiettività ciclica del terzo ordine, coi punti uniti P e Q.

Se ora, tenendo ferma la L'_3, le facciamo avvicinare indefinitamente la L''_3, nel fascio che ha per punti base P e Q, è facile riconoscere che le tre nominate proiettività daranno, al limite, una *proiettività infinitesima* fra la L'_3 e la L''_3 (ad essa infinitamente vicina) e le due proiettività cicliche del terzo ordine sopra la L'_3, definite dai punti uniti P e Q. Alla proiettività infinitesima dovrà corrispondere una retta p, fuori dello S_3 che contiene la L'_3, cui saranno incidenti ∞^1 rette tangenti a Φ_4 nei punti della L'_3; e dalla retta p la Φ_4 verrà proiettata in una F_4 con *cubica cuspidale*.

---

(1) Una F_4 irriducibile con una cubica gobba cuspidale K_3 è necessariamente la sviluppabile circoscritta alla K_3. Infatti la serie quadratica delle coppie di punti d'appoggio di questa curva K_3 alle generatrici di F_4 deve essere tale, che ogni punto di K_3 appartenga ad una coppia e quindi si ridurrà: o ad un'involuzione g^1_2 contata due volte, ovvero alla serie delle coppie di punti coincidenti; ma il primo caso dà luogo non già ad una F_4 irriducibile, bensì ad una F_4, costituita da una quadrica contata due volte. Perciò la sola F_4 (irriducibile) per cui K_3 sia curva cuspidale è la superficie sviluppabile generata dalle tangenti a K_3.

Si deduce che *tutti i piani tangenti a* Φ_4 *nei punti di una cubica* L'_3 *sono incidenti ad una retta* p, *da cui la* Φ_4 *viene proiettata in una sviluppabile, che ha come spigolo di regresso la proiezione di* L'_3 .

E questa retta p *è unica.*

Invero suppongasi che vi sia una seconda retta p', distinta da p, cui si appoggino tutti i piani tangenti a Φ_4 nei punti di L'_3. Se p' è sghemba rispetto a p, proiettando da p essa si proietterà in una retta r dello S_3 contenente F_4; ma poichè ogni piano tangente a Φ_4 ne contiene una generatrice, la r dovrebbe essere incidente a tutte le generatrici della F_4 e darebbe perciò una direttrice rettilinea di questa sviluppabile (che non esiste).

Se invece p' sia incidente a p in un punto P, i piani che toccano Φ_4 nei punti di L'_3 dovranno passare tutti per P ovvero incontrare il piano pp' secondo una retta. Nel primo caso, la proiezione di Φ_4 da P darebbe una superficie dello S_4, con cubica cuspidale immagine di L'_3, che è assurdo, giacchè le sezioni iperpiane di questa superficie sarebbero delle quartiche gobbe con tre punti doppi. Nel secondo caso la proiezione F_4 di Φ_4 da p dovrebbe risultare un cono, tutte le generatrici di F_4 passando per la traccia del piano pp': conclusione incompatibile con le condizioni per cui la F_4 deve possedere una cubica gobba cuspidale (almeno se questa, ossia la L'_3, sia irriducibile).

Per chi guardi alla rappresentazione piana della F_4 mediante $C_3(O^2A)$, la cubica gobba cuspidale è rappresentata da una conica C_2 per O ed A, contata due volte; e le $C_3(O^2A)$, immagini delle sezioni piane, che passano per un punto D di C_2 dovranno passare di conseguenza per un punto D', infinitamente vicino ad esso.

Viceversa, se è *data ad arbitrio una conica* C_2 *per* O *ed* A, *è determinato univocamente un sistema lineare* ∞^3 *di* $C_3(O^2A)$, *rappresentativo di una sviluppabile, che ha come spigolo di regresso una cubica gobba, avente per immagine la* C_2. Se questa superficie sviluppabile esiste, si considerino infatti le sezioni piane, ottenute con i piani osculatori allo spigolo di regresso: esse si spezzano in una generatrice contata due volte ed in una conica. Del sistema rappresentativo, che dobbiamo costruire, fan-

no quindi parte le ∞^1 cubiche $C_3(O^2A)$, spezzate in una retta doppia per O ed in una retta per A, intersecantisi in un punto della C_2. Il sistema di queste cubiche è di *indice tre*: invero, poichè il sistema (non lineare) delle rette doppie per O è d'indice due, per un punto P generico del piano passa una retta r per O, che, contata due volte e completata con la retta passante per A e per il punto comune ad r ed a C_2, equivale a due cubiche $C_3(O^2A)$ del tipo anzidetto; e la terza cubica è spezzata nella retta $s \equiv PA$ e nella retta (contata due volte) che passa per O e per il punto comune alla s ed alla C_2. Ma un sistema d'indice tre di cubiche $C_3(O^2A)$ di questo tipo giace in un ben determinato sistema lineare ∞^3, che è il sistema rappresentativo richiesto.

Ritorniamo dopo ciò a considerare sulla Φ_4 una sestica ellittica L_6 spezzata in due cubiche gobbe L'_3 ed L''_3, aventi a comune due punti P e Q. Sappiamo che le curve L'_3 ed L''_3 si possono riferire proiettivamente in tre modi diversi, in guisa che le rette congiungenti punti omologhi risultino tutte incidenti ad una retta, e le tre proiettività anzidette differiscano tra loro per una proiettività ciclica del terzo ordine coi punti uniti P e Q. Abbiamo detto inoltre che — avvicinando indefinitamente la L''_3 alla L'_3 nel fascio che ha i punti base P e Q — le tre nominate proiettività danno al limite una proiettività infinitesima fra la L'_3 e la L''_3 e le due proiettività cicliche del terzo ordine sopra la L'_3, definite dai punti uniti P e Q.

La proiettività infinitesima corrisponde alla esistenza di una retta p, alla quale si appoggiano tutti i piani, tangenti alla Φ_4 nei punti di L'_3; in rapporto a questa proprietà la retta p riesce definita soltanto dalla cubica L'_3, indipendentemente dal fascio nel quale la L''_3 si fa avvicinare alla L'_3; e la proiezione della Φ_4 dalla retta p conduce ad una rigata F_4 con cubica gobba cuspidale.

Studiamo invece le due proiettività cicliche del terzo ordine definite sopra la L'_3 dai punti uniti P e Q. I cicli di entrambe queste proiettività costituiscono i gruppi di livello di una g_3^1 e sono segati sulla L'_3 dai piani, che giacciono nello spazio S_3 della L'_3 e passano per la retta *polare* della retta PQ, ossia per la retta p', intersezione dei due piani osculatori alla L'_3 in P e Q. La

retta p' dipende essenzialmente dal fascio di cubiche nel quale la L''_3 si è avvicinata alla L'_3, risultando definita in rapporto alla L'_3 e ad una corda $P\,Q$ di essa: la proiezione della Φ_4 dalla retta p' conduce ad una *rigata* F_4 *dotata di una retta tripla*, lungo la quale si intersecano tre falde della superficie, che si fondono e si permutano tra loro solamente in *due punti cuspidali doppi*.

La rigata F_4 dotata di retta tripla, alla quale siamo così pervenuti, non è la più generale: infatti — come sappiamo — *la più generale rigata* F_4 *dotata di retta tripla*, proiezione della L'_3, possiede quattro punti cuspidali distinti e *si ottiene proiettando la* Φ_4 *da una retta generica dello spazio a cui appartiene la* L'_3.

La differenza fra le due rigate si può illustrare così. Secondo una visione di continuità, possiamo rappresentarci la cubica gobba doppia L'_3 su Φ_4 come limite di una sestica ellittica L_6, ed allora la g^1_2, data sulla L_6 dalle corde incidenti all'asse di proiezione, diventa la corrispondenza $[2, 2]$ definita sopra L'_3 dalla g^1_3, che viene segata dai piani per p'. Così, designando con A, B, C, una terna di questa g^1_3, nel punto A si dovranno ritenere sovrapposte due determinazioni di una funzione algebrica, che corrispondono alle coppie ordinate AB ed AC. La nominata funzione algebrica è in generale irriducibile, potendosi scambiare AB con AC, attraverso le coppie critiche, che rispondono alle quattro coincidenze di B e C (punti doppi della g^1_3). Fa eccezione il caso in cui la g^1_3 sia ciclica (ed abbia quindi due punti tripli in luogo di quattro doppi), perchè allora la coppia ordinata dei punti AB, che si corrispondono nella proiettività ciclica generatrice π, viene razionalmente distinta dalla coppia dei punti AC, che si corrispondono in π^{-1}.

Guardando alla F_4 con retta tripla, la distinzione che abbiamo fatto, si traduce così: nel caso generale non soltanto le tre falde della superficie differenzialmente distinte formano una sola falda nel senso integrale, ma anche non sono discernibili fra loro le coppie ordinate di falde, giacchè attraverso i quattro punti cuspidali semplici si possono permutare due falde, lasciando ferma la terza, e quindi passare per continuità da una coppia ordinata di falde ad un'altra qualsiasi. Invece nel caso particolare, le tre

falde si fondono sempre in senso integrale, in una sola falda, ma le coppie ordinate di falde si distinguono tra loro, in relazione alla trasformazione ciclica π, che permuta le tre falde, fondendole nei due punti cuspidali doppi; giacchè non si può passare con continuità da una coppia ordinata di falde corrispondenti in π ad una coppia ordinata di falde corrispondenti in $\pi^2 = \pi^{-1}$.

Consideriamo una cubica gobba L_3 della Φ_4: come si è detto, se si proietta la Φ_4 da una retta dell'S_3 a cui appartiene la L_3, si ottiene una rigata F_4 con retta tripla. Ora la cubica gobba L_3 può spezzarsi dando luogo a particolarizzazioni della F_4 con retta tripla. Può precisamente accadere che la cubica gobba L_3 sia composta di una conica L_2 [1] e di una generatrice (incidente ad L_2) di Φ_4: avviene allora che una delle tre rette, uscenti da un punto generico della retta tripla r, cade infinitamente vicina alla r; dei tre piani tangenti, che escono da un punto di r, due sono variabili ed uno è fisso.

Nella rappresentazione piana di F_4 la retta tripla è rappresentata da una conica C_2 passante per O ed A, la quale diventa riducibile come la L_3: precisamente essa si spezza in una retta s per O, immagine della generatrice di Φ_4, ed in una retta t per A, immagine della conica L_2. Le cubiche $C_3(O^2A)$, immagini delle sezioni piane della F_4, segano sulla curva $s + t$ una g_3^1, per la quale ogni gruppo di livello è costituito da una coppia di punti su t e da un punto su s; (la coppia contenente il punto st è associata a questo punto stesso).

Esercizio. - Lo studioso dimostri che, data ad arbitrio una retta s per O ed una retta t per A, esistono ∞^4 sistemi lineari ∞^3 di cubiche irriducibili $C_3(O^2A)$, i quali segano sulla $s + t$ una g_3^1, i cui gruppi constino di una coppia di punti su t e di un punto su s, mentre la coppia contenente il punto st sia associata a questo punto stesso.

---

[1] La conica L_2 sarà necessariamente irriducibile se — come avviene sulla Φ_4 generale — non esiste una direttrice rettilinea.

29. Particolari rigate normali e loro proiezioni.

Abbiamo discusso i casi particolari della F_4 con cubica gobba doppia o retta tripla, che si ottengono per proiezione dalla più generale rigata razionale normale di S_5, particolarizzando la posizione dell'asse p, da cui si proietta. Vediamo ora i casi particolari, che si presentano quando si particolarizzi la Φ_4 stessa.

Conviene perciò esaminare i casi proiettivi distinti a cui la Φ_4 può dar luogo.

Osserviamo che le rigate Φ_4 di S_5 non possiedono alcun invariante assoluto, risultando così in generale proiettivamente identiche: infatti i sistemi lineari *completi* di cubiche passanti doppiamente per un punto O e semplicemente per un punto A diverso da O, i quali rappresentano le Φ_4 generali, dipendono solamente dalla scelta di O, A e risultano di conseguenza tutti birazionalmente identici. Ma le superficie Φ_4 possiedono un *invariante relativo* (di peso maggiore di zero), il cui annullarsi porta una particolarizzazione, per la quale la Φ_4 viene a possedere una *direttrice rettilinea* (ove non si riduca ulteriormente ad un *cono*).

La esistenza di Φ_4 particolarizzate nel modo anzidetto risulterà chiaramente dalla rappresentazione piana. Osserviamo perciò che *ogni Φ_4 rigata razionale di S_5 può essere rappresentata sul piano da un sistema lineare ∞^5 di quartiche C_4 passanti triplamente per un punto O e semplicemente per tre punti T_1, T_2, T_3, in guisa che le rigate razionali normali di S_5 costituiscono una sola famiglia, dipendente da parametri variabili con continuità.* Per ottenere la anzidetta rappresentazione basta proiettare la Φ_4 da tre punti generici A_1, A_2, A_3 di essa. Si noti allora che gli S_4 contenenti il piano da cui si proietta ed una generatrice della Φ_4, passano tutti per uno stesso S_3, che sega la Φ_4 in una linea del terzo ordine ed il piano rappresentativo in un punto O; le generatrici passanti rispettivamente per A_1, A_2, A_3, si proiettano in tre punti T_1, T_2, T_3, i cui intorni sono in corrispondenza con le generatrici corrispondenti. Ciò posto, le immagini delle sezioni iperpiane della Φ_4 sono quartiche passanti semplicemente per T_1, T_2, T_3 e triplamente per O: infatti le sezioni iperpiane della Φ_4 hanno

un punto comune con le generatrici passanti per A_1, A_2, A_3 e tre punti comuni con la linea del terzo ordine, secondo la quale la Φ_4 è segata dall'S_3 che si proietta in O. Reciprocamente è evidente che *un sistema lineare completo di quartiche per un punto triplo e tre punti semplici rappresenta una Φ_4 normale di S_5.*

Tutte le particolarizzazioni possibili della Φ_4 si possono ora leggere sulla rappresentazione mediante $C_4(O^3T_1T_2T_3)$. Se i quattro punti O, T_1, T_2, T_3 sono in posizione generica, si ha la Φ_4 generale, sulla quale esiste un fascio di coniche irriducibili, rappresentato dal fascio delle coniche che passano per O, T_1, T_2, T_3. Il sistema delle $C_4(O^3T_1T_2T_3)$ si riduce al noto sistema delle $C_3(O^2A)$, mediante la trasformazione quadratica che ha come punti fondamentali O, T_1, T_2.

Se il punto T_1 si avvicina indefinitamente ad O, non si ottiene una particolarizzazione del sistema $|C_4|$: infatti con una trasformazione quadratica, che ha come punti fondamentali O, T_2 ed un punto generico del piano, ci si può ridurre ad un sistema di quartiche con un punto triplo e tre punti semplici, nessuno dei quali sia infinitamente vicino al punto triplo. Se però due punti semplici T_1 e T_2 diventano infinitamente vicini ad O in direzioni distinte (o succedendosi sopra un ramo cuspidale), la Φ_4 si particolarizza, acquistando una *direttrice rettilinea,* rappresentata dall'intorno di O. In questo caso viene a mancare il fascio di coniche per O, T_1, T_2, T_3; questo fascio si riduce infatti al fascio delle rette per O, cui si aggiunge la retta fissa OT_3; non esiste quindi sulla Φ_4 un fascio di coniche irriducibili, ma un fascio di coniche riducibili, ciascuna delle quali è spezzata nella direttrice semplice ed in una generatrice. La Φ_4 può essere ancora rappresentata da cubiche $C_3(O^2A)$, giacchè per ridursi a questo caso basta eseguire una trasformazione quadratica coi punti fondamentali in O, T_1, T_3; ma il punto base semplice A cade ora infinitamente vicino al punto doppio O.

Tuttavia può avvenire che i tre punti T_1, T_2, T_3 diventino tutti infinitamente vicini al punto O, secondo direzioni distinte, ovvero (particolarizzazione ulteriore) succedendosi due sopra un ramo cuspidale del secondo ordine, oppure tutti e tre sopra un ramo

cuspidale del terzo ordine (cfr. l'osservazione a pag. 94); ed allora viene a mancare la trasformazione quadratica riduttrice del sistema rappresentativo della Φ_4. La Φ_4 si riduce ad un *cono*, il cui vertice è rappresentato dall'intorno del punto O: infatti il punto O rappresenta un punto V della Φ_4, tale che le sezioni iperpiane per esso si spezzano in quattro rette, cioè un punto quadruplo della Φ_4, la quale è dunque un cono di vertice V.

Un altro caso d'eccezione, in cui il sistema delle quartiche $C_4(O^3T_1T_2T_3)$ non può abbassarsi con una trasformazione quadratica, si ha quando i punti T_1, T_2, T_3 si avvicinino indefinitamente ad O succedendosi sopra un ramo cuspidale del secondo ordine; allora però il sistema stesso si riduce ad un altro sistema di quartiche $C_4(O'^3T'_1T'_2T'_3)$ dove T'_1 e T''_2 sono vicini ad O', succedendosi sopra un ramo lineare, e quindi una nuova trasformazione quadratica permette di abbassare l'ordine del sistema, riuscendo così ad un sistema di cubiche, con un punto doppio ed uno semplice infinitamente vicino (cfr. l'osservazione a pag. 94).

In conclusione, *la rigata razionale normale del quart'ordine di S_5 può essere sempre rappresentata sul piano mediante un sistema lineare di cubiche $C_3(O^2A)$, con la sola eccezione del cono.*

Riportandoci ora allo spazio S_5 possiamo caratterizzare i casi particolari della Φ_4 nel modo seguente: mentre in generale gli iperpiani per due generatrici della Φ_4 segano ulteriormente la Φ_4 secondo una conica irriducibile (e si ottiene così un fascio di coniche irriducibili sopra la Φ_4), può avvenire in particolare che gli iperpiani per due generatrici contengano sempre una terza generatrice, segando ulteriormente la Φ_4 secondo una direttrice semplice; più in particolare ancora può darsi il caso che gli iperpiani per due generatrici della Φ_4 seghino ulteriormente la superficie secondo due generatrici: la Φ_4 si riduce allora ad un cono.

Passiamo ora a studiare le superficie dello spazio ordinario, che si ottengono per proiezione dalla Φ_4; possiamo dire subito che proiettando una rigata razionale normale Φ_4, dotata di direttrice rettilinea, da una retta p di S_5, si ottiene una *rigata F_4 con cubica gobba doppia o con retta tripla, dotata di direttrice rettilinea*: la quale verrà rappresentata sul piano da un sistema lineare ∞^3 di

cubiche passanti per un punto doppio O ed un punto semplice A infinitamente vicino ad O.

Sia da prima l'asse di proiezione p scelto in modo generico. Si ottiene allora per proiezione la *rigata* F_4 *dotata di cubica gobba doppia* K_3 *e di direttrice rettilinea.* La cubica gobba doppia K_3 è proiezione di una sestica ellittica L_6 di Φ_4, che ha come corde le ∞^1 corde di Φ_4 uscenti dai punti della retta p. Nel piano rappresentativo la cubica gobba doppia è rappresentata, come nel caso generale, da una quartica C_4, che passa doppiamente per O ed A, che è ora infinitamente vicino ad O; in altre parole la quartica C_4 possiede il punto O come *tacnodo* e la retta OA come tangente tacnodale; e viene caratterizzata dal fatto che le cubiche, immagini delle sezioni piane, segano sopra di essa una g_6^3 composta con le coppie di una g_2^1. Viceversa se si dà a priori una sestica ellittica L_6 sulla Φ_4, si dimostra come nel caso generale che esistono 9 rette di S_3 dalle quali la L_6 si proietta in una cubica gobba K_3 doppia; corrispondentemente, data ad arbitrio sul piano rappresentativo una quartica ellittica $C_4(O^2A^2)$, si può in 9 modi diversi determinare un sistema lineare ∞^3 di $C_3(O^2A)$, il quale seghi sulla C_4 una g_6^3 composta con le coppie di una g_2^1.

Abbiamo visto che sopra la Φ_4 generale, una L_6 ellittica può spezzarsi in una conica ed in una quartica; ora, se la Φ_4 possiede una direttrice rettilinea, si è condotti ad un caso, in cui la L_6 si spezza in una quartica L_4 ed in una conica *degenere,* costituita da una generatrice s e dalla direttrice rettilinea d di Φ_4. Ripetendo il ragionamento seguito nel caso generale, lo studioso potrà facilmente stabilire l'esistenza di ∞^1 rette incidenti al piano di s e d, proiettando la Φ_4 dalle quali si ottiene una F_4, la cui linea doppia si compone di una conica K_2 doppia, proiezione della L_4 di Φ_4, e di una retta r doppia (incidente alla K_2), immagine della conica degenere, spezzata nelle rette s e d. La direttrice rettilinea della F_4 diventa qui infinitamente vicina alla retta doppia r.

Nella rappresentazione piana, la linea doppia della superficie è rappresentata da una retta r' per O, che è immagine della retta doppia r, e da una cubica C_3 (passante doppiamente per O e

semplicemente per il punto infinitamente vicino A), che è immagine della conica doppia K_2; e le $C_3(O^2A)$, immagini delle sezioni piane della F_4, segano la C_3 secondo una g_4^2 composta con le coppie di una g_2^1, che contiene la *coppia neutra* costituita dal punto comune alla r' ed alla C_3 fuori di O e dal punto della C_3 infinitamente vicino ad O sul ramo lineare non passante per A; i punti dell'intorno di O sono riferiti proiettivamente ai punti della retta r', in guisa che le $C_3(O^2A)$ immagini delle sezioni piane della F_4 contengano sempre coppie di elementi corrispondenti.

Anche nella ipotesi che la Φ_4 possegga una direttrice rettilinea, esiste sulla superficie — come nel caso generale — un sistema lineare ∞^3 di cubiche gobbe, che è qui rappresentato dal sistema delle coniche passanti per O con la tangente fissa OA. Ora la sestica ellittica L_6 può spezzarsi in due cubiche gobbe L_3 distinte; e, ripetendo il ragionamento già svolto per il caso della Φ_4 generale, si dimostra l'esistenza di tre rette di S_5, proiettando dalle quali la Φ_4 si dà luogo ad una *rigata F_4, dotata di direttrice rettilinea, con cubica gobba doppia irriducibile, nella quale si incrociano due falde distinte* (*in senso integrale*) *della superficie*. Per chi guardi la rappresentazione piana della F_4, la cubica gobba doppia ha come immagine una $C_4(O^2A^2)$, spezzata in due coniche C'_2 e C''_2, toccanti in O la retta OA, ciascuna delle quali rappresenta una delle falde della superficie; e le $C_3(O^2A)$, immagini delle sezioni piane della F_4, passanti per un punto di C'_2 passano di conseguenza per un punto ben determinato di C''_2: le coniche C'_2 e C''_2 risultano così riferite proiettivamente l'una all'altra, ogni coppia di punti corrispondenti essendo immagine di uno stesso punto della cubica gobba doppia di F_4. In particolare, i punti comuni a C'_2 ed a C''_2 (fuori di O ed A) sono uniti nella anzidetta proiettività, e corrispondono a due punti cuspidali doppi della F_4.

Ma la sestica ellittica L_6 può ridursi ad una cubica gobba L_3 contata due volte; e se si proietta la Φ_4 da una retta p, appartenente allo spazio di L_3, si ottiene una *rigata F_4 dotata di una retta* (*direttrice*) *tripla r e di una direttrice semplice s*, sghemba con la r. Da ogni punto di r escono tre generatrici rettilinee, che

si appoggiano ad s: esse sono le proiezioni delle tre generatrici di Φ_4 uscenti dai tre punti in cui la L_3 è intersecata da un piano, passante per p.

Il fascio di piani (tangenti) di asse r si trova in corrispondenza [3, 1] con la punteggiata r, formata dai punti di contatto.

Nella rappresentazione piana la retta tripla è rappresentata da una conica C_2 per i punti O ed A (infinitamente vicini tra loro), sulla quale le $C_3(O^2A)$, immagini delle sezioni piane della F_4, segano una g_3^1.

Un caso particolare di quello ora trattato si ha quando la cubica gobba L_3 degenera nella direttrice semplice ed in due generatrici di Φ_4. La proiezione da una retta p, giacente nell'S_3 determinato da questa cubica gobba degenere, conduce ad una rigata F_4 con retta tripla r, da ogni punto della quale escono due generatrici infinitamente vicine alla r ed una variabile, che descrive la rigata. Si ha dunque una *rigata F_4 dotata di una direttrice tripla r e di una direttrice semplice s, sghemba con la r ed infinitamente vicina ad essa.*

Da ogni punto di r escono tre piani tangenti, dei quali due sono fissi ed il terzo variabile. La corrispondenza [3, 1] fra il fascio di piani di asse r e la punteggiata r dei punti di contatto si riduce qui ad una proiettività tra il piano tangente variabile ed il suo punto di contatto: proiettività definitrice della retta sghemba infinitamente vicina.

Nella rappresentazione piana l'immagine della retta tripla r è costituita da una conica per O ed A, spezzata in due rette per O; e le $C_3(O^2A)$, immagini delle sezioni piane della F_4, subordinano una proiettività tra le anzidette due rette e l'intorno di O.

ESERCIZIO. - Lo studioso ritrovi le più notevoli particolarizzazioni della F_4 con cubica gobba doppia (o retta tripla) riferendosi non più alla rappresentazione mediante un sistema lineare di cubiche, ma invece alla rappresentazione con quartiche per un punto triplo O e tre punti base semplici A, B, C.

NOTA. - I casi particolari della F_4 con retta tripla r, dove esistono generatrici infinitamente vicine ad r, presentano una

evidente analogia con le particolarizzazioni per cui si passa dalla rigata cubica generale alla rigata di CAYLEY e da questa al cono cubico. Fra le due questioni si può stabilire un legame diretto. Quando una rigata di quarto grado F_4 con retta tripla r possiede una generatrice infinitamente vicina ad r, l'involuzione g_3^1 nel fascio di piani d'asse r, le cui terne rispondono ai punti della punteggiata r (formata dai punti di contatto), degenera, avendosi un piano tangente fisso: rimane quindi una corrispondenza [1, 2] fra la punteggiata r ed il fascio di piani tangenti variabili, sicchè nell'intorno della retta tripla r la F_4 può essere approssimata da un piano e da una rigata cubica con r doppia, la quale contiene 4 parametri (corrispondenti alla scelta arbitraria della sua direttrice semplice).

Se ora si particolarizza ulteriormente la F_4, assumendo che vi siano due piani tangenti fissi secondo r, alla rigata cubica con r doppia, di cui si è detto innanzi, converrà sostituire una rigata di CAYLEY: si può anche dire che la F_4 verrà ora approssimata nell'intorno della retta r da due piani fissi presi insieme con un iperboloide (di cui è data invero solamente una direttrice infinitamente vicina ad r, sicchè restano arbitrari 3 parametri).

Un'ulteriore particolarizzazione conduce al cono con retta tripla r, dove la superficie approssimante lungo r viene costituita da tre piani tangenti.

30. Nota storica.

La ricerca di tutti i casi possibili che si possono presentare nello studio di una rigata del quarto grado portò verso la metà del secolo decimonono il CAYLEY (1), alla scoperta della rigata dotata di cubica gobba doppia e di alcuni suoi casi particolari. In ispecie il CAYLEY ha rilevato il caso della rigata del quart'ordine con retta tripla e quello in cui oltre ad una retta direttrice tripla vi è una direttrice rettilinea semplice, che può in particolare

(1) Cfr. A. CAYLEY: *Second Memoir on skew surfaces, otherwise scrolls*; « Phil. Trans. », 1864.

cadere infinitamente vicina alla prima; il CAYLEY ha anche osservato il caso in cui da ogni punto della retta tripla r partono due generatrici infinitamente vicine alla r ed una terza variabile, che descrive la rigata.

Tuttavia la enumerazione, che il CAYLEY fa dei casi particolari della rigata F_4 non è priva di lacune e fu riservato al CREMONA (1) (1868) il merito di dare una classificazione completa di tutte le rigate del quart'ordine: si hanno, secondo il CREMONA, 12 specie di rigate sia a sezioni razionali che a sezioni ellittiche (otto delle quali corrispondono a superficie razionali), ciascuna specie dipendendo dalla simultanea considerazione della curva doppia e della sviluppabile bitangente.

Oltre a questa classificazione il CREMONA diede anche un metodo di generazione delle rigate gobbe del quarto grado, dimostrando che ogni rigata di questo tipo può essere generata dalle rette, che congiungono punti corrispondenti in una proiettività fra due coniche (proprie o degeneri), ovvero fra una retta ed un cubica piana razionale.

Limitandoci infatti al caso di una superficie dotata di cubica gobba doppia senza direttrice rettilinea, sappiamo che sulla superficie esiste un fascio di coniche e due qualunque di esse vengono riferite proiettivamente l'una all'altra, quando si facciano corrispondere punti che stanno sulla medesima generatrice. Inversamente, date due coniche C_2 e C'_2, proiettive fra loro, la superficie, luogo delle rette che congiungono punti corrispondenti, è del quarto grado, giacchè la sezione piana ottenuta con il piano π di C_2 consta della C_2 stessa (che è certamente curva semplice della superficie) e delle due rette che congiungono i punti comuni a π e a C'_2 con i loro corrispondenti su C_2; siccome poi si vede facilmente che, se le coniche C_2 e C'_2 sono in posizione generica, la superficie non possiede alcuna direttrice rettilinea,

---

(1) Cfr. L. CREMONA: *Sulle superficie gobbe di quarto grado*; « Memoria dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna »; Serie II, Tomo VIII, 1868: *Opere*, Tomo II, pag. 420.

ne segue che si è ottenuta precisamente la superficie del quarto ordine con cubica gobba doppia.

Ma questa generazione cade in difetto se la superficie F_4 possiede una direttrice rettilinea, giacchè in questo caso non esistono coniche sulla F_4. Si può allora generare la superficie congiungendo punti corrispondenti in una proiettività tra una retta ed una cubica piana razionale.

I risultati del CREMONA furono tosto ripresi dal CLEBSCH [1] (1870) che dedicò alla superficie del quart'ordine con cubica gobba doppia una lunga memoria, nella quale per la prima volta è dimostrata la possibilità di rappresentare la superficie punto per punto su di un piano. Per questo scopo il CLEBSCH procedè analiticamente, interpretando il metodo di generazione di CREMONA, che permette senz'altro di scrivere le equazioni parametriche della F_4 mediante funzioni razionali di due parametri. Successivamente lo stesso CLEBSCH ha rappresentato in modo diretto la F_4 su di un piano, valendosi della congruenza delle rette che si appoggiano ad una generatrice ed alla cubica gobba doppia, cioè col metodo che è stato da noi diffusamente esposto.

Il CLEBSCH ha anche dato una caratterizzazione della F_4 con K_3 doppia dal punto di vista della geometria della retta: la superficie si può concepire come l'insieme delle *corde di una cubica gobba, che appartengono ad un complesso lineare.* Se infatti si prendono le equazioni della cubica gobba K_3 sotto la forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda^3 = \mu^3 \\ x_2 &= \lambda^2 = \mu^2 \\ x_3 &= \lambda \;\; = \mu \\ x_4 &= 1 \;\; = 1 \end{aligned}$$

le coordinate plückeriane di una corda della K_3 sono proporzionali ai minori di secondo ordine della matrice:

$$\left\| \begin{matrix} \lambda^3 & \lambda^2 & \lambda & 1 \\ \mu^3 & \mu^2 & \mu & 1 \end{matrix} \right\|,$$

---

[1] Cfr. A. CLESBSCH: *Über die ebene Abbildung der geradlinigen Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve dritten Grades besitzen*; « Math. Ann. » Bd. II, 1870.

sicchè si può porre:

$$p_{12} = \lambda^2\mu^2$$
$$p_{13} = \lambda\mu(\lambda + \mu)$$
$$p_{14} = \lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu$$
$$p_{34} = 1$$
$$p_{42} = -(\lambda + \mu)$$
$$p_{23} = \lambda\mu.$$

D'altra parte la corrispondenza simmetrica [2, 2] segnata sulla K_3 dalle corde della F_4 è del tipo:

$$a\lambda^2\mu^2 + b\lambda\mu(\lambda + \mu) + c(\lambda^2 + \mu^2) + d\lambda\mu + e(\lambda + \mu) + f = 0.$$

Quindi dalle formule precedenti segue che le coordinate pluckeriane delle generatrici della F_4 soddisfanno alla relazione:

$$ap_{12} + bp_{13} + cp_{14} + fp_{34} - ep_{42} + (d - c)p_{23} = 0.$$

Dunque: *le generatrici di una superficie del quart'ordine con cubica gobba doppia appartengono ad un complesso lineare,* che si può riguardare come determinato da cinque generatrici qualsiansi della rigata.

Nella sua memoria il CLEBSCH si limita a considerare il caso generale di una F_4 con K_3 doppia; in questa ipotesi le generatrici della superficie appartengono a un complesso lineare *generale*. Lo studio del caso in cui il complesso lineare è *speciale* avrebbe portato molto naturalmente alla considerazione della F_4 dotata di *direttrice rettilinea*. Ma, sebbene questa superficie fosse già stata notata dal CREMONA nella memoria citata, il CLEBSCH trascurò questo corollario immediato dei risultati precedenti e l'osservazione che la superficie con K_3 doppia e direttrice semplice si ottiene come caso particolare della superficie generale con K_3 doppia, quando il complesso lineare determinato dalle sue generatrici diventi speciale, appare solo molto più tardi per opera del MOHRMANN (1) (1923), il quale ha pure notato esplicitamente che, nel-

(1) Cfr. H. MOHRMANN: *Die Flächen vierter Ordnung mit gewundener Doppelkurve;* «Math. Ann.» Bd. LXXXIX, 1923.

l'ipotesi in cui esista una direttrice rettilinea, la corrispondenza simmetrica [2, 2] segata sulla K_3 dalle generatrici di F_4 si riduce ad una g_3^1.

Con l'avvento della geometria iperspaziale, le F_4 rigate razionali dello spazio ordinario appaiono tutte come proiezioni della superficie rigata razionale normale di S_5, proiettivamente definita, che abbiamo designato con Φ_4. Nel primo lavoro d'insieme riguardante la geometria iperspaziale, che è la « Behandlung der projektivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Prinzip des Projizierens und Schneidens » di G. VERONESE (« Math. Ann. » Bd. 19, 1882) è introdotta la rigata razionale normale d'ordine n in un S_{n+1} ed è dimostrato come ogni rigata a sezioni razionali d'ordine n dello spazio ordinario possa considerarsi come proiezione di questa superficie normale da uno spazio conveniente.

Nella memoria del VERONESE la rigata razionale normale d'ordine n in S_{n+1} è definita come luogo delle rette comuni ad n iperpiani omologhi in n fasci proiettivi fra loro. C. SEGRE [1] ha invece considerato le rigate razionali normali come luogo delle rette congiungenti punti corrispondenti di curve tra loro proiettive ed ha perciò approfondito lo studio delle direttrici di queste superficie. Il SEGRE ha trovato così che una superficie rigata razionale normale Φ_n possiede una direttrice minima il cui ordine μ è vincolato dalla disuguaglianza $\mu \leq \frac{1}{2}n$. Se n è dispari, vi può essere al più una direttrice d'ordine $\frac{1}{2}(n-1)$, mentre se n è pari e vi è una direttrice d'ordine $\frac{1}{2}n$, ve ne sono infinite. Classificando le superficie Φ_n a seconda dell'ordine della direttrice minima che esse possiedono, si ha che una Φ_n con direttrice minima d'ordine μ può essere definita in ogni caso come luogo delle rette, che congiungono punti corrispondenti di due curve razionali e normali d'ordine μ e $n-\mu$ rispettivamente, proiettive fra loro.

---

[1] Cfr. C. SEGRE: *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque*; « Atti della R. Accad. di Torino », vol. XIX, 1884.

Per $n = 4$ si trova in particolare che la direttrice d'ordine minimo può essere una conica, una retta od un punto; la Φ_4 può perciò essere di tre tipi diversi:

a) la Φ_4 formata dalle rette che congiungono punti corrispondenti di due coniche proiettive. Questo è il caso generale, nel quale esiste sopra la Φ_4 un fascio di coniche; due qualunque coniche di esso possono essere prese come direttrici della Φ_4;

b) la Φ_4 con direttrice rettilinea, formata dalle rette che congiungono punti corrispondenti di una retta e di una cubica gobba tra loro proiettive;

c) la Φ_4 cono, luogo delle rette che passano per un punto e si appoggiano ad una quartica gobba razionale, normale in S_4.

Il lettore riconoscerà agevolmente, in questa generazione della Φ_4, la traduzione iperspaziale della generazione, data dal CREMONA per le rigate dello spazio ordinario, e che noi abbiamo riportata, con un cenno della dimostrazione.

Noi abbiamo esposto in dettaglio come le rigate razionali del quart'ordine possano essere ottenute per proiezione da una Φ_4 del tipo *a*) o *b*) o *c*) ed in particolare come una superficie con retta tripla si possa considerare come caso limite della superficie con cubica gobba doppia. Dal punto di vista storico la discussione svolta può ritenersi implicita nelle ampie trattazioni generali del VERONESE o del SEGRE; sebbene, nella letteratura da noi consultata, non ci sia occorso di trovare la discussione particolareggiata della cosa [1].

Per quanto riguarda la varietà V_3^3 generata dai piani delle ∞^1 coniche di Φ_4, abbiamo detto che essa è formata dalle ∞^2 rette che sono incidenti a tre piani. Lo studio di questa varietà fu compiuto

---

[1] Da un altro punto di vista, la classificazione delle rigate del quarto grado dello spazio ordinario si trova in una recente nota di G. GHERARDELLI: *Sulle superficie rigate di 4° grado*; « Boll. Un. Mat. It. », 1936. Considerando l'ente razionale ∞^1, formato dalle generatrici della rigata, e facendo corrispondere due generatrici quando sono incidenti, si genera una corrispondenza simmetrica [2,2]: lo studio dei casi particolari cui può dar luogo tale corrispondenza porta ad una classificazione delle rigate.

dal SEGRE (1), il quale più in generale ha studiato la varietà V_{q+1}^{q+1} di S_{2q+1}, che si ottiene come luogo delle rette che sono incidenti a tre S_q; la nominata V_{q+1}^{q+1} può anche essere definita come luogo delle rette che congiungono punti corrispondenti di due S_q tra loro proiettivi ovvero come luogo degli spazi S_q che passano per i punti corrispondenti di $q+1$ punteggiate proiettive. La varietà è costituita da ∞^1 S_q e da ∞^q rette.

Per $q=1$ si ottengono le quadriche dello spazio ordinario.

Finalmente la varietà delle corde di Φ_4 fu considerata dal SEVERI (2), il quale ha stabilito che l'unica superficie di S_5 le cui corde non invadano lo spazio (e che quindi sia priva di punti doppi apparenti) è la superficie di VERONESE, mentre le sole superficie di S_5 tali che per un punto generico di S_5 passi una sola corda, (essendo così dotate di *un* punto doppio apparente) sono la rigata del quart'ordine razionale normale e la superficie del quinto ordine normale, che è rappresentata sul piano dal sistema delle cubiche passanti per quattro punti dati.

---

(1) Cfr. C. SEGRE: *Sulle varietà, che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi*; « Rend. Circ. Mat. di Palermo », T. V, 1891; o anche G. KANTOR: *Theorie der linearen Strahlencomplexe im Raume von r Dimensionem;* « Journal für Math. » Bd. 118, 1897.

(2) Cfr. F. SEVERI: *Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni e a' suoi punti tripli apparenti*; « Rend. Circ. Mat. Palermo », T. 15, 1901.

CAPITOLO VI.

LA SUPERFICIE DEL QUARTO ORDINE CON CONICA DOPPIA

31. La superficie del quart'ordine con conica doppia e la sua trasformazione in una cubica.

Proseguiamo ad esaminare i sistemi lineari di cubiche piane, rappresentativi di superficie razionali del 4° ordine: dopo i sistemi di genere zero si presentano quelli di genere uno.

Perchè un sistema lineare di cubiche di genere 1 sia di dimensione 3 e grado 4, è necessario e sufficiente che esistano 5 punti base semplici A_1, ..., A_5 che supporremo in posizione generica. Non sono esclusi degli avvicinamenti, ma in ogni caso non potranno mai due punti avvicinarsi ad un terzo in direzioni diverse, giacchè questo porterebbe ad un punto doppio e quindi ad un abbassamento del genere delle curve del sistema.

Poichè per 5 punti passano ∞^4 cubiche, i sistemi lineari ∞^3, che ci proponiamo di studiare, sono *incompleti* e contenuti in sistemi più ampi di dimensione 4.

La superficie razionale F_4, le cui sezioni piane hanno come immagini ∞^3 cubiche per 5 punti base semplici, è a sezioni piane di genere 1 e pertanto, dovendo ogni sezione piana possedere 2 punti doppi, la F_4 possiederà o una conica doppia o due rette doppie fra loro sghembe.

Si può senz'altro escludere questa seconda ipotesi: *la superficie del quart'ordine con due rette doppie sghembe è certamente non razionale.* Questa superficie è infatti rigata, giacchè da un suo punto P generico parte una retta che si appoggia alle due rette doppie e che, avendo 5 intersezioni con la superficie, vi appartiene per intero. Se ora la superficie fosse razionale il sistema delle sue ∞^1

rette, che è *irrazionale di genere uno* (come una sua sezione piana), sarebbe rappresentato da un sistema ∞^1 di curve, tale che per ogni punto generico del piano ne passi una ed una sola; ma questa proprietà caratterizza (1) nel piano i fasci *lineari*, cioè *razionali*, sicchè si cade in un assurdo.

Esclusa l'ipotesi di una F_4 con due rette sghembe doppie resta che *un sistema lineare di* ∞^3 *cubiche per* 5 *punti semplici* $A_1, \ldots, A_5$ *rappresenta il sistema delle sezioni piane di una* F_4 *con conica doppia* (eventualmente spezzata in due rette incidenti).

Viceversa si può dimostrare che *la generica* F_4 *con conica doppia può essere rappresentata su un piano* π *in guisa che le sue sezioni piane abbiano come immagini* ∞^3 *cubiche per* 5 *punti base* $A_1, \ldots, A_5$.

Il modo più rapido di stabilire questa affermazione è quello di trasformare la F_4 con C_2 doppia, mediante la trasformazione birazionale T dello spazio, che si ottiene facendo corrispondere proiettivamente al sistema delle ∞^3 quadriche per la C_2 e per un punto generico P della F_4, il sistema ∞^3 dei piani.

Ricordiamo (cfr. Cap. I, n. 7) che per la T i piani di trasformano in quadriche passanti per una certa conica C'_2 e un certo punto P'; le coniche passanti per P ed appoggiantisi in due punti a C_2 diventano rette e le rette divengono reciprocamente coniche per P', che si appoggiano in due punti a C'_2. L'intorno di P si trasforma nel piano di C'_2, così come i punti del piano di C_2 si trasformano nei punti dell'intorno di P'. Infine le rette che congiungono P con i punti della conica C_2 hanno come immagini i punti della conica C'_2 e viceversa.

Date queste premesse è facile vedere che la F_4 con la C_2 doppia si trasforma in una F'_3 contenente la C'_2, ma non passante per il punto P'.

Anzitutto la trasformata della F_4 è una F'_3 perchè la F_4 incontra le coniche, che passano per P e si appoggiano in due punti

---

(1) Cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. I, Lib. II, Cap. II, pag. 231.

a C_2, in tre punti fuori di P e di C_2; invero le trasformate di queste coniche, sono rette.

Ora la F'_3 passerà per C'_2 perchè le rette che congiungono P con i punti di C_2 incontrano la F_4, fuori di P e di C_2, in un unico punto, che ha come immagine un punto di C'_2. Infine la superficie F'_3 non conterrà il punto P', perchè la F_4 è intersecata dal piano della C_2 solamente in punti che fanno parte della C_2 stessa. La superficie F'_3, che così risulta è la più generale F'_3, passante per la C'_2. Si può vedere in ogni caso, che essa non può essere un cono, donde si deduce, che la F_4 di partenza è certo razionale, almeno finchè la sua conica doppia sia irriducibile. Soltanto se la nominata conica doppia si spezza in due rette doppie, la F_4 può ridursi ad un cono del quart'ordine ellittico, che si trasforma quadraticamente in un cono cubico.

In definitiva *la F_4 irriducibile con conica doppia si può trasformare birazionalmente in una superficie cubica F'_3 e risulta di conseguenza razionale* (escluso soltanto il caso del cono quartico con due rette doppie).

Rammentiamo ora che la F'_3 si potrà sempre ritenere rappresentata su di un piano π in guisa che le immagini delle sue sezioni piane siano le cubiche per 6 punti A_1, A_2, ..., A_6 e la immagine della conica C'_2 sia una cubica con A_1, A_2, ..., A_5 semplici ed A_6 doppio. Ricerchiamo, quindi, come si trasformino le sezioni piane di F_4. I piani si trasformano in quadriche per la conica C'_2 ed il punto P' e pertanto le sezioni piane di F_4 divengono sulla F'_3 le intersezioni con le quadriche per C'_2 e per P', ossia si trasformano (a parte la conica C'_2) in quartiche gobbe di genere uno, cioè di prima specie.

Nella rappresentazione piana della F'_3 sul piano π le intersezioni complete con le quadriche sono rappresentate da sestiche con punti doppi in A_1, ..., A_6, giacchè le intersezioni con le coppie di piani (che sono delle particolari quadriche), hanno una immagine composta con le immagini di due sezioni piane. Le intersezioni con le ∞^3 quadriche per C'_2 avranno di conseguenza come immagini delle curve composte di una particolare cubica con A_1, ..., A_5 semplici ed A_6 doppio (immagine di C'_2) e di ∞^3 cubiche

per A_1, ..., A_5 che sono nient'altro che le immagini delle sezioni piane della F_4 con C_2 doppia.

Concludiamo dicendo che: *la generica F_4 con conica doppia può essere rappresentata su di un piano π in modo che le immagini delle sue sezioni piane siano cubiche per 5 punti semplici* [1].

32. Le 16 rette della superficie.

La rappresentazione su di un piano π della F_4 con conica doppia, è stata ottenuta in una maniera indiretta, e si può desiderare di sostituire il metodo impiegato con un altro, il quale non adoperi nessuna trasformazione preventiva della superficie.

Ciò si può fare semplicemente, sfruttando il fatto che *sulla F_4 generale con conica doppia esistono* 16 *rette.*

Dimostreremo questa proposizione in modo analogo a quello tenuto per dimostrare l'esistenza delle 27 rette sopra una superficie cubica generale.

Consideriamo a questo scopo la rigata Φ che ha come curve direttrici la conica doppia C_2 della F_4 e due sezioni piane generiche C'_4 e C''_4 di essa. Le rette della F_4 si appoggiano certamente alla conica C_2 e alle due sezioni piane C'_4 e C''_4 ed appartengono quindi, come generatrici, alla rigata Φ; esse sono tante quante le generatrici di Φ, che si appoggiano ad una terza sezione piana generica C'''_4 di F_4, *in punti che non siano intersezioni di C'''_4 con C_2 o C'_4 o C''_4.*

Valutiamo il grado di Φ, con il teorema di Salmon. Tenendo conto che le curve C'_4 e C''_4 intersecano la conica C_2 in due punti *doppi,* mentre i punti comuni a C'_4 e a C''_4 sono quattro, il grado di Φ è:

$$n = 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 - 4 \cdot 4 - 4 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = 24.$$

Le intersezioni della Φ con la sezione piana C'''_4 sono quindi

---

[1] La particolarizzazione della superficie per cui il sistema rappresentativo diventa un sistema lineare ∞^3 di cubiche con un punto base doppio ed uno semplice, corrisponde alla F_4 rigata, che contiene oltre alla conica doppia una retta doppia (incidente a questa).

$24.4 = 96$ e danno luogo, apparentemente, a 96 rette di F_4. Ma abbiamo già avvertito che sono rette di F_4 solamente le generatrici di Φ che si appoggiano a C'''_4 in punti distinti dai punti comuni a C'''_4 e a C_2, C'_4, C''_4.

Per valutare il numero delle generatrici di Φ, che occorre togliere, osserviamo che da ogni punto della conica C_2 partono 12 generatrici di Φ, mentre le curve C'_4 e C''_4 sono quadruple. La prima parte di questo enunciato risulta immediatamente, quando si consideri che le curve C'_4 e C''_4, proiettate da un punto generico P della conica C_2, danno luogo a due coni del quarto ordine, che si intersecano in 16 rette, delle quali solamente 12 sono generatrici della Φ, non essendo tali le 4 rette che da P vanno ai punti comuni a C'_4 e a C''_4.

Le direttrici C'_4 e C''_4 sono poi quadruple; infatti un punto di C'_4 ad es. proietta C''_4 e C_2 secondo un cono del quarto e del secondo ordine rispettivamente, e questi due coni si intersecano in otto rette, delle quali solamente quattro si appoggiano a C_2 in punti non comuni a C_2 e a C''_4 e sono quindi generatrici di Φ.

Tenendo ora conto che C'''_4 ha due punti *doppi* a comune con C_2 e quattro punti a comune con C'_4 e C''_4, troviamo subito che il numero delle rette di F_4 è dato da:

$$n = 96 - 12 \cdot 4 - 4 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = 16.$$

Nota. - L'esistenza delle 16 rette sopra una superficie del quarto ordine F_4 con conica doppia si può anche agevolmente dimostrare, trasformando la F_4 in una superficie cubica F'_3, mediante la trasformazione quadratica nello spazio T usata dianzi.

Supponiamo che la r sia una retta di F_4; essa incontrerà certamente la conica C_2. Inoltre il piano determinato dalla r e dal punto fondamentale P della trasformazione T, che abbiamo scelto genericamente sopra F_4, conterrà due delle rette che congiungono P con i punti della conica; una di queste è la retta che congiunge P con il punto comune alla r e alla C_2, l'altra sarà incontrata dalla r in un punto determinato. Questo secondo fatto ci indica che la trasformata della r mediante la T incontrerà certamente la conica C'_2.

Ciò premesso, consideriamo il fascio di quadriche che contengono la conica C_2, la r ed il punto P. La T lo trasforma in un fascio di piani, la retta sostegno del quale è la immagine di r. Ne deriva che le eventuali rette della F_4 si trasformano in rette della F'_3, che si appoggiano alla conica C'_2. Viceversa se si prende una retta r' della F'_3, che si appoggi alla C'_2 (ma non sia complanare con essa), il fascio di piani che ha per sostegno la r, è il trasformato di un fascio di quadriche, la cui curva base è composta della C_2 e di una ulteriore conica per P, che deve però spezzarsi in due rette, una delle quali avrà come immagine il punto comune alla r' ed alla C'_2 e l'altra sarà propriamente quella che si trasforma nella r'.

Concludendo, possiamo dire che le rette della F_4 con conica doppia sono tante quante le rette di una superficie cubica, che si appoggiano ad una conica C'_2 (non computando tra queste la retta, che giace nel piano della C'_2, la quale non si trasforma in una retta della F_4, ma in una curva infinitesima, giacente nell'intorno del punto P).

Le rette di una superficie cubica sono 27 e ad una retta se ne appoggiano altre 10. Per avere dunque le rette che si appoggiano ad una conica è necessario togliere 10 dal numero totale 27, trovando così che il numero è 17. Ma tra queste 17 rette trovasi anche quella complanare con la conica, che deve essere scartata e quindi perveniamo al risultato che: *una F_4 con C_2 doppia contiene in generale* 16 *rette,* c. v. d.

Dalla dimostrazione adoperata risulta chiaramente che lo studio della configurazione delle 16 rette di una superficie del quarto ordine con conica doppia si può far dipendere dallo studio della configurazione delle 27 rette di una superficie cubica generale, questa configurazione riducendosi ad una equivalente a quella, quando si immaginino soppresse le 11 rette costituite da una retta e dalle 10, che le si appoggiano.

Stabilito comunque che la F_4 possiede delle rette (in numero di 16) possiamo sfruttare questa conoscenza per rappresentare la F_4 direttamente su di un piano, senza il tramite della trasformazione T.

A tale scopo basta servirsi della congruenza del primo ordine delle rette che si appoggiano alla conica doppia C_2 e ad una retta di F_4 (incidente ad essa). Fissata infatti una retta r della F_4, un punto P qualunque dello spazio (ed in particolare della F_4) proietta questa retta secondo un piano e la conica doppia secondo un cono quadrico. Il piano interseca questo cono in 2 generatrici, una delle quali è la congiungente P con il punto comune alla conica ed alla retta r, l'altra è invece una retta p, che si appoggia alla C_2 ed alla r in punti distinti, ed appartiene quindi alla congruenza anzidetta.

Allora, preso un piano π qualunque, rappresentiamo immediatamente la F_4 su π, facendo corrispondere ad ogni punto P di F_4 il punto P', intersezione di π con p. Viceversa, preso un punto P', per esso passa una retta della congruenza, che si appoggia alla C_2 ed alla r e che incontra la F_4 ancora in un punto P, che prendiamo come corrispondente di P'.

Per trovare le immagini delle sezioni piane, calcoliamo al solito il grado della rigata Φ delle rette, che si appoggiano alla C_2, alla r e ad una generica sezione piana. Tenuto conto del fatto che la C_2 è doppia per la F_4 e che la r incontra la sezione piana in un punto, il grado n di Φ vale:

$$n = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 - 4 - 4 - 2 = 6.$$

Si riconosce, con i soliti metodi, che la retta r e la conica C_2 sono triple per la rigata Φ, sicchè in definitiva le immagini delle sezioni piane sono sestiche con 3 punti tripli. Perchè esse si incontrino in soli 4 punti variabili, è necessario che esistano ancora 5 punti semplici, corrispondenti a 5 rette della F_4 appoggiantisi alla r (l'esistenza delle quali potrebbe facilmente essere stabilita in modo diretto).

Una trasformazione quadratica del piano con i tre punti tripli come fondamentali, ci riporta immediatamente ad un sistema di cubiche per 5 punti semplici, che è il sistema dal quale avevamo preso le mosse.

Osservazione. - In quanto precede, abbiamo, tacitamente supposto che i tre punti tripli sieno distinti. Omettiamo l'analisi dei

casi particolari, in cui essi si avvicinino, dando luogo a singolarità superiori per le C_6 e lasciamo allo studioso di riconoscere come si ritrovino qui alcune particolarizzazioni della F_4, già innanzi accennate.

33. Invarianti assoluti.

La rappresentazione piana della F_4 con conica doppia porta con facilità a riconoscere gli invarianti assoluti da cui dipende la definizione proiettiva della superficie. Vediamo a questo scopo come venga rappresentata la conica doppia C_2.

Osserviamo che questa conica contata due volte costituisce una sezione piana; quindi l'immagine della conica sarà una particolare cubica per $A_1, \ldots, A_5$, appartenente al sistema lineare ∞^3 delle C_3 immagini delle sezioni piane. Ma mentre su di una generica cubica C_3, immagine di una sezione piana, le altre C_3 segano una g_4^2 semplice, per quella particolare cubica, che è immagine della conica doppia, tale serie dovrà essere composta con le coppie di una g_2^1.

Pertanto il teorema che un sistema ∞^3 di cubiche per 5 punti semplici $A_1, \ldots, A_5$ rappresenta sempre le immagini delle sezioni piane di una F_4 con C_2 doppia, si potrà enunciare anche così: *Dato un sistema lineare* ∞^3 *di cubiche per* 5 *punti semplici* $A_1, \ldots, A_5$, *esiste una cubica del sistema, sopra la quale le altre curve segano una* g_4^2 *composta con le coppie di una* g_2^1.

Viceversa, è facile dimostrare che: *fissati* 5 *punti* $A_1, \ldots, A_5$ *ed una cubica* C_3 *per essi, è sempre possibile costruire in un numero finito* (*quattro*) *di modi un sistema lineare* ∞^3 *di cubiche, che contenga la* C_3 *e seghi su di essa una* g_4^2 *composta con le coppie di una* g_2^1,

Infatti, le ∞^4 cubiche passanti per $A_1, \ldots, A_5$ segano sulla data C_3, di genere 1, una serie completa g_4^3, che si può bisecare [1] in $2^2 = 4$ modi diversi, dando luogo a 4 g_2^1 distinte. Il richiesto

---

[1] Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. III, pag. 395 e Vol. IV, Lib. VI, Cap. III, pag. 199.

sistema lineare ∞^3 è quello formato dalla data curva C_3 combinata linearmente con le cubiche di un sistema lineare ∞^2, che seghi sulla C_3 le ∞^2 coppie di coppie di una delle quattro g_2^1 ottenute.

Ciò premesso, vediamo come la rappresentazione piana della F_4 con conica doppia, in cui si è messa in evidenza l'immagine della C_2 doppia, porti a riconoscere gli invarianti assoluti da cui dipende la definizione proiettiva della superficie.

Abbiamo osservato che il sistema ∞^8 rappresentativo della F_4 viene determinato (sebbene solo irrazionalmente) dalla scelta della cubica per i cinque punti $A_1, \ldots, A_5$. Gli invarianti assoluti della F_4 si riconducono perciò agli invarianti di una cubica sulla quale si siano fissati cinque punti rispetto alle trasformazioni birazionali del piano. Appare di qua che *una F_4 con conica doppia possiede sei invarianti assoluti*: uno di questi è l'invariante della cubica ellittica, cioè il birapporto delle quattro tangenti condotte da un punto della curva alla curva stessa.

Riportandoci alla superficie F_4 nello spazio, l'invariante assoluto della cubica rappresenta il birapporto dei quattro punti cuspidali esistenti (in generale) sulla conica doppia. Gli altri invarianti verrebbero ad esprimersi in funzione dei punti d'appoggio delle rette di F_4 con la conica doppia C_2.

Ritornando ora alla rappresentazione piana della superficie, vediamo che su di essa si possono leggere le proprietà della F_4.

Anzitutto risulta evidente da questo punto di vista che la superficie possiede 16 rette. Infatti, poichè le rette fanno sempre parte di sezioni piane, che sono rappresentate da cubiche, è chiaro che le curve che le rappresentano non possono essere altro che curve infinitesime, costituenti intorni di punti base, o rette, o coniche, o cubiche con un punto doppio in un punto base. Si trova ora effettivamente che sono unisecanti le immagini delle sezioni piane e quindi rappresentano rette:

a) i cinque intorni dei punti $A_1, \ldots, A_5$;

b) le $\binom{5}{2} = 10$ rette $A_i A_k$ $\qquad (i, k = 1, \ldots, 5)$;

c) la conica $A_1 A_2 \ldots A_5$.

Troviamo così nuovamente le 16 rette della F_4 e contemporaneamente un mezzo comodo per studiare la loro configurazione.

Una proprietà fondamentale di questa è che: *ad ogni retta se ne appoggiano altre cinque.* Se infatti la retta è rappresentata dall'intorno di un punto A_i, ad essa si appoggiano le rette che hanno come immagini la conica $A_1A_2A_3A_4A_5$ e le rette che congiungono gli altri quattro punti base con A_i. Se invece la retta è rappresentata dalla retta A_iA_k ad essa si appoggiano le rette che hanno come immagini le due curve infinitesime costituite dagli intorni di A_i e A_k e le tre rette che congiungono a due a due in tutti i modi possibili i rimanenti tre punti base. Se finalmente la retta ha come immagine la conica $A_1A_2A_3A_4A_5$ ad essa si appoggiano le cinque rette, rappresentate dai cinque intorni A_1, ..., A_5.

Questo ragionamento può essere abbreviato quando si osservi che operando delle opportune trasformazioni quadratiche la stessa retta può essere rappresentata ora da una curva infinitesima ora da una retta o da una conica. Se infatti si trasforma un sistema lineare di ∞^3 cubiche per A_1, ..., A_5 mediante la trasformazione quadratica che ha ad es. A_1, A_2, A_3 come punti fondamentali, si trova un sistema dello stesso tipo, nel quale però l'intorno del punto A_1 è rappresentato dalla retta $A'_2A'_3$; con una nuova trasformazione quadratica si può trasformare la retta $A'_2A'_3$ in una conica per cinque nuovi punti fondamentali A''_1, ..., A''_5 e così via.

NOTA. - Queste osservazioni implicano in sostanza una proprietà, che potrebbe riconoscersi anche in altri modi: cioè che *la configurazione delle* 16 *rette di una* F_4 *con conica doppia contiene queste rette in modo simmetrico,* anzi — in linguaggio algebrico più preciso — *l'equazione delle* 16 *rette è irriducibile* (sicchè il gruppo corrispondente, in dipendenza dei parametri da cui dipende la superficie, riesce transitivo).

Passiamo ora allo studio delle coniche della superficie. Poichè una conica fa sempre parte di una sezione piana insieme ad un'altra conica, e poichè le sezioni piane sono rappresentate da cubiche, ne viene che l'immagine di una conica della superficie non può essere altro che una retta od una conica. Un facile ragiona-

mento prova immediatamente che tutte e sole le coniche della superficie (diverse dalla conica doppia) sono rappresentate:

a) dalle rette del fascio che ha il punto base A_i ($i=1,2,...,5$) come centro;

b) dalle coniche del fascio che ha per punti base i quattro punti base del sistema rappresentativo della superficie, diversi dal punto A_i ($i=1, 2, ..., 5$).

Quindi possiamo dire: *sulla superficie del quart' ordine con conica doppia esistono* (*in generale*) *dieci fasci di coniche*, che formano cinque coppie di *fasci coniugati*. Ogni fascio del tipo *a*) è *coniugato* al fascio del tipo *b*), corrispondente allo stesso valore dell'indice *i*, nel senso che una qualunque conica del primo fascio forma una sezione piana della superficie insieme ad una ben determinata conica del secondo fascio e viceversa.

Risulta immediatamente che due coniche della F_4 hanno due o un punto in comune a seconda che appartengono a fasci coniugati o no. Coniche che appartengono allo stesso fascio sono invece prive di punti comuni.

Le sezioni piane spezzate in due coniche corrispondono a piani bitangenti alla superficie. *Per un punto generico P della* F_4 *passano due piani bitangenti, che segano la* F_4 *in una coppia di coniche, delle quali l'una appartiene ad un fascio del tipo a*) *e l'altra al fascio coniugato di tipo b*); *in totale quindi per il punto P passano* 10 *piani, bitangenti alla* F_4 *e seganti la superficie in una coppia di coniche*: infatti se P' è l'immagine di P, per esso passerà una retta del fascio di tipo *a*) ed una conica del fascio coniugato di tipo *b*), che si possono rispettivamente completare, in modo da formare l'immagine di una sezione piana, con una conica del fascio di tipo *b*) e con una retta del fascio di tipo *a*).

Ora il sistema dei piani, bitangenti alla F_4, costituito dai piani seganti la F_4 secondo coniche appartenenti ad una coppia ben determinata di fasci coniugati, inviluppa una superficie (sviluppabile) che è un cono quadrico: infatti per un punto generico della F_4 passano due piani del sistema, sicchè l'inviluppo riesce

di seconda classe. Due piani infinitamente vicini del sistema si segano in una retta (caratteristica) generatrice del cono inviluppo, la quale appartiene ad un piano bitangente ad F_4 e passa per i due punti di contatto, riuscendo quindi bitangente alla F_4.

Possiamo perciò enunciare: *I piani (bitangenti), secanti una superficie del quart'ordine con conica doppia secondo coppie di coniche formano* (in generale) *cinque coni quadrici inviluppo* (coni di KUMMER). *Le generatrici dei cinque coni di* KUMMER *sono rette bitangenti alla* F_4.

34. La superficie di Segre intersezione di due quadriche dello spazio S_4.

Sappiamo che un sistema lineare di ∞^3 cubiche per 5 punti semplici $A_1, \ldots, A_5$ non costituisce nel piano un sistema completo, essendo contenuto in un sistema lineare ∞^4.

Ciò indica che la superficie F_4 con conica doppia non è *normale,* ma proviene per proiezione da una superficie normale Φ_4 dello spazio S_4 a 4 dimensioni, che appunto viene rappresentata sul piano in modo che le immagini delle sezioni iperpiane siano le ∞^4 C_3 per $A_1, \ldots, A_5$.

Anche direttamente sulla F_4 si può vedere che il sistema lineare ∞^3 delle sezioni piane si lascia ampliare in un sistema lineare completo di dimensione 4. Si considerino infatti le ∞^4 quadriche passanti per la conica doppia. Esse segano ulteriormente la F_4 in ∞^4 quartiche in generale gobbe, fra le quali sono contenute le ∞^3 quartiche sezioni piane, in corrispondenza a quelle quadriche, che sono spezzate in un piano qualunque e nel piano della conica C_2. Ponendo una omografia fra queste ∞^4 quadriche e gli ∞^4 iperpiani dello spazio S_4, otteniamo direttamente la superficie Φ_4, della quale la F_4 è una proiezione (da un punto esterno).

Questa costruzione si può anche interpretare nel seguente modo. Le ∞^4 quadriche passanti per C_2 si possono riguardare come le immagini delle ∞^4 sezioni iperpiane di una quadrica Q_2 di S_4, rappresentata (per proiezione da un suo punto) sullo spazio ordinario. Ora il sistema doppio delle sezioni iperpiane è

segato sulla quadrica Q_2 dalle ∞^{14} quadriche di S_4: questo sistema è quindi di dimensione 13 ed è rappresentato sullo spazio ordinario dal sistema delle ∞^{13} (1) superficie del quarto ordine con la conica C_2 doppia. Ne segue: *Ogni superficie del quart'ordine con conica doppia proviene per proiezione da una superficie dello spazio a quattro dimensioni, intersezione di due* (e quindi di un fascio di) *quadriche* (C. SEGRE (2) 1884).

Inversamente: *la superficie base di un fascio di quadriche in S_4 è proiettata da un punto P generico di S_4 in una superficie del quart'ordine con conica doppia.* Infatti sia Q_2 la quadrica del fascio passante per P e π lo S_3 tangente in P a Q_2. Lo spazio π interseca la Q_2 secondo un cono quadrico Λ_2 sul quale esiste una quartica gobba L_4 di prima specie, comune a tutte le quadriche del fascio, la quale risulta definita come intersezione della superficie Φ_4, base del fascio, con lo spazio π. La quartica gobba L_4 è intersecata in due punti dalle generatrici del cono Λ_2 e proiettata dal vertice P di esso dà perciò nello spazio ordinario una conica doppia.

Alle quattro generatrici del cono Λ_2, che riescono tangenti alla quartica L_4, rispondono i 4 punti cuspidali della F_4 (giacenti sulla conica doppia).

Si può ora — col SEGRE — trovare per via iperspaziale tutte le proprietà della F_4 con conica doppia.

Noi esporremo in breve il procedimento con il quale si pos-

---

(1) Il sistema lineare delle F_4 passanti doppiamente per una data C_2 è effettivamente di dimensione 13. Infatti abbiamo veduto che le F_4 con C_2 doppia passanti per un punto P si possono trasformare birazionalmente con una trasformazione T in superficie cubiche passanti per una conica C'_2; inversamente, le F'_3 per C'_2 si trasformano per la T^{-1} in F_4 con la C_2 doppia e passanti per P. Ne segue che le F_4 con la C_2 doppia e passanti per P dipendono da 12 parametri come le F'_3 passanti per una conica C'_2: le F_4 che hanno la C_2 doppia sono allora ∞^{13} c. d. d.

(2) Cfr. C. SEGRE: *Etude des différentes surfaces du 4ème ordre à conique double ou cuspidale (générale ou décomposée) considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions.* «Math. Ann.», Bd. XXIV.

sono ritrovare le cinque serie di piani bitangenti, secanti la F_4 in coppie di coniche.

Osserviamo a questo scopo che nel fascio di quadriche (passanti per la superficie Φ_4) esistono in generale cinque coni di prima specie, ossia formati dagli ∞^1 piani che proiettano da un punto (vertice del cono) le generatrici di una quadrica dello spazio ordinario; i piani di uno qualunque di questi coni si dividono in due sistemi e due piani del medesimo sistema si intersecano solamente nel vertice del cono, mentre due piani non appartenenti al medesimo sistema hanno in comune una retta (generatrice del cono).

Ciò premesso, osserviamo che un piano di un cono del fascio è segato da una quadrica generica del fascio in una conica, la quale è comune a tutte le quadriche del fascio e per conseguenza giace sulla Φ_4. Reciprocamente, se sulla Φ_4 esiste una conica, il piano di essa appartiene certamente ad un cono del fascio: imponendo infatti ad una quadrica generica del fascio di contenere oltre la conica un punto del piano di essa, il piano della conica fa parte della quadrica, la quale diventa necessariamente un cono.

Dunque le coniche della Φ_4 si ottengono tutte e sole segando la Φ_4 con i piani appartenenti ai cinque coni del fascio di quadriche.

Ne segue: *Sulla Φ_4 esistono cinque serie di coniche, ogni serie essendo costituita da due fasci razionali* (tra loro coniugati). *Due coniche della superficie hanno due od un punto comune a seconda che appartengono a fasci coniugati o no. Due coniche del medesimo fascio non hanno punti comuni.*

Queste affermazioni risultano evidenti quando si definiscano come appartenenti alla medesima serie le coniche giacenti in piani dello stesso cono; i due fasci coniugati in ciascuna serie si ottengono in corrispondenza ai due sistemi nei quali si dividono i piani di ciascun cono.

Dalle proprietà delle coniche di Φ_4, si deducono agevolmente le proprietà, già innanzi incontrate, delle coniche di F_4.

Proiettando da un centro P scelto genericamente in S_4, gli S_3

passanti per P e contenenti un piano di uno dei cinque coni, segano questo cono secondo un ulteriore piano. Ma nell'S_3 in cui si proietta, i nominati S_3 danno luogo a piani, che segano la F_4 in coppie di coniche, risultando bitangenti alla F_4; ed i piani bitangenti così ottenuti inviluppano cinque coni quadratici, che sono i *cinque coni* di KUMMER.

35. Casi particolari.

Abbiamo detto che le superficie del quarto ordine con conica doppia dipendono in generale da sei invarianti assoluti. Qualora le nominate superficie si considerino come proiezioni da un punto dello S_4 delle superficie di SEGRE, i sei invarianti si possono riconoscere nei due invarianti che possiede un fascio di quadriche in S_4 [1], e nelle coordinate del centro di proiezione.

Particolarizzazioni notevoli della F_4 con conica doppia si possono ottenere, sia in rapporto ad una posizione particolare del centro di proiezione, lasciando generale la superficie di SEGRE Φ_4 che si proietta nella F_4, sia in rapporto a particolarizzazioni della Φ_4 stessa, sia infine in relazione ad entrambe queste circostanze. Lo studio completo di tutte le particolarizzazioni possibili porta a numerosissimi tipi di F_4 con conica doppia, i quali trovansi elencati nella già citata memoria di C. SEGRE. Noi ci limiteremo ad indicare alcuni esempi particolarmente interessanti.

Assumiamo dapprima una Φ_4, la quale sia comune a tutte le quadriche di un fascio generico. Proiettandola da un punto qualunque O, si è visto che la conica doppia di F_4 proviene come proiezione da una quartica ellittica L_4, generalmente irriducibile. L'intorno della conica doppia della F_4 costituisce quindi una sola falda da ritenersi equivalente all'intorno di una curva ellittica (cioè equivalente ad una curva doppia, sulla quale i piani segano una g_4^3 composta con una g_2^1). I quattro punti cuspidali

[1] Un fascio di quadriche di S_4 dà luogo a due invarianti: tali sono ad es. i due birapporti che tre coni del fascio formano entro il fascio stesso (considerato come una retta) con il quarto ed il quinto cono.

dell'intorno di P' si ottiene un fascio di cubiche razionali che hanno il punto P' come doppio.

Riferiamoci sempre alla Φ_4 generale e consideriamo ora un iperpiano *bitangente* ad essa che passi per il vertice di uno dei cinque coni, appartenenti al fascio di quadriche, che ha la Φ_4 come superficie base.

Un tale iperpiano bitangente S_3 sega la Φ_4 in una coppia di coniche irriducibili L'_2 ed L''_2, che si segano in due punti, essendo comuni ad un fascio di quadriche. *Le coniche L'_2 ed L''_2 possono venir proiettate in una conica doppia irriducibile ovvero in una coppia di rette doppie.* Si ottiene il primo caso quando si proietta la Φ_4 da un punto O, che sia vertice di un cono irriducibile contenente L'_2 ed L''_2; proiettando invece la Φ_4 da un punto della retta passante per i due punti comuni alla L'_2 ed alla L''_2 le due coniche divengono due rette doppie incidenti.

Spieghiamo le circostanze, che si presentano nel primo caso. Nel fascio di quadriche passanti per L'_2 ed L''_2 esistono *due* coni irriducibili corrispondenti alle due prospettività che intercedono fra le due coniche. La proiezione della Φ_4 dal vertice di uno qualunque di codesti coni dà una F_4 con conica doppia, lungo la quale si intersecano due falde distinte (in senso integrale) della F_4; sulla conica doppia esistono *due punti cuspidali doppi*, provenienti dalla coppia di punti comuni alla L'_2 ed alla L''_2. Nella rappresentazione piana la conica doppia si può ritenere rappresentata da una cubica per $A_1, A_2, \ldots, A_5$, spezzata in una retta r per A_1 ed in una conica C_2 per A_2, A_3, A_4, A_5. La retta r e la conica C_2 risultano riferite proiettivamente l'una all'altra, le coppie di punti omologhi corrispondendo ai punti della conica doppia della F_4; in particolare i punti comuni alla r ed alla C_2 rispondono ai due punti cuspidali doppi della F_4.

Viceversa, se è data a priori una cubica C_3, spezzata in una retta r per A_1 ed in una conica C_2 per A_2, A_3, A_4, A_5, essa si può — in *due* modi diversi — considerare come immagine della conica doppia di una F_4, rappresentata da cubiche per $A_1, A_2, \ldots, A_5$. Infatti, se la C_3 rappresenta una conica doppia, le immagini delle sezioni piane della F_4 devono segare su di essa una g_4^2 com-

posta con le coppie di una g_2^1; si tratta dunque di costruire le g_2^1 per le quali il *doppio* sia la serie segnata sulla $r + C_2$ dalle $C_3(A_1A_2...A_5)$. Le nominate g_2^1 si costruiscono così: preso un punto A della C_2, le $C_3(A_1A_2...A_5)$ che toccano la C_2 in A, segano sulla r una g_2^1, che possiede due punti doppi A', A''. Associando ad A il punto A' (o A'') e ad ogni punto comune ad r ed a C_2 questo punto stesso si ottiene una proiettività tra la C_2 e la r, cioè una g_2^1 sulla curva $r + C_2$.

Riprendiamo la considerazione della superficie Φ_4, sulla quale vien data una sezione piana riducibile in due coniche L'_2 ed L''_2, per esaminare la F_4, che si ottiene proiettando la Φ_4 da un punto O della retta determinata dai punti P e Q comuni ad L'_2 e L''_2. Le due coniche L_2' ed L''_2 divengono due rette doppie, incidenti in un punto, proiezione della coppia PQ. Su ognuna delle rette doppie vi sono due punti cuspidali: essi risultano dalla proiezione da O dei punti di contatto delle tangenti condotte da O alle coniche L'_2 ed L''_2. Nella rappresentazione piana la linea doppia della F_4 è data da una cubica C_3 per A_1, A_2, ..., A_5 spezzata in una retta r per A_1 ed in una conica C_2 per A_2, A_3, A_4, A_5; le immagini delle sezioni piane della F_4 segano tanto la r quanto la C_2 secondo una g_2^1, alla quale appartiene la coppia dei punti $P'Q'$ comuni alla r ed alla C_2. In altre parole, le immagini delle sezioni piane segano sulla C_3, spezzata nella r e nella C_2, una g_4^2 composta con le coppie di una g_2^1 la quale possiede una coppia *neutra* (contata due volte) nei punti comuni alla r ed alla C_2.

Viceversa, se è data una retta r per A_1 ed una conica C_2 per A_2, A_3, A_4, A_5, si può costruire in ∞^1 modi un sistema lineare ∞^3 di $C_3(A_1A_2...A_5)$, il quale seghi tanto sulla r come sulla C_2 una g_2^1 alla quale appartenga la coppia dei punti P' Q' comuni ad r e a C_2. Basta all'uopo scegliere una coppia di punti arbitrari ad es. sulla C_2; la coppia P' Q' e la nominata coppia determinano una involuzione g_2^1 sulla C_2 ed esistono ∞^3 $C_3(A_1 A_2 ... A_5)$, che segano la C_2 in una coppia di questa g_2^1. Il sistema lineare ∞^3 così costruito sega una g_2^1 anche sulla retta r, giacchè le curve che passano per il punto P' devono passare necessariamente per il punto Q'.

Abbiamo considerato il caso di un iperpiano S_3 che sega la Φ_4

in una coppia di coniche irriducibili L'_2 ed L''_2, ed abbiamo tacitamente supposto che L'_2 ed L''_2 fossero distinte. Se invece L''_2 sia infinitamente vicina ad L'_2, la proiezione della Φ_4 da un punto O, vertice di un cono irriducibile contenente la L'_2 e la L''_2, non darà una F_4 con conica doppia, nella quale si incrociano due falde distinte, ma una F_4 con *conica cuspidale*. Ricerchiamo più precisamente in quali circostanze *esistono sulla* Φ_4 *delle sezioni iperpiane, spezzate in due coniche irriducibili infinitamente vicine*: vedremo che *ciò non è possibile sulla* Φ_4 *generale, ma importa una particolarizzazione della* Φ_4, *per la quale essa acquista due punti doppi*, tali che la retta congiungente non appartenga alla superficie.

Supponiamo che sulla Φ_4 (superficie base di un fascio di quadriche Q_2 di S_4) esista una sezione iperpiana spezzata in due coniche infinitamente vicine L'_2 ed L''_2. Le due coniche costituiscono la linea base di un fascio di quadriche, che si toccano lungo la L'_2; ed al nominato fascio appartiene *un* cono irriducibile di vertice O. Gli iperpiani S_3 di S_4, che toccano i punti di una quadrica Q_2 di S_4, passante per la Φ_4, nei punti della L'_2, formano un cono di seconda specie con un asse a, il quale passa necessariamente per O. Per un'altra quadrica di S_4, Q'_2, la quale passi per Φ_4 si avrà un altro asse a', passante per O. Il piano dei due assi a ed a' è sostegno d'un fascio d'iperpiani, fra i quali ve n'è due, tangenti alla L'_2 rispettivamente in P e Q. I due nominati iperpiani risultano così tangenti tanto a Q_2 che a Q'_2; ne segue che le quadriche del fascio, la cui superficie base è la Φ_4, hanno in P (e Q) lo stesso iperpiano tangente. I due punti P e Q saranno dunque doppi per la Φ_4; e la retta che li congiunge non può appartenere alla superficie.

Viceversa, se sulla Φ_4 esistono due punti doppi, P e Q, tali che la retta PQ non sia contenuta nella Φ_4, esistono delle sezioni iperpiane spezzate in due coniche irriducibili infinitamente vicine: infatti gli iperpiani per P e Q segano la Φ_4 in coppie di coniche ed ogni coppia di coniche della Φ_4 per P e Q appartiene ad un iperpiano; ciò avviene dunque anche per due coniche infinitamente vicine.

Come abbiamo detto, se sulla Φ_4 esiste una sezione iperpiana spezzata in due coniche irriducibili infinitamente vicine, la Φ_4, proiettata dal punto O, vertice dell'unico cono irriducibile contenente le nominate due coniche, diviene nello spazio ordinario una F_4 con *conica cuspidale* sulla quale si hanno *due punti chiusi* (1) (tacnodi), provenienti dai due punti doppi P e Q della Φ_4. Le sezioni piane della F_4, che passano per un punto chiuso sono (conformemente alla definizione della singolarità « punto chiuso ») di genere zero anzichè di genere uno: esse sono infatti le proiezioni delle sezioni iperpiane della Φ_4 passanti per un punto doppio.

Nella rappresentazione piana della F_4 i cinque punti base non possono essere più generici, dovendo la Φ_4 possedere due punti doppi, senza però contenere la retta che li congiunge.

Ora se la Φ_4 acquista un punto doppio, nella rappresentazione piana si avvera una delle circostanze seguenti:

a) due punti base si avvicinano indefinitamente;

b) tre punti base sono in linea retta.

Quindi la Φ_4 avrà due punti doppi generici, nei casi seguenti:

1) i punti A_1, A_2 ed A_3, A_4 sono infinitamente vicini;

2) il punto A_2 è infinitamente vicino ad A_1 ed A_3, A_4, A_5 sono in linea retta;

3) i punti A_1, A_2, A_3 ed A_3, A_4, A_5 sono allineati.

Il caso 3) si riduce al caso 1) con la trasformazione quadratica che ha i punti fondamentali in A_1, A_3, A_5. Ma nel caso 1) la retta A_1A_3 è immagine di una retta della superficie passante per i due punti doppi e quindi le possibilità 1) e 3) vanno scartate. Invece nel caso 2) le sezioni piane che passano per i due punti doppi si spezzano in due coniche ed hanno come immagini le coppie di rette uscenti da A_1, cui si aggiunge come parte fissa la retta fondamentale $A_3A_4A_5$.

Possiamo dunque dire: *Nella rappresentazione piana di una F_4 con conica cuspidale, mediante cubiche per 5 punti A_1, A_2, ...,*

(1) Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. II, Lib. IV, Cap. IV, pag. 604.

A_5, *il punto* A_2 *è infinitamente vicino ad* A_1 ed A_3, A_4, A_5, *sono in linea retta; la conica cuspidale è rappresentata da una* C_3 *per* A_1, A_2, ..., A_5 *spezzata in una retta* r *per* A_1 *contata due volte e nella* $A_3A_4A_5$. Le immagini delle sezioni piane devono segare la retta doppia r in una serie di coppie di punti coincidenti e quindi le $C_3(A_1A_2...A_5)$, che passano per un punto della r, hanno ivi una tangente fissa; i due punti chiusi della conica cuspidale sono rappresentati dall'intorno del punto A_1 e dall'intorno del punto comune alla r ed alla retta $A_3A_4A_5$.

Viceversa, se A_2 è infinitamente vicino ad A_1 ed A_3, A_4, A_5 sono in linea retta, esiste *un* sistema lineare ∞^3 di $C_3(A_1A_2...A_5)$, che è rappresentativo di una superficie F_4 con conica cuspidale, rappresentata da una retta doppia r data ad arbitrio per A_1.

Per costruire il nominato sistema rappresentativo ci riferiremo per semplicità al sistema completo delle quartiche, passanti doppiamente per due punti A, B e semplicemente per quattro punti A_1, A_2, A_3, A_4: questo sistema si riduce, con una trasformazione quadratica che ha i punti fondamentali in A, B, A_1, al sistema delle cubiche per cinque punti semplici; e se nel sistema delle cubiche due punti base sono infinitamente vicini e tre in linea retta, potremo supporre nel sistema delle quartiche che A_1, A_2 ed A_3, A_4 siano infinitamente vicini tra loro.

Ciò premesso, diamo ad arbitrio una conica C_2 per A, B, A_1, A_3: si tratta di costruire un sistema lineare $\infty^3 \mid C_4 \mid$ di quartiche, immagini delle sezioni piane di una F_4, per la quale la C_2 — contata due volte — è immagine di una conica cuspidale. Le curve del sistema $\mid C_4 \mid$, che passano per un punto D della C_2, passano di conseguenza per un punto D' infinitamente vicino a D. Quindi esisterà nel sistema $\infty^3 \mid C_4 \mid$ un fascio di C_4 con D doppio; e, viceversa, se vi è un tal fascio la rete delle C_4 per D ha di conseguenza un punto base infinitamente vicino D', essendo determinata per combinazione lineare di una C_4 con questo fascio.

Ora è facile mostrare che *i fasci di* $C_4(A^2B^2A_1A_2A_3A_4)$, *che hanno un punto doppio sulla conica* C_2, *appartengono ad un ben determinato sistema lineare* ∞^3, *rappresentativo di una* F_4. Al-

l'uopo consideriamo il sistema ∞^2 delle curve $C_4(A^2B^2A_1A_2A_3A_4)$ che hanno un punto doppio sulla C_2 e ricerchiamo l'indice di esso. Basta valutare quante curve del sistema passano per due punti generici del piano. Ora le $C_4(A^2B^2A_1A_2A_3A_4)$, passanti per due punti generici del piano, formano una *rete*, che ha una curva jacobiana C_9 d'ordine 9, passante cinque volte per A e B e tre volte per A_1, A_3 (1). La C_9 sega la C_2 in 18—5—5—3—3=2 punti, fuori dei punti base, sicchè la serie ∞^2 delle $C_4(A^2B^2A_1A_2A_3A_4)$ con un punto doppio su C_2 riesce d'indice due e perciò sta in un sistema lineare ∞^3 di C_4.

Così è *costruito il sistema lineare, rappresentativo di una F_4 con conica cuspidale, rappresentata dalla C_2 contata due volte. I due punti chiusi hanno come immagini i punti A_1 ed A_3.*

Quando si sia costruito un sistema lineare ∞^3 di $C_4(A^2B^2A_1A_2A_3A_4)$ rappresentativo di una F_4 con conica cuspidale, sembra, a prima vista, che basti spezzare in due rette incidenti la conica C_2, che — contata due volte — rappresenta la conica cuspidale, per ottenere il sistema rappresentativo di una F_4 con due rette cuspidali incidenti. Ma la cosa non sta così: se infatti la C_2 si spezzi nelle rette $a \equiv AA_1$ e $b \equiv BA_3$, le C_4 che hanno un punto doppio sulla a si spezzano nella a ed in una C_3, appartenente alla rete $C_3(B^2A\,A_1A_3A_4)$; ma combinando linearmente le due reti $a + C_3(B^2A\,A_1A_3A_4)$ e $b + C_3(A^2B\,A_3A_1A_2)$ si ottiene un sistema lineare ∞^3 *con un nuovo punto base* $O = ab$, che non è più rappresentativo di una superficie del quarto ordine.

La conclusione negativa da noi ottenuta è d'accordo col fatto che *una superficie F_4 con due rette cuspidali incidenti proviene per proiezione da una Φ_4, la quale non possiede due ma tre punti doppi.* Se una Φ_4 di SEGRE può essere proiettata in una F_4 con due rette cuspidali, deve esistere un S_3 di S_4, il quale seghi la Φ_4

(1) Si rammenti che un punto base *i-plo* di una rete è in generale $(3i-1)$-*plo* per la curva jacobiana; ma due punti semplici infinitamente vicini danno un punto triplo e non doppio. Cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. II, Lib. II, Cap. I, pagg. 35-37.

in due coppie di rette incidenti infinitamente vicine; in altre parole il nominato S_3 deve segare il fascio di quadriche di S_4, passanti per la Φ_4, in un fascio di coni, che hanno i medesimi piani tangenti lungo due generatrici a e b fra loro incidenti; e basta proiettare la Φ_4 da un punto della retta comune ai due piani tangenti per ottenere una F_4 con due rette cuspidali. Ora se esiste un S_3 segante la Φ_4 in due coppie di rette incidenti infinitamente vicine, costituenti la linea base di un fascio di coni toccantisi lungo le generatrici a e b, la Φ_4 possiede tre punti doppi: infatti l'esistenza di due punti doppi si dimostra con lo stesso ragionamento fatto innanzi, nel quale la conica, che ora è spezzata nelle due rette a e b, si supponeva irriducibile; il terzo punto doppio è il punto P comune alle rette a e b.

Nella rappresentazione piana mediante $C_4(A^2B^2A_1A_2A_3A_4)$ non è quindi sufficiente che A_1, A_2 ed A_3, A_4 siano infinitamente vicini. Ma basta prendere B infinitamente vicino ad A per far sorgere un terzo punto doppio, il cui intorno è rappresentato dall'intorno di A; e la *costruzione di una F_4 con due rette cuspidali* diventa allora possibile.

Si prendano all'uopo le rette $a \equiv AA_1$, $b \equiv AA_3$: si può costruire in ∞^1 modi un sistema lineare $|C_4|$ di $C_4(A^2B^2A_1A_2A_3A_4)$, rappresentativo di una F_4 con due rette cuspidali, rappresentate dalle rette a e b contate due volte. Osserviamo perciò che il sistema ∞^2 delle $C_4(A^2B^2A_1A_2A_3A_4)$, che hanno un punto doppio sulla retta a, si riduce alla a contata due volte ed al fascio delle coniche per A,B,A_3,A_4. Il fascio delle curve $a^2 + C_2(ABA_3A_4)$ ed analogamente il fascio delle curve $b^2 + C_2(A\,B\,A_1A_2)$ devono dunque essere contenuti in ogni caso nel nostro sistema $|C_4|$. Se si combinano linearmente i due fasci anzidetti si ottiene una rete contenuta in $|C_4|$. Il sistema *rappresentativo* $|C_4|$ riesce allora determinato combinando lineamente questa rete con una $C_4(A^2B^2A_1A_2A_3A_4)$ data ad arbitrio: in questo sistema infatti le curve passanti per un punto di a (o b) passano necessariamente per un punto infinitamente vicino. Le rette a e b sono quindi immagini di rette cuspidali. La costruzione anzidetta porta ad ∞^1 sistemi, giacchè, fissato un punto di a, si può ancora fissare ad arbitrio la

tangente alle curve di $|C_4|$, che passano per esso. Ciò è in accordo con il fatto che se una Φ_4 di SEGRE può essere proiettata in una F_4 con due rette cuspidali, il centro di proiezione può essere scelto ad arbitrio su di una retta.

Dall'esame della rappresentazione piana risulta che sulla retta cuspidale a (o sulla b) vi è un *punto chiuso*, rappresentato dall'intorno di A_1 (o di A_3).

36. Nota storica.

Le superficie del quarto ordine con conica doppia furono incontrate dapprima in alcuni casi particolari metrici dove la conica doppia coincide con il cerchio all'infinito delle sfere: il *toro* o *anello circolare,* le *podarie* e le *trasformate per raggi vettori reciproci delle quadriche, le superficie di rivoluzione ottenute rotando l'ellisse di* CASSINI *e l'ovale di* CARTESIO *intorno al loro asse di simmetria,* sono altrettanti esempi di queste superficie. Nel 1822 CH. DUPIN [1], ricercando le superficie le cui linee di curvatura sono cerchi, si imbattè per il primo in una classe estesa di superficie passanti doppiamente per il cerchio all'infinito delle sfere, che egli chiamò *ciclidi.* Le ciclidi di DUPIN possiedono *quattro* punti doppi conici e perciò non sono le più generali fra le superficie del quart'ordine passanti doppiamente per il cerchio delle sfere .

Solamente nel 1864 M. MOUTARD [2], ricercando le superficie che si trasformano in sè in una trasformazione per raggi vettori reciproci con polo convenientemente scelto, scoprì che questa proprietà era posseduta dalla più generale superficie del quart'ordine passante doppiamente per il cerchio delle sfere, per la quale il polo sopra detto può anzi essere scelto in cinque maniere diverse.

G. DARBOUX propose di chiamare queste superficie senz'altro

---

(1) Cfr. CH DUPIN: *Applications de Géométrie*; Parigi, 1822.

(2) Cfr. M. MOUTARD: *Note sur la transformation par rajons vecteurs réciproques,* e *Sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre*; « Nouvelles Annales de Mathématique », Serie II, Tomo III, 1864.

ciclidi, riservando il nome di *ciclidi* di DUPIN alle superficie le cui linee di curvatura sono cerchi.

Negli anni che vanno dal 1860 al 1875 la scuola geometrica francese con a capo G. DARBOUX dedicò molta parte della sua attività allo studio delle proprietà metriche e differenziali delle ciclidi. I risultati di queste ricerche sono stati sistematicamente esposti dal DARBOUX stesso nella sua opera *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires* (Parigi, 1873), nella quale il lettore potrà trovare una estesa bibliografia e la dimostrazione delle proprietà caratteristiche delle ciclidi.

Dal punto di vista algebrico proiettivo la prima ricerca riguardante le superficie del quart'ordine con conica doppia fu compiuta da E. E. KUMMER (1) (1863). Il KUMMER incontrò la più generale superficie del tipo che ci interessa ricercando tutte le superficie del quart'ordine sulle quali esistono infiniti piani seganti la superficie in coppie di coniche: fra queste è appunto contenuta la superficie del quart'ordine con conica doppia. Il KUMMER scoprì che i piani seganti secondo coniche la F_4 inviluppano cinque coni quadrici, che appunto, dal nome dello scopritore, sono detti *coni di* KUMMER.

Pochi anni più tardi (1868) A. CLEBSCH (2) dedicò alla F_4 con conica doppia una memoria, nella quale è per la prima volta dimostrata la possibilità di rappresentare la superficie punto per punto su di un piano. Il CLEBSCH riguarda la superficie in questione come *definita* da un sistema lineare ∞^3 di cubiche passanti per cinque punti base semplici; questo metodo induttivo, che risale dal sistema delle immagini piane alla superficie rappresentata, fu più tardi adoperato dal NOETHER e messo esplicitamente in rilievo dal CAPORALI (3).

---

(1) Cfr. E. E. KUMMER: *Über die Flächen vierten Grades, auf welche Schaaren von Kegelschnitten liegen*; « Crelle's Journal », Bd. 64, 1863.

(2) Cfr. A. CLEBSCH: *Über die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen*; « Crelle's Journal », Bd. 69, 1868.

(3) Cfr. E. CAPORALI: *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane*; « Coll. Math. in memoriam D. Chelini », 1881, pag. 144.

La memoria del CLEBSCH è ricchissima di risultati particolari sulla superficie del quarto ordine con conica doppia. Egli ritrova i cinque coni di KUMMER, le 16 rette della superficie (che erano state scoperte qualche anno prima dal DARBOUX) delle quali studia la configurazione, e le cinque serie di coniche nelle quali si decompone ciascuno dei sistemi che corrispondono ai cinque coni di KUMMER. Il lettore potrà infine trovare nella memoria del CLEBSCH uno studio delle cubiche e delle quartiche gobbe della superficie e delle relazioni che intercedono fra queste curve e la conica doppia.

Il legame che passa fra la superficie del quart'ordine con conica doppia e la superficie cubica generale fu scoperto da C. F. GEISER (1), il quale mostrò che si poteva ottenere la superficie cubica generale trasformando la superficie del quart'ordine con conica doppia C_2, mediante una trasformazione quadratica in cui ai piani corrispondono le quadriche passanti per C_2 e per un punto generico della F_4.

Il CLEBSCH si era limitato a studiare la F_4 dotata di conica doppia generale. Il caso in cui la superficie acquista dei punti doppi ovvero la conica si spezza in due rette doppie incidenti, distinte o infinitamente vicine, viene studiato da M. KORNDÖRFER (2), seguendo la via indicata dal CLEBSCH.

Il caso particolarmente interessante in cui la *conica* doppia diventa *cuspidale* fu messo in luce per il primo da L. CREMONA (3);

---

(1) Cfr. C. F. GEISER: *Über die Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades haben*; «Crelle's Journal» Bd. 70, 1869.

(2) Cfr. M. KORNDÖRFER: *Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades und einem oder mehreren Knotenpunkten*, «Math. Ann.» Bd. I, 1869 e Bd. II, 1870. — *Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit zwei sich schneidenden Doppelgeraden*, Bd. III, 1871. — *Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades, welche aus zwei sich schneidenden unendlich nahen Geraden besteht*, Bd. IV, 1871.

(3) Cfr. L. CREMONA: *Rappresentazione piana di alcune superficie dotate di curve cuspidali*; «Memorie Acc. Bologna», 1872, Serie III, Tomo II; *Opere*, Tomo III, pag. 326.

della conica doppia provengono dai quattro punti di contatto delle quattro tangenti, che si possono condurre da O alla L_4.

Nella rappresentazione piana, la conica doppia di Φ_4 diventa una cubica per A_1, A_2, ..., A_5, sulla quale le $C_3(A_1A_2...A_5)$, immagini delle sezioni piane, segano una g_4^2 composta con le coppie di una g_2^1; i quattro punti doppi della nominata g_2^1 rispondono ai quattro punti cuspidali della conica doppia.

Dato il punto O, la quartica ellittica L_4 si ottiene segando la Φ_4 con l'iperpiano, tangente in O alla quadrica, che passa per Φ_4 e per O. Si dà così origine ad un cono di vertice O, contenente la L_4: i punti della conica doppia rispondono a coppie di punti della L_4, allineati con O, sopra una generatrice del detto cono.

Viceversa, una sezione iperpiana qualunque della Φ_4 *è una quartica ellittica* L_4, *la quale si può proiettare in una conica doppia da quattro punti generalmente distinti.* Ciò è già stato osservato nella rappresentazione piana, quando abbiamo dimostrato che su di una generica cubica per A_1, A_2, ..., A_5, immagine di una L_4, le $C_3(A_1A_2...A_5)$ segano una g_4^3, che contiene *quattro* g_4^2 composte con le coppie di una g_2^1. La dimostrazione, basata sulla bisezione della serie completa g_4^3, acquista un chiaro senso proiettivo nell'iperspazio: infatti un S_3 generico sega la Φ_4 in una L_4 ed il fascio di quadriche, che ha la Φ_4 come superficie base, in un fascio di quadriche di S_3, contenenti la L_4; al fascio di quadriche in S_3 appartengono *quattro* coni e proiettando la L_4 dai vertici di questi si ottiene una conica doppia.

Supponiamo ora di segare la Φ_4 con un iperpiano S_3 *tangente* ad essa in un punto P. Sulla Φ_4 si ottiene una L_4 (razionale) per cui P è doppio; e la L_4 è la curva base di un fascio di quadriche di S_3, toccanti in P un piano fisso π. Nel nominato fascio esistono *due* coni, i cui vertici stanno nel piano π e non sulla Φ_4: la proiezione della Φ_4 da uno dei due vertici dà una F_4 con conica doppia, che proviene dalla proiezione della L_4.

Nella rappresentazione piana la L_4 è data da una cubica C_3 per A_1, A_2, ..., A_5, dotata di un punto doppio P', immagine del punto P. Data a priori la C_3 essa si può considerare in *due* modi

diversi come immagine di una conica doppia di una F_4, rappresentata da un sistema ∞^3 di $C_3(A_1A_2 \dots A_5)$. Se infatti la C_3 è immagine di una conica doppia, le $C_3(A_1A_2 \dots A_5)$ debbono segarla in una g_4^2 composta con le coppie di una g_2^1, che possiede la coppia costituita dai due punti sovrapposti in P' come *coppia neutra*. Ciò è possibile in due modi diversi, giacchè esistono due g_2^1 che, raddoppiate, sono contenute nella g_4^2, segata sulla C_3 da tutte le $C_3(A_1A_2 \dots A_5)$,

Le due nominate g_2^1 si costruiscono così. Si prendano le $C_3(A_1A_2 \dots A_5)$ tangenti alla C_3 in un suo punto generico A; esse segano sulla C_3 una g_2^1 che possiede due punti doppi A' ed A''; le g_2^1 richieste sono definite dalla coppia neutra associata una volta con la coppia AA' e una volta con la coppia AA''.

Sulla conica doppia della nostra particolare F_4 vi sono *due punti cuspidali distinti*, che provengono dalle tangenti che si possono condurre alla L_4 dal centro di proiezione. La proiezione del punto P è invece *un punto cuspidale doppio*. È noto infatti [1] che la singolarità « punto cuspidale doppio » di una curva nodale risulta definita dalla circostanza, che il punto doppio infinitamente vicino alla curva nodale si trova nella direzione della tangente a questa. Nel caso nostro le sezioni della F_4 con i piani condotti per la tangente alla conica doppia nel punto Q proiezione di P sono effettivamente di genere zero anzichè di genere uno, giacchè corrispondono alle sezioni della Φ_4 con gli iperpiani passanti per il piano π, tangente in P alla Φ_4. Le nominate sezioni piane della F_4 sono quartiche con tre punti doppi, succedentisi sopra un ramo lineare, che passa per il punto Q, avendo ivi come tangente la tangente alla conica doppia. Nella rappresentazione piana il punto cuspidale doppio è rappresentato dal punto P', che risulta doppio per la C_3, immagine della conica doppia: infatti le immagini delle sezioni piane, che passano per P', hanno ivi una tangente fissa e costituiscono una rete; ed imponendo alle curve della rete il passaggio per un punto generico

---

[1] Cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. II, Lib. IV, Cap. IV, pagg 624-25.

conformemente ad un metodo di cui fa uso frequente, egli considera la superficie come trasformata, rispetto ad una trasformazione quadratica conveniente, di una superficie cubica con due punti conici.

Ma una revisione completa di tutti i risultati conosciuti ed una discussione minuta di tutti i casi particolari possibili fu compiuta da C. SEGRE (1884) nella memoria: *Etude des différentes surfaces du 4° ordre à conique double ou cuspidale (générale ou décomposée) considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions* » (« Math. Ann. » Bd. XXIV). Le particolarità di una F_4 con conica doppia vengono fatte dipendere, in questa memoria, dalle particolarità del fascio di quadriche in S_4, dal quale la superficie risulta come proiezione della varietà base, e dalle particolarità del centro di proiezione.

La classificazione delle particolarità di un fascio di quadriche è fatta dal SEGRE in base alla *caratteristica* (1) del fascio. Il SEGRE ha osservato in ispecie che la presenza di punti doppi (con conseguente abbassamento della classe della F_4) è legato alla esistenza nella caratteristica di un esponente *isolato*.

Lo studio del SEGRE deve considerarsi come definitivo per quel che riguarda la enumerazione di tutti i casi particolari della F_4 con conica doppia.

---

(1) Ad un fascio di quadriche corrisponde un fascio d'omografie, prodotti delle rispettive polarità, che contiene la omografia identica. Così, la classificazione dei fasci di quadriche si riduce a quella di questi fasci d'omografie, che dipende in sostanza da un noto teorema di K. WEIERSTRASS. Per tale classificazione, resa perfetta da P. PREDELLA coll'introduzione dei punti uniti infinitamente vicini, cfr.: E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*; Messina (1923) Cap. V, pag. 115 e F. ENRIQUES ed O. CHISINI, *Teoria...* Vol. II, Lib. IV, Cap. IV, pag. 658-686.

CAPITOLO VII.

LA SUPERFICIE DEL QUARTO ORDINE CON RETTA DOPPIA.

37. Trasformazione della superficie del quart'ordine con retta doppia in una cubica.

Procediamo ancora nella nostra analisi dei sistemi lineari di curve piane rappresentativi di superficie F_4 razionali. Dopo avere esaminato i sistemi di coniche o di cubiche, dobbiamo passare ai sistemi di quartiche. Ma i sistemi lineari di quartiche di grado 4 e di genere zero ed uno si riducono, in generale, a sistemi lineari di coniche o di cubiche. Perciò veniamo ora a discutere i sistemi lineari di quartiche di genere 2, rappresentativi di superficie razionali del quarto ordine. Un tale sistema di quartiche deve possedere un unico punto base doppio; e il grado del sistema sarà 4. se si danno 8 punti base semplici.

Le quartiche con un punto doppio ed 8 punti semplici sono $\infty^{14-8-8} = \infty^3$, sicchè il sistema $|C_4|$ delle $C_4\,(O^2A_1A_2...A_8)$ è *completo.*

La superficie F_4, razionale, rappresentata su di un piano in modo che le immagini delle sue sezioni piane formino un sistema lineare del tipo anzidetto, è a sezioni di genere 2; perciò ogni sezione piana possiede un punto doppio e *la F_4 possiede una retta doppia.*

Viceversa si può riconoscere facilmente, con un computo di costanti, che la più generale F_4 con retta doppia è razionale e si lascia rappresentare sul piano nel modo anzidetto. Valutiamo perciò la molteplicità dei sistemi $|C_4|$ birazionalmente distinti e d'altra parte il numero dei parametri da cui dipendono le F_4 con retta doppia, proiettivamente distinte. Il nostro asserto sarà dimostrato se queste due molteplicità risulteranno uguali.

Si ha in primo luogo: *I sistemi di quartiche per un punto doppio e otto punti base semplici dipendono da* 10 *moduli.*

Infatti questi sistemi, essendo completi, cioè determinati dai punti base, dipendono da tanti parametri quanti ne occorrono per determinare 9 punti di un piano: cioè 18. Togliendo otto parametri in corrispondenza alle ∞^8 omografie del piano, otteniamo che i sistemi del tipo richiesto *proiettivamente distinti* dipendono da 10 invarianti proiettivi; ma possono anche aversi sistemi $|C_4|$ equivalenti per trasformazioni birazionali, sebbene proiettivamente diversi. Occorre quindi esaminare le trasformazioni cremoniane del piano, che mutano un $|C_4|$ in un altro $|C_4|$ analogo. È facile trovare le trasformazioni, che qui si presentano per $n = 2, 3$ .... In relazione ai primi valori di n si ha:

per $n = 2$, trasformazioni quadratiche, in corrispondenza alle reti di coniche che hanno un punto base nel punto doppio ed altri due punti base in due punti base semplici;

per $n = 3$, trasformazioni cubiche, in corrispondenza alle reti omaloidiche di C_3 che hanno un punto base doppio in O ed altri quattro punti base semplici in quattro punti base semplici di $|C_4|$, ecc.

Per ogni valore dell'ordine n si ha soltanto un numero finito di reti omaloidiche e quindi, a meno di una omografia fattore, un numero finito di trasformazioni, che mutano un sistema $|C_4|$ in un sistema $|C_4|$ analogo.

D'altra parte le reti omaloidiche, che trasformano un $|C_4|$ in un altro $|C_4|$ analogo, rispondono a reti di quartiche di seconda specie sulla superficie F_4 e poichè queste quartiche sono intersezioni parziali di quadriche, appare che le dette reti omaloidiche devono essere contenute parzialmente nel sistema doppio del $|C_4|$ e perciò il loro ordine resta a priori inferiore ad 8. In tal guisa si arriva a dimostrare, che esiste soltanto un numero finito di $|C_4|$ proiettivamente distinti e birazionalmente equivalenti, cosicchè il numero dei moduli, da cui dipendono questi $|C_4|$ è ancora 10.

Ora mostriamo che *le* F_4 *con retta doppia proiettivamente distinte dipendono effettivamente da* 10 *invarianti proiettivi.*

Perciò contiamo da prima le F_4 con retta doppia r prefissata.

Prendiamo un piano π per r e su di esso una conica C_2. Se imponiamo ad una F_4 con la r doppia di contenere la C_2, imponiamo 5 condizioni. Se la F_4 è costretta a passare ancora per un punto di π fuori di r e di C_2, imponiamo una sesta condizione e la F_4 si spezza nel piano π ed in una superficie cubica F_3 per la r, giacchè la sezione con un piano per r di una F_4 irriducibile con la r doppia consta della r stessa contata due volte e di una conica.

Poichè le superficie cubiche per una retta sono ∞^{15}, ne risulta che imponendo 6 condizioni ad una F_4 con la r doppia, la dimensione delle superficie di questo tipo si abbassa a 15, ossia le F_4 con la r doppia sono ∞^{21}.

Di qui segue che le F_4 con retta doppia *non prefissata* sono ∞^{25} e quindi (1) che le F_4 con retta doppia *proiettivamente distinte* sono ∞^{10}, c. v. d.

Concludiamo che *la più generale superficie del 4° ordine con retta doppia è razionale.*

Ora si presenta il problema di trovare un metodo per eseguire effettivamente la rappresentazione piana di una F_4 con retta doppia su di un piano π, in modo che le immagini delle sezioni piane resultino quartiche passanti per un punto doppio ed otto punti semplici.

Si riesce facilmente a risolvere questo problema qualora si osservi che una superficie F_4 con retta doppia r si può ottenere come trasformata da una superficie cubica F'_3, mediante una trasformazione quadratica di seconda specie (2).

---

(1) Una F_4 con retta doppia r non può essere trasformata in sè da infinite e quindi da un gruppo continuo ∞^1 di omografie, perchè, essendovi sulla retta r 4 punti cuspidali (cfr. pag. 168) dovrebbero aversi anche infinite omografie che lascian fermi tutti i punti della r. Queste non possono essere biassiali perchè la F_4 non è rigata; dovranno dunque trasformare in sè le sezioni piane d'un fascio, ciò che — almeno in generale — è manifestamente impossibile.

(2) Cfr. cap. I, n. 8.

Sia invero F'_3 una superficie cubica dello spazio $S'(x', y' z')$, r' una delle sue (ventisette) rette ed A, B, C tre dei suoi punti. Le quadriche, che contengono r' e passano per A, B, C sono ∞^3 e costituiscono un sistema omaloidico, due quadriche del sistema segandosi in una cubica gobba (che ha la r' come corda e passa per A, B, C) e tre quadriche del sistema avendo un solo punto (variabile) comune. Facendo corrispondere proiettivamente le quadriche del sistema anzidetto ai piani dello spazio $S(x, y, z)$ si ottiene una trasformazione quadratica T tra gli spazi $S'(x', y', z')$ ed $S(x, y, z)$, nella quale al sistema dei piani dello spazio $S'(x', y', z')$ corrisponde un sistema omaloidico di ∞^3 superficie cubiche rigate aventi una medesima retta doppia r e tre generatrici a, b, c comuni; ogni punto della retta a, b o c è il trasformato di una retta del piano $r'A$, $r'B$, o $r'C$, passante per A, B o C, mentre la retta doppia r è immagine del piano ABC, ogni punto di essa risultando da una conica, appartenente al fascio, che ha come punti base i punti A, B, C ed il punto D comune alla retta r' ed al piano ABC.

La superficie cubica F'_3 passante per la retta r' e per i tre punti A, B, C si trasforma in una superficie F_4 del quarto ordine, che contiene le tre rette a, b, c ed ha la retta r come retta doppia. Infatti la trasformata della F'_3 è intersecata da una retta generica in quattro punti, corrispondenti ai quattro punti (fuori di r' e di A, B, C) che la F'_3 ha comuni con la cubica gobba, trasformata della retta; la F_4 contiene le rette a, b, c, giacchè le rette del fascio di centro A nel piano $r'A$ hanno (fuori di r' e di A) un punto in comune con la F'_3. Infine F_4 ha la retta r come doppia. Infatti le rette incidenti ad r' (che intersecano le quadriche per r' e A, B, C in un solo punto non fondamentale) si trasformano in rette, unisecanti le rigate cubiche passanti per r, e quindi in rette che si appoggiano ad r. Ma la F'_3 è incontrata dalle rette che si appoggiano ad r' in due punti (fuori di r') e corrispondentemente la F_4 (trasformata della F'_3) è incontrata in due punti dalle rette, che si appoggiano alla r: ne segue che la r è doppia per la F_4.

Viceversa, data una superficie F_4 con retta doppia r, i piani per r segano la superficie secondo coniche, le quali possono, per

posizioni particolari del piano, spezzarsi in due rette, sicchè sulla F_4 esistono certamente delle rette. Supponiamo infatti che la retta r sia la retta all'infinito del piano xy. L'equazione della F_4 si presenta allora nella fórma:

$$(1) \qquad \varphi_2(x, y) + \psi_2(x, y)z + \chi_2(x, y)z^2 + \varphi_1(x, y)z^3 + \varphi_0 z^4 = 0$$

essendo φ_2, ψ_2, χ_2 dei polinomi di secondo grado in x, y, $\varphi_1(x, y)$ un polinomio di primo grado e φ_0 una costante. Posto $z = \lambda$ nella (1) si ottiene l'equazione di una conica e si tratta di stabilire per quali valori di λ questa risulta degenere. Perciò conviene considerare il discriminante:

$$\| a_{ik} \|$$

dove le a_{ik} sono polinomi di un certo grado in λ. Precisamente, tenendo conto delle potenze d'ordine massimo, che si presentano, il discriminante, uguagliato a zero, darà origine ad un'equazione algebrica della forma:

$$\begin{vmatrix} az^2 + \ldots & bz^2 + \ldots & cz^3 + \ldots \\ bz^2 + \ldots & ez^2 + \ldots & fz^3 + \ldots \\ cz^3 + \ldots & fz^3 + \ldots & gz^4 + \ldots \end{vmatrix} = 0,$$

cioè ad un'equazione di ottavo grado.

Ne viene che: *sopra una superficie del quarto ordine F_4 con retta doppia r esistono, in generale, otto coniche spezzate in due rette, ossia* 16 *rette formanti* 8 *coppie di rette incidenti trà loro ed alla r.*

Ora, prese tre rette sghembe a, b, c di F_4, incidenti alla retta r, trasformiamo la F_4 mediante la trasformazione cubica T^{-1}, inversa della trasformazione adoperata precedentemente, la quale corrisponde al sistema omaloidico delle rigate cubiche passanti doppiamente per r e semplicemente per le tre rette sghembe sopranominate. La F_4 *si trasforma in una superficie cubica* F'_3: infatti le rette sono le trasformate delle coniche comuni a due rigate cubiche che (fuori delle rette r, a, b e c) hanno tre punti comuni con la F_4.

La superficie F'_3 è generalmente razionale, e così viene stabilita la razionalità della F_4 generica con retta doppia r; in realtà

fanno eccezione soltanto i casi in cui la F_4 diventi rigata acquistando una ulteriore retta doppia (sghemba con r), ovvero diventi un cono, possedendo su r un punto quadruplo.

Studiamo in quale modo venga effettivamente a rappresentarsi la F_4 sul piano, ricercando le immagini delle sue sezioni piane. Queste sezioni si trasformano per la T^{-1} nelle sezioni della F'_3, con le quadriche passanti per una certa retta r' e per tre punti A, B, C di F'_3. Ora la superficie cubica F'_3 si può rappresentare punto per punto su di un piano π, in modo che le immagini delle sezioni piane siano delle cubiche per 6 punti base A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, O, mentre una retta r' di F'_3 si può sempre supporre rappresentata da una conica per cinque dei sei punti base, ad es. dalla conica per A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Riferendoci a questa rappresentazione piana della F'_3 troviamo come vengano rappresentate le curve, sezioni della F'_3, con le quadriche contenenti r' e passanti per A, B, C. Anzitutto le curve immagini di sezioni della F'_3 con le quadriche dello spazio sono le sestiche $C_6(A_1^2A_2^2A_3^2A_4^2A_5^2O^2)$, costituenti il sistema doppio delle immagini delle sezioni piane. Perciò le quadriche contenenti la r', che è rappresentata dalla conica per A_1, A_2, ..., A_5, e passanti per A, B, C avranno come immagini le quartiche $C_4(A_1A_2A_3A_4A_5O^2)$, passanti per i tre punti A_6, A_7, A_8, che corrispondono su π ai tre punti A, B, C. Riepilogando: Nella rappresentazione indicata della superficie cubica F'_3 *le immagini delle curve sezioni di* F'_3 *con il sistema delle* ∞^3 *quadriche contenenti* r' *e passanti per* A, B, C, *sono costituite dal sistema delle* ∞^3

$$C_4(A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8O^2)$$

Ne risulta di conseguenza: *la superficie del quart'ordine* F_4 *con retta doppia* r *può essere generalmente rappresentata punto per punto su di un piano* π *in guisa che le immagini delle sue sezioni piane siano delle quartiche per otto punti semplici* A_1, A_2, ..., A_8 *ed un punto doppio* O.

Abbiamo così riguadagnato il sistema rappresentativo, dal quale avevamo preso le mosse.

38. Curve tracciate sulla superficie del quart'ordine con retta doppia.

Le proprietà della superficie del quart'ordine F_4 con retta doppia r si possono leggere sulla sua rappresentazione piana.

Troviamo anzitutto l'immagine della retta doppia r della superficie. I piani per la retta r segano la F_4 in coniche, rappresentate dalle rette del fascio, che ha per centro O. L'immagine della retta doppia è perciò una curva che, completata con una retta per O, costituisce una $C_4(O^2A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8)$; dunque *la retta doppia r è rappresentata dalla cubica C_3, passante per i nove punti base O, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8.* Le immagini delle sezioni piane segano sulla C_3, che rappresenta la retta doppia, una g_2^1, le coppie della quale rappresentano i punti della retta doppia r.

Viceversa, data una cubica C_3 e segnati su di essa nove punti distinti O, A_1, A_2, ..., A_8, la C_3 si può sempre considerare come immagine della retta doppia di una certa superficie F_4 (proiettivamente definita) che si lascia rappresentare sul piano in modo che il sistema delle sue sezioni piane abbia come immagine il sistema *completo* delle ∞^3 $C_4(O^2A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8)$ (secanti sulla C_3 una g_2^1). Fa eccezione il caso in cui i punti O A_1, A_2, ..., A_8 sieno i nove punti base di un fascio di cubiche, la F_4 riducendosi allora ad una quadrica doppia in corrispondenza al fatto che il sistema delle C_4 appartiene ad una involuzione di coppie di punti.

Risulta ora evidente, ciò che dianzi abbiamo stabilito direttamente, cioè che la F_4 possiede 16 rette che si appoggiano alla r.

Invero le rette che si appoggiano alla r, facendo parte di una sezione piana, insieme alla retta r, che ha per immagine una C_3, possono essere rappresentate solamente o da intorni di punti base ovvero da rette. Un facile esame mostra immediatamente, che le rette della superficie incidenti alla r sono rappresentate da:

a) le otto curve infinitesime, costituenti gli intorni del primo ordine degli otto punti base A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8;

b) le otto rette che congiungono il punto O, con ciascuno degli altri otto punti base.

Come si vede, per ogni retta incidente ad r ne esiste un'altra ed una sola incidente ad essa. In generale, non esistono sulla F_4 delle rette non incidenti alla retta r. Ma si avranno sulla F_4 delle *rette soprannumerarie* non incidenti la r, in diversi casi particolari: per es. se tre dei punti A_i ($i = 1, 2, \ldots, 8$) siano allineati, ovvero cinque di essi siano su di una conica insieme ad O, ovvero sette di essi siano su di una cubica, che ha O come punto doppio; ciò dà luogo ad una serie di casi possibili, che non importa qui indagare.

È anche facile dimostrare che la F_4 possiede in generale un numero finito di coniche, oltre a quelle giacenti in piani per la retta doppia r (che hanno come immagine le rette per O). Esse sono rappresentate:

a) dalle $\binom{8}{2} = 28$ rette che congiungono a due a due in tutti i modi possibili gli otto punti base semplici A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8;

b) dalle $\binom{8}{4} = 70$ coniche passanti per O e per quattro degli otto punti base semplici;

c) dalle $\binom{8}{6} = 28$ cubiche, che hanno O doppio e passano per sei degli otto punti base semplici.

Una conica del tipo *c*) forma insieme con una ben determinata conica del tipo *a*) una sezione piana completa di F_4. Il sistema delle coniche del tipo *b*) è invece complementare di se stesso.

La rappresentazione piana della F_4 con retta doppia può servire anche a mettere in evidenza gli invarianti assoluti della superficie. Questi invarianti sono infatti i moduli rispetto alle trasformazioni birazionali di una cubica C_3, sulla quale si siano segnati nove punti. Ne viene che *la F_4 con retta doppia possiede dieci invarianti*, per i quali si possono scegliere: l'invariante assoluto della cubica C_3 ed i parametri che fissano le posizioni dei nove punti O, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 sulla cubica stessa (distanze da un flesso). Riportandoci alla superficie F_4 nello spazio, l'invariante assoluto della cubica rappresenta il birapporto dei quattro punti cuspidali esistenti (in generale) sulla retta doppia; mentre

gli altri invarianti verrebbero ad esprimersi in funzione dei punti d'appoggio delle rette semplici di F_4 con la retta doppia r.

NOTA. - Si può rappresentare direttamente la superficie F_4 con retta doppia r su di un piano, usando di una congruenza del primo ordine, le cui rette intersechino la F_4 (oltre che nelle curve focali fisse) in un unico punto. Basta a questo scopo la conoscenza di una *curva* C_n *della superficie la quale si appoggi in* $n-1$ *punti alla retta doppia e sia di conseguenza unisecante le coniche segnate sulla* F_4 *dal fascio di piani per* r: infatti da un punto P della F_4 parte una sola retta che si appoggi alla r ed alla C_n in punti non comuni alla r ed alla C_n e questa retta (essendo la r doppia e la C_n semplice) non incontra altrove la F_4.

Il CLEBSCH [1], seguendo questo concetto, ha dimostrato direttamente l'esistenza sulla F_4 di un numero finito di coniche che non sono complanari con la retta doppia r e pertanto si appoggiano ad essa in un punto. Ciascuna di queste coniche può servire alla rappresentazione della superficie su di un piano.

Inoltre, il CLEBSCH [2] ha mostrato come si possa dedurre l'esistenza di curve di F_4, unisecanti le coniche segnate dai piani per r, dalle proprietà del *piano doppio* che si ottiene qualora si proietti la superficie F_4 da un punto O della sua retta doppia su di un piano π. Eseguendo questa proiezione, si ottiene effettivamente un piano doppio, giacchè ogni punto P della superficie si proietta in un punto P' del piano π mentre a sua volta ogni punto di π proviene da due punti di F_4.

La curva di diramazione (luogo dei punti, che corrispondono ad una coppia di punti infinitamente vicini su F_4) è una sestica, che ha il punto A comune alla retta r ed al piano π come quadruplo. Infatti le sezioni piane per O, segano la superficie in una

---

[1] Cfr. A. CLEBSCH: *Über die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung;* « Math. Ann » Bd. I, 1869.

[2] Cfr. A. CLEBSCH: *Über den Zusammenhang einer Klasse von Flächenabbildungen mit der Zweiteilung der Abel'schen Functionen.* « Math. Ann. » Bd. III, 1871.

quartica che ha il punto O come doppio e da questo punto partono $2n + 2p - 2 = 4 + 4 - 2 = 6$ tangenti alla curva; ne segue che il cono circoscritto alla F_4 da O è un cono del sesto ordine e quindi *sei* è anche l'ordine della curva di diramazione, che è la sezione del cono circoscritto con il piano π. Il punto A risulta quadruplo per la curva di diramazione in corrispondenza al fatto che i piani passanti per r segano la F_4 secondo delle coniche, sicchè per questi piani, le sei tangenti che vanno in generale alla curva sezione si riducono a due, mentre le altre quattro sono assorbite dalla retta r.

Le coniche del piano che passano per A, segano la sestica di diramazione che è di genere 4, secondo una g_4^6, la quale si può bisecare in $2^{2p} = 2^8 = 256$ modi, dando luogo a 256 coniche passanti per A e ovunque tangenti (cioè quadritangenti) alla curva di diramazione.

Ad una di queste coniche, K, corrisponde sulla F_4 una curva C, sulla quale i punti allineati con O sono coniugati in una involuzione g_2^1, le cui coppie sono in corrispondenza biunivoca con i punti di K. I punti doppi di questa involuzione si otterrebbero in corrispondenza ai punti d'intersezione semplice della K con la curva di diramazione; ma la K è tangente alla curva di diramazione ovunque la incontra, sicchè la K è priva di punti di diramazione e corrispondentemente la g_2^1 sulla C di F_4 è priva di punti doppi. Poichè una g_2^1 sopra una curva irriducibile deve possedere sempre almeno $2n - 2 = 2$ punti doppi, ne segue che la C è spezzata in due curve C_1 e C_2, che possono essere due cubiche gobbe, aventi la retta r come corda, ovvero una conica incidente ad r ed una residua quartica gobba con punto doppio su di essa, ulteriormente incidente alla r. La distinzione dei casi che qui possono occorrere importerebbe un esame più delicato, sul quale non ci fermeremo. In ogni caso le curve C_1 e C_2 sono unisecanti le coniche di F_4, sezioni dei piani per r: infatti queste coniche si proiettano nelle rette per A, che sono unisecanti la conica K.

OSSERVAZIONE. - La considerazione del piano doppio con sestica di diramazione C_6 dotata di un punto quadruplo A permette

anche di ritrovare sopra F_4 le 16 rette, incidenti alla retta doppia r. A priori queste rette dovranno corrispondere alle tangenti a C_6 condotte per A, per ciascuna di queste rette, venendo a coincidere i due punti di diramazione, segnati da C_6, in un unico punto critico apparente. Ma poichè la C_6 è (in generale) di genere 4, si avranno 10 tangenti ad essa per A e se ognuna di queste fosse immagine di una conica riducibile di F_4 si troverebbero sulla superficie 20 rette, anzichè 16. Lo studioso scioglierà il paradosso, rilevando che, quando si proietta la F_4 su un piano doppio da un punto O della retta r, vi sono due coniche di F_4 (sezioni piane per r), le cui proiezioni danno due particolari tangenti a C_6 per A, che non rispondono effettivamente a coniche riducibili.

39. Cenno di alcuni casi particolari.

Non è nostro proposito indagare minutamente i casi più notevoli, a cui può dar luogo la superficie F_4 con retta doppia r. Ci limiteremo ad alcune semplici osservazioni.

Anzitutto l'intorno della retta doppia (rappresentato sul piano dalla cubica $C_3(A_1A_2...A_8O)$) è in generale irriducibile ed equivalente ad una curva ellittica: appunto in corrispondenza a ciò si hanno sulla r quattro punti cuspidali distinti. Ma due di questi punti possono venire a coincidere in un *punto cuspidale doppio* se la cubica $C_3(A_1A_2...A_8O)$ acquisti un punto doppio, fuori dei punti base di $|C_4|$. In questa ipotesi le $C_4(O^2A_1A_2...A_8)$ segano sulla $C_3(A_1...A_8O)$ una g_2^1, che possiede la coppia neutra rispondente al punto doppio.

Più in particolare, la cubica $C_3(A_1A_2...A_8O)$ può spezzarsi in una retta a ed in una conica C_2; una discussione completa di questa ipotesi porta a considerare tre casi possibili:

a) la retta doppia della F_4 è rappresentata dalla conica C_2, sulla quale le $C_4(O^2A_1A_2...A_8)$ segano una g_2^4, mentre la retta a è fondamentale per $|C_4|$;

b) la retta doppia della F_4 è rappresentata dalla retta a, sulla quale si ha una g_2^4, mentre la conica C_2 è fondamentale per $|C_4|$;

c) la retta a e la conica C_2 rappresentano due falde distinte

della retta doppia r di F_4; le curve di $|C_4|$ che passano per un punto di a passano di conseguenza per un punto (coniugato) sulla C_2, sicchè sulla curva riducibile $a + C_2$ si ha una g_2^1, ciascuna coppia della quale costituisce una coppia di punti corrispondenti in una proiettività, determinata fra a e C_2 dalle curve del sistema $|C_4|$.

Diamo nel seguito alcuni esempi in cui si verifica l'ipotesi *a*), *b*), o *c*), lasciando allo studioso il compito di una discussione completa.

Supponiamo che la cubica $C_3(A_1A_2...A_8O)$ si spezzi nella retta OA_1A_2 e nella conica $C_2(A_3A_4A_5A_6A_7A_8)$ per i sei punti base semplici rimanenti. La conica C_2 è l'immagine della retta doppia di F_4, giacchè le curve di $|C_4|$ segano sopra di essa una g_2^1, che possiede la coppia neutra sezione della C_2 con la retta OA_1A_2 (1). Sopra la retta doppia r di F_4 si trovano due punti cuspidali ordinari, corrispondenti ai due punti doppi della g definita sopra la C_2 ed un tacnodo (2), rappresentato dalla retta OA_1A_2, la quale non ha intersezioni variabili con le immagini delle sezioni piane e, staccata dal sistema di queste, dà come residue le cubiche (ellittiche) di una rete.

Il caso ora discusso può dar luogo ad una particolarizzazione ulteriore se la conica anzidetta si spezza in due rette, che contengano rispettivamente le terne di punti A_3, A_4, A_5 e A_6, A_7, A_8. Queste due rette rappresentano due rette infinitamente vicine alla r, che appartengono a due falde distinte della superficie F_4. In questo caso la retta OA_1A_2 continua a rappresentare un tacnodo, mentre gli altri due punti cuspidali della r vengono a coincidere in un unico punto — diciamo P — che ha per immagine nel piano l'intersezione P' delle due rette $A_3A_4A_5$ ed $A_6A_7A_8$: il punto P' è invero punto base di una rete di C_4, che in esso si toccano.

---

(1) La conica C_2 appare così come una curva ellittica. Invero una curva razionale sulla quale sia messa in evidenza una coppia neutra, si può considerare come limite di una curva ellittica. Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. III, pag. 409.

(2) Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. II, Lib. IV, Cap. IV, pagg. 587-88.

Il punto P è un ordinario punto cuspidale doppio, come quello, che si è incontrato prima nel caso che la C_3 (irriducibile) abbia un punto doppio (1).

Infine si può considerare un'ulteriore particolarizzazione della nostra superficie, corrispondente alla circostanza, che i punti A_6, A_7, A_8 vengano infinitamente vicini ad A_3, A_4, A_5, nel qual caso l'intorno della retta doppia r verrà rappresentato dalla retta $A_3A_4A_5$ contata due volte, cosicchè la *retta doppia* r di F_4 risulterà *cuspidale*. Qui appare sopra la retta cuspidale *un punto chiuso* (tacnodo) (2), che risponde all'intersezione della retta $A_3A_4A_5$ con la OA_1A_2.

Ora abbiamo detto che la cubica $C_3(OA_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8)$ si può anche spezzare in una conica C_2 ed in una retta a; per modo che la retta a rappresenti la retta doppia r e la C_2 sia fondamentale per $|C_4|$. Ciò avviene ad es. se la $C_3(OA_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8)$ si spezza in una conica $C_2(OA_3A_4A_5A_6A_7A_8)$ ed in una retta a per A_1, A_2.

Sulla retta a il sistema ∞^3 delle $C_4(O^2A_1A_2...A_8)$ sega una serie lineare di coppie di punti, che deve possedere la coppia neutra segnata sulla a dalla C_2 e perciò è una g_2^1. I due punti doppi della g_2^1 rappresentano due punti cuspidali della retta doppia di F_4. Staccando invece la conica $C_2(OA_3A_4A_5A_6A_7A_8)$ ci rimane la rete delle coniche passanti per O, A_1, A_2; ne segue che il punto di F_4, che si rappresenta nella coppia comune ad a ed alla C_2, è tale che le sezioni piane per esso sono curve di genere zero: si tratta dunque di un *punto triplo* della superficie.

Se infine A_1, A_2, A_3 sono su di una retta a e O, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 su di una conica C_2, siamo in un caso nel quale la retta a e la conica C_2 rappresentano due falde distinte di F_4.

Le particolarizzazioni anzidette valgono come esempio di alcune circostanze particolari, che possono essere offerte dalla no-

---

(1) Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. II, Lib. II, Cap. IV, pagg. 624-25.

(2) Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*; Vol. II, Lib. IV, Cap. IV, pag. 604.

stra superficie. Lo studioso potrà approfondire utilmente lo studio di altri casi particolari, supponendo anche che i punti base possano avvicinarsi indefinitamente.

ESERCIZIO. Si dimostri che, se la cubica $C_3(OA_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8)$ si spezza in una retta a per O ed in una conica

$$C_2(A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8),$$

il sistema completo delle $C_4(O^2A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8)$ non rappresenta una superficie del 4° ordine irriducibile, ma un cono quadrico doppio, *il sistema* $|C_4|$ *appartenendo ad una involuzione piana di coppie di punti.*

OSSERVAZIONE. - Le considerazioni svolte al n. 37 valgono a stabilire che la più generale superficie del quart'ordine con retta doppia è rappresentabile sul piano in guisa che al sistema delle sezioni piane risponda un sistema di curve del quart'ordine passanti doppiamente per un punto O e semplicemente per 8 punti $A_1, A_2, \ldots, A_8$. Si domanda ora se questa conclusione si estenda ad *ogni* F_4 razionale, la cui linea multipla consti solamente di una retta doppia. Per rispondere alla questione, giova osservare che — a partire dal piano doppio con sestica di diramazione dotata di punto quadruplo, al quale si riduce ogni F_4 con retta doppia per proiezione da un punto della retta doppia (cfr. n. 38) — è sempre possibile, se la F_4 non sia una rigata irrazionale, (cfr. Lib. II, cap. I, n. 3) costruire una curva unisecante le coniche del fascio, segato sulla F_4 dai piani per la retta doppia. Proiettando ogni conica di F_4, che sia complanare con la retta doppia, dal punto che essa ha a comune con la nominata unisecante, si viene a rappresentare la F_4 sul piano; ed un esame più approfondito prova che il sistema lineare rappresentativo delle sezioni piane è sempre riducibile con trasformazioni quadratiche ad un sistema di quintiche con un punto triplo O, un punto doppio A ed otto punti base semplici $A_1, A_2, \ldots, A_8$. Ora un sistema di

$$C_5(O^3A^2A_1A_2 \ldots A_8)$$

è a sua volta riducibile con una o più trasformazioni quadratiche ad un sistema di $C_4(O^2A_1...A_8)$; tuttavia un esame critico di tale riduzione prova che vi è *un caso d'eccezione, quando A sia infinitamente vicino ad O ed i punti* A_1, A_2, ..., A_8 *si succedano sopra un ramo lineare che abbia origine in O e sia di classe due* (abbia cioè in *O* un *flesso*). Ma il lettore potrà verificare per esercizio che un simile sistema di quintiche, *non essendo semplice,* non rappresenta una superficie del quart'ordine irriducibile, ma un *cono quadrico doppio.* Si riesce così a provare che *tutte le* F_4 *razionali, a sezioni piane di genere due sono rappresentabili sul piano in modo che al sistema lineare delle sezioni piane risponda un sistema lineare di* $C_4(O^2A_1A_2 \dots A_8)$.

CAPITOLO VIII.

SULLE SUPERFICIE RAZIONALI DEL QUART'ORDINE CON UN SOLO PUNTO SINGOLARE

40. Introduzione.

L'analisi sviluppata nei capitoli precedenti ci ha portato a classificare *tutte le superficie del quart'ordine, con linea doppia* (o multipla), cioè a sezioni piane di genere $\pi = 2, 1, 0$; e a riconoscere che esse *sono razionali, fatta eccezione per la rigata con due direttrici doppie sghembe fra loro* ($\pi = 1$) *e pei coni di genere* $\pi = 2, 1$ *con una o due generatrici doppie.* Infatti possiamo ricapitolare i risultati ottenuti enumerando i seguenti *tipi di superficie del quart'ordine con linea doppia* (o multipla):

1) superficie (a sezioni di genere $\pi = 0$) con linea doppia del terz'ordine, cioè:

a) superficie di STEINER con tre rette doppie per un punto triplo, e

b) rigate con cubica gobba doppia (riducibile a retta tripla).

I coni razionali, con tre generatrici doppie o una generatrice tripla, sono caso particolare comune alle due famiglie *a*) e *b*);

2) superficie (a sezioni di genere $\pi = 1$) con linea doppia del second'ordine, cioè

a) superficie razionali con conica doppia, e

b) rigate con due direttrici rettilinee sghembe fra loro (necessariamente *non* razionali perchè contenenti un fascio di genere uno, costituito dalle generatrici).

I coni ellittici, non razionali, con due generatrici doppie, costituiscono un caso particolare comune alle due famiglie *a*) e *b*);

3) superficie (a sezioni di genere $\pi = 2$) con retta doppia, generalmente razionali.

Fa eccezione il caso particolare del cono di genere due (con una generatrice doppia), che non è razionale.

Per completare l'analisi delle superficie razionali del quart'ordine vogliamo ora determinare le *superficie razionali* di quest'ordine *a sezioni di genere* $\pi = 3$, le quali vedremo essere caratterizzate dal possesso di *un punto singolare* triplo ovvero doppio di specie particolare.

L'analisi delle superficie razionali del quart'ordine con punto doppio è stata fatta da M. NOETHER in relazione ai piani doppi, che si ottengono proiettando la superficie dal suo punto doppio, e noi pure avremo occasione di rivedere la cosa sotto tale aspetto. In questa nota riusciamo a costruire i sistemi lineari rappresentativi delle nostre superficie in modo più elementare e nell'ordine di idee esposto nei capitoli precedenti.

Incominciamo col dimostrare che *una superficie razionale del quart'ordine a sezioni di genere tre è necessariamente dotata di un punto singolare.*

Sia F_4 una superficie del quart'ordine, priva di punti singolari. Tra gli ∞^2 piani, passanti per un punto generico O dello spazio, ne esistono ∞^1, che risultano tangenti alla F_4, segando questa superficie secondo una quartica, che ha un punto doppio nel punto di contatto. Il luogo dei nominati punti di contatto è la curva intersezione della F_4 con la superficie cubica, polare del punto O rispetto ad F_4. Facendo variare il punto O, otteniamo così un sistema lineare ∞^3 di superficie cubiche, le cui intersezioni con la F_4 sono le curve contorni apparenti della F_4, vista dagli ∞^3 punti dello spazio.

Supponiamo ora che la F_4 sia razionale; il suo sistema rappresentativo sarà un sistema lineare, ∞^3, semplice, d'un certo ordine n, di genere tre e di grado quattro. Nel nominato sistema sono contenute ∞^3 reti, ciascuna delle quali dà luogo ad una curva jacobiana di ordine $3n - 3$. La totalità delle curve jacobiane costituisce un sistema lineare ∞^3, la cui parte variabile rappresenta (poichè la jacobiana di una rete è il luogo dei punti doppi delle curve della rete) il sistema lineare delle curve contorni appa-

renti della F_4, vista dagli ∞^3 punti dello spazio. Ma il sistema di queste curve è segato sulla F_4 da un sistema lineare ∞^3 di superficie *cubiche* senza punti base; ne segue che l'ordine delle curve immagini dei contorni apparenti della F_4, dovrebbe essere $3n$ e non $\leq 3n-3$, come si è trovato. Pertanto la F_4 non può essere razionale.

Affinchè la F_4 possa essere razionale bisognerà che le superficie cubiche polari rispetto ad essa abbiano a comune almeno un punto (doppio o triplo), al quale risponderà sul piano rappresentativo una curva fondamentale da aggiungersi alla parte variabile del sistema lineare delle jacobiane delle reti contenute nel sistema delle immagini delle sezioni piane.

Una conseguenza importante del teorema precedente è che *la superficie generale del quart'ordine non è razionale* (1).

41. Generalità sulle superficie razionali del quart'ordine a sezioni piane di genere tre.

Volgiamoci dopo ciò allo studio dei sistemi lineari rappresentativi di superficie razionali del quart'ordine a sezioni di genere tre.

Giova premettere alcune osservazioni d'ordine generale.

a) Sia $|C_n|$ un sistema lineare (∞^1 almeno) d'ordine n costituito da curve piane irriducibili di genere $p>1$. Chiamasi *sistema aggiunto* a $|C_n|$ il sistema lineare $|C'_{n-3}|$, costituito dalle curve *aggiunte* a $|C_n|$, ossia dalle curve d'ordine $n-3$ passanti $i-1$ volte per ogni punto base *i-plo* di $|C_n|$. Fatta astrazione dalle curve fisse (se esistono) che formano parte di ogni

(1) Nella teoria delle superficie algebriche si definisce il genere geometrico p_g di una superficie d'ordine n come il numero delle superficie aggiunte d'ordine $n-4$, linearmente indipendenti; e per la razionalità della F_4 è necessario che sia $p_g=0$. Per la F_4 generale risulta precisamente $p_g=1$. Cfr. ad es. F. ENRIQUES: *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* raccolte da L. CAMPEDELLI (Cedam, Padova, 1932), capp. II e III.

curva d'ordine $n-3$, aggiunta a $|C_n|$, restano ∞^{p-1} curve variabili, le quali segano sulla curva generica di $|C_n|$ la *serie canonica* g^{p-1}_{2p-2} (1); il sistema lineare costituito dalle nominate curve variabili dicesi — col CASTELNUOVO — *sistema aggiunto puro di* $|C_n|$: *il sistema aggiunto puro di* $|C_n|$ *è un covariante del sistema lineare* $|C_n|$ *rispetto alle trasformazioni cremoniane del piano,* ossia una trasformazione birazionale, che muti il sistema $|C_n|$ nel sistema $|C_m|$, muta l'aggiunto puro di $|C_n|$ nell'aggiunto puro di $|C_m|$ (2).

Rammentiamo inoltre che la serie canonica è l'*unica* serie g^{p-1}_{2p-2}, esistente sulla C_n.

b) Dato un sistema lineare irriducibile $|C_n|$, ∞^r, di grado m, dicesi — con C. SEGRE — *serie caratteristica* di $|C_n|$ la serie lineare g^{r-1}_m segata sopra una C_n irriducibile di $|C_n|$ dalle altre curve del sistema.

È evidente che se la serie caratteristica di un sistema lineare è completa, il sistema stesso è completo; invero se il sistema si potesse ampliare, ciò avverrebbe anche della serie caratteristica. Più significative sono invece le due proposizioni seguenti, che saranno giustificate in seguito (cfr. Lib. II, cap. II, n. 9) (3).

La serie caratteristica di un sistema lineare completo è completa.

La serie caratteristica di un sistema lineare completo è non speciale o speciale, secondo che il sistema è regolare o sovrabbondante, ossia secondo che la sua dimensione è uguale o maggiore di $\frac{1}{2}n(n+3) - \Sigma \frac{1}{2} r_i(r_i+1)$: la sovrabbondanza corrisponde all'esistenza di legami fra i punti base; precisamente, se i è l'in-

(1) Cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. I, pag. 84. Delle curve fisse che si stacchino dal sistema aggiunto possono effettivamente presentarsi, come dimostra già l'esempio delle $C_6(A^3B^3)$ il cui aggiunto è costituito dalle $C_3(A^2B^2)$, dalle quali si stacca la retta AB.

(2) Cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. II, pag. 178.

(3) Cfr. del resto F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. II, pag. 192.

dice di specialità della serie caratteristica, fra le condizioni esprimenti il passaggio delle curve di $|C_n|$ per i punti base con le date molteplicità, i saranno conseguenza delle rimanenti.

Ciò premesso sia F_4 una superficie razionale del quart'ordine a sezioni piane di genere tre.

Il sistema rappresentativo di questa superficie sarà un sistema lineare $|C_n|$, ∞^3, di curve irriducibili di genere tre, secantisi a due a due in quattro punti variabili; la serie caratteristica, segnata su di una curva generica C_n di $|C_n|$ dalle altre curve del sistema, è perciò una g_4^2, ossia la serie canonica completa della C_n. Anche il sistema lineare $|C_n|$ è allora completo e quindi:

Ogni superficie razionale del quart'ordine dello spazio ordinario, a sezioni piane di genere tre, è normale.

In secondo luogo, la serie canonica sopra una curva è una serie speciale con indice di specialità 1; il sistema rappresentativo $|C_n|$ deve perciò essere sovrabbondante e precisamente:

Tra le condizioni imposte dai punti base alle curve di un sistema lineare rappresentativo di una superficie del quart'ordine a sezioni piane di genere tre, una è conseguenza delle rimanenti.

Ora, per procedere innanzi più speditamente conviene enunciare la seguente

IPOTESI SEMPLIFICATIVA: *Nello studio che segue supporremo che per i sistemi lineari che prendiamo in considerazione il sistema aggiunto coincida con l'aggiunto puro,* cioè che non esistano curve fisse che si stacchino dall'aggiunto. Per giustificare questa ipotesi occorrerà poi un esame critico di cui ci occuperemo ai nn. 46, 47.

Indipendentemente da questa giustificazione, l'ipotesi predetta porta a riconoscere un certo numero di tipi di F_4 razionali, senza assicurarci a priori che la classificazione riesca completa. Ma che in fatto non esistano altri tipi risulterà più avanti dalla teoria dei piani doppi (cfr. altresì il successivo n. 47).

Ora, supponiamo che il sistema $|C_n|$ rappresenti una F_4

razionale, soddisfacendo all'ipotesi predetta. Sia C_n una curva generica di $|C_n|$ e G_4 un gruppo canonico sopra di essa. Per il gruppo G_4 passa un fascio di curve di $|C_n|$ ed una aggiunta pura, che — per la nostra ipotesi semplificativa — sarà una curva aggiunta d'ordine $n-3$, C_{n-3}. Di conseguenza (come risulta imponendo alle curve del fascio anzidetto di contenere un punto della C_{n-3}) per il G_4 passerà una C_n di $|C_n|$, spezzata nella C_{n-3} ed in una cubica C_3, che riuscirà *fondamentale* per il sistema $|C_n|$: infatti due curve di $|C_n|$, una delle quali sia spezzata in un'aggiunta C_{n-3} e nella C_3, si intersecano, fuori dei punti base di $|C_n|$, solamente in un gruppo canonico, e perciò la curva C_3 non ha intersezioni variabili con le curve di $|C_n|$. Staccando la cubica C_3 dal sistema $|C_n|$, rimane come sistema residuo il sistema aggiunto a $|C_n|$ (1).

La C_3 — a prescindere da punti multipli accidentali, che essa potrebbe avere *fuori* dei punti base di $|C_n|$ — è una curva (riducibile o irriducibile) di genere (virtuale) uno.

Sia infatti r_i la molteplicità del punto base A_i del sistema $|C_n|$. Esprimendo il grado ed il genere del sistema si avrà:

$$n^2 - \Sigma r_i^2 = 4$$

---

(1) E si osservi che l'aggiunto (puro) a $|C_n|$ è certamente costituito da C_{n-3} *irriducibili*; nell'ipotesi opposta ogni C_{n-3} dovrebbe essere spezzata in più curve, variabili in un fascio $|C'|$: e ciò porta che il sistema $|C_n|$ non è più semplice, ma composto con un'involuzione del second'ordine; in guisa che il sistema $|C_n|$ non è più rappresentativo di una F_4 irriducibile, ma di una quadrica doppia. Invero, nella nostra ipotesi, le curve di $|C_n|$ hanno la serie canonica composta e quindi sono *iperellittiche*, mentre le curve C' segano sulla generica C_n la relativa g_2^1; (il doppio di questa g_2^1 costituisce la serie canonica g_4^2). Sia P, P' una generica coppia di punti, coniugati nella g_2^1 esistente sulla generica C_n di $|C_n|$. La coppia P, P', insieme con una qualsiasi delle ∞^1 coppie della g_2^1 esistente sulla C_n, dà luogo ad ∞^1 gruppi canonici sulla C_n; e per ognuno di tali gruppi passano ∞^1 C_n di $|C_n|$. Ne segue che per la coppia P, P' passano ∞^2 C_n di $|C_n|$: ossia tutte le curve di C_n che passano per P, passano di conseguenza per P'. Essendo ovviamente il punto P un punto generico del piano, il sistema lineare $|C_n|$ risulta composto.

ed

$$n(n-3) - \Sigma r_i(r_i - 1) = 4,$$

donde segue:

$$3n - \Sigma r_i = 0.$$

Si osservi ora che la C_3 fondamentale contiene *tutti* i punti base di $|C_n|$; se invero esistesse, fuori della C_3, un punto base *s-plo* di $|C_n|$, questo punto sarebbe *s-plo* anche per le aggiunte, giacchè ogni aggiunta insieme con la C_3 costituisce una particolare curva di $|C_n|$. Ma, di fatto, il detto punto non può essere che $(s-1)$-*plo* per le aggiunte, giacchè solamente così le aggiunte possono segare sulla generica C_n di $|C_n|$ l'intera serie canonica che è una serie *priva di punti fissi* (1). È dunque assurdo che esistano dei punti base di $|C_n|$ fuori della C_3. Ma allora dall'ultima relazione si deduce che la C_3 passa *semplicemente* per tutti i punti base di $|C_n|$ e quindi ha (rispetto a questo gruppo base) il genere uno.

Infine possiamo dimostrare facilmente che il sistema aggiunto, che si ottiene dal sistema $|C_n|$ staccando la C_3, è di genere $\pi \leq 2$. Infatti per il genere delle curve spezzate nella C_3 e nelle aggiunte C_{n-3} si ha (2), tenuto conto che la C_3 è (virtualmente) ellittica e denotando con i il numero dei punti doppi che acquista una C_n quando essa si spezza nella C_3 ed in una C_{n-3}:

$$1 + \pi + i - 1 = 3,$$

donde, per essere $i \geq 1$ (3), si deduce: $\pi \leq 2$.

---

(1) Cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...* Vol. III, Lib. V, Cap. I, pag. 87.

(2) Si rammenti che il genere di una curva spezzata che sia il limite di una curva irriducibile C, vale $p = p_1 + p_2 + i - 1$ dove p_1 e p_2 sono i generi delle due componenti ed i è il numero dei punti doppi che *non* sono limiti di punti doppi della curva irriducibile C. Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. III, pag. 399.

(3) Ciò avviene per il *principio di degenerazione*, formulato da F. ENRIQUES; cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. III, pag. 405.

Riassumendo, possiamo enunciare:

Sia $|C_n|$ *un sistema lineare irriducibile e semplice,* ∞^3, *di curve piane, di genere* $p=3$ *e grado* $2p-2=4$, *per il quale il sistema aggiunto sia privo di parti fisse; esiste allora una cubica* C_3, *la quale è fondamentale per il sistema lineare* $|C_n|$ *e staccata da esso dà come sistema residuo il sistema aggiunto* $|C'_{n-3}|$; *la cubica* C_3 *è di genere uno* (rispetto al gruppo base del sistema $|C_n|$) *ed il sistema* $|C'_{n-3}|$ *è di genere minore di* 3.

OSSERVAZIONE. - Il lettore si persuaderà facilmente che l'ultimo enunciato si lascia generalizzare nel modo seguente:

Sia $|C_n|$ *un sistema lineare irriducibile e semplice,* ∞^p, *di curve piane di genere* p *e grado* $2p-2$, *per il quale il sistema aggiunto sia privo di parti fisse; esiste allora una cubica* C_3, *la quale è fondamentale per* $|C_n|$ *e, staccata da esso, dà come residuo il sistema aggiunto* $|C'_{n-3}|$; *la cubica* C_3 *è* (virtualmente) *di genere uno ed il sistema* $|C'_{n-3}|$ *è di genere minore di* p.

La dimostrazione di questa proposizione si ottiene ripetendo quella svolta innanzi nel caso $p=3$.

42. La superficie del quart'ordine con punto triplo.

Procediamo ad esaminare i casi, nei quali il possesso di un punto singolare O rende razionale una superficie del quart'ordine F_4, a sezioni di genere tre.

Ammessa l'ipotesi semplificativa del numero precedente, risulta che il sistema $|C_n|$, rappresentativo della nostra F_4, ammette una cubica fondamentale C_3, staccata la quale, si ottiene come sistema residuo il sistema aggiunto $|C'_{n-3}|$; e questo sistema è di genere minore di tre. Il genere di $|C'_{n-3}|$ sarà quindi 0, 1 o 2.

Incominciamo col supporre che, staccata la curva C_3 dal sistema rappresentativo C_n, si ottengano come curve residue delle curve *razionali*. In questa ipotesi il punto singolare della superficie, O, il cui intorno è rappresentato dalla curva C_3, deve essere o un punto triplo, per modo che le sezioni piane per O

abbiano in O un punto triplo, ovvero un punto doppio tale che tutte le sezioni piane per esso siano delle quartiche con tre punti doppi infinitamente vicini sopra un ramo lineare (osculodo).

Escludiamo facilmente la seconda ipotesi. Infatti se il punto O fosse doppio, due sezioni piane per esso dovrebbero incontrarsi fuori di O in altri due punti. Nel piano rappresentativo la stella delle sezioni piane per O sarebbe rappresentata da una rete di curve razionali secantisi a due a due in due punti e questa rete non dovrebbe potersi ampliare, in quanto essa coincide col sistema ∞^2 delle aggiunte a C_n. Ma la serie caratteristica della nominata rete è una g_2^1, cioè una serie *incompleta*. Per un teorema ricordato innanzi la rete non può dunque essere un sistema completo. Si cade così in un assurdo e perciò il punto O deve essere un punto triplo.

Se O è un punto triplo, due sezioni piane per esso si segano, fuori di O, in un sol punto. La stella delle sezioni piane per O è perciò rappresentata sul piano da una rete omaloidica. Ma una rete omaloidica è sempre birazionalmente equivalente alla rete delle rette: possiamo quindi ammettere a priori che le immagini delle sezioni piane per il punto O siano le rette del piano.

La rete delle rette è ora il sistema aggiunto puro di un sistema $| C_4 |$ di quartiche di genere tre. Per i nostri scopi è necessario che il $| C_4 |$ sia ∞^3, di grado quattro, e contenga una cubica fondamentale di genere uno, staccata la quale rimanga come sistema residuo la rete delle rette.

Si possono realizzare per il $| C_4 |$ tutte queste condizioni prendendo *convenientemente* sopra una cubica C_3 12 punti base semplici $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$: è infatti evidente che se si prendessero i 12 punti base $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ ad arbitrio sulla C_3, le C_4, che passano per essi sarebbero ∞^2 e non ∞^3, riducendosi anzi alle C_4 spezzate nella C_3 ed in una retta generica. Presi invece sulla C_3 undici punti $A_1, A_2, \ldots, A_{11}$ ad arbitrio, la ricerca di A_{12} costituisce un problema determinato: infatti le C_4 per $A_1, A_2, \ldots, A_{11}$ sono ∞^3 e segano la C_3 in una g_1 che deve essere una g_1^0, cioè ridursi ad un punto fisso A_{12}. In altre parole le quartiche passanti per i punti $A_1, A_2, \ldots, A_{11}$ passano di conseguenza per un

ben determinato punto A_{12} della C_3. Il sistema $|C_4|$ delle quartiche per i 12 punti $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ legati tra loro nel modo anzidetto soddisfa a tutte le condizioni imposte e la circostanza che il passaggio per il punto base A_{12} sia conseguenza del passaggio per $A_1, A_2, \ldots, A_{11}$ è in accordo con un'osservazione precedente, secondo la quale il sistema rappresentativo $|C_4|$ di una F_4 razionale a sezioni di genere tre è sovrabbondante, una delle condizioni imposte alle C_4 dal passaggio per i punti base del sistema essendo conseguenza delle altre.

Il legame fra i punti $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ può essere espresso affermando che i punti $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ sono punti comuni alla C_3 e ad una C_4 irriducibile (o almeno non spezzata in una retta e nella C_3). Per un gruppo di 12 punti comuni ad una C_3 e ad una siffatta C_4 passano infatti certamente ∞^3 quartiche: basta all'uopo combinare linearmente la C_4 con la rete delle C_4 spezzate nella C_3 ed in una retta.

Riepilogando possiamo dire:

Presi sopra una cubica C_3 12 punti $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$, che siano i 12 punti d'intersezione della C_3 con una quartica irriducibile C_4, esiste un sistema lineare completo $|C_4|\,\infty^8$ di

$$C_4(A_1A_2 \ldots A_{12})$$

irriducibili che contiene in sè ∞^2 C_4 spezzate nella C_3 ed in una residua retta; il sistema $|C_4|$ è rappresentativo di una superficie F_4 con punto triplo O, il cui intorno ha per immagine la cubica C_3.

Inversamente è facile dimostrare che *ogni superficie del quart'ordine F_4 con punto triplo O è razionale e può essere rappresentata dalle ∞^3 C_4 passanti semplicemente per 12 punti base giacenti su di una cubica C_3, che rappresenta l'intorno di O.*

Basta a questo scopo proiettare la F_4 dal punto triplo O sopra un piano. Le immagini delle ∞^8 sezioni piane di F_4 sono costituite da ∞^3 quartiche passanti semplicemente per 12 punti base semplici giacenti sulla cubica, sezione del piano di proiezione con il cono osculatore ad F_4 in O; i 12 punti base risultano dalle intersezioni col piano di proiezione delle 12 rette di F_4, giacenti

sul cono osculatore in O. L'esistenza di queste dodici rette si dimostra immediatamente scrivendo l'equazione del monoide nella forma:

$$u_3 + u_4 = 0,$$

dove u_3 ed u_4 sono dei polinomi omogenei di terzo e quarto grado rispettivamente nelle coordinate cartesiane x, y, z. Il cono osculatore d'equazione $u_3 = 0$ interseca il cono d'equazione $u_4 = 0$ in 12 generatrici, che appartengono ad F_4.

NOTA. - Per lo studio dei numerosissimi casi particolari cui dà luogo la F_4 con punto triplo, rimandiamo il lettore alla diffusa memoria di K. ROHN: *Über die Flächen vierter Ordnung mit dreifachem Punkte*; « Math. Ann. » Bd. XXIV, 1884.

43. La superficie del quart'ordine con tacnodo.

Supponiamo che $|C_n|$ sia un sistema lineare semplice, ∞^3, di curve irriducibili di genere tre e grado quattro, il cui aggiunto sia privo di parti fisse. Il sistema $|C_n|$ sarà rappresentativo di una superficie del quart'ordine F_4 a sezioni di genere tre; e abbiamo veduto che per questo $|C_n|$ esiste certamente una cubica fondamentale C_3, staccata la quale rimane la rete delle aggiunte a $|C_n|$. Abbiamo esaminato il caso nel quale le aggiunte siano di genere zero. Passiamo ora ad esaminare il caso, nel quale le aggiunte sono di genere uno. In questa ipotesi la curva C_3 rappresenta l'intorno di un punto O della F_4 tale che le sezioni piane per esso sono di genere uno. Il punto O è dunque un tacnodo, cioè un punto doppio al quale è infinitamente vicina una retta infinitesima doppia: un piano per O sega la F_4 secondo una quartica, che ha un punto doppio in O ed un punto doppio infinitamente vicino ad esso nel punto d'intersezione del suo piano con la curva infinitesima, risultando così di genere uno.

La stella delle sezioni piane per O sarà rappresentata da una rete non ampliabile di curve di genere uno. Una rete di questo tipo si può sempre — cfr. Lib. II, cap. III, n. 13 — trasformare cremonianamente in una rete di cubiche passanti semplicemente per 7 punti base A_1, A_2, ..., A_7, presi ad arbitrio.

Possiamo dunque supporre a priori che il sistema delle sezioni piane per O sia rappresentato da un sistema ∞^2 di

$$C_3(A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7).$$

Il sistema delle

$$C_3(A_1A_2 \dots A_7)$$

è il sistema aggiunto di un sistema $| C_6 |$ di $C_6(A_1^2A_2^2A_3^2A_4^2A_5^2A_6^2A_7^2)$, di genere tre.

Se ora il $| C_6 |$ rappresenta una F_4 a sezioni piane di genere tre che possiede il tacnodo O, il $| C_6 |$ deve essere ∞^3, di genere tre e grado quattro, e contenere una cubica fondamentale di genere uno, staccata la quale si ottiene come sistema residuo la rete delle

$$C_3(A_1 \dots A_7).$$

Si realizzeranno tutte queste condizioni prendendo sopra una cubica C_3, che passi per A_1, A_2, ..., A_7, altri quattro punti base semplici A_8, A_9, A_{10}, A_{11} e costruendo il sistema lineare $| C_6 |$ delle

$$C_6(A_1^2A_2^2 \dots A_7^2A_8A_9A_{10}A_{11}).$$

Se però i punti A_8, A_9, A_{10}, A_{11} sono scelti ad arbitrio sulla C_3, il $| C_6 |$ non è ∞^3 ma ∞^2, riducendosi anzi alle ∞^2 curve spezzate nella C_3 e nella rete delle $C_3(A_1A_2 \dots A_7)$. I punti A_8, A_9, A_{10}, A_{11} non possono dunque essere presi ad arbitrio; ma dopo aver scelto A_8, A_9, A_{10}, la ricerca di A_{11} costituisce un problema determinato: infatti le ∞^3 $C_6(A_1^2A_2^2A_3^2A_4^2A_5^2A_6^2A_7^2A_8A_9A_{10})$ segano la C_3 in un punto, che (non potendo variare poichè la C_3 è di genere uno) deve essere un punto fisso A_{11}. Il sistema $| C_6 |$ delle

$$C_6(A_1^2A_2^2A_3^2A_4^2A_5^2A_6^2A_7^2A_8A_9A_{10}A_{11})$$

soddisfa allora a tutte le condizioni volute. La condizione esprimente il passaggio per A_{11} è una conseguenza delle condizioni esprimenti il passaggio per gli altri punti base, presi con le loro molteplicità: ciò è in accordo coll'osservazione fatta precedentemente, circa la sovrabbondanza dei sistemi, che stiamo costruendo. Il legame fra i punti A_1, A_2, ..., A_{11} si può esprimere affer-

mando che deve esistere una C_6 irriducibile passante doppiamente per $A_1, \ldots, A_7$ e semplicemente per A_8, A_9, A_{10}, A_{11}. Per un siffatto gruppo di 11 punti su di una C_3 esiste certamente un $|C_6|$ del tipo richiesto: basta infatti combinare linearmente la data C_6 con la rete delle C_6 spezzate nella

$$C_3(A_1A_2 \ldots A_7A_8 \ldots A_{11}) \text{ ed in una } C_3(A_1A_2 \ldots A_7).$$

Riepilogando possiamo dire:

Presi sopra una cubica C_3 11 punti $A_1, A_2, \ldots, A_7, A_8, \ldots, A_{11}$, in guisa che esista una C_6 irriducibile che passi doppiamente per $A_1, \ldots, A_7$ e semplicemente per A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, esiste un sistema lineare completo ∞^3 di

$$C_6(A_1^2A_2^2 \ldots A_7^2A_8A_9A_{10}A_{11})$$

irriducibili, che contiene in sè ∞^2 C_6 spezzate nella C_3 ed in una residua cubica per $A_1, A_2, \ldots, A_7$; il sistema $|C_6|$ rappresenta una superficie del quart'ordine F_4 con un tacnodo O, il cui intorno ha per immagine la cubica fondamentale C_3.

Inversamente si può dimostrare che la più generale F_4 dotata di tacnodo si può rappresentare direttamente su di un piano in modo che le immagini delle sue sezioni piane siano delle

$$C_6(A_1^2 \ldots A_7^2A_8 \ldots A_{11})$$

con $A_1, A_2, \ldots, A_{11}$ giacenti su di una cubica C_3.

Si perviene a questo scopo trasformando — con L. CREMONA — la F_4 con tacnodo in una superficie cubica, mediante una trasformazione quadratica T dello spazio, nella quale al sistema omaloidico delle quadriche che contengono una conica della F_4 passante per O e toccano in O il piano tacnodale della F_4, si fa corrispondere il sistema dei piani.

Incominciamo col far vedere rapidamente che sulla più generale F_4 con tacnodo esistono 56 coniche passanti per il tacnodo, distribuite a coppie in 28 piani.

Si proietti perciò la F_4 dal suo tacnodo O su di un piano doppio. La curva di diramazione del piano doppio sarà una quartica: infatti le sezioni piane per O segano la F_4 in quartiche

di genere uno, alle quali si possono condurre da O quattro tangenti, generatrici del cono circoscritto alla F_4 da O; il cono circoscritto alla F_4 da O è quindi del quart'ordine e conseguentemente la curva di diramazione del piano doppio è una quartica C_4.

Ad una bitangente r di C_4 corrisponde sulla F_4 una curva K, sulla quale le coppie di punti allineati con O determinano una g_2^1, *priva di punti doppi*: questi infatti dovrebbero provenire dalle intersezioni semplici della bitangente r con la C_4 di diramazione.

Poichè su di una curva irriducibile una g_2^1 possiede sempre almeno 2 punti doppi, ne segue che la K si spezza in due curve K_1 e K_2, che sono certamente due coniche. Se infatti K_1 fosse una retta, non passante per O, e K_2 una cubica, la K_2 dovrebbe avere due punti doppi infinitamente vicini in O e spezzarsi quindi in una retta t per O ed in una conica tangente alla t in O: si cade così in un caso particolare del caso generale, nel quale K_1 e K_2 sono due coniche irriducibili.

Poichè la C_4 possiede 28 bitangenti, concludiamo che la più generale F_4 con tacnodo è segata da 28 piani in coppie di coniche, che si toccano nel tacnodo.

Sia ora K_2 una conica di F_4, che passi per O. Le quadriche, che passano per K_2 e toccano in O il piano tacnodale π della F_4 formano un sistema omaloidico, caso particolare del sistema omaloidico delle quadriche passanti per una conica e per un punto generico e danno perciò luogo ad una trasformazione birazionale T dello spazio S_3, in cui giace F_4, in un altro spazio S'_3. Ai piani ed alle rette di S'_3 corrispondono rispettivamente in S_3 le quadriche anzidette e le coniche, che sono toccate in O dal piano tacnodale π della F_4 e segano la K_2 in un secondo punto. Ai piani ed alle rette di S_3 corrispondono invece ordinatamente (cfr. n. 7): le quadriche, che passano per una conica K'_2 ed hanno un piano tangente π' fisso in un punto O', e le coniche, che sono toccate in O' dal piano π' ed intersecano la K'_2 in un altro punto. Al piano di K_2 corrisponde l'intorno di O' ed all'intorno di O il piano di K'_2. Ai piani per O rispondono i piani per O'. Infine i

punti della conica K_2 si trasformano nelle rette di π' per O' e le rette di π per O nei punti della conica K'_2.

Ciò premesso, trasformiamo la F_4 mediante la T. Poichè la tangenza in O al piano tacnodale π di F_4 equivale per una curva a quattro intersezioni con la F_4, una conica che tocchi π in O e seghi ulteriormente in un punto la K_2 ha tre intersezioni con la F_4, che non cadono in elementi fondamentali per la T. Ne segue che la F_4 di S_3 si trasforma per la T in una F'_3 di S'_3. La F'_3 non contiene la conica K'_2 ma ha in O' come piano tangente il piano π': infatti le coniche tangenti a π' in O' ed intersecanti ulteriormente la K'_2 in un punto, essendo le immagini delle rette di S_3, devono incontrare la F'_3, fuori di elementi fondamentali per la T, in quattro punti e ciò è possibile solamente se π' è tangente in O' alla F'_3.

Viceversa se, in S'_3, F'_3 e K'_2 sono una superficie cubica generale ed una conica toccate in un punto comune O' da uno stesso piano π' e si trasforma punto per punto lo spazio S'_3 nello spazio S_3 in modo che ai piani di S_3 corrispondano le quadriche passanti per K'_2 e toccanti in O' il piano π', si ottiene in S_3 una F_4, che ha il punto O come tacnodo. Infatti la superficie trasformata di F'_3 è una F_4, perchè una conica toccata in O' da π' ed incontrata in un altro punto da K'_2 ha con F'_3 altri quattro punti comuni; la F_4 ha il punto O come doppio perchè ogni retta per O' incontra la F'_3, fuori di O' in due punti; infine poichè un piano condotto arbitrariamente per O' sega la F'_3 in una cubica di genere uno, ogni piano per O sega la F_4 in una quartica che ha in O due punti doppi infinitamente vicini, risultando così di genere uno.

Riepilogando possiamo dire: *La più generale superficie del quart'ordine F_4 dotata di tacnodo si può trasformare birazionalmente in una superficie cubica generale F'_3, in modo che le sezioni piane della F_4 si mutino nelle sezioni della F'_3 con le quadriche, che toccano in un punto O' la F'_3, passando per una conica K'_2, tangente ad F'_3 in O'.*

Siamo ora in grado di rappresentare direttamente la F_4 con tacnodo su di un piano. Supponiamo infatti di aver rappresen-

tata la F_3' su di un piano α mediante le cubiche passanti per sei punti $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Anche la F_4 con tacnodo, essendo riferibile punto per punto alla F'_3, è rappresentabile sul piano α e le immagini delle sue sezioni piane sono le immagini delle curve che sono segate sulla F_3' dalle quadriche, che toccano la F'_3 in O', passando per la conica K'_2 che tocca la F_3' in O'. Le anzidette quadriche segano la F'_3 in sestiche gobbe, che hanno un punto doppio in O', e passano per i quattro punti L, M, N, P comuni alla K'_2 ed alla F'_3, fuori di O'. Sia A_7 l'immagine di O' ed A_8, A_9, A_{10}, A_{11} le immagini di L, M, N, P. Le immagini delle sezioni piane della F_4 su α sono allora le sestiche che passano doppiamente per $A_1, A_2, \ldots, A_7$ e semplicemente per A_8, A_9, A_{10}, A_{11}. Gli undici punti $A_1, A_2, \ldots, A_7, A_8, \ldots, A_{11}$ giacciono su di una cubica C_3, immagine della cubica sezione di F_3' con il piano della conica K'_2.

Abbiamo così costruito direttamente quel sistema lineare, che dianzi abbiamo veduto rappresentare una F_4 con tacnodo.

OSSERVAZIONE. - Abbiamo dimostrato che la più generale F_4 con tacnodo è birazionalmente equivalente alla superficie cubica generale. La F_4 può particolarizzarsi rimanendo ancora razionale. Se però la F_4 acquista un secondo tacnodo, essa diventa birazionalmente equivalente ad un cono cubico ellittico e non è più razionale.

Anzitutto sopra una F_4 con due tacnodi O ed O_1 esistono infinite coniche, giacchè un piano, che passa per la retta $O\,O_1$ deve segare la F_4 in una quartica con quattro punti doppi a due a due infinitamente vicini: e questa quartica si spezza in una coppia di coniche bitangenti. Prendendo una qualunque delle infinite coniche per O come fondamentale per la trasformazione T dianzi usata, la F_4 si trasforma in una F'_3 che è rigata, giacchè le (infinite) coniche di F_4 passanti per O si trasformano in rette. Ma la F'_3 non può essere una rigata razionale: infatti alle sezioni piane di F_4 per O, che sono di genere uno, debbono corrispondere sezioni piane di F'_3, per un certo punto O'. La F'_3 è quindi un *cono ellittico*, e non razionale.

Viceversa è facile dimostrare che trasformando un cono cubico ellittico, mediante il sistema omaloidico delle quadriche che toccano il cono in un punto O' e passano per una conica K'_2 tangente al cono in O', si ottiene una F_4 con due tacnodi. Concludendo:

La superficie F_4 con due tacnodi non è razionale.

NOTA STORICA. - La superficie del quart'ordine con tacnodo fu fatta conoscere per la prima volta in un caso particolare da L. CREMONA (« Nachrichten » di Gottinga, 1871). Nello stesso anno M. NOETHER, pure in una nota delle « Nachrichten » di Gottinga, metteva in evidenza il caso generale, stabilendo anche la razionalità della superficie.

Uno studio diffuso ed esauriente della F_4 con tacnodo si ha poi nella memoria [1] *Sopra una certa superficie di quart'ordine* di L. CREMONA (1881). Il CREMONA stabilisce la razionalità della F_4, trasformandola birazionalmente in una superficie cubica, come è stato da noi esposto, e si trattiene anche ad illustrare, con l'aiuto della rappresentazione piana, le relazioni intercedenti tra la configurazione delle 27 rette della superficie cubica e la configurazione delle 56 coniche della F_4.

Notiamo infine la seguente generazione della F_4 con tacnodo data dal CREMONA: una superficie del quarto ordine con un tacnodo O può essere generata mediante due fasci proiettivi di quadriche, tutte toccantisi fra loro nel punto O.

44. Superficie razionali del quart'ordine dotate di un punto doppio con un fascio di sezioni razionali.

Sia $|C_n|$ un sistema lineare irriducibile ∞^3, di genere tre e grado quattro, rappresentativo di una F_4 razionale a sezioni di genere tre. Se — come supponiamo — dal sistema aggiunto

[1] Cfr. *Collectanea Mathematica in memoriam Dominici Chelini*, Milano, Hoepli, 1881.

a $|C_n|$ non si staccano parti fisse, esiste una cubica C_3, fondamentale per $|C_n|$, staccata la quale si ottiene come residuo il sistema lineare delle aggiunte, che risulta certo di genere minore di tre. Dopo aver studiato il caso nel quale il sistema lineare delle aggiunte è di genere zero o uno, passiamo a studiare il caso, nel quale questo sistema lineare è di genere due. In tale ipotesi la cubica C_3 fondamentale è immagine dell'intorno di un punto doppio O che è bensì singolare, ma non tacnodale, giacchè le sezioni piane per esso sono di genere due.

Due sezioni piane per O si incontrano altrove in due punti. Staccata perciò la curva C_3 da $|C_n|$, rimane un sistema lineare $|L|$, ∞^2, di curve di genere due, secantisi a due a due in due punti; la serie caratteristica segata su di una curva generica di $|L|$ dalle curve di $|L|$ è quindi la g_2^1 canonica. Possiamo dire perciò, in base all'osservazione del n. 41 applicata per $p = 2$, che nel sistema $|L|$ esiste una cubica fondamentale, staccata la quale rimane il fascio delle aggiunte alle curve di $|L|$; ed il detto fascio è costituito da curve razionali ovvero da curve ellittiche. Ne segue: *per una superficie razionale del quart'ordine con punto doppio O non tacnodale, esiste necessariamente un fascio di curve piane per O, costituito da curve razionali o da curve ellittiche.*

Dimostriamo ora che i due tipi di F_4 razionali con punto doppio non tacnodale così specializzato esistono effettivamente, costruendone i sistemi rappresentativi.

Proponiamoci da prima di costruire il sistema rappresentativo di una F_4 razionale con punto doppio O non tacnodale, per il quale passa un fascio di curve piane razionali.

Il fascio delle curve piane razionali per O si può sempre ritenere rappresentato da un fascio di rette per un punto A: infatti — come sarà dimostrato più avanti (cfr. Lib. II, cap. II, n. 9) — ogni fascio di curve razionali si può trasformare cremonianamente in un fascio di rette.

Un fascio di rette proviene per aggiunzione da un sistema di quartiche $|C_4|$ di genere 2, le cui curve abbiano il punto A come doppio ed eventualmente altri punti B_1, B_2, ... come semplici.

Per i nostri scopi è necessario che il $|C_4|$ sia ∞^2, di grado 2, e possieda una cubica fondamentale C_3, staccata la quale si ottenga come residuo il fascio delle rette per A.

Si possono realizzare queste condizioni prendendo *convenientemente* sopra una cubica C_3, passante per A, dieci punti base semplici $B_1, B_2, ..., B_{10}$. Le quartiche passanti doppiamente per A e semplicemente per 10 punti $B_1, B_2, ..., B_{10}$ sono infatti di genere due e si segano a due a due in due punti variabili. Se inoltre esiste una cubica che contenga i punti $A, B_1, B_2, ..., B_{10}$, essa è fondamentale, perchè ha 12 intersezioni fisse con le curve di $|C_4|$. Se però i punti $A, B_1, B_2, ..., B_{10}$ sono scelti ad arbitrio sulla C_3, le $C_4(A^2B_1...B_{10})$ sono ∞^1 e non ∞^2, riducendosi anzi alle ∞^1 curve spezzate nella C_3 ed in una retta per A. I punti $A, B_1, B_2, ..., B_{10}$ non possono dunque essere scelti arbitrariamente; se tuttavia si scelgono ad arbitrio $A, B_1, B_2, ..., B_9$, il punto B_{10} risulta determinato di conseguenza: infatti le $C_4(A^2B_1B_2...B_9)$ sono ∞^2 e segano la C_3 in un punto che (non potendo variare poichè la C_3 è di genere uno) risulta fisso. Se si prende questo *punto come* B_{10}, *il sistema* $|C_4|$ *delle* $C_4(A^2B_1B_2...B_{10})$ *soddisfa* a tutte le condizioni imposte. Il sistema $|C_4|$ è sovrabbondante com'era del resto prevedibile, dato che la serie caratteristica segata su una C_4 dalle altre curve di $|C_4|$ è la serie canonica, cioè una serie speciale.

A sua volta il sistema $|C_4|$ proviene per aggiunzione da un sistema di C_7 passanti triplamente per A e doppiamente per $B_1, B_2, ..., B_9$. Poichè le curve di $|C_4|$ passano semplicemente per B_{10}, si potrebbe pensare che anche il punto B_{10} dovesse essere doppio per il $|C_7|$; ma essendo per le curve di $|C_4|$ il passaggio per B_{10} una conseguenza del passaggio per gli altri punti base presi con le loro molteplicità, per poter considerare il $|C_4|$ come sistema aggiunto di un $|C_7|$ si può ritenere come virtualmente inesistente il punto base B_{10}.

Il sistema $|C_7|$ deve essere ∞^3, di genere tre e grado quattro, e possedere una cubica fondamentale C_3, staccata la quale si ottenga come sistema residuo il $|C_4|$. La cubica fondamentale non può essere altro che la $C_3(A\,B_1B_2...B_9)$, la quale ha 21 inter-e-

zioni fisse con le $C_7(A^3B_1^2 \dots B_9^2)$. Le $C_7(A^3B_1^2B_2^2 \dots B_9^2)$ risultano poi effettivamente di genere tre e grado quattro, se sono irriducibili. Perchè tuttavia esistano delle $C_7(A^3B_1^2 \dots B_9^2)$ irriducibili, i punti $A, B_1, B_2, \dots, B_9$ non possono essere presi ad arbitrio sopra la C_3; in questa ipotesi infatti si hanno solamente ∞^2 $C_7(A^3B_1^2B_2^2 \dots B_9^2)$ spezzate nella C_3 ed in una curva generica di $|C_4|$. Per ottenere un sistema lineare ∞^3 è necessario, dopo aver preso $A, B_1, B_2, \dots, B_8$ arbitrariamente sulla C_3, determinare convenientemente B_9. Ciò si può fare come segue. Le $C_7(A^3B_1^2B_2^2 \dots B_8^2)$ sono ∞^5 e segano sopra la C_3 una g_2^1, la quale possiede quattro punti doppi. Dimostriamo che si può prendere come B_9 uno qualunque di questi quattro punti doppi. Infatti le $C_7(A^3B_1^2B_2^2 \dots B_8^2)$ che passano per B_9 così scelto sono ∞^4 e risultano *tangenti* alla C_3 in B_9. Se si impone alle $C_7(A^3B_1^2B_2^2 \dots B_8^2B_9)$ di passare ulteriormente per un punto infinitamente vicino a B_9, fuori della cubica C_3, si ottiene un sistema lineare ∞^3 di curve irriducibili $C_7(A^3B_1^2B_2^2 \dots B_9^2)$, il quale passa doppiamente per il punto B_9.

Riepilogando i risultati ottenuti, possiamo dire:

Dati ad arbitrio sul piano 9 punti $A, B_1, B_2, \dots, B_8$, esiste un sistema lineare (sovrabbondante) ∞^3 di curve irriducibili C_7 passanti triplamente per A e doppiamente per i punti $B_1, B_2, \dots, B_8, B_9$, il punto B_9 essendo un punto determinato (in quattro maniere diverse) *della cubica C_3 che passa per i punti $A, B_1, B_2, \dots, B_8$; la cubica C_3 è fondamentale per il $|C_7|$ e, staccata da questo sistema, dà come residuo un sistema lineare sovrabbondante ∞^2 di quartiche C_4 passanti doppiamente per A e semplicemente per $B_1, B_2, \dots, B_9, B_{10}$, il punto B_{10} essendo un punto univocamente determinato della C_3; la C_3 è fondamentale anche per il $|C_4|$ e, staccata da esso, dà come residuo il fascio delle rette passanti per A. Il sistema $|C_4|$ è l'aggiunto del $|C_7|$. Il fascio delle rette per A è l'aggiunto del $|C_4|$ ed il secondo aggiunto del $|C_7|$.*

Il sistema lineare $|C_7|$ rappresenta una superficie razionale del quart'ordine F_4, a sezioni piane di genere tre, dotata di un punto doppio O non tacnodale, per il quale esiste un fascio di

La superficie razionale F_4, rappresentata dal sistema $|C_7|$ si suol designare come la superficie $F_4^{(2)}$ di NOETHER (1).

Partendo dalla rappresentazione piana della $F_4^{(2)}$ dotata di punto doppio O non tacnodale, per il quale passa un fascio di sezioni piane razionali, si può precisare la natura della singolarità di questa superficie.

È chiaro anzitutto che la cubica C_3, fondamentale per il sistema rappresentativo $|C_7|$, rappresenta l'intorno del punto doppio O: ciò si desume dal fatto che lo staccamento della C_3 dà luogo ad un sistema residuo di genere e grado due, rappresentato dalle $C_4(A^2B_1...B_9B_{10})$. Precisiamo la natura della corrispondenza esistente fra i punti della cubica C_3 ed i punti dell'intorno del punto doppio O. Preso un punto generico di C_3, per esso passano ∞^1 $C_4(A^2B_1B_2...B_{10})$ spezzate nella C_3 ed in una retta generica per A. Ne segue che ad un punto generico della C_3 corrisponde sempre lo stesso punto O_1 dell'intorno di O: in altre parole le curve passanti per un punto della C_3 sono immagini di curve passanti per un punto determinato dell'intorno di O_1. Ai punti dell'intorno di O diversi da O_1 corrispondono invece biunivocamente i punti dell'intorno del punto B_{10}: infatti per un punto infinitamente vicino a B_{10} e non giacente sulla C_3 passano ∞^1 $C_4(A^2B_1B_2...B_{10})$ irriducibili, immagini delle sezioni di F_4 con i piani passanti per O e per un punto infinitamente vicino ad O, diverso da O_1. Queste ∞^1 $C_4(A^2B_1B_2...B_{10})$ passano per il punto B_{10} con un solo ramo: anche le sezioni piane di cui sono immagini devono quindi passare per O con un solo ramo e perciò il

(1) Si può provare con una semplice analisi diretta che il sistema $|C_7|$ ora costruito è, almeno in generale, semplice. Ma ciò segue anche dal fatto che — come si vedrà tra poco — una superficie del tipo della $F_4^{(2)}$ (irriducibile e non ridotta ad una quadrica doppia) può essere ottenuta trasformando una F_4 dotata di una retta doppia con una opportuna trasformazione birazionale dello spazio.

punto O, che è un punto doppio, deve essere una cuspide. Ne viene:

Il punto O è un punto doppio uniplanare della superficie $F_4^{(2)}$.

Tra le sezioni piane per il punto O, che sono in generale di genere due, ne esiste un fascio di genere zero: esse si ottengono segando la $F_4^{(2)}$ con i piani passanti per la retta OO_1 e sono rappresentate dalle curve spezzate nella cubica C_3 contata due volte ed in una retta per A. Indicheremo con C'_4 una sezione piana giacente in un piano per la retta OO_1. Poichè le rette per A segano la C_3 in due punti (diversi in generale dal punto B_{10}), il punto O_1 è doppio per le C'_4, sicchè esistono per le C'_4 due rami lineari che passano per O_1 toccandosi lungo la retta OO_1. Ma il genere della C'_4 deve essere zero: ne segue che i due predetti rami devono non solamente toccarsi ma *oscularsi* in modo che le C'_4 abbiano tre punti doppi O, O_1, O_2 succedentisi sopra un ramo lineare per O.

Il fatto che i due rami lineari di una C'_4 per O si osculino risulta dalla rappresentazione piana nel modo che segue. Consideriamo il sistema lineare delle curve segate sulla $F_4^{(2)}$ dalle quadriche dello spazio; esso è rappresentato dal sistema delle $C_{14}(O^6B_1^4B_2^4 \dots B_8^4B_9^4)$. Imponendo alle curve di questo sistema di passare per B_{10}, immagine dell'intorno di O, si stacca la cubica fondamentale e si ottengono delle $C_{11}(O^5B_1^3B_2^3 \dots B_9^3)$, che rappresentano le curve segate sulla F_4 dalle quadriche passanti per il punto doppio O. Estraendo ancora una volta la cubica fondamentale, immagine dell'intorno di O_1, si ottengono infine le ∞^7 $C_8(O^4B_1^2B_2^2 \dots B_9^2)$, che rappresentano le curve segate sulla F_4 dalle ∞^7 quadriche, che passano per O, avendo in O un piano tangente contenente la retta $O\,O_1$. Tra le $C_8(A^4B_1^2B_2^2 \dots B_9^2)$ sono contenute le curve spezzate in una $C_7(A^3B_1^2B_2^2 \dots B_9^2)$ ed in una retta per A; e poichè la C_3 è fondamentale per le $C_7(A^3B_1^2 \dots B_9^2)$ la g_2^1 segata sulla C_3 dalle $C_8(A^4B_1^2 \dots B_9^2)$ coincide con la g_2^1 segata sulla C_3 dalle rette per A.

Ciò posto, consideriamo un punto generico A_1 della C_3: le $C_8(A^4B_1^2B_2^2 \dots B_9^2)$ passanti per A_1 corrispondono alle intersezioni della $F_4^{(2)}$ con le quadriche passanti per OO_1 ed un ben determinato

punto O_2 dell'intorno di O_1. Per l'osservazione precedente, le $C_8(A^4B_1^2B_2^2 \dots B_9^2)$ passanti per A_1 passano di conseguenza per il punto A_2, ulteriore intersezione della C_3 con la retta AA_1. I due punti A_1 ed A_2 corrispondono dunque al *medesimo* punto O_2 dell'intorno di O_1; e la curva sezione della $F_4^{(2)}$ con il piano OO_1O_2, che ha come immagine la retta AA_1A_2, ha per conseguenza il punto O_2 come doppio, cioè i due rami lineari che passano per O avendo ivi la stessa tangente OO_1 hanno ivi anche lo stesso cerchio osculatore, passando entrambi per il punto O_2. Ciò spiega come le sezioni piane ottenute coi piani passanti per la retta OO_1 siano di genere zero.

Dalla discussione precedente emerge che mentre ad ogni punto A_1 della C_3 corrisponde un punto O_2 dell'intorno di O_1, ad ogni punto O_2 dell'intorno di O_1 corrispondono *due* punti della C_3, allineati con A. L'intorno del punto O_1 è dunque costituito da una curva doppia infinitesima, i cui punti sono in corrispondenza biunivoca con le coppie della g_2^1 segata sulla C_3 dalle rette per A.

Possiamo dunque dire ricapitolando:

La singolarità della $F_4^{(2)}$ è costituita da un punto doppio uniplanare O al quale è infinitamente vicino un tacnodo O_1.

Supponiamo ora che F_4 sia una superficie del quart'ordine, sulla quale esista un unico punto doppio (e non triplo) O, per il quale passi un fascio di sezioni piane razionali. Dimostreremo che la F_4 è necessariamente razionale e rappresentabile sul piano da un sistema di $C_7(A^3B_1^2 \dots B_9^2)$, (con $A, B_1, \dots, B_9$ su di una C_3), coincidendo così con la $F_4^{(2)}$ di NOETHER.

Mostriamo anzitutto che la singolarità della F_4 in O consta di un punto doppio uniplanare, cui è infinitamente vicino in posizione generica un tacnodo. Sia infatti r l'asse del fascio di sezioni piane per O, che risultano razionali. Se le nominate sezioni piane si spezzassero nella retta r ed in una parte residua, questa dovrebbe essere razionale ed avere un punto doppio in O. Ma ciò non è possibile, perchè il punto O risulterebbe triplo. Le sezioni piane per la retta r sono dunque irriducibili e sono quindi delle

quartiche con O triplo, ovvero delle quartiche con tre punti doppi successivi su un ramo lineare uscente da O con la tangente r. Ma la prima ipotesi si esclude, perchè O sarebbe ancora triplo: rimane dunque la seconda, per la quale, infinitamente vicino ad O vi è precisamente un *tacnodo* O_1. Quanto al punto O stesso, esso è uniplanare: invero un punto O, cui sia infinitamente vicino un tacnodo O_1, è necessariamente uniplanare.

Ciò premesso, si tratta di far vedere che la F_4 coincide con la $F_4^{(2)}$ di NOETHER. Arriveremo a questo, mostrando — con D. MONTESANO — che la nostra F_4 si può trasformare, con una trasformazione birazionale dello spazio, in una F'_4 dotata di retta doppia; e poichè della F'_4 è nota la rappresentazione piana, riusciremo a rappresentare sul piano anche la data F_4. Ritroveremo così il sistema $|C_7|$ rappresentativo della $F_4^{(2)}$: la F_4 coincide pertanto con la $F_4^{(2)}$.

Ritorniamo alla F_4, sulla quale sappiamo ormai che esiste un punto doppio O, cui è infinitamente vicino un tacnodo O_1. Consideriamo il fascio di piani, che ha per asse la retta OO_1. Fra questi piani del fascio ve n'è un numero finito che sono tangenti alla superficie fuori di O. Le sezioni della F_4 con questi piani, essendo delle quartiche dotate di quattro punti doppi, sono spezzate in due coniche, che si osculano in O, avendo ivi la stessa tangente OO_1 e lo stesso cerchio osculatore, e si tagliano fuori di O nel punto di tangenza del piano. Vediamo così che sulla F_4 esiste un numero finito di coniche, passanti per O con la tangente OO_1 (1).

Sia K_2 una delle coniche così costruite e α il piano osculatore alla F_4 nel punto uniplanare O. Trasformiamo la F_4 con la tra-

(1) Queste coniche sono 18 e risultano distribuite a coppie in 9 piani per OO_1. Per vederlo si può proiettare la F_4 da O su di un piano doppio π, il quale viene a possedere una sestica di diramazione con il punto P, comune a π ed alla OO_1, come quadruplo. Le sezioni piane della F_4 per la retta OO_1 sono rappresentate dalle rette uscenti da P. Fra queste ve ne sono 10, che risultano tangenti alla curva di diramazione; e precisamente per 9 di esse

sformazione quadratica T, la quale trasforma nei piani di uno spazio S' le quadriche passanti per K_2 e toccanti il piano α in O. La superficie trasformata della F_4 è ancora del quart'ordine: F_4'. Invero le rette di S' provengono dalle coniche, che si appoggiano alla K_2 e toccano il piano α in O; e queste coniche hanno *quattro* intersezioni fuori di elementi fondamentali con la F_4. Proviamo che la F_4' possiede una retta doppia. Consideriamo a questo scopo i piani per la retta, determinata dal punto O e dal suo infinitamente vicino O_1 sulla K_2. Nello spazio S' si ha una retta analoga: $O'O'_1$, tangente in O' alla conica K'_2 (analoga alla K_2); ed i piani per OO_1 si mutano nei piani per $O'O'_1$. Ora l'intorno del punto O_1 si muta nell'intorno della retta $O'O'_1$. Ma in ogni piano per OO' vi è una quartica che ha tre punti doppi successivi O, O_1, O_2, il punto O_2 cadendo nell'intorno di O_1. I punti della retta $O'O'_1$ risultano così *doppi* per la F'_4. La F'_4 è dunque una superficie del quart'ordine dotata di retta doppia. Più precisamente: il punto O' è un punto biplanare della retta doppia $O'O'_1$ della F'_4; ed i piani osculatori alla F'_4 in O' sono il piano della conica K'_2, la quale appartiene alla F'_4 e risulta tangente in O' alla $O'O'_1$, ed il piano α', analogo al piano α, cioè trasformato della conica K_2.

Da quanto precede risulta: le sezioni piane della superficie F_4 si possono trasformare nelle curve segate su di una superficie del quart'ordine F'_4, dotata di retta doppia, dalle quadriche

a) passanti per una conica K'_2 di F'_4 tangente alla retta doppia in un punto O', e

b) toccanti in O' il piano osculatore alla F'_4 diverso dal piano contenente la K'_2.

Rammentiamo ora (cfr. Lib. I, cap. VII, n. 37) la rappresentazione piana della superficie del quart'ordine F'_4, dotata di retta

---

il punto di contatto cade fuori di P, mentre per la decima esso cade infinitamente vicino a P. Alle 9 tangenti del primo tipo corrisponde una sezione piana della F_4 spezzata in due coniche (e si ottengono così le 18 coniche nominate); la decima è la traccia sul piano π del piano osculatore alla F_4 nel suo punto uniplanare O.

doppia. Per immagini delle sezioni piane si possono assumere $C_4(O^2A_1A_2...A_8)$: la retta doppia è rappresentata dalla $C_3(OA_1...A_8)$, sulla quale le nominate C_4 segano una g_2^1. Da O partono quattro tangenti alla $C_3(OA_1...A_8)$: esse sono immagini di coniche della superficie, tangenti alla retta doppia. Le immagini delle sezioni della F'_4 con le quadriche dello spazio sono date da curve $C_8(O^4A_1^2A_2^2...A_8^2)$. Se imponiamo alle quadriche dello spazio di contenere una conica della superficie tangente alla retta doppia in un punto O', bisogna dalle $C_8(O^4A_1^2A_2^2...A_8^2)$ togliere una retta per O, tangente alla $C_3(OA_1A_2...A_8)$ in un punto P. Arriviamo così a delle $C_7(O^3A_1^2A_2^2...A_8^2)$. Se inoltre le quadriche toccano in O' l'altra falda della F'_4, bisogna che le $C_7(O^3A_1^2A_2^2...A_8^2)$ abbiano un punto doppio nel punto P', coniugato di P nella g_2^1 segata sulla $C_3(OA_1...A_8)$ dalle $C_4(O^2A_1...A_8)$. (La coppia PP' è immagine del punto O'). Ma così siamo pervenuti a rappresentare la primitiva F_4 sul piano, in modo che le immagini delle sue sezioni piane siano delle $C_7(O^3A_1^2A_2^2...A_8^2P'^2)$, ove $O, A_1, ..., A_8, P'$ stanno su di una cubica. Il sistema delle C_7 così ottenute è rappresentativo della $F_4^{(2)}$ di NOETHER: concludiamo che la F_4 non è altro che la $F_4^{(2)}$ di NOETHER.

45. Superficie razionali del quart'ordine dotate di un punto doppio con un fascio di sezioni ellittiche.

Passiamo ora alla costruzione di un sistema lineare $|C_n|$, rappresentativo di una superficie razionale F_4 a sezioni di genere tre, dotata di un punto doppio non tacnodale O, per il quale passa un fascio di curve piane di genere uno.

Dimostriamo più avanti (cfr. Lib. II, cap. III, n. 14) che ogni fascio di curve ellittiche si può ridurre con trasformazioni cremoniane ad un fascio di cubiche per 9 punti base semplici, ovvero ad un fascio d'HALPHEN costituito da curve d'ordine $3i (i>1)$, passanti i volte per 9 punti giacenti su di una cubica C_3. Vedremo anche (cfr. Lib. II, cap. IV, n. 17) che un fascio d'HALPHEN non proviene mai come aggiunto puro da un sistema lineare di curve

di genere due, d'ordine uguale a $3i + 3$, che sia l'aggiunto di un sistema lineare ∞^3 di genere tre, d'ordine $3i + 6$, e che un fascio di cubiche proviene per aggiunzione solamente da un sistema di sestiche di genere due, passanti doppiamente per otto punti base del fascio. Potremo pertanto ammettere a priori che il fascio delle curve ellittiche piane passanti per il punto doppio O della F_4 sia rappresentato da un fascio di cubiche, passanti per nove punti base $A_1, A_2, \ldots, A_9$.

Il fascio di cubiche per $A_1, A_2, \ldots, A_9$ proviene per aggiunzione da un sistema lineare $|C_6|$ di sestiche $C_6(A_1^2A_2^2 \ldots A_8^2)$ che riescono di genere due. Per i nostri scopi è necessario che il sistema $|C_6|$ sia ∞^2, di grado due e possieda una cubica fondamentale C_3, staccata la quale si ottiene come sistema residuo il fascio di cubiche per $A_1, A_2, \ldots, A_9$. Si realizzano queste condizioni aggiungendo agli otto punti base doppi di $|C_6|$ un punto base semplice B_1. La cubica C_3 che è individuata dai punti $A_1, A_2, \ldots, A_8, B_1$ riesce allora fondamentale per il $|C_6|$: infatti le ∞^2 $C_6(A_1^2A_2^2 \ldots A_8^2B_1)$ segano la C_3 in un punto fisso B_2, che è una conseguenza degli altri punti base del sistema presi con le loro molteplicità; d'onde segue che le $C_6(A_1^2A_2^2 \ldots A_8^2B_1)$ hanno 18 intersezioni fisse con la $C_3(A_1A_2 \ldots A_8B_1)$. Le $C_6(A_1^2A_2^2 \ldots A_8^2B_1B_2)$ si segano poi a due a due in due punti variabili in modo che il sistema (sovrabbondante) $|C_6|$ delle $C_6(A_1^2A_2^2 \ldots A_8^2B_1B_2)$ soddisfa a tutte le condizioni necessarie.

Il sistema $|C_6|$ proviene a sua volta per aggiunzione (come aggiunto puro) da un sistema $|C_9|$ di C_9, di genere tre, passanti triplamente per $A_1, A_2, \ldots, A_8$ e doppiamente per B_1. La cubica $C_3(A_1A_2 \ldots A_8B_1)$ riesce fondamentale per queste C_9 giacchè, delle 27 intersezioni della C_3 con le C_9, 26 sono fisse e quindi è anche fissa l'ultima. In altre parole le $C_9(A_1^3A_2^3 \ldots A_8^3B_1^2)$ costituiscono un sistema lineare ∞^3 sovrabbondante, tutte le curve del quale passano per un punto, B, della $C_3(A_1A_2 \ldots A_8B_1)$. Il punto B è diverso dal punto B_2: se ciò infatti non fosse, le $C_6(A_1^2A_2^2 \ldots A_8^2B_1B_2)$ avrebbero tre e non quattro intersezioni con le $C_9(A_1^3A_2^3 \ldots A_8^3B_1^2B)$. Si verifica immediatamente che il $|C_9|$ è di grado quattro. Il sistema lineare $|C_9|$ possiede perciò tutte le

proprietà necessarie per rappresentare una superficie del quarto ordine a sezioni di genere tre.

Riepilogando i risultati potremo dire:

Presi ad arbitrio sul piano 9 punti $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_8, B_1$ *esiste un sistema lineare (sovrabbondante)* ∞^3 *di curve irriducibili* C_9 *passanti triplamente per* $A_1, A_2, \ldots, A_8$, *doppiamente per* B_1 *e semplicemente per un punto B, univocamente determinato, della cubica* C_3, *che passa per i punti* $A_1, A_2, \ldots, A_8, B_1$; *la cubica* C_3 *è fondamentale per il* $|C_9|$ *e staccata da questo sistema dà come residuo un sistema lineare (sovrabbondante)* ∞^2 *di sestiche* C_6 *passanti doppiamente per* $A_1, A_2, \ldots, A_8$ *e semplicemente per* B_1 *e* B_2, B_2 *essendo un punto univocamente determinato della* C_3; *la* C_3 *è fondamentale anche per il* $|C_6|$ *e staccata da esso dà come residuo il fascio delle cubiche passanti per* $A_1, A_2, \ldots, A_8$ *e di conseguenza per un nono punto* A_9 *della* C_3. *Il sistema* $|C_6|$ *è l'aggiunto del* $|C_9|$. *Il fascio di cubiche per* $A_1, A_2, \ldots, A_8, A_9$ *è l'aggiunto del* $|C_6|$ *ed il secondo aggiunto del* $|C_9|$.

Il sistema lineare $|C_9|$ *rappresenta una superficie razionale del quart'ordine* F_4, *a sezioni piane di genere tre, dotata di un punto doppio O non tacnodale, per il quale esiste un fascio di sezioni piane ellittiche (cubiche).*

La superficie, rappresentata dal $|C_9|$ così costruito è la $F_4^{(3)}$ di NOETHER [1].

Partendo dalla rappresentazione piana della $F_4^{(3)}$ di NOETHER, mediante il sistema $|C_9|$ che abbiamo costruito, è possibile precisare la natura della $F_4^{(3)}$ nel suo punto doppio.

Il sistema lineare delle $C_9(A_1^3 A_2^3 \ldots A_8^3 B_1^2 B)$ contiène una rete spezzata nella $C_3(A_1 \ldots A_8 B_1 B)$ e nelle sestiche $C_6(A_1^2 A_2^2 \ldots A_8^2 B_1 B_2)$, prime aggiunte delle nominate C_9. Due delle anzi-

---

[1] Si avverta che il sistema lineare $|C_9|$ è certo *semplice*: invero su una $C_3(A_1 A_2 \ldots A_8)$ generica il $|C_9|$ segna una g_3^2. Il sistema lineare $|C_9|$, prima della ricerca di NOETHER, che citiamo più avanti, era stato notato di C. JUNG (Cfr. *Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche di genere p e sulla*

dette C_6 si segano in due punti e quindi la $F_4^{(3)}$ possiede un punto doppio O, il cui intorno è rappresentato dalla $\overline{C}_3(A_1 \ldots A_8 B_1 B_2 B)$. Più precisamente: alle diverse direzioni delle sezioni piane condotte per O, corrispondono le intersezioni (virtualmente) variabili delle C_6 con la $\overline{C}_3$ e quindi l'unico punto B_2. Si ricava di qua che le sezioni piane passano per O con un unico ramo: *il punto O è un punto uniplanare.*

Tra le sezioni piane per O esiste un fascio passante per una certa retta p, che è rappresentato dalle $C_3(A_1A_2 \ldots A_8)$, seconde aggiunte delle C_9, alle quali si aggiunge come parte fissa la cubica $\overline{C}_3$ contata due volte. Le nominate $C_3(A_1 \ldots A_8)$ hanno *tre* intersezioni variabili con le C_9 e rappresentano quindi delle cubiche piane di genere uno per O. Ne segue che *la retta p appartiene alla* $F_4^{(3)}$. Nella rappresentazione piana la retta p viene rappresentata dal punto B: infatti le C_9 spezzate nella $\overline{C}_3$ contata due volte ed in una $C_3(A_1 \ldots A_8)$ passano due volte per B, mentre una generica C_9 passa una volta sola.

Abbiamo così trovato gli elementi della $F_4^{(3)}$ che sono rappresentati dai punti B_2 e B. Quanto al punto B_1, esso rappresenta una conica K_2 della superficie: ed il piano della K_2 sega ulteriormente la $F_4^{(3)}$ secondo la retta p, contata due volte, riuscendo così tangente alla superficie lungo tutta questa retta. Ciò risulta esaminando quella particolare C_9 che è spezzata nella $\overline{C}_3$ contata *tre* volte. A questa C_9 corrisponde una sezione piana che contiene la K_2: infatti una generica C_9 passa doppiamente per B_1, mentre la $\overline{C}_3$ contata tre volte vi passa triplamente. La stessa sezione piana contiene anche due volte la retta p: infatti la retta p è rappresentata da B e, mentre una C_9 generica passa semplicemente per B, la $C_9 = 3\overline{C}_3$ vi passa triplamente.

Le cubiche piane, che sono segate sulla $F_4^{(3)}$ da piani per O, non incontrano ulteriormente la p fuori di O: infatti le $C_3(A_1 \ldots A_8)$, immagini delle dette cubiche, non passano per B, immagine di p. *La retta p è quindi tangente di flesso per le cubiche che, insieme ad essa, formano una sezione piana della* $F_4^{(3)}$.

flesso delle cubiche piane della $F_4^{(3)}$ corrisponde sul piano il punto A_9, nono punto base del fascio di $C_3(A_1 \ldots A_8)$.

Consideriamo il piano α, che sega la $F_4^{(3)}$ secondo la K_6 e la p contata due volte. Poichè la K_6 tocca la p in O, le rette di α uscenti da O hanno *tre* delle loro intersezioni con la $F_4^{(3)}$ assorbite da O: il piano α contato due volte rappresenta quindi il cono osculatore alla $F_4^{(3)}$ nel punto (uniplanare) O.

Consideriamo ora gli ∞^3 coni del second'ordine che hanno il loro vertice in O e che toccano la $F_4^{(3)}$ lungo la p. Le immagini delle loro sezioni con la $F_4^{(3)}$ son le $C_6(A_1^2 A_2^2 \ldots A_8^2)$. Infatti una sezione piana per O è rappresentata da una $C_6(A_1^2 A_2^2 \ldots A_8^2 B_1 B_2)$: e quindi l'immagine del sistema doppio delle sezioni per O, che è il sistema segato dai coni con vertice in O, è rappresentato dalle $C_{12}(A_1^4 \ldots A_8^4 B_1^2 B_2^2)$. Se i coni toccano la $F_4^{(3)}$ lungo la p, essendo l'immagine di p il punto B, si otterranno le $C_{12}(A_1^4 A_2^4 \ldots A_8^4 B_1^2 B_2^2 B^2)$: ma queste curve non sono altro che $C_6(A_1^2 \ldots A_8^2)$ cui si aggiunge due volte la cubica $\overline{C}_3(A_1 \ldots A_8 B_1 B_2 B)$.

Dalla immagine piana si ricava dunque che le sezioni della $F_4^{(3)}$ con i coni di vertice O, passanti per la p con il piano tangente α, sono delle sestiche K_6 di genere due. Le K_6 passano per O con *due* rami ben determinati, perchè le $C_6(A_1^2 \ldots A_8^2)$ segano le $\overline{C}_3(A_1 \ldots A_8 B_1 B_2)$ in coppie di punti distinti (equivalenti alla coppia $B_1 B_2$). I due rami della K_6 sono inoltre *semplici*, perchè dal piano rappresentativo si deduce che una K_6 ha, con una sezione piana per O, quattro intersezioni fuori di O. Mostriamo ora che i due rami della K_6 passano entrambi per il punto O_1, infinitamente vicino ad O, sulla retta p: infatti le $C_6(A_1^2 \ldots A_8^2)$, immagini delle K_6, non passano per B, immagine della p, e le $C_3(A_1 \ldots A_8)$, immagini delle cubiche piane di $F_4^{(3)}$ passanti per O, O_1, hanno solo *due* intersezioni variabili con le $C_6(A_1^2 \ldots A_8^2)$; ne segue che la retta p non incontra le K_6 fuori di O e che i piani per la p hanno quattro delle loro intersezioni con le K_6 assorbite da O. I due rami delle K_6 per O si toccano dunque lungo la retta

p: ossia *gli* ∞^3 *coni quadrici, che hanno il vertice in* O *e toccano la* $F_4^{(3)}$ *lungo la retta* p, *segano la* $F_4^{(3)}$ *secondo delle* K_6 *di genere due, che hanno in* O *un tacnodo, essendo la* $p \equiv O\,O_1$ *la tangente tacnodale.* Infine *il piano* α *è osculatore ai due rami delle* K_6, *uscenti da* O. Infatti le $C_6(A_1^2 \dots A_8^2)$, immagini delle K_6, non passano nè per B, immagine di p, nè per B_1, immagine della K_2: le K_6 non hanno dunque intersezioni con il piano α fuori del punto O.

Giova inoltre riconoscere che le K_6 *non* osculano la K_2 in O. A questo scopo troviamo le immagini delle curve segate sulla $F_4^{(3)}$ dalle quadriche passanti per la K_2. Le immagini delle sezioni piane della $F_4^{(3)}$ sono della $C_9(A_1^3 \dots A_8^3 B_1^2 B)$: e le immagini delle sezioni con le quadriche sono quindi delle $C_{18}(A_1^6 \dots A_8^6 B_1^4 B^2)$. Tolta l'immagine di O, rimangono delle $C_{15}(A_1^5 \dots A_8^5 B_1^3 B)$; e se le quadriche toccano in O la retta p, delle $C_{12}(A_1^4 \dots A_8^4 B_1^2)$. Poichè la K_2 è rappresentata da B_1 le curve segate sulla $F_4^{(3)}$ dalle quadriche contenenti la K_2 si rappresentano nelle $C_{12}(A_1^4 \dots A_8^4 B_1^3)$. Ma le $C_{12}(A_1^4 \dots A_8^4 B_1^3)$ hanno 8 intersezioni variabili con le $C_6(A_1^2 \dots A_8^2)$; e pertanto solamente quattro sono assorbite da O. E' quindi impossibile che le K_6 osculino la K_2.

Dal ragionamento precedente segue che ai punti della $\overline{C}_3(A_1 \dots A_8 B_1 B_2 B)$ corrispondono sulla $F_4^{(3)}$ degli elementi lineari, uscenti da O con tangente p e piano osculatore α. Si può quindi anche dire che la $\overline{C}_3$ rappresenta l'intorno di O_1 sul piano α. Ma la $\overline{C}_3$ è di genere uno e il nominato intorno è di genere zero. Fra gli elementi del secondo ordine uscenti da O, con tangente p e piano osculatore α, ed i punti della $\overline{C}_3$ non vi può dunque essere corrispondenza biunivoca. Proviamo infatti che la nominata corrispondenza è [1, 2], ad ogni elemento dell'intorno corrispondendo una coppia di punti della $\overline{C}_3$, equivalente al punto B_2, contato due volte.

Si consideri all'uopo la g_2^1 segata sulla $\overline{C}_3$ dalle ∞^7 $C_{12}(A_1^4 \dots A_8^4 B_1^2)$. La nominata g_2^1 è determinata dal punto B_2 contato due volte: infatti tra le $C_{12}(A_1^4 \dots A_8^4 B_1^2)$ sono comprese le $C_{12}(A_1^4 \dots A_8^4 B_1^2 B_2^2)$, rappresentative delle curve segate sulla

$F_4^{(3)}$ dai coni quadrici di vertici O. Ora, le $C_{12}(A_1^4 \dots A_8^4 B_1^2)$ rappresentano le curve K_8 segate sulla $F_4^{(3)}$ dalle quadriche tangenti in O alla retta p. Presa quindi una coppia della nostra g_2^1, per essa passano ∞^6 $C_{12}(A_1^4 \dots A_8^4 B_1^2)$, immagini di ∞^6 curve segate sulla $F_4^{(3)}$ dalle quadriche che toccano in O la retta p e passano per un ben determinato punto dell'intorno di O_1 sul piano α. Alle coppie della g_2^1 corrispondono così i punti dell'intorno di O_1: e viceversa ad un punto dell'intorno di O_1 sul piano α corrisponde una coppia della g_2^1 segata sulla $\overline{C}_3$ dalle $C_{12}(A_1^4 \dots A_8^4 B_1^2)$.

Consideriamo ora più da vicino le K_8 segate sulla $F_4^{(3)}$ dalle quadriche, che toccano la p in O. Argomentando come sopra, si troverà che le K_8 passano per O con due rami lineari, che tuttavia hanno la tangente comune p ed il piano osculatore α. Ma i due punti di una K_8 nell'intorno di secondo ordine di O, sono rappresentati da una coppia della g_2^1 segata sulla $\overline{C}_3$ dalle $C_{12}(A_1^4 \dots A_8^4 B_1^2)$: questi due punti devono perciò coincidere. Le curve K_8 hanno dunque tre punti doppi infinitamente vicini, i quali si succedono sopra un ramo lineare, che ha la retta p come tangente ed il piano α come piano osculatore. Le K_8 si distinguono tra loro appena dal quarto punto in poi, a partire da O: e questo quarto punto è *fuori* del piano α.

Riepilogando, possiamo dire che *la superficie $F_4^{(3)}$ possiede in O un punto uniplanare, cui è infinitamente vicino un tacnodo O_1, giacente nel piano α osculatore alla $F_4^{(3)}$ in O.*

Il piano tacnodale di O_1 è dunque in una posizione *particolare*, che si può caratterizzare dicendo che *il piano tacnodale di O_1 contiene la retta $p \equiv O\,O_1$*. Il significato preciso di questa affermazione si coglie, quando si operi una trasformazione quadratica T di centro O. Per la T l'intorno di O si muta in un piano α, sul quale, in un punto O^*, va a cadere il tacnodo O_1. Ora il piano tacnodale di O^* può essere in posizione generica oppure passare per O. Nel primo caso la singolarità in O è costituita da un punto uniplanare, cui è infinitamente vicino in posizione generica un tacnodo: è la singolarità presentata dalla $F_4^{(2)}$ di NOETHER. Se invece il piano tacnodale del tacnodo O^* passa per O, si ha la

singolarità presentata dalla $F_4^{(3)}$. I piani per O^* provengono da quadriche tangenti in O alla retta $p \equiv O\,O_1$: ed effettivamente abbiamo veduto che queste quadriche segano la $F_4^{(3)}$ secondo curve che hanno tre punti doppi infinitamente vicini su di un ramo lineare, uscente da O con tangente p e piano osculatore α.

NOTA. - Abbiamo veduto che la superficie razionale del quarto ordine designata con $F_4^{(2)}$ riesce caratterizzata dal possesso di una singolarità puntuale, costituita da un punto doppio O, cui è infinitamente vicino un tacnodo O_1, il cui piano tacnodale non passa per O. Invece la superficie $F_4^{(3)}$ possiede una singolarità puntuale costituita da un punto doppio O, al quale è infinitamente vicino un tacnodo O_1, il cui piano tacnodale passa per O. Dal punto di vista differenziale la seconda singolarità è un caso particolare della prima; ma se si fa variare una $F_4^{(2)}$ in guisa che il piano tacnodale in O_1 venga a passare per O non si ottiene la $F_4^{(3)}$ generale, bensì un caso particolare di essa, nascendo in O un punto singolare più elevato, e precisamente un punto cuspidale doppio sopra una retta doppia cioè un punto della linea doppia a cui sia infinitamente vicino sopra la linea doppia stessa un tacnodo (Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. IV. Cap. IV, pag. 626).

L'asserto è suscettibile di una verifica diretta ovvero di una dimostrazione in cui si ricerca un sistema rappresentativo della superficie comune ai due casi: come viene sviluppato da F. CONFORTO in una recente nota lincea.

46. Digressione sulle curve, che si staccano, come componenti fisse, dall'aggiunto di un sistema lineare.

In quanto precede abbiamo dimostrato l'esistenza di quattro tipi di superficie razionali del quart'ordine a sezioni piane di genere tre. Ora, questi tipi sono certamente gli unici esistenti, se si ammette l'*ipotesi semplificativa* che non si stacchino parti fisse dall'aggiunto; in questa ipotesi infatti abbiamo costruito i quattro sistemi lineari, rappresentativi delle nostre superficie. Se in-

vece non si ammette l'anzidetta ipotesi, può sorgere a priori il dubbio che esista qualche altro tipo. Nel n. seguente diremo come si rimuova questo dubbio. Qui vogliamo intanto esaminare in generale la questione delle componenti fisse, θ, che si staccano dall'aggiunto di un sistema lineare, accennando almeno ad un teorema fondamentale che le concerne.

Incominciamo con l'esporre alcune proprietà di codeste curve θ.

Sia $|C|$ un sistema lineare, irriducibile, d'ordine n, di genere $p > 1$, di dimensione maggiore di uno (che per moltiplicazione si può rendere ampio quanto si vuole) e supponiamo per semplicità, che esso possegga (o sia già ridotto ad avere) punti base distinti. Ogni punto *i-plo* di $|C|$ ha allora esattamente la molteplicità $i-1$ per le curve C', aggiunte alle C, d'ordine $n-3$; chè altrimenti il sistema $|C'|$ non potrebbe segare sopra la C generica l'intera serie canonica (priva di punti fissi). Ciò posto, supponiamo che dalle curve C' si stacchi una curva fissa θ, il resto formando il così detto sistema *aggiunto puro*, costituito in generale da curve irriducibili (ovvero composte con le curve di un fascio). La curva θ gode delle seguenti proprietà:

a) La curva θ è fondamentale per $|C|$: se infatti esistessero delle intersezioni variabili della θ con le curve C di $|C|$, la serie canonica segata su di una C dalle C' avrebbe dei punti fissi, ciò che è assurdo.

Imponendo alle C di $|C|$ di contenere un punto della θ, la θ si stacca da $|C|$ e rimane un sistema lineare, che indichiamo con $|C-\theta|$.

b) Se il sistema $|C|$ è di genere p, anche il sistema $|C-\theta|$ ha il genere p. Si suol enunciare questa proprietà dicendo che la curva θ è curva fondamentale *impropria* (cioè non abbassante il genere) di $|C|$. La dimostrazione del teorema è immediata: l'aggiunto di $|C-\theta|$ si ottiene sottraendo la curva θ da $|C'|$ ed ha quindi (essendo la θ comune a tutte le curve di $|C'|$) la stessa dimensione $p-1$ del sistema $|C'|$; le curve di $|C-\theta|$ sono dunque ancora di genere p.

c) La curva θ è di genere zero éd ha una intersezione con le

curve del sistema $|C-\theta|$. Sia infatti π il genere virtuale della θ (cioè il genere valutato tenendo conto delle molteplicità della θ nei punti base di $|C|$) ed i il numero dei punti doppi, che acquista una C, quando essa si spezza nella θ ed in una curva di $|C-\theta|$. Per la proprietà *b*), applicando la formula che dà il genere di una curva spezzata [1], dovrà essere:

$$\pi + p + i - 1 = p\,;$$

ossia:

$$\pi + i - 1 = 0\,;$$

ma per il principio di degenerazione è $i \geq 1$ e quindi necessariamente:

$$\pi = 0\,, \quad i = 1 \qquad \text{c. v. d.}$$

d) *La curva* θ *ha grado* (cioè numero delle intersezioni con se stessa definito virtualmente dalle molteplicità della θ nei punti base di $|C|$) *uguale a* -1.

Denotiamo con $i_1, i_2, \ldots, i_s$ le molteplicità del sistema $|C|$ nei punti base $A_1, A_2, \ldots, A_s$. Se r indica l'ordine della θ ed $r_1, r_2, \ldots, r_s$ le sue molteplicità in $A_1, A_2, \ldots, A_s$, essendo la θ fondamentale per $|C|$, sarà:

$$rn - \Sigma\, r_h i_h = 0\,,$$

da cui:

$$r(r+n-r) - \Sigma\, r_h(r_h + i_h - r_h) =$$
$$= r^2 - \Sigma\, r_h^2 + r(n-r) - \Sigma\, r_h(i_h - r_h) = 0\,.$$

Ma per la proprietà dimostrata in *c*), è:

$$r(n-r) - \Sigma\, r_h(i_h - r_h) = 1\,.$$

Ne segue che il grado:

$$r^2 - \Sigma\, r_h^2 = -1\,.$$

e) *I punti base di* $|C|$ *sopra una curva* θ, *presi con le loro molteplicità, offrono alla* θ *condizioni indipendenti*, ossia è:

$$\frac{1}{2}\, r(r+3) - \Sigma\, \frac{1}{2}\, r_h(r_h+1) = 0\,.$$

---

[1] **Cfr.** le note [2] e [3] a pag. 183, ovvero anche F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. III, pag. 399.

Per essere la θ di genere zero, sarà:

$$\frac{1}{2}(r-1)(r-2) - \Sigma \frac{1}{2} r_h(r_h - 1) = 0 .$$

Da qui segue:

$$r^2 - \Sigma r_h^2 - 3r + \Sigma r_h + 2 = 0 .$$

Ma è:

$$r^2 - \Sigma r_h^2 = -1 .$$

e quindi:

$$3r - \Sigma r_h = 1 .$$

Ne viene:

$$\frac{1}{2} r(r+3) - \Sigma \frac{1}{2} r_h(r_h + 1) = 0 .$$

f) Le proprietà a), d), e) caratterizzano le curve irriducibili che si staccano dall'aggiunto del sistema $|C|$.

Infatti le tre proprietà nominate si traducono nelle seguenti uguaglianze aritmetiche:

$\alpha)$ $$rn - \Sigma i_h r_h = 0 ,$$

$\beta)$ $$r^2 - \Sigma r_h^2 = -1 ,$$

$\gamma)$ $$r(r+3) - \Sigma r_h(r_h + 1) = 0 ,$$

o nelle equivalenti:

$\alpha')$ $$rn - \Sigma i_h r_h = 0 ,$$

$\beta')$ $$r^2 - \Sigma r_h^2 = -1 ,$$

$\gamma')$ $$3r - \Sigma r_h = 1 .$$

Ora l'aggiunto a $|C|$ ha l'ordine $n-3$ e la molteplicità $i_h - 1$ nei punti base di $|C|$; ed è

$$r(n-3) - \Sigma r_h(i_h - 1) = rn - \Sigma r_h i_h - 3r + \Sigma r_h = -1 .$$

Ne segue che una curva che gode delle proprietà $\alpha')$, $\beta')$, $\gamma')$ ha un'intersezione più del possibile con $|C'|$ e quindi si stacca da esso. È ovvio che la condizione $\beta)$ (tenuta presente la γ) può essere sostituita con la condizione che la θ sia *razionale*.

---

(1) Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. III, pag. 405.

g) Una curva θ, *che si stacca dall'aggiunto di* $|C|$ *si stacca anche dall'aggiunto dell'aggiunto puro* (supposto esistente).

In virtù della proprietà *f*), per dimostrare l'asserto basta dimostrare che la curva θ gode delle proprietà α'), β'), γ') anche rispetto al sistema aggiunto puro di $|C|$. Ora l'aggiunto puro a $|C|$ ha l'ordine $n-r-3$ ed ha in $A_h (h = 1, 2, \ldots, s)$ le molteplicità $i_h - r_h - 1$. La proprietà α') rispetto all'aggiunto puro di $|C|$ porta dunque alla relazione aritmetica:

$$r(n-r-3) - \Sigma r_h(i_h - r_h - 1) = 0 ;$$

e questa tenuto conto delle α'), β'), γ'), è effettivamente soddisfatta.

Quanto alle β') e γ'), esse non contengono altro che l'ordine r della θ e le molteplicità r_h nei punti base A_h, e quindi esse valgono a prima vista senz'altro. Senonchè le sommatorie che compariscono nella β') e nella γ') sono estese al gruppo dei punti base di $|C|$. Le β') e γ') cadono dunque in difetto se si applicano all'aggiunto puro di $|C|$, solamente se qualche punto A_h che sia punto base per $|C|$ non sia tale per l'aggiunto puro di $|C|$. Ciò avviene se e solamente se per qualche valore di h sia $i_h - r_h - 1 = 0$, ossia $r_h = i_h - 1$. Se quest'ipotesi si verifica, consideriamo le aggiunte pure che passano per A_h: il punto A_h costituisce per tali curve un *gruppo neutro* di i_h punti. La serie canonica del sistema $|C|$ risulta dunque composta. Ne segue che le curve di $|C|$ sono *iperellittiche e che* $i_h = 2$. Ora dal seguito (cfr. pag. 218) risulta che il sistema $|C|$ si può trasformare, in modo che la θ si riduca ad una retta; (e ciò senza che nella trasformazione si creino altre curve θ). Sulla nominata retta esistono allora due punti base del sistema trasformato di $|C|$, le cui molteplicità danno come somma l'ordine m del detto sistema trasformato. Se una di tali molteplicità è 2, l'altra è $m-2$: il sistema $|C|$ è così trasformabile in un sistema di curve iperellittiche d'ordine m con un punto $(m-2)$-*plo* ed un altro punto base doppio. Ne segue che il sistema aggiunto puro si può mutare in un sistema, le cui curve sono costituite da rette uscenti dal punto $(m-2)$-*plo*; e quindi non esiste l'aggiunto dell'aggiunto puro.

Le β') e γ') valgono dunque anche se sono estese al gruppo base dell'aggiunto puro $|C'|$, almeno se esiste l'aggiunto dell'aggiunto puro.

Ciò premesso, ricordiamo come una trasformazione cremoniana T trasformi un sistema $|C|$ ed il suo aggiunto $|C'|$. Il teorema fondamentale in proposito è il *teorema d'invarianza del sistema aggiunto*, che si enuncia così:

Se una trasformazione T muta un sistema $|C_n|$ in un sistema $|C_m|$, essa muta il sistema $|C'_{n-3}|$ aggiunto a $|C_n|$, nel sistema $|C'_{m-3}|$ aggiunto a $|C_m|$, intendendosi tuttavia di contare eventualmente come facenti parte di $|C'_{m-3}|$ le curve fondamentali che provengono da punti fondamentali della T, non cadenti in punti base di $|C_n|$ (le quali figureranno come parti fisse nel sistema $|C'_{m-3}|$).

Illustriamo questo teorema su alcuni esempi semplici.

Consideriamo ad esempio il sistema completo delle quartiche, che ha come aggiunto la rete delle rette. Se la T è una trasformazione quadratica, che ha i punti fondamentali A, B, C, il sistema delle quartiche si muta in un sistema di $C_8(A^4B^4C^4)$ e la rete delle rette nel sistema delle coniche per A, B, C. Ora l'aggiunto al sistema delle $C_8(A^4B^4C^4)$ è il sistema delle $C_5(A^3B^3C^3)$, il quale si riduce al sistema delle coniche per A, B, C, che è il trasformato per la T della rete delle rette, cui si aggiungano le rette BC, AC, AB, trasformate rispettivamente degli intorni dei punti A, B, C, che non sono base per il sistema delle quartiche. Si consideri invece il sistema delle $C_4(A)$, che ha anch'esso come aggiunto la rete delle rette. Per la T esso si muta nel sistema delle $C_7(A^4B^3C^3)$ che ha come aggiunto il sistema delle $C_4(A^3B^2C^2) = C_2(ABC) + AC + AB$. La retta BC non si stacca qui dal sistema delle $C_4(A^3B^2C^2)$ perchè il punto A da cui essa proviene per la T è questa volta punto base del $C_4(A)$; si staccano invece dal $C_4(A^3B^2C^2)$ le rette AC ed AB, che sono le trasformate dei punti B e C, che non sono punti base del $C_4(A)$.

Vediamo dunque che una trasformazione cremoniana può *creare* delle curve che si staccano dal sistema aggiunto. Ed inversamente una trasformazione cremoniana può *eliminare* una o

più di tali curve, riducendole a (intorni di) punti. Più precisamente possiamo dire: *Una trasformazione cremoniana T altera l'insieme delle curve che si staccano dall'aggiunto di un dato sistema* $|C|$:

a) mutando in punti le curve che si staccano dall'aggiunto di $|C|$ *e che sono fondamentali per la* T;

b) mutando in curve che si staccano dall'aggiunto del sistema (trasformato di) $|C|$ *gli intorni dei punti fondamentali per la* T, *che non sono base per* $|C|$.

In particolare: *se tutti i punti fondamentali per la* T *cadono fra i punti base di* $|C|$, *non si aggiunge nessuna nuova curva a quelle che si staccano dall'aggiunto del sistema* (trasformato di) $|C|$.

Ciò posto, è agevole costruire dei sistemi lineari $|C'|$, che posseggono curve 0, staccantisi come parti fisse dell'aggiunto $|C'|$. A tal uopo si può partire, come negli esempi sopra descritti, da un sistema $|C|$ che non possegga curve siffatte e operare su di esso con una trasformazione cremoniana T, che abbia qualche punto fondamentale che non sia base per $|C|$: a ciascuno di questi corrisponderà una curva (razionale) fondamentale, che si staccherà come parte fissa da tutte le aggiunte del sistema trasformato di $|C|$. Ora non è escluso che fra i punti fondamentali assunti per la T ve ne siano di infinitamente vicini sopra un ramo lineare o superlineare, e ciò darà origine a curve 0 *connesse*, che possono anche contenere componenti multiple, ciascuna delle quali risulterà una curva fondamentale *monovalente* per $|C|$ (cioè una curva che importa una sola condizione per il suo staccamento) (1).

(1) Consideriamo ad es. il sistema completo delle quartiche piane di un piano π e la trasformazione cremoniana del terz'ordine T, che muta nella rete delle rette di un piano π' una rete omaloidica di $C_3(O^2ABCD)$ del piano π, ove O, A, B, C, D sono da prima in posizione generica. Nel piano π' vi saranno cinque punti O', A', B', C', D', analoghi ad O, A, B, C, D, che saranno fondamentali per la trasformazione inversa della T: il sistema delle quartiche si muterà nel sistema delle $C_{12}(O'^3A'^2B'^2C'^2D'^2)$; all'intorno di O corrisponderà la conica fondamentale $C_2(O'A'B'C'D')$ ed agli intorni di A, B, C, D rispettivamente le rette fondamentali $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$, $O'D'$: come il

A priori non possiamo affermare che tutte le θ staccantisi come parti fisse dell'aggiunto di un sistema lineare $|C|$, possano crearsi nel modo sopra indicato; e possiamo soltanto assumere che l'insieme delle curve, staccantisi dall'aggiunto di $|C|$, si decomponga in generale in più curve fondamentali monovalenti, ognuna delle quali potrà essere composta anche con componenti multiple (1). Il caso più semplice è che vi sia una sola θ irriduci-

---

lettore verificherà immediatamente, tutte queste curve fondamentali si staccano dall'aggiunto del sistema $|C_{12}|$ e rappresentano delle curve θ irriducibili e distinte. Ma supponiamo che sul piano π il punto D si avvicini indefinitamente ad O. Al limite, sul piano π', la retta $O'D'$ verrà a far parte della conica $C_2(O'A'B'C'D')$, la quale si spezzerà così nella retta $O'D'$ ed in una retta contenente A', B', C'.

Le due rette $A'B'C'$ ed $O'D'$ danno luogo ad una curva θ *riducibile e connessa, monovalente*: invero staccando dal $|C_{12}|$ la $O'D'$ (o la $A'B'C'$) si stacca *di conseguenza* anche la $A'B'C'$ (o la $O'D'$). Se poi anche C si avvicina ad O e viene a succedere a D sopra un ramo *cuspidale*, nel piano π', A' e B' saranno infinitamente vicini ad O' in direzioni distinte, mentre mantenendosi D' a distanza finita da O', il punto C' cadrà infinitamente vicino a D'. Il sistema lineare delle $C_{12}(O'^8A'^4B'^4C'^4D'^4)$ ha la retta $O'D'$ come fondamentale; ma, staccata questa retta, rimane il sistema delle $C_{11}(O'^7A'^4B'^4C'^4D'^3)$, che per scaricamento, diviene il sistema delle $C_{11}(O'^8A'^3B'^3C'^3D'^4)$, e da questo sistema si stacca ancora una volta la $O'D'$, il sistema residuo riducendosi al sistema delle $C_{10}(O'^7A'^3B'^3C'^3D'^3)$. In questo esempio la retta $O'D'$ *contata due volte* è una curva θ *monovalente, dotata di parti multiple.*

(1) Si osservi che la proprietà di una θ irriducibile e semplice di essere fondamentale per il sistema $|C|$, dal cui aggiunto essa si stacca, non si estende senz'altro ad una θ, costituita da una curva λ, contata n (> 1) volte. Invero la curva λ risulta bensì fondamentale per il sistema $|C|$, ma, staccata da esso, può non staccarsi di conseguenza altre $n-1$ volte, ma solamente s volte, con $s < n-1$. Valga a dimostrare ciò l'esempio — indicato da G. CASTELNUOVO — delle curve C_8 d'ordine 8 e di genere due, passanti quattro volte per due punti A, B e doppiamente per 7 punti C_1, C_2, ..., C_7, essendo i 9 punti A, B, C_1, C_2, ..., C_7 i punti base d'un fascio di cubiche. L'aggiunto impuro (∞^1) è qui dato dalle $C_8(A^3B^3C_1C_2...C_7)$, dal quale si stacca la retta AB; rimane così il sistema ∞^1 delle $C_4(A^2B^2C_1C_2....C_7)$, il quale si riduce però alla retta AB ed al fascio di cubiche $C_2(ABC_1C_2...C_7)$. Si ha qui una curva θ costituita dalla AB contata *due* volte.

Ora, la retta AB è fondamentale per il $|C_8|$; ma, staccata da esso, dà

cibile, come si è supposto innanzi, ovvero che vi siano più θ distinte ed irriducibili; a questo secondo caso si estendono le considerazioni fatte innanzi: cioè valgono per ciascuna delle θ le proprietà *a*), *b*), ..., *g*).

Per il momento, adottiamo questa ipotesi semplificativa, per dimostrare come *l'ordine delle* θ *si possa diminuire fino a ridurle tutte a punti, ovvero a rette, uscenti da uno stesso punto.*

Il procedimento che serve all'uopo si basa sopra la possibilità di abbassare l'ordine di una θ con successive trasformazioni quadratiche, e ciò *senza introdurre altre curve* θ.

Fissiamo una θ, ad es. la θ_1. Essa sarà una curva d'ordine r e genere zero, che passa con molteplicità $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ per i punti base $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ di $|C|$, rimanendo determinata da questi punti, presi con le loro molteplicità. Senza alterare la generalità si può supporre $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_\nu$.

La θ_1 può essere considerata come un sistema regolare ∞^0 di curve razionali. Ora più avanti (cfr. Lib. II, cap. II, n. 9) consideriamo il problema della riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve razionali di dimensione $s \geq 1$. Tale riduzione si fonda sul fatto che per simili sistemi è:

$$r_1 + r_2 + r_3 > r,$$

se r è l'ordine del sistema ed r_1, r_2, r_3 le tre molteplicità massime. Seguendo passo per passo la dimostrazione ivi esposta il lettore non avrà nessuna difficoltà a dimostrare che la relazione soprascritta vale altresì per $s = 0$, cioè per le curve razionali, *isolate*, che sono determinate dai loro punti base presi con le loro molteplicità (il che porta che il grado delle nominate curve sia

---

un sistema $|C_7|$ costituito da $C_7(A^3 B^3 C_1^2 C_2^2 \ldots C_7^2)$, da cui la AB non si stacca di conseguenza.

Si osservi tuttavia che l'anzidetto sistema $|C_8|$ si può trasformare immediatamente in un sistema *privo* di curve θ. Basta all'uopo eseguire la trasformazione quadratica, che ha i punti fondamentali A, B, C. Il sistema $|C_8|$ diviene così un sistema di sestiche con otto punti doppi, che ha per aggiunto il fascio delle cubiche per gli otto punti nominati.

— 1). Possiamo quindi ritenere senz'altro che per la θ_1 la somma delle tre molteplicità massime superi l'ordine r:

$$r_1 + r_2 + r_3 > r .$$

Eseguiamo allora la trasformazione quadratica T, che ha i punti fondamentali A_1, A_2, A_3. Per la T il sistema $|C|$ verrà mutato in un nuovo sistema, che possiamo chiamare ancora $|C|$, per il quale il numero delle θ, che si staccano dall'aggiunto non è certamente aumentato, mentre si è abbassato l'ordine della θ_1: infatti i punti A_1, A_2, A_3 sono punti *base* del primitivo $|C|$ e l'ordine della (trasformata della) θ_1 è:

$$2r - r_1 - r_2 - r_3 < r .$$

Basta ora ripetere il ragionamento fatto, per abbassare ulteriormente l'ordine della θ_1; e, se due dei tre punti, che si devono prendere come punti base della trasformazione quadratica, non si avvicinano mai ad un terzo, in direzioni distinte o succedendosi sopra un ramo cuspidale (caso in cui viene a mancare la trasformazone riduttrice), il procedimento si arresta solamente quando la θ_1 possiede solamente due punti base, *riducendosi così ad una retta*; e ciò senza aumentare il numero complessivo delle θ.

Ma la θ_1 del sistema di partenza si può ridurre ad una retta, senza aggiungere altre curve θ, anche se ad un certo punto si incontri il caso d'eccezione già citato, in cui venga a mancare la trasformazione riduttrice. La dimostrazione di questo fatto è però abbastanza minuziosa, e — per non interrompere la catena delle nostre deduzioni — preferiamo dare solamente il concetto di essa, rimandando al ragionamento analogo che si fa per la riduzione dei sistemi lineari di curve di genere zero.

Anzitutto l'ordine della θ_1 può essere abbassato anche nel caso d'eccezione. Seguendo un metodo dovuto ad O. CHISINI [1],

---

[1] Il procedimento qui accennato è stato usato dal CHISINI per la riduzione di una rete omaloidica alla rete delle rette (cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. II, pag. 170-3). Esso si estende ai sistemi lineari di curve razionali (salvo un caso) come mostriamo più avanti: cfr. Lib. II, Cap. II, n. 9.

si ottiene l'abbassamento della θ_1 coll'eseguire un certo numero $2q$ di trasformazioni quadratiche, che hanno uno dei loro punti fondamentali nel punto di massima molteplicità O; e le prime q di queste trasformazioni non abbassano l'ordine della θ_1, ma semplificano la singolarità che la θ_1 ha in O. Le altre q trasformazioni abbassano successivamente l'ordine, in guisa che alla fine del procedimento l'ordine della θ_1 primitiva è effettivamente diminuito. Ora le prime q delle nominate trasformazioni quadratiche hanno uno dei loro punti fondamentali in un punto generico del piano; ne segue che dopo queste q trasformazioni quadratiche, è aumentato il numero complessivo delle θ; precisamente si trova che si sono aggiunte q rette, uscenti dal punto di massima molteplicità della θ_1. Ma le successive q trasformazioni fanno precisamente sparire ad una ad una queste q rette, in guisa che alla fine del procedimento è diminuito l'ordine della θ_1 e non è aumentato il numero complessivo delle θ.

Dunque possiamo dire: *Dato un sistema* $|C|$, *dal cui aggiunto si stacchino delle curve fisse* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\rho$ *distinte ed irriducibili, si può sempre trasformare il sistema in modo che la* θ_1 *diventi una retta, senza aumentare il numero complessivo delle* θ.

Ridotta la θ_1 ad una retta, su questa retta esistono due punti base A, B del sistema e possono presentarsi vari casi:

a) il sistema non ha altri punti base; in questo caso non esistono altre θ e la θ_1 non può essere eliminata con nessuna trasformazione.

Esempio: il sistema delle $C_n(A^2B^2)$ che ha come aggiunto il $C_{n-3}(A^2B^2) = C_{n-2}(A, B) + AB$;

b) il sistema ha altri punti base fuori di A e B, in modo che esista una trasformazione quadratica con i punti fondamentali in A, B ed un terzo punto base C del sistema. Eseguendo questa trasformazione quadratica la θ_1 scompare ed il numero delle θ è ridotto di una unità. Si potrà allora ripetere il procedimento tenuto per la θ_1, sulla θ_2.

c) Il sistema ha altri punti base, fuori di A e B, ma non esiste alcuna trasformazione quadratica, che abbia i punti fondamentali in tre punti base del sistema. In questo caso, B deve

essere infinitamente vicino ad $O \equiv A$ e tutti i punti base del sistema (e di eventuali altre θ) possono cadere solamente nei successivi intorni di O, che sarà il punto di moltèplicità massima per il sistema e per ciascuna θ.

Nel caso *c*) supponiamo che esista una seconda θ, θ_2. L'ordine della θ_2 potrà essere abbassato con una successione di trasformazioni quadratiche, le quali hanno tutte un punto fondamentale in O, e non alzano di conseguenza l'ordine della θ_1, che è una retta uscente da O. Si potrà quindi ridursi al caso che θ_1 e θ_2 siano due rette distinte uscenti da O. Lo stesso ragionamento si potrà ripetere su una terza eventuale θ e così via.

In conclusione, ammettendo l'ipotesi semplificativa delle θ distinte ed irriducibili, perveniamo al teorema:

Ogni sistema lineare, dal cui aggiunto si stacchino delle curve fisse $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\rho$, *può essere ridotto ad un sistema* $|C_n|$

1) *privo di curve* θ; *ovvero*

2) *dotato di una* θ *che sia una retta, congiungente due punti* A, B *di molteplicità* r, s *con* $r + s = n$, *ed il sistema* $|C_n|$ *non ha altri punti base che* A *e* B; *ovvero*

3) *dotato di* $\sigma \leq \rho$ *curve* θ, *ridotte a* σ *rette distinte congiungenti un punto* O *di molteplicità* (massima) $n - r$ *con dei punti* $A_1, A_2, \ldots, A_\sigma$ *di molteplicità* r, *infinitamente vicini ad* O *sulle* σ *rette predette.*

Questo teorema sussiste sempre anche se *si abbandoni l'ipotesi semplificativa* innanzi adottata, ammettendo dunque che il sistema $|C|$ possegga delle curve fondamentali θ monovalenti, anche composte con parti multiple. Ma non è facile di darne una dimostrazione nell'ordine delle idee precedenti. E sembra almeno che ciò richieda l'approfondimento di circostanze assai delicate. Il punto essenziale è di stabilire che *una curva fondamentale monovalente* θ *di* $|C|$, *che si stacchi da* $|C'|$ (e supponiamo pure connessa) *può sempre ridursi ad un punto ovvero ad un insieme di punti infinitamente vicini del piano.* Qui non è dato affermare — almeno a priori — che la detta θ abbia il genere zero ed il grado -1. Si può dire soltanto che « non abbassando il genere del sistema residuo $|C - \theta|$, deve avere il grado essenzialmente

negativo $-\nu$ ($\nu > 0$) ed il genere $\pi = -\nu + 1$ » (genere e grado venendo definiti in modo virtuale dalle molteplicità nei punti base di $|C|$); infatti, se indichiamo con ν il numero dei punti doppi che acquista una C, quando essa si spezza in una $C - \theta$ e nella θ, e con π il genere della θ, per la formula che dà il genere di una curva spezzata, sarà:

$$\text{gen. } C = \text{gen. } (C - \theta) + \pi + \nu - 1 ,$$

e quindi:

$$\pi = -\nu + 1 ; \tag{1}$$

e poichè, per il già citato principio di degenerazione, $\nu > 0$, sarà:

$$\pi \leq 0 .$$

D'altra parte da:

$$(C - \theta) \cdot \theta = \nu ,$$

deriva, tenuto conto che la θ è fondamentale per il sistema $|C|$:

$$(C - \theta) \cdot \theta = C \cdot \theta - \theta \cdot \theta = \nu ,$$

ossia:

$$\theta \cdot \theta = -\nu ; \tag{2}$$

e quindi la θ ha grado essenzialmente negativo.

Come si è detto, non essendo necessariamente $\nu = 1$, viene meno il procedimento di riduzione indicato innanzi. Tuttavia si può indicare ancora la possibilità di una riduzione della θ mediante trasformazioni quadratiche, fondata su ciò che *la curva* θ *o una parte qualunque di essa non possiede mai aggiunte successive d'ordine* $2n - 3i$ *e d'indice* i ($i \geq 1$) (intendendosi qui per aggiunte d'indice i delle curve passanti $h - i$ volte per ogni punto h-*plo* della θ, che sia anche punto base di $|C|$; ciò si giustifica osservando che altrimenti l'aggiunto puro di $|C|$ coinciderebbe con uno dei suoi aggiunti successivi.

La mancanza di successive aggiunte a θ porta [1] che vi siano tre punti di molteplicità elevate la cui somma supera l'ordine

---

[1] Cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. II, pag. 188.

della θ: la quale si può così generalmente abbassare con una trasformazione quadratica; ma questo abbassamento viene a mancare se i tre punti si trovino sopra una retta, ciò che non può essere escluso, ove la θ contenga questa retta come multipla.

Queste sono le difficoltà principali che si incontrano per effettuare la riduzione di una θ. Fortunatamente si può riuscire allo scopo seguendo un'altra via, che qui ci limitiamo ad accennare. Occorre anzitutto riconoscere che sussiste ancora la proprietà g) cioè: *una θ fondamentale monovalente di $|C|$, che si stacchi come parte fissa dall'aggiunto $|C'|$* (supposto di genere >1) *è fondamentale per l'aggiunto puro $|C'|$ e si stacca anche come parte fissa dall'aggiunto di questo.*

Anzitutto se la θ si stacca come parte fissa da $|C'|$, i sistemi lineari $|C|$ e $|C-\theta|$ hanno lo stesso genere p e quindi le curve di $|C-\theta|$, come le C generiche, segano ancora le $\bar{C}'$ in $2p-2$ punti variabili; e di qui segue che la θ è fondamentale per $|C'|$, in forza della relazione:

$$(C-\theta)\cdot C' = C\cdot C' - \theta\cdot C' = 2p-2\,,$$

che, essendo

$$C\cdot C' = 2p-2\,,$$

porta:

$$\theta\cdot C' = 0\,.$$

In secondo luogo le relazioni (1) e (2) sopra stabilite

$$\pi = -\nu + 1\,, \quad \theta\cdot\theta = -\nu\,,$$

costituiscono non solo le condizioni *necessarie*, perchè la θ, fondamentale per $|C|$, si stacchi come parte fissa da $|C'|$, ma anche *sufficienti*; perchè codeste condizioni portano che il genere di $|C-\theta|$ sia uguale al genere di $|C|$ e quindi che i due sistemi abbiano lo stesso aggiunto puro.

Siccome le relazioni anzidette dipendono dai caratteri intrinseci della θ, almeno finchè non si perdano dei punti base di $|C|$ sopra di essa, così essa dovrà anche staccarsi dall'aggiunto puro di $|C'|$, fatta eccezione per il caso in cui la θ abbia come

$(i-1)$-*plo* un punto *i-plo* di $|C|$, che dà luogo ad un'avvertenza analoga a quella esposta a pag. 213, su cui non giova qui insistere.

Ciò posto, la riduzione delle θ appartenenti ad un sistema lineare $|C|$ si riconduce in generale da $|C|$ al suo aggiunto puro e così successivamente. Con questo procedimento di aggiunzioni successive si perviene infine a sistemi lineari di curve di genere zero ed uno (ovvero a sistemi composti con curve del detto genere); e pertanto la riduzione di codesti sistemi, che spieghiamo più avanti (cfr. Lib. II, cap. II e III, nn. 9 e 13) permette di giustificare la riduzione delle θ ai tipi indicati nell'enunciato precedente: dove le componenti multiple delle θ ed anche le θ monovalenti riducibili si vedono eliminate.

47. Sui tipi delle superficie razionali del quart'ordine a sezioni di genere tre.

Ritorniamo ora alla questione dei tipi delle superficie razionali del quart'ordine a sezioni di genere tre. Vogliamo dimostrare che la classificazione da noi data è completa e pertanto che *ogni superficie razionale del quart'ordine a sezioni di genere tre appartiene ad uno dei quattro tipi seguenti*:

a) la superficie dotata di un punto triplo, rappresentata da un sistema lineare sovrabbondante di $C_4(A_1A_2...A_{12})$;

b) la superficie con tacnodo $F_4^{(1)}$ *rappresentata da un sistema lineare sovrabbondante di* $C_6(A_1^2A_2^2 ... A_7^2A_8A_9A_{10}A_{11})$;

c) la superficie $F_4^{(2)}$ *di* NOETHER, *dotata di un punto doppio uniplanare, per il quale passa un fascio di sezioni piane razionali, rappresentata da un sistema lineare sovrabbondante di* $C_7(A^3B_1^2B_2^2 ... B_9^2)$;

d) la superficie $F_4^{(3)}$ *di* NOETHER, *dotata di un punto doppio uniplanare, per il quale passa un fascio di sezioni piane spezzate in una retta ed in una cubica ellittica, rappresentata da un sistema lineare sovrabbondante di* $C_9(A_1^3A_2^3 ... A_8^3B_1^2B)$.

Ricordiamo inoltre che per ciascuno dei sistemi rappresentativi *a*), *b*), *c*), *d*) esiste una *cubica ellittica fondamentale*, che con-

tiene tutti i punti base del sistema e che rappresenta l'intorno del punto singolare della superficie.

Ora i tipi anzidetti sono stati costruiti ammettendo l'ipotesi semplificativa che non si stacchino parti fisse dall'aggiunto del sistema rappresentativo. Se non si ammette la detta ipotesi, può sorgere il dubbio sull'esistenza di qualche altro tipo. Per escludere questo dubbio si possono percorrere diverse vie. Anzitutto si presenta come naturale di valersi della riduzione delle curve fondamentali 0 le quali si staccano dall'aggiunto di un sistema lineare, da noi esposta al n. precedente. Se si segue questa via, si è condotti ad incontrare la presenza delle 0 soltanto nel caso, in cui le sezioni piane per il punto doppio O della F_4 e per un punto doppio O', infinitamente vicino ad O, siano razionali: onde si ricade sul tipo $F_4^{(2)}$ di NOETHER.

In secondo luogo la ricerca dei tipi delle superficie razionali del quart'ordine con un solo punto doppio O si riconduce alla determinazione dei tipi di piani doppi, su cui la superficie stessa viene rappresentata per proiezione da O: questi piani doppi sono caratterizzati dalla curva di diramazione, che può essere del quarto o del sest'ordine e, nel secondo caso, deve possedere un punto quadruplo o due punti tripli infinitamente vicini: così come spiegheremo diffusamente nel Lib. II, cap. V. Alla rete delle rette di codesti piani doppi corrisponde, per una trasformazione [1, 2] una rete di cubiche piane con 7 punti base, ovvero una rete di curve di genere due, costituita da quartiche C_4 con un punto doppio e 10 punti semplici, appartenenti ad una cubica, o da sestiche con 8 punti doppi e 2 punti semplici, parimenti su di una cubica; e tali reti sono i sistemi aggiunti ai sistemi $| C |$ di genere tre e grado quattro, che costituiscono i nostri tipi. Precisamente su questa analisi dei piani doppi si è basato M. NOETHER [1] per affermare che la sua classificazione delle superficie razionali del quart'ordine con un punto singolare riesce esauriente. Ed anche

---

[1] Cfr. M. NOETHER: *Über eine Classe von auf die einfache Ebene abbildbaren Doppelebenen* e *Über die rationalen Flächen vierter Ordnung*; «Math. Ann.», Bd. XXXIII, 1889.

oggi questa sembra essere la via più semplice per giungere a tale scopo, superando le difficoltà, che si presentano per altre vie (1).

Infine si può percorrere una terza via, cercando di dimostrare direttamente che *ogni superficie razionale del quart'ordine con un solo punto singolare rientra, come caso particolare, in uno dei quattro tipi a), b), c), d) sopra enumerati.*

Consideriamo un sistema lineare irriducibile e semplice $|C_n|$, ∞^3, di genere tre e grado quattro, la cui serie caratteristica sia dunque la g_4^2 canonica; e siano C'_{n-3-s} curve del sistema ∞^2 aggiunto puro. Per un G_4, gruppo caratteristico del sistema $|C_n|$, passa una C' ed un fascio di curve C, che non hanno con essa nessuna intersezione variabile. Costringendo una C a contenere un altro punto della C' si avrà una curva spezzata $C_n = C'_{n-3-s} + \Omega_{3+s}$, dove la Ω sarà una curva fondamentale monovalente per $|C_n|$: infatti la Ω non ha intersezioni con le C, fuori dei punti base, ed

(1) I due tipi di reti di genere e grado due, dati dalle $C_4(O^2 A_1 A_2 ... A_{10})$ e dalle $C_6(A_1^2 A_2^2 ... A_8^2 B_1 B_2)$ con i punti base su di una cubica, erano stati già trovati, prima della ricerca di NOETHER, da V. MARTINETTI (cfr. *Sopra alcuni sistemi lineari di curve piane algebriche di genere due;* « Rend. Circ. Mat. di Palermo », T. 1, 1887), il quale si era proposto la determinazione di tutti i tipi di reti sovrabbondanti di genere due, d'ordine minimo rispetto alle trasformazioni cremoniane. Il MARTINETTI ha trovato solamente le due reti anzidette, e ciò confermava, secondo lo stesso NOETHER, la compiutezza della enumerazione delle superficie razionali del quart'ordine con punto singolare (abbassante di uno il genere delle sezioni piane per esso). Tuttavia l'analisi del MARTINETTI non è esauriente, essendovi un terzo tipo di rete sovrabbondante di genere due e grado due, irriducibile ai precedenti, che fu scoperto da M. DE FRANCHIS (cfr. *Sulle reti sovrabbondanti di curve piane di genere 2;* « Rend. Circ. Mat. di Palermo », T. 13, 1899). Si tratta (cfr. Lib. II, cap. III, n. 16) di una rete di quintiche $C_5(A^3 B^2 C_1 C_2 ... C_{10})$ dotata di un punto triplo A, al quale è infinitamente vicino un punto doppio B; inoltre dal punto triplo esce un ramo lineare d'inflessione (di classe 2) sul quale si susseguono dieci punti semplici $C_1, C_2, ..., C_{10}$. Per costruire la rete basta combinare linearmente una $C_5(A^3 B^2 C_1 C_2)$, con A, C_1, C_2 susseguentisi su una retta per A, con il fascio delle C_5 spezzate nella AC_1 contata quattro volte ed in una retta generica per A. Si può però riconoscere che la nominata rete di quintiche non proviene come aggiunta da nessun sistema lineare d'ordine più alto e quindi non dà luogo a nuove F_4 razionali.

appartiene ad ∞^2 curve C, spezzate nella Ω e nelle C'_{n-3-s}. La *curva* Ω *è di genere uno,* avendo come unica curva aggiunta la θ_s d'ordine s, che costituisce la parte fissa del sistema aggiunto (impuro) $|C'_{n-3}|$: effettivamente, se, com'è lecito supporre, il sistema $|C_n|$ non possiede punti base infinitamente vicini, ogni punto base *i-plo* per $|C_n|$ ha la molteplicità *effettiva* $i-1$ per l'aggiunto impuro $|C'_{n-3}|$ e, se è *h-plo* per Ω, la molteplicità $i-h$ per le C'_{n-3-s}; ne segue che il nominato punto base sarà precisamente $(h-1)$-*plo* per θ_s. D'altra parte *la* Ω, *d'ordine* $3+s$, *deve mancare delle aggiunte successive d'ordine* $3+s-3i$ *e d'indice* i $(i>1)$, cioè non devono esistere (per $i>1$) delle curve d'ordine $3+s-3i$, passanti $h-i$ volte per ogni punto *h-plo* della Ω (ed altrettanto si può dire di ogni componente della Ω, quando Ω risulti riducibile): se invero esistesse per esempio una seconda aggiunta Ω'', le curve $\Omega''+C'_{n-3-s}$ sarebbero seconde aggiunte delle C e quindi il secondo aggiunto puro coinciderebbe col primo aggiunto puro, ciò che si riconosce impossibile.

In quanto segue noi ammetteremo che la Ω sia irriducibile, o almeno contenga una componente irriducibile, ω, di genere uno. In quest'ipotesi la ω si può ridurre birazionalmente ad una cubica e dopo ciò riesce facile mostrare che un sistema $|C_n|$ per cui la ω sia una cubica rientra come caso particolare in uno dei sistemi *a*), *b*), *c*), *d*).

D'altronde la nostra analisi si estende a qualsivoglia sistema $|C_n|$ se si ammette che, per una variazione opportuna dei punti base di $|C_n|$, possa ottenersi una Ω (o almeno una ω) irriducibile. E quindi per la dimostrazione della nostra tesi giova *ammettere che una curva di genere uno del piano, priva di aggiunte successive, possa ritenersi come caso particolare di una curva irriducibile,* la quale si ottenga dalla precedente variando con continuità i suoi punti multipli (a prescindere dai punti di connessione delle parti, che sono da ritenersi virtualmente inesistenti).

Nell'ordine di idee, in cui qui ci poniamo, con l'ammissione precedente è anche lecito assumere non solo che la ω non possegga punti multipli infinitamente vicini (che d'altronde potrebbero

o una delle sue trasformate che si ottengono con le trasformazioni quadratiche riduttive, di cui ora parleremo, non abbia mai tre punti multipli in linea retta, cosicchè nel processo riduttore che mettiamo in opera non si presentino mai punti multipli infinitamente vicini, ai quali si connettono, come è noto, particolari difficoltà nella riduzione.

Ciò posto, la possibilità di trasformare la ω in una cubica dipende dall'esistenza di tre punti multipli di molteplicità sufficientemente alta, perchè la trasformazione quadratica, che possiede i detti tre punti come fondamentali, abbassi l'ordine della ω. Per dimostrare l'esistenza dei detti tre punti, indichiamo con l l'ordine della ω, con O il suo punto di massima molteplicità r, e dimostriamo anzitutto che, *se mancano le ultime aggiunte alla* ω, esiste un valore di i, $1 \leq i \leq \left[\frac{l}{3}\right]$ (1), tale che il punto O deve essere $(s-1)$-*plo* o s-*plo* per le aggiunte alla ω d'ordine $s = l - 3i$ e di indice i, avverandosi l'una o l'altra eventualità a seconda che $l - r$ sia dispari o pari.

Le successive aggiunte alla ω sono d'ordine $l - 3i$ ed hanno il punto O come $(r-i)$-*plo*. Se i cresce d'una unità la quantità $(l-3i)-(r-i)$ diminuisce di due unità, giacchè $l-3i$ diminuisce di tre ed $r-i$ di uno. Si tratta di provare che per un certo valore di i, $1 \leq i \leq \left[\frac{l}{3}\right]$, è $(l-3i)-(r-i) = 1$ o 0. All'uopo distinguiamo i tre casi a cui dà luogo l'intero l, rispetto al modulo tre:

$$\alpha)\ l = 3m, \qquad \beta)\ l = 3m+1, \qquad \gamma)\ l = 3m+2.$$

α) Se $l = 3m$, $\left[\frac{l}{3}\right] = m$ e, se la ω non è già una cubica, sarà $m > 1$. Poichè, per ipotesi, non esistono le aggiunte d'ordine zero e d'indice m, la massima molteplicità r non può essere inferiore od uguale ad m: sarà quindi $r > m$. Per $i = 1$ la quantità

(1) Con $\left[\frac{l}{3}\right]$ indichiamo, conformemente all'uso comune, il massimo intero

$(l-3i)-(r-i)=(3m-3i)-(r-i)$ vale $3m-r-2$ ed è quindi ≥ 0; per $i=m$ la detta quantità vale invece $-(r-m)$ ed è quindi negativa. Poichè essa cala di due unità per volta, al variare di i tra 1 ed m, essa sarà certo 1 o 0 per un certo valore di i. Precisamente essa diventerà 1 se $l-r$ è dispari e 0 se $l-r$ è pari.

β) Se $l=3m+1$, $\left[\frac{l}{3}\right]=m$, e sarà $m>1$, a meno che la ω non sia una quartica con due punti doppi, che si può ricondurre ad una cubica, mediante la trasformazione quadratica, che ha i punti fondamentali nei due punti doppi ed in un punto semplice. Nel nostro caso mancano, per ipotesi, le curve aggiunte d'indice m, che sarebbero delle rette. Ne segue che la massima molteplicità r non può essere inferiore a $m+1$, ossia $r>m$. Ora la quantità $(l-3i)-(r-i)=(3m+1-3i)-(r-i)$ è ≥ 0 per $i=1$, mentre per $i=m$ vale $1-(r-m)$ ed è quindi ≤ 0. Si conclude dunque come nel caso α).

γ) Se $l=3m+2$, $\left[\frac{l}{3}\right]=m$, e si potrà supporre $m>1$, a meno che non sia $l=5$. In questa ipotesi la ω sarebbe una quintica dotata di cinque punti doppi ovvero di un punto triplo e di due punti doppi. In entrambi i casi essa si può mutare in una cubica con una trasformazione cremoniana. Supponiamo dunque $m>1$. Poichè non debbono esistere coniche aggiunte d'indice m, la massima molteplicità r sarà $>m$. Ma allora, come prima, la quantità $(l-3i)-(r-i)=(3m+2-3i)-(r-i)$ è ≤ 0 per $i=1$; invece, per $i=m$, la detta quantità è ≥ 1. Si può dunque ancora concludere come nei casi precedenti.

Se quindi la curva ellittica ω, d'ordine l, non possiede le ultime aggiunte, certamente il punto O dovrebbe essere $(s-1)$-*plo* o s-*plo* per certe aggiunte d'ordine $s=l-3i$ e d'indice i, $1\leq i\leq\left[\frac{l}{3}\right]$.

Distinguiamo due casi:

α) $\qquad i=1,$

a) Se $i = 1$, le prime aggiunte d'ordine $l-3$ sono del tipo $C_s(O^{s-1})$ o $C_s(O^s)$, ossia del tipo $C_{l-3}(O^{l-4})$ o $C_{l-3}(O^{l-3})$. Per la ω il punto O sarà quindi $(l-3)$-*plo* o $(l-2)$-*plo*. Se la ω è una $C_l(O^{l-3})$ essa possiederà ancora t punti tripli e d punti doppi, in guisa da risultare ellittica. I numeri t e d saranno dunque legati dalla relazione:

$$\frac{(l-1)(l-2)}{2} - \frac{(l-3)(l-4)}{2} - 3t - d = 1,$$

ossia:

$$3t + d = 2l - 6.$$

Se la ω possiede un punto triplo, l'ordine della ω si può abbassare con una trasformazione quadratica, che abbia come punti fondamentali il punto $(l-3)$-*plo*, il punto triplo ed un punto semplice. Se invece la ω possiede solo punti doppi sarà $t = 0$; ma, dalla relazione precedente, risulta, poichè si può supporre $l \geq 4$, $d \geq 2$. Dunque la ω possiede certo almeno due punti doppi ed il suo ordine si può abbassare con la trasformazione quadratica che ha i punti fondamentali nel punto $(l-3)$-*plo* ed in due punti doppi.

Se poi la ω è del tipo $C_l(O^{l-2})$, per essere ellittica essa dovrà possedere altri $l-3$ punti doppi; e quindi, poichè $l \geq 4$, almeno un punto doppio. L'ordine della ω si abbassa allora operando la trasformazione quadratica, che ha i punti fondamentali nel punto $(l-2)$-*plo*, in un punto doppio ed in un punto semplice.

b) Se $i > 1$, le aggiunte alla ω d'ordine $s = l - 3i$ e passanti per O con la molteplicità s o $s-1$ per ipotesi, *non* esistono. Ciò significa che esisteranno altri punti multipli della ω, i quali imporranno delle condizioni alle dette aggiunte $C^{(i)}$, in guisa da rendere impossibile la loro esistenza. Tali punti saranno almeno *due*: se invero oltre ad O, esistesse un unico punto multiplo O_1 che imponesse condizioni alle $C^{(i)}$, la molteplicità di O_1 per le $C^{(i)}$ sarebbe al più s; e quindi esisterebbe certamente almeno una $C^{(i)}$, formata dalla retta $O\,O_1$ contata s volte. Dunque vi sono

dizioni alle $C^{(i)}$. Se $r^{(i)}$, $r_1^{(i)}$, $r_2^{(i)}$ sono le molteplicità delle $C^{(i)}$ in O, O_1, O_2, si avrà evidentemente (poichè $r^{(i)} = s$ od $s-1$):

$$r^{(i)} + r_1^{(i)} + r_2^{(i)} > s .$$

Ma, indicando con r, r_1, r_2 le molteplicità della ω in O, O_1, O_2, è:

$$\begin{aligned} r &= r^{(i)} + i \\ r_1 &= r_1^{(i)} + i \\ r_2 &= r_2^{(i)} + i \\ l &= s + 3i ; \end{aligned}$$

e quindi, tenuto conto della disuguaglianza precedente,

$$r + r_1 + r_2 > l .$$

Dunque l'ordine della ω viene abbassato dalla trasformazione quadratica, che ha i punti fondamentali O, O_1, O_2.

Riepilogando, *la curva ellittica irriducibile* ω, *d'ordine* l *e priva delle successive aggiunte dell'ordine* $l - 3i$ *e d'indice* i $(i > 1)$, *con i punti multipli in posizione generica, può essere abbassata d'ordine con successive trasformazioni quadratiche, fino a ridursi ad una cubica.*

Sia ora $| C |$ un sistema lineare ∞^3, irriducibile e semplice, di genere tre e grado quattro, per il quale la curva fondamentale ω sia ridotta (con il procedimento precedente o comunque in altro modo) ad una cubica C_3. È facile provare che *il sistema* $| C |$ *è caso particolare di un sistema riducibile ad uno dei tipi a), b), c), d).*

Anzitutto *il sistema* $| C |$ *non può avere punti base fuori della cubica fondamentale* C_3. Supponiamo invero che il sistema $| C |$ possieda dei punti base di molteplicità r_1, r_2, ..., r_s sulla C_3 e, se possibile, dei punti di molteplicità s_1, s_2, ..., s_t fuori della C_3. Se n è l'ordine di $| C |$ dovrà essere, esprimendo che il sistema $| C |$ è di grado quattro e genere tre:

$$\begin{aligned} & n^2 - \Sigma r_i^2 - \Sigma s_j^2 = 4 \\ & n^2 - 3n - \Sigma r_i^2 + \Sigma r_i - \Sigma s_j^2 + \Sigma s_j = 4 , \end{aligned}$$

da cui:

Ma la C_3 è fondamentale per il sistema $|C|$; e quindi sarà:

$$3n - \Sigma r_i = 0 .$$

Ne segue:

$$\Sigma s_j = 0 ,$$

ossia $s_j = 0$: il sistema lineare $|C|$ non possiede dunque dei punti base fuori della C_3.

Ciò premesso, se il sistema $|C|$ possiede s punti base (sulla C_3) di molteplicità $r_1, r_2, \ldots, r_s$, si otterrà un sistema dello stesso tipo di $|C|$, fissando *ad arbitrio* sulla C_3 $s-1$ punti $A_1, A_2, \ldots, A_{s-1}$ con le molteplicità $r_1, r_2, \ldots, r_{s-1}$, e determinando di conseguenza un ultimo punto base A_s di molteplicità r_s, come punto r_s-*plo* della g_h^{h-1} $(h = r_s)$, determinata sulla C_3 dalle $C_n(A_1^{r_1} A_2^{r_2} \ldots A_{s-1}^{r_{s-1}})$. A questo sistema *generico*, $|C|$, per il quale gli s punti base sono ovviamente tutti distinti ed anzi $s-1$ di essi possono essere dati ad arbitrio sulla C_3, ci riferiremo nel seguito: il sistema $|C|$ da cui abbiamo preso le mosse è un caso particolare di questo sistema.

Ora, il sistema $|C|$ potrebbe possedere, oltre alla cubica fondamentale C_3, altre curve fondamentali θ, le quali siano costituite da parti irriducibili di genere zero e di grado ≤ -1 (genere e grado essendo valutati rispetto al gruppo base di $|C|$) (1). Le curve fondamentali, irriducibili, che sono razionali e di grado -1, possono essere eliminate tutte con successive trasformazioni quadratiche. Invero abbiamo già osservato (cfr. pag. 217) che per una curva, razionale e di grado -1 (cioè determinata dai suoi punti base), la somma delle tre molteplicità più elevate è maggiore dell'ordine della curva: ma i tre punti multipli di molteplicità più elevata della curva corrispondono a tre punti base del sistema $|C|$ e possono quindi essere presi come punti fondamentali di una trasformazione quadratica (non degenere), ridut-

(1) Giova precisare che una parte irriducibile di una θ risulta di genere zero, rispetto al gruppo base di $|C|$, perchè essa non possiede le prime aggiunte (cfr. num. 221) e perchè il genere di una curva irriducibile non può

trice dell'ordine della curva; la nominata trasformazione quadratica trasforma inoltre la cubica C_3 in una nuova cubica e non introduce altre curve θ. Con successive trasformazioni quadratiche la θ o la componente di essa che si è presa in considerazione può dunque essere ridotta ad una retta congiungente due punti base A, B di $|C|$, di molteplicità rispettive r, s, con $r+s=n$; e con un'ultima trasformazione quadratica, che ha i punti fondamentali in A, B ed un terzo punto base (1) di $|C|$ può essere ridotta ad un punto. Con ragionamento analogo si eliminano tutte le altre curve fondamentali di grado -1.

Si perviene così ad un sistema $|C|$, il quale (a priori almeno) potrebbe possedere solamente delle curve fondamentali irriducibili, razionali e di grado ≤ -2. Mostriamo che di fatto queste curve qui non si presentano: cioè il procedimento che serve ad eliminare le curve fondamentali di grado -1, vale anche ad eliminare contemporaneamente le curve di grado <-1, almeno per i sistemi $|C|$ aventi sulla C_3 punti base generici.

All'uopo indichiamo con $\overline{\theta}$ la componente, che prendiamo in considerazione, ed incominciamo coll'osservare che la $\overline{\theta}$ (supposta esistente) incontra la cubica fondamentale C_3 soltanto in punti base per $|C|$. Invero se indichiamo con $h_i\,(\geq 0)$ $(i=1, 2, \ldots, s)$ la molteplicità della θ nel punto base A_i di $|C|$, con m l'ordine della $\overline{\theta}$, e supponiamo che la θ incontri la C_3, oltre che nei punti base di $|C|$, in l punti (semplici), avremo:

$$3m = \Sigma h_i + l.$$

Inoltre, esprimendo che la $\overline{\theta}$ è di genere zero e di grado ≤ -2 (rispetto al gruppo dei punti base di $|C|$), avremo:

$$m^2 - 3m + 2 - \Sigma h_i^2 + \Sigma h_i = 0,$$

$$m^2 - \Sigma h_i^2 \leq -2,$$

(1) Il sistema $|C|$ non può possedere soltanto i due punti base A e B. In questa ipotesi, esprimendo il grado ed il genere di $|C|$ si avrebbe:

$$n^2 - r^2 - s^2 = 4, \qquad n^2 - 3n - r^2 + r - s^2 + s = 4$$

ossia:

$$3n - (r+s) = 0$$

da cui

$$3m - \Sigma h_i \leq 0 \text{ (1)},$$

ossia:

$$l \leq 0,$$

da cui:

$$l = 0.$$

L'osservazione fatta porta che i punti $A_i (i = 1, 2, ..., s)$ della C_3, presi con le molteplicità h_i, appartengono alla serie lineare individuata dal gruppo:

$$h_1 A_1 + h_2 A_2 + ... + h_s A_s .$$

Ora due casi sono possibili: o qualcuna delle h_i è nulla, ossia vi è qualche punto base di $| C |$ per cui la $\overline{\theta}$ non passa, ovvero, per qualunque i, è $h_i \neq 0$ cioè la $\overline{\theta}$ contiene *tutti* i punti base di $| C |$.

La prima eventualità si esclude subito, perchè essa porta ad un legame tra $t \leq s - 1$ dei punti A_i, e ciò è assurdo, perchè $s - 1$ dei punti A_i possono essere assunti ad arbitrio.

Nel secondo caso i punti $A_i (i = 1, 2, ..., s)$ presi con le molteplicità h_i, appartengono ancora alla serie lineare individuata dal gruppo $h_1 A_1 + h_2 A_2 + ... + h_s A_s$; ma, d'altra parte, questi stessi punti, presi con le molteplicità r_i, appartengono alla serie individuata dal gruppo $r_1 A_1 + r_2 A_2 + ... + r_s A_s$. Esprimendo l'appartenenza ad una serie lineare come una relazione di congruenza (teorema d'ABEL) si potrà porre:

$$(1) \qquad \begin{aligned} r_1 A_1 + r_2 A_2 + ... + r_s A_s &\equiv 0 \\ h_1 A_1 + h_2 A_2 + ... + h_s A_s &\equiv 0 \text{ (2)}. \end{aligned}$$

---

(1) Questa relazione, non potendo essere $3m - \Sigma h_i < 0$, porta che $3m - \Sigma h_i = 0$, e quindi $m^2 - \Sigma h_i^2 = -2$: dunque, se la curva $\overline{\theta}$ esiste, essa di fatto non può essere che di grado -2.

(2) Se si vuole introdurre sulla cubica ellittica C_3 l'integrale ellittico di prima specie u, basterà nelle relazioni che precedono immaginare scritto al posto del punto A_i il valore $u(A_i)$ che l'integrale ellittico u assume nel punto A_i. Si suppone naturalmente, come è d'uso, che l'estremo inferiore dell'integrale u sia un flesso, in modo che per la g_3^2 segnata sulla C_3 dalle

Ora due ipotesi sono possibili:

a) le due congruenze (1) sono distinte,

ovvero

b) le due congruenze (1) sono identiche.

Nell'ipotesi *a*) è possibile ricavare dalle (1), per eliminazione, una relazione fra i soli punti A_1, A_2, ..., A_{s-1}; e ciò è assurdo perchè i punti A_1, A_2, ..., A_{s-1} possono essere dati ad arbitrio sulla cubica C_3.

Nell'ipotesi *b*) si deduce dalle (1):

$$r_i = \rho h_i \qquad (i = 1, 2, ..., s).$$

Ma è:

$$3m = \Sigma h_i ,$$

$$3n = \Sigma r_i ,$$

e quindi:

$$3n = \rho \Sigma h_i = 3\rho m ;$$

onde:

$$n = \rho m .$$

Ma allora:

$$n^2 - \Sigma r_i^2 = \rho^2 m^2 - \rho^2 \Sigma h_i^2 = \rho^2 (m^2 - \Sigma h_i^2) ;$$

e, tenuto conto che il grado della $\overline{\theta}$ è ≤ -2,

$$n^2 - \Sigma r_i^2 \leq -2\rho^2 < 0 .$$

E ciò è un assurdo perchè $n^2 - \Sigma r_i^2 = 4$, essendo il grado del sistema $| C |$.

Pertanto *non esiste una curva fondamentale* $\overline{\theta}$, *razionale e di grado* ≤ -2, *la quale contenga gli* s *punti base del sistema* $| C |$ *privo di curve fondamentali di grado* -1 *almeno quando* $s - 1$ *di questi punti siano dati ad arbitrio sulla* C_3.

Da quanto precede segue che un sistema lineare ∞^3, $| C |$, irriducibile e semplice, di genere tre e grado quattro, rientra come caso particolare in un sistema, che è trasformabile in guisa che il trasformato possieda una cubica ellittica fondamentale C_3 (sulla quale giacciono tutti i punti base) e sia privo di curve fondamen-

tali θ. Il primo aggiunto a $|C|$ coincide con l'aggiunto puro e, ragionando come a pag. 183, si trova che il suo genere π è ≤ 2. Se $\pi = 0$, o 1 rimane così giustificata l'ipotesi semplificativa, che ci ha condotto a costruire i sistemi lineari corrispondenti ai primi due dei tipi di superficie *a*), *b*), *c*), *d*) elencati a pag. 223. Se invece $\pi = 2$, il primo aggiunto a $|C|$ è una rete di genere e grado due, la quale a sua volta possiede un aggiunto ∞^1; ed — a priori — potrebbe sorgere il dubbio che nel passaggio dal $|C'|$ al $|C''|$ si presentino ancora delle θ. Accenniamo brevemente come si possano eliminare anche queste θ.

Il sistema $|C|$ sia d'ordine n e siano $A_1, \ldots, A_s$ i suoi punti base (che staranno sulla C_3), con le molteplicità $r_1, \ldots, r_s$. Il sistema $|C'|$ sarà allora costituito da curve $C_{n-3}(A_1^{r_1-1} \ldots A_s^{r_s-1})$. Tenuto conto della formula che dà il genere di una curva spezzata, scritta a pag. 183, essendo le C_{n-3} di genere 2, si trova che le C_{n-3} intersecano la C_3, fuori di $A_1, \ldots, A_s$, in *un* punto, B. Il punto B è fisso e costituisce così un punto base semplice di $|C'|$, che non è un punto base di $|C|$. Ciò posto, imitando il ragionamento già fatto per il sistema $|C|$, si può dimostrare facilmente che il $|C'|$ non possiede punti base fuori della C_3, per guisa che il gruppo dei punti base di $|C'|$ è costituito da $A_1, \ldots, A_s, B$; ed il punto B è certamente *semplice*. Se ora dall'aggiunto a $|C'|$ si staccano delle curve θ, queste non possono passare per B (nè, se vi sono, per gli altri punti base semplici di $|C|$), giacchè in questa ipotesi l'aggiunto impuro a $|C'|$ avrebbe il punto B come semplice, mentre in realtà esso deve avere la molteplicità zero. Ne viene che ogni parte irriducibile, $\overline{\theta}$, di una θ sarà:

α) fondamentale per il $|C'|$,

β) di genere zero, rispetto al gruppo di punti $A_1, \ldots, A_s$,

γ) di grado ≤ -1, sempre rispetto al gruppo $A_1, \ldots, A_s$.

Queste proprietà, indicando ancora con m l'ordine della $\overline{\theta}$ e con $h_i (\geq 0)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ la sua molteplicità in A_i, si traducono nelle relazioni:

α') $m(n-3) - \Sigma h_i(r_i - 1) = 0$,

β') $m^2 - 3m + 2 - \Sigma h_i^2 + \Sigma h_i = 0$,

γ') $m^2 - \Sigma h_i^2 \leq -1$.

La β'), tenuto conto della γ'), dà:

$$3m - \Sigma h_i \leq 1.$$

Due ipotesi sono dunque possibili a secondo che sia $3m - \Sigma h_i = 0$ o 1. Se $3m - \Sigma h_i = 1$, la β') dà $m^2 - \Sigma h_i^2 = -1$; la $\bar{\theta}$ è così di grado -1 e si può eliminare con una successione di trasformazioni quadratiche, come è stato descritto precedentemente: e poichè i punti fondamentali delle trasformazioni quadratiche cadono tra i punti base di $|C|$ e di $|C'|$ non si generano nuove curve θ, nè per $|C|$ nè per $|C'|$.

Se invece $3m - \Sigma h_i = 0$, dalla α') si ricava:

$$mn - \Sigma h_i r_i = 0,$$

mentre la β') dà:

$$m^2 - \Sigma h_i^2 = -2.$$

Si vede così che la θ è, in questa ipotesi, fondamentale per $|C|$ e di grado -2. Si ricade allora nella discussione precedente.

Concludendo, in tutti i casi rimane giustificata l'ipotesi semplificativa, che ci ha condotto a costruire i sistemi lineari corrispondenti ai quattro tipi di superficie *a*), *b*), *c*), *d*) elencati a pag. 223. Tuttavia nella nostra discussione si è introdotta una nuova ipotesi, del cui significato discorreremo nella seguente nota.

NOTA. - In ciò che precede, dato un sistema lineare ∞^3, $|C|$, irriducibile e semplice, di curve piane di genere 3 e grado 4 (con serie caratteristica canonica), abbiamo veduto che esso possiede una curva fondamentale Ω, di genere 1, e — nell'ipotesi che la Ω sia irriducibile o contenga una parte irriducibile ω — siamo riusciti a trasformare il sistema dato in un altro, i cui punti base stanno tutti su di una cubica fondamentale, trasformata di ω.

Se viene dato invece un sistema $|C|$, per cui la Ω sia riducibile, abbiamo ammesso che, per una variazione opportuna dei punti base di $|C|$, possa ottenersi una Ω irriducibile o contenente una parte irriducibile. Per giustificare l'ipotesi così intro-

di $|C|$ in maniera da allontanare quelli di essi che cadano infinitamente vicini; il che sarebbe evidente se $|C|$ fosse un sistema regolare, ma esige invece una giustificazione trattandosi di un $|C|$ sovrabbondante.

Se si vuole prescindere dall'ipotesi semplificatrice di cui sopra si è discorso, si può tuttavia applicare lo stesso metodo di riduzione alla ω riducibile e si perviene in generale al medesimo risultato. Ma si incontrano delle difficoltà, che provengono dall'eventuale presenza di curve ω dotate di componenti *multiple*, di cui qui non vogliamo spingere avanti l'esame.

La rappresentazione delle nostre superficie del quart'ordine sul piano doppio (in rapporto alla teoria dei piani doppi, che esporremo nel Lib. II, cap. V) conduce a giustificare a priori il risultato che abbiamo in vista, cioè che le superficie razionali del quart'ordine con un solo punto singolare rientrano tutte nelle famiglie già enumerate, dove il sistema rappresentativo possiede come curva fondamentale una cubica (virtualmente) ellittica; ma questa può effettivamente degenerare anche in modo da contenere parti multiple; e l'analisi di questi casi particolari dovrebbe farsi nello stesso ordine d'idee, in cui sono stati recentemente studiati i fasci d'HALPHEN i cui punti base appartengono ad una cubica ellittica degenere (1).

(1) Cfr. F. CONFORTO: *Sopra i fasci d'*HALPHEN, *i cui punti base appartengono ad una cubica ellittica degenere;* « Memorie della R. Acc. Naz.

LIBRO SECONDO

LA
TEORIA GENERALE DELLE SUPERFICIE RAZIONALI
SVILUPPO STORICO ED ESPOSIZIONE SISTEMATICA

CAPITOLO I.

LE SUPERFICIE CON UN FASCIO DI CURVE RAZIONALI

1. Il teorema di Noether: introduzione.

Nei capitoli precedenti noi abbiamo studiato diffusamente le superficie *razionali* dei primi quattro ordini.

Un punto di vista più elevato si raggiunge quando non ci si prefigga più la rappresentazione piana delle superficie dei primi ordini, ma si domandino proposizioni e criteri generali, atti ad assicurare la razionalità di estese classi di superficie algebriche.

Un passo, storicamente importante, in questo senso è costituito dal seguente teorema di M. NOETHER [1]:

Le superficie con un fascio razionale (o lineare) di curve razionali (irriducibili) sono razionali e possono essere rappresentate su di un piano π in modo che alle curve del *fascio* corrispondano le *rette per un punto.*

Per la dimostrazione basta evidentemente riferirsi a superficie dello spazio ordinario.

Sia:

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

l'equazione di una superficie algebrica e:

$$X(x, y, z) + \lambda Y(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

un fascio di superficie, le quali seghino la F (fatta eventualmente astrazione da componenti fisse) secondo curve *razionali.*

---

[1] Cfr. M. NOETHER: *Über Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen,* « Math. Annalen », Bd. 3 (1871).

Posto:

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = \lambda = -\frac{X(x, y, z)}{Y(x, y, z)},$$

possiamo trasformare la superficie F in una superficie:

$$F'(X, Y, Z) = 0 \tag{1'}$$

sulla quale il fascio di curve razionali sia segato dai piani perpendicolari all'asse Z.

La F' è in generale una trasformata *birazionale* della F. Vi potrebbe essere eccezione solamente se le curve del fascio (2) godessero della proprietà che la parallela all'asse delle z, uscente da un punto generico di una curva qualunque del fascio, fosse *plurisecante* di detta curva. Ma ciò si può evitare scegliendo in modo generico rispetto alla superficie F la terna cartesiana di riferimento.

Nella (1'), ogni qual volta si ponga $Z = \text{cost.}$ si ha l'equazione di una curva di genere zero, la quale ammette una rappresentazione parametrica, mediante funzioni razionali:

$$\begin{aligned} X &= X(u) \\ Y &= Y(u). \end{aligned} \tag{3}$$

Dopo ciò sembra a prima vista, che risulti senz'altro dimostrata la razionalità della F' (e quindi della F) ponendo semplicemente:

$$\begin{aligned} X &= X(u) \\ Y &= Y(u) \\ Z &= \lambda. \end{aligned} \tag{4}$$

Il teorema di NOETHER sarebbe così evidente!

Ma un esame più approfondito rivela la illusione di questa evidenza. Nei coefficienti dell'equazione della curva che si ottiene dalla (1') ponendo $Z = \lambda$ interviene ancora il parametro λ; ora nella rappresentazione parametrica di una curva razionale possono a priori presentarsi delle irrazionalità numeriche (o relative al campo dei coefficienti), sicchè può avvenire che nelle (3) il parametro λ intervenga *irrazionalmente* e di conseguenza nelle (4) non si abbia una rappresentazione mediante funzioni razionali di u, λ, ma una rappresentazione razionale nella u e irrazionale in λ.

Il NOETHER ha approfondito il problema della rappresentazione parametrica di una curva razionale ed ha effettivamente trovato che in questa si presentano di regola delle irrazionalità numeriche.

Seguendo il NOETHER incominciamo perciò a studiare queste irrazionalità; il risultato di tale ricerca è importante non solo per la comprensione dell'enunciato del teorema, in quanto ci spiega la sua fallace evidenza, ma anche per la sua dimostrazione.

2. Irrazionalità numeriche, che intervengono nella rappresentazione parametrica di una curva di genere zero, mediante funzioni razionali.

Sia data una curva razionale d'ordine n, C_n. Ammetteremo da prima che essa abbia soltanto dei punti doppi; questi saranno allora in numero di:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Per rappresentare la C_n sopra una retta si usa comunemente la g_1^1, segata su di essa dalle curve aggiunte d'ordine $n-2$, passanti per $n-3$ punti semplici.

Se consideriamo una C_{n-2}, assoggettata alla sola condizione di passare semplicemente per tutti i punti doppi della C_n, cioè una C_{n-2} *aggiunta, i suoi coefficienti si esprimono razionalmente per i coefficienti della* C_n. È vero infatti che le condizioni lineari con le quali si impone alla C_{n-2} di passare per i punti doppi della C_n contengono *irrazionalmente* i coefficienti della C_n (in quanto esse sono costruite con le coordinate dei punti doppi, che sono radici di un'equazione algebrica di grado $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ a coefficienti appartenenti al campo di razionalità dei coefficienti della C_n [1]); ma nelle espressioni che si ricavano per i coefficienti

[1] L'equazione, che vale a determinare gli $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppi della C_n si costruisce come risultante di tre equazioni, corrispondenti a tre curve polari della data, queste polari passando per i punti doppi e non avendo in generale altri punti comuni.

della C_{n-2} da queste condizioni, le coordinate dei punti doppi devono intervenire simmetricamente (giacchè alla C_{n-2} si impone di passare per *tutti* i punti doppi della C_n) e da qui si conclude appunto che i coefficienti della C_{n-2} si costruiscono razionalmente a partire dai coefficienti della C_n.

Le medesime conclusioni si traggono anche nel caso in cui la C_n possiede punti tripli, quadrupli ecc., ecc. dove si prendano le φ_{n-2} aggiunte soggette a passare $i-1$ volte, per ogni punto *i-plo*: infatti nelle condizioni imposte alle aggiunte figurano simmetricamente i punti multipli aventi una stessa molteplicità, l'insieme dei quali dipende razionalmente dei coefficienti di C_n (i punti *i-pli* essendo comuni alle polari $(i-1)$-esime).

Se ora si impongono alle ∞^{n-2} curve aggiunte di ordine $n-2$, $n-4$ condizioni lineari arbitrarie, che non introducano alcuna irrazionalità numerica rispetto al campo definito dai coefficienti della C_n, riusciamo a costruire una *rete* di aggiunte d'ordine $n-2$, che determina sopra la C_n una g^2_{n-2}, con la quale possiamo trasformare la data C_n in una curva d'ordine $n-2$; e questa nasce dalla data, per mezzo di una *trasformazione razionale a coefficienti razionali.*

Abbiamo così veduto che una curva piana razionale d'ordine n si può trasformare birazionalmente in una curva d'ordine $n-2$ mediante una trasformazione a coefficienti *razionali.*

Ripetendo ora sulla curva d'ordine $n-2$ ottenuta il medesimo ragionamento si perverrà alla seguente proposizione: *Ogni curva razionale può essere mutata mediante una trasformazione birazionale a coefficienti razionali o in una cubica con un punto doppio, o in una conica*; s'arriva al primo caso partendo da una curva d'ordine dispari ed al secondo da una curva d'ordine pari.

Nel primo caso le coordinate del punto doppio, necessariamente unico, si ottengono ancora razionalmente e quindi proiettando i punti della cubica dal punto doppio su di una retta r si riesce a rappresentare razionalmente la cubica sulla r. Di conseguenza, una curva razionale d'ordine dispari può essere mutata in una retta mediante una trasformazione birazionale a coefficienti razionali. In altre parole: *Le curve razionali d'ordine dispari si pos-*

sono rappresentare parametricamente senza far intervenire irrazionalità numeriche.

Una curva razionale d'ordine pari può essere invece trasformata *razionalmente* soltanto in una conica; questa conica potrà essere riferita ad una retta per proiezione da un suo punto P, ma per determinare P sarà necessaria un'estrazione di radice quadrata, sicchè possiamo concludere che: *La rappresentazione parametrica di una curva razionale d'ordine pari importa l'aggiunta al campo dei coefficienti di una irrazionalità quadratica.*

Facile è dimostrare che questa irrazionalità è in generale necessaria. Esistono infatti delle coniche sulle quali è possibile trovare dei punti a coordinate razionali (ad es. $P(0, 1)$ sul cerchio $x^2 + y^2 = 1$); ciò però non avviene in generale, come è senz'altro dimostrato dall'esistenza di coniche prive di punti reali ed a coefficienti reali ($x^2 + y^2 + 1 = 0$)!

Le conclusioni ottenute valgono anche per curve razionali gobbe, che possono essere sostituite da proiezioni piane. Per il seguito è importante ritenere la seguente proposizione, che consegue da quanto precede: se una superficie F contiene un fascio lineare (o anche irrazionale) di curve razionali, la F si può trasformare birazionalmente in una rigata se l'ordine delle nominate curve è dispari o in una superficie con un fascio di coniche se l'ordine delle curve è pari. Invero la curva generica del fascio può essere trasformata birazionalmente in una retta o in una conica, senza introdurre irrazionalità rispetto ai coefficienti delle sue equazioni.

3. Dimostrazione del teorema di Noether.

Ritorniamo, dopo ciò, alla superficie (1):

$$F(x, y, z) = 0$$

o alla (1'):

$$F'(X, Y, Z) = 0.$$

I risultati precedenti ci assicurano che se il fascio di curve razionali $Z = \lambda$ è formato da curve d'ordine dispari, la superficie

F' si può trasformare birazionalmente in una superficie rigata F'' d'un certo ordine m, dotata di una retta $(m-1)$-*pla*.

Se invece le curve del fascio sono d'ordine pari, la F' si può trasformare birazionalmente in una superficie F'' d'ordine m con una retta $(m-2)$-*pla*. Gli ∞^1 piani per questa retta segano la F'' in coniche, costituenti un fascio lineare.

Consideriamo il caso in cui la superficie F da cui siamo partiti sia trasformabile in una rigata. Proiettando da un punto della retta $(m-1)$-*pla* su di un piano π otteniamo senz'altro la rappresentazione piana della superficie F, che risulta perciò razionale; le generatrici vengono rappresentate dalle rette che passano per il punto comune al piano π ed alla retta $(m-1)$-*pla*.

In questo caso il teorema di NOETHER risulta così dimostrato.

In secondo luogo supponiamo che la F sia trasformata in una superficie F'' d'ordine m con retta $(m-2)$-*pla*.

Per dimostrare anche in questo caso la razionalità di F il NOETHER ha costruito direttamente sulla F'' una curva K *unisecante* le coniche. Proiettando ogni conica dal punto comune ad essa ed alla K, su di un piano π, la F'' viene ad essere rappresentata su π in modo che le coniche del fascio abbiano come immagini le rette passanti per il punto in cui la retta $(m-2)$-*pla* incontra π. Tutto sta dunque a costruire sulla F'' una curva unisecante le coniche. Ciò corrisponde a scegliere quella irrazionalità che abbiamo visto essere necessaria in generale per rappresentare una conica su di una retta, in modo indipendente dal parametro del fascio.

Per dimostrare l'esistenza di una unisecante le coniche sulla F'', considereremo il *piano doppio* che si ottiene quando si proietta ogni punto di F'' da un punto fisso O della retta $(m-2)$-*pla*. La via che qui vogliamo seguire è esattamente parallela a quella seguita dal CLEBSCH per dimostrare l'esistenza di una unisecante sulla superficie del quarto ordine con retta doppia (cfr. pag. 169).

Proiettando la F'' da O otteniamo anzitutto un piano doppio possedente una curva di diramazione C d'ordine $2m-2$ con un punto $(2m-4)$-*plo*, il quale cade nel punto A, comune al piano π ed alla retta $(m-2)$-*pla*.

Infatti una sezione piana generica per O sega la F'' in una curva d'ordine m e di genere:

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} - \frac{(m-2)(m-3)}{2} = m-2.$$

Quindi la g_2^1 segata dalle rette per O avrà sulla curva $2n+2p-2 = 4+2m-4-2 = 2m-2$ punti uniti. In ogni piano per O esistono perciò $2m-2$ tangenti alla F''; così il cono che proietta il contorno apparente della F'' veduta da O è di ordine $2m-2$ e tale è anche l'ordine della curva di diramazione C sul piano doppio. Il punto A risulta $(2m-4)$-*plo* per la C, giacchè per le sezioni piane per la retta $(m-2)$-*pla* esistono, oltre a questa retta stessa, solamente altre due tangenti alla F''; in guisa che delle $2m-2$ intersezioni della C con le rette per O, $2m-4$ sono concentrate in A, che è dunque $(2m-4)$-*plo* per essa.

Si può ora dimostrare che *esiste un numero finito di curve d'ordine* $m-2$ *le quali hanno* A *come* $(m-3)$-*plo e sono tangenti alla* C *ovunque la incontrano, fuori dei punti multipli.*

Sia dapprima la C irriducibile ed A il suo unico punto multiplo; in questa ipotesi la curva di diramazione C è di genere:

$$p = \frac{(2m-3)(2m-4)}{2} - \frac{(2m-4)(2m-5)}{2} = 2m-4,$$

e le curve d'ordine $m-2$, che hanno il punto A $(m-3)$-*plo* segano su di essa una $g_{4m-8}^{2m-4} = g_{2p}^{p}$, che si può bisecare [1] in 2^{2p} modi distinti, dando luogo a 2^{2p} gruppi G_{2m-4} disequivalenti, che corrispondono a $2^{2p} = 2^{4m-8}$ curve d'ordine $m-2$ con $A(m-3)$-*plo* tangenti alla C ovunque la incontrano fuori di A.

Ma la curva di diramazione C potrebbe possedere, oltre ad A, dei punti doppi ed anche spezzarsi in due o più parti; si tratta di provare che in ogni caso si possono costruire delle curve *tangenti alla* C *ovunque la incontrano, fuori dei punti multipli.*

Supponiamo dapprima che la C, pur rimanendo irriducibile,

---

[1] Cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V. Cap. III, pag. 392-5 e Vol. IV, Lib. VI, Cap. III, pag. 199.

acquisti d punti doppi $A_1, A_2, \ldots, A_d$, diventando così di genere $p = 2m - 4 - d$. Si considerino allora le $C_{m-2}(A^{m-3}A_1A_2 \ldots A_d)$; esse segano la C secondo una $g^{2m-4-d}_{4m-8-2d} = g^p_{2p}$; e la bisezione di queste serie permette di riconoscere l'esistenza di $2^{2p} = 2^{4m-8-2d}$ curve $C_{m-2}(A^{m-3}A_1A_2 \ldots A_d)$, tangenti alla C ovunque la incontrano fuori di $A, A_1, A_2, \ldots, A_d$ (1).

Supponiamo ora la C riducibile. Anzitutto possiamo dispensarci dall'esaminare il caso in cui dalla C si stacchi come componente una curva unisecante le rette per A, fuori di A (2): invero, tenuto conto che il fascio delle rette per A rappresenta il fascio delle coniche di F'', tale curva fornirebbe già sopra la F'' una unisecante le coniche del fascio. Escluso questo caso, l'unica ipotesi possibile è che la C si spezzi in h rette uscenti da A ed in una

$$C_{2m-2-h}(A^{2m-4-h}A_1^2A_2^2 \ldots A_d^2),$$

irriducibile e di genere $p = 2m - 4 - h - d$ (3). Le h rette si pos-

(1) In realtà esistono anche delle $C_{m-2}(A^{m-3})$ (non passanti per $A_1, A_2, \ldots, A_d$), tangenti alla C ovunque la incontrano. Se invero ritorniamo per un momento al caso generale in cui la C possiede solamente un punto $(2m-4)$-*plo*, risultando così di genere $p = 2m - 4$, e, per continuità, facciamo acquistare alla C un punto doppio A_1, si vede che, al limite, le 2^{2p} curve p-tangenti $C_{m-2}(A^{m-3})$ tendono a 2^{2p-2} $C_{m-2}(A^{m-3}A_1)$, passanti per A_1 e $(p-1)$-tangenti a C, ed a 2^{2p-1} $C_{m-2}(A^{m-3})$ non passanti per A_1 e quindi p-tangenti a C; e ciascuna delle 2^{2p-2} $C_{m-2}(A^{m-3}A_1)$, è il limite di *due* $C_{m-2}(A^{m-3})$ p-tangenti la C. (Cfr. L. CAMPEDELLI: *La bisezione delle serie lineari sopra una curva di genere virtuale p e genere effettivo $p-1$*; « Bollettino della U. M. I. », 1932). Non è ora difficile vedere cosa succede se la C acquisti un secondo punto doppio e così via. Approfondendo quest'ordine di considerazioni si perviene a riconoscere che esistono sempre delle $C_{m-2}(A^{m-3})$, non passanti per $A_1, A_2, \ldots, A_d$, che toccano la C ovunque la incontrano, fuori di A.

(2) In questo caso è anche compreso quello in cui il punto A abbia per la C molteplicità effettiva $2m-3$ e non $2m-4$; la C risulta qui spezzata in una $C_{2m-2}(A^{2m-3})$ e nell'intorno di A.

(3) Si osservi che non può essere $h = 2m-2$. In questa ipotesi la curva di diramazione C si ridurrebbe a $2m-2$ rette distinte uscenti dal punto A. Sopra una retta doppia per A non esisterebbero allora punti di diramazione.

sono supporre *distinte*, poichè una componente multipla θ che entri $2i$ o $2i+1$ volte nella curva di diramazione $\psi = 0$ d'un piano doppio

$$\left| x, y, \sqrt{\psi(x, y)} \right|$$

risulta rispettivamente una curva *critica apparente*, che deve esser tolta dalla ψ, ovvero equivale ad una componente semplice della curva di diramazione propriamente detta. Invero se

$$\psi = \theta^{2i}\psi_1 \quad \text{o} \quad \psi = \theta^{2i+1}\psi_1,$$

si ha rispettivamente:

$$\sqrt{\psi} = \theta^i\sqrt{\psi_1} \quad \text{o} \quad \sqrt{\psi} = \theta^i\sqrt{\theta\psi_1}$$

(cfr. più avanti, Lib. II. cap. V, n. 25, pag. 394).

Ciò posto, delle h rette di diramazione, r incontrino la C_{2m-2-h}, fuori di A, in due punti distinti od infinitamente vicini ed $h-r$ in un punto doppio. Siano $B_1, B_2, \ldots, B_r$ r punti della C_{2m-2-h} scelti uno su ciascuna delle rette di diramazione del primo gruppo; $A_1, A_2, \ldots, A_{h-r}$ i punti doppi della C_{2m-2-h} per cui passano delle rette di diramazione e $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{h-r}$ $h-r$ punti, infinitamente vicini ad $A_1, A_2, \ldots, A_{h-r}$ rispettivamente, ciascuno scelto a piacere sopra uno dei rami della C_{2m-2-h} per il corrispondente punto doppio (1). Si considerino ora le curve

$$C_{m-2}(A^{m-3}A_1A'_1A_2A'_2 \ldots A_{h-r}A'_{h-r}A_{h-r+1} \ldots A_dB_1B_2 \ldots B_r):$$

esse segano sulla

$$C_{2m-2-h}(A^{2m-4-h}A_1^2A'_1A_2^2A'_2 \ldots A_{h-r}^2A'_{h-r}A_{h-r+1}^2 \ldots A_d^2B_1B_2 \ldots B_r)$$

una serie lineare

$$g^{2m-4-h-d}_{4m-8-2h-2d} = g^p_{2p},$$

che si può bisecare in $2^{2p} = 2^{4m-8-2d-2h}$ modi, determinando

---

Da qui segue che la conica, di cui la nominata retta doppia è l'immagine, dovrebbe essere spezzata in due rette. Sulla F'' non esisterebbe più un fascio di coniche *irriducibili*, bensì la F'' risulterebbe *rigata*.

(1) Se a partire ad es. da A_1 si succedessero sopra un ramo lineare un certo numero di punti doppi della C_{2m-2-h}, il punto A'_1 sarà uno dei punti della C_{2m-2-h}, che giacciono nell'intorno dell'ultimo punto doppio della successione.

così altrettante

$$C_{m-2}(A^{m-3}A_1A'_1A_2A'_2 \dots A_{h-r}A'_{h-r}A_{h-r+1} \dots A_dB_1B_2 \dots B_r)$$

p-tangenti alla C_{2m-2-h}, completata con le h rette di diramazione uscenti da A.

Riassumendo vediamo dunque che esiste in ogni caso un numero finito di C_{m-2} tangenti alla curva di diramazione C ovunque la incontrano, fuori dei punti multipli (1).

È ora importante riconoscere che le curve C_{m-2} così costruite, concepite come curve doppie del piano doppio, che ha la C come curva di diramazione, risultano *prive di punti di diramazione*. Si ricordi all'uopo che su di una curva doppia l'avvicinamento di due punti di diramazione dà luogo ad un punto critico apparente che non è più di diramazione; e più in generale un punto di una curva doppia sarà o no di diramazione a seconda che in esso venga a coincidere un numero dispari o pari di punti di diramazione. Ora nel nostro caso non possono essere punti di diramazione di una delle curve doppie C_{m-2} i punti comuni ad essa ed alla C, che siano semplici per quest'ultima: infatti i punti no-

---

(1) In casi particolari la costruzione delle C_{m-2} p-tangenti ora indicata può ammettere un numero *infinito* di soluzioni. Ciò succede quando la g^p_{2p} che si tratta di bisecare sia la serie doppia di una g^i_p completa, quando esistano cioè dei gruppi di p punti che, contati due volte, appartengono alla g^p_{2p}, mentre contati una volta sola sono contenuti in un gruppo canonico. In questa ipotesi la bisezione della g^p_{2p} dà luogo (cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. III, pag. 393) a 2^{2p} *serie*, una delle quali ha la dimensione i anzichè zero.

Come esempio si consideri una $C_8(A^6)$ di genere $p = 6$, che possieda una retta quadritangente, i cui punti di contatto con la C_8 siano P_1, P_2, P_3, P_4. La bisezione della $g^p_{2p} = g^6_{12}$ segata sulla C_8 dalle $C_2(A^2)$ dà luogo a 2^{12} serie, una delle quali non dà luogo ad una g^0_6 ma alla serie g^1_6, il cui gruppo generico è costituito dalla quaterna P_1, P_2, P_3, P_4 e da una coppia generica di punti allineati con A; invero questo gruppo è contenuto nel gruppo canonico segato sulla C_8 dalle quattro rette AP_1, AP_2, AP_3, AP_4 e da una retta generica per A; ed esiste una $C_8(A^2)$ che tocca la C_8 nei punti di questo gruppo; essa è spezzata nelle quadritangente ed in una retta per A contata due volte.

minati assorbono *due* delle intersezioni della C_{m-2} con la C, essendo in essi la C_{m-2} *tangente* alla C. Nè potrebbero dar luogo a punti di diramazione della curva doppia C_{m-2} i punti multipli della C di molteplicità *pari*: invero un ramo della C_{m-2}, che passi per uno di questi punti, assorbe un numero *pari* di intersezioni della C_{m-2} con la C. Rimangono i punti di molteplicità *dispari* della C, cioè i punti doppi della C_{2m-2-h} per cui passi una retta di diramazione uscente da A. Ma dalla nostra costruzione risulta, che anche in questi punti viene assorbito un numero *pari* di intersezioni della C_{m-2} con la C: invero se A_1 è un punto della natura indicata, abbiamo imposto alle C_{m-2} il passaggio per A_1 e per un punto A'_1, infinitamente vicino ad esso sulla C_{2m-2-h}: il punto A assorbe così quattro intersezioni della C_{m-2} con la C. Ne viene che siamo riusciti a costruire delle curve doppie C_{m-2}, *prive di punti di diramazione.*

Si consideri una delle curve doppie C_{m-2}, prive di punti di diramazione, ora costruite. Essa è irriducibile o no. In questa seconda ipotesi si vede facilmente che esiste sempre una sua componente che sia una curva irriducibile d'un certo ordine s con il punto $A(s-1)$-*plo* [1]; e tale componente, considerata come doppia, è auch'essa priva di punti di diramazione. Chiamiamo L la curva C_{m-2} o la sua componente irriducibile anzidetta. Alla curva L corrisponde sulla F'' una curva K, sulla quale i punti allineati con O sono coniugati in una involuzione che, per la razionalità della L, risulta razionale cioè una g_2^1. I punti doppi di

---

[1] Tuttavia è bene avvertire che la nominata componente può ridursi all'intorno del punto A. Si consideri ad es. la $C_6(A^4)$ per la quale due punti doppi A_1, A_2 cadano nell'intorno di A. La costruzione sopra esposta ci porta a ricercare le coniche bitangenti alla C_6 e passanti per A, A_1, A_2. Queste coniche si riducono alle coppie di rette uscenti da A, cui si aggiunge l'intorno di A; di guisa che la g_{2p}^p da bisecare si riduce in questo caso alla g_4^2 (doppia della g_2^1 canonica) segata sulla C_6 dalle coppie di rette per A. Delle 16 soluzioni del problema, 15 portano alle coppie di tangenti alla C_6 condotte da A alle quali si aggiunge l'intorno di A. L'ultima dà le ∞^1 curve spezzate nell'intorno di A e in una retta per A contata due volte. (Cfr. la nota alla pag. precedente).

questa involuzione si otterrebbero in corrispondenza ai punti di diramazione della L; ma la L è priva di punti di diramazione; corrispondentemente la g_2^1 sulla K è priva di punti doppi. Poichè una g_2^1 sopra una curva irriducibile deve possedere sempre almeno $2n - 2 = 2$ punti doppi ne segue che la K è spezzata in due curve K_1 e K_2.

Le curve K_1 e K_2 sono unisecanti le coniche di F'', che giacciono nei piani per la retta $(m-2)$-*pla*: infatti queste coniche si proiettano nelle rette per A, che sono unisecanti la L.

Concludendo, *esistono sulla F'' delle curve unisecanti le coniche.* Proiettando ogni conica dal punto comune ad essa e ad una unisecante, la F'' viene rappresentata su un piano π in modo che le immagini delle coniche siano le rette passanti per il punto comune a π ed alla retta $(m-2)$-*pla* di F''.

Il teorema di NOETHER rimane così completamente dimostrato.

OSSERVAZIONE. - Il teorema di M. NOETHER (la cui dimostrazione, come si è detto, è stata pubblicata nel 1871) porge un criterio generale, che permette di riconoscere la razionalità di tutte le superficie particolari considerate prima da L. CREMONA, da A. CLEBSCH e da altri. Così ad es. la superficie cubica generale appare razionale, appena si sappia che essa contiene una retta (per il fatto che i piani per essa segano la superficie secondo coniche). Le superficie del 4° ordine con cubica gobba doppia o con tre rette doppie per un punto risultano subito razionali per il fatto che le loro sezioni piane sono razionali. Le superficie del 4° ordine con conica doppia appaiono subito razionali, quando si sappia che contengono almeno una retta (incidente alla conica doppia), giacchè i piani per questa segano la superficie secondo cubiche razionali. Infine la superficie del 4° ordine con retta doppia costituisce il precedente storico immediato del teorema di M. NOETHER.

4. Le superficie con un fascio irrazionale di curve razionali.

La circostanza che le superficie possedenti un fascio *lineare* o *razionale* di curve razionali sono razionali è conseguenza di due fatti:

a) ogni curva razionale si può trasformare con una trasformazione birazionale a coefficienti razionali in una conica o in una retta;

b) dato su di una superficie un fascio lineare di coniche, esiste una curva unisecante ogni conica del fascio.

La *linearità* o *razionalità* del fascio di curve razionali sopra la superficie F, in virtù delle due proprietà *a*) e *b*), basta — come abbiamo veduto — alla dimostrazione del teorema di NOETHER.

Sorge dopo ciò naturale la questione di studiare come si possano caratterizzare le superficie algebriche, le quali possiedono un *fascio irrazionale* (di genere $p > 0$) di curve razionali.

Anzitutto, in base alla proprietà *a*), la curva generica del fascio si può trasformare, con una trasformazione birazionale a coefficienti razionali, in una retta od in una conica; e quindi si ha che: una superficie F, sulla quale esista un fascio di genere $p > 0$ di curve razionali, si può trasformare birazionalmente o in una rigata (di genere p) ovvero in una superficie con un fascio di coniche di genere p.

Ma per quanto riguarda l'esistenza di una curva unisecante, essa è stata riconosciuta soltanto in base alla linearità del fascio. Rimane dunque aperta la questione se anche nel caso irrazionale esista una curva unisecante le coniche del fascio. Dimostreremo che a tale questione si deve dare risposta affermativa. Quando l'esistenza di una simile curva unisecante sarà dimostrata, potremo immediatamente enunciare il teorema [1]:

---

[1]) Cfr. F. ENRIQUES: *Sopra le superficie che posseggono un fascio ellittico di curve razionali*, « Rend. R. Acc. Lincei », Vol. VII, s. V, 1898; *Sopra le superficie che posseggono un fascio di curve razionali*, id.; e la memoria *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali*, « Math. Ann. » Bd. 52, 1899.

Ogni superficie algebrica $f(x, y, z) = 0$, contenente un fascio di curve razionali, si può trasformare birazionalmente in una rigata (ad es. in un cilindro $\varphi(X, Y) = 0$), *avente il genere p del fascio.*

Infatti, immaginando la superficie F trasformata in un'altra F' di un S_n, sulla quale le coniche siano segate da ∞^1 piani non secanti ulteriormente la F' basta proiettare ogni conica di F' dal punto comune ad essa ed alla unisecante in un S_{n-1} fisso, per ottenere una rigata avente il genere del fascio (1).

Alla dimostrazione dell'esistenza di una curva unisecante le coniche di un fascio (di genere $p > 0$) posto su di una superficie F, sono volte le considerazioni che seguono.

Sia F una superficie contenente un fascio γ di coniche C_2, avente un certo genere p.

Ammettiamo la F situata in uno spazio S_n ad un numero sufficientemente elevato di dimensioni, in guisa che i piani delle coniche C_2 non intersechino ulteriormente la F.

Ogni conica C_2 del fascio può essere riferita ad una retta doppia per proiezione da un punto del suo piano, esterno ad essa; e tale operazione si compie in modo razionale dati i coefficienti dell'equazione della conica, ossia razionalmente per tutte le coniche del fascio. Ne viene che la superficie F si può trasformare birazionalmente in una rigata doppia Φ. Per eseguire questa trasformazione si consideri una curva arbitraria L, unisecante i piani delle coniche e si proietti ciascuna conica C_2 dal punto comune alla L ed al suo piano, in un S_{n-1} fissato. La conica C_2 dà luogo in S_{n-1} ad una retta doppia con due punti di diramazione e. ripetendo questa operazione per tutte le coniche C_2 di γ,

(1) Una rigata di genere p è poi sempre birazionalmente equivalente ad un cono (cilindro) di genere p. Per vederlo si proietti la rigata nello spazio ordinario e si consideri in questo spazio un cono di genere p, per il quale il sistema delle generatrici sia in corrispondenza birazionale con una sezione piana (e quindi con il sistema delle generatrici) della rigata. Dopo di ciò si proietti da un asse generico ciascuna generatrice della rigata nella corrispondente generatrice del cono.

si trasforma la F in una rigata doppia Φ, la cui curva di diramazione è composta da una curva K, bisecante le generatrici, aumentata in generale di un certo numero di generatrici a_1, a_2, ..., a_s; è lecito supporre la K irriducibile, giacchè se la K fosse riducibile, essa sarebbe composta di due curve unisecanti le generatrici della Φ e la esistenza di una unisecante le coniche della F sarebbe allora evidente.

Se la curva K possiede dei punti singolari, queste singolarità si possono eliminare. Si consideri all'uopo la serie completa, multipla secondo m, della serie segata sulla K dagli iperpiani. Prendendo m sufficientemente grande, la nominata serie risulterà priva di gruppi neutri (1); e la curva K si potrà così trasformare in una curva K', *normale, priva di punti multipli*. La curva K si può considerare come una proiezione della K'; e congiungendo sulla K' le coppie di punti, che corrispondono a coppie di punti di K sulla stessa generatrice di Φ, si ottiene una nuova rigata Φ', di cui la Φ è una proiezione. La curva di diramazione della rigata doppia Φ' è costituita dalla K' e da ρ generatrici. Il numero ρ può essere diverso da s, giacchè nella proiezione qualche generatrice di diramazione della Φ può mutarsi in punto e viceversa.

Si può dunque fin dall'inizio supporre la curva K della Φ normale e priva di singolarità; altrimenti basta riferirsi alla K' della Φ'.

Chiamiamo π e ν il genere e l'ordine di K. Importa per il seguito notare che il numero ν si può supporre arbitrariamente grande rispetto ai valori fissati di π e ρ (numero delle generatrici di diramazione). Infatti si trasformi la Φ con un sistema lineare completo, ottenuto sommando al sistema delle sezioni iperpiane della Φ un certo numero di generatrici generiche. La rigata dop-

---

(1) Basta all'uopo prendere m in modo che la serie di cui si tratta sia d'ordine $n > 2\pi$ se π è il genere di K. Invero se la curva, immagine proiettiva della serie avesse un punto s-*plo* ($s \geq 1$) O, gli iperpiani per O segherebbero sulla curva una serie completa $g_{n-s}^{n-\pi-1}$. Ma, essendo $n > 2\pi$, è altresì $n - \pi - 1 > \pi - 1$. Ora una serie di dimensione $> \pi - 1$ è non speciale; e per conseguenza dovrebbe essere: $n - \pi - 1 = n - s - \pi$: d'onde $s = 1$.

pia Φ si muta in una nuova rigata doppia Φ' rimanendo immutati i due numeri π e ρ: invero nella trasformazione le generatrici della Φ si mutano nelle generatrici della Φ' e non si aggiunge alcuna generatrice di diramazione, non essendovi su K alcun punto fondamentale della trasformazione, che si muti in una generatrice. La K', trasformata della K, diventa una curva priva di singolarità e d'ordine $\nu' = \nu + 2r$ se il sistema trasformante è stato ottenuto aggiungendo r generatrici al sistema delle sezioni iperpiane di Φ. Inoltre l'ordine $\nu + 2r$ si può supporre così alto che la serie segata sulla K' dagli iperpiani del suo spazio sia non speciale. La Φ' è normale e ciò implica che anche la K' sia normale.

Se invero la K' non è normale essa proverrà per proiezione da una curva K'', d'ordine ν', normale, priva di singolarità in uno spazio a $\nu' - \pi$ dimensioni. Congiungendo sulla K'' le coppie di punti che si proiettano in coppie di K' giacenti sulla medesima generatrice di Φ', si costruisce una nuova rigata Φ'' della quale la Φ' è una proiezione. Per provare ora che la K' è normale basta provare che le due rigate Φ' e Φ'' hanno lo stesso grado: si troverà così un assurdo, essendo la Φ' normale; ne segue che la K' non può essere proiezione di una K'' dello stesso ordine e quindi è normale. Procediamo quindi a dimostrare che Φ' e Φ'' hanno effettivamente lo stesso grado.

Siano n e p il grado ed il genere della rigata Φ'. La formula di corrispondenza di ZEUTHEN [1], applicata alla corrispondenza [1, 2] che vien posta fra la serie di genere p delle generatrici di Φ' e la serie di genere π dei punti di K', quando si facciano corrispondere generatrici di Φ' e punti di K' che si appartengono, dà per il numero y delle generatrici di Φ' che sono tangenti alla K', l'espressione:

$$y = 2(\pi - 1) - 4(p - 1).$$

D'altra parte consideriamo un fascio d'iperpiani ed in esso la corrispondenza che si ottiene facendo corrispondere due piani

---

[1] Cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. I, pagg. 72-73.

quando contengono due punti di K' situati sulla medesima generatrice di Φ'. Si tratta di una corrispondenza $[\nu', \nu']$, che ha $2\nu'$ elementi uniti. Questi elementi uniti provengono dagli y iperpiani che vanno ai punti di contatto della K' con le generatrici della Φ' e, a coppie, dagli n iperpiani che contengono delle generatrici della Φ', appoggiantisi al sostegno del fascio. Si ha dunque:

$$y + 2n = 2\nu'.$$

Ed eliminando y tra questa e la precedente, si ottiene:

$$\nu' - \pi = n - 2p + 1.$$

Ora il medesimo ragionamento può essere applicato alla rigata Φ'' in relazione alla bisecante K''. I numeri ν', π, p si conservano immutati; e quindi anche n. Il grado della Φ'' coincide così con il grado della Φ'.

Riepilogando i risultati ottenuti, possiamo dunque dire: una superficie F, sulla quale esiste un fascio γ di coniche di genere p, può essere rappresentata su di una rigata doppia Φ di genere p, la cui curva di diramazione è composta:

a) di un certo numero ρ di generatrici;

b) di una curva normale K di un certo genere π, irriducibile, senza singolarità, bisecante le generatrici di Φ, avente un ordine n arbitrariamente grande, in confronto ai valori di π e ρ, ed appartenente ad uno spazio S_r di dimensione $r = n - \pi$. La curva K è immagine di una curva L di F, bisecante le coniche del fascio γ; e, viceversa, ogni linea L bisecante le coniche di γ dà luogo ad una rigata Φ, dotata delle proprietà anzidette.

Proponiamoci ora di determinare sulla Φ una sezione iperpiana, che passi per ρ punti $A_1, A_2, \ldots, A_\rho$ scelti fra le intersezioni di K colle generatrici di diramazione $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ (uno sopra ciascuna generatrice) e sia inoltre *tangente ovunque la incontra* alla K.

A questo scopo si consideri la serie lineare segata sulla K dagli iperpiani, passanti per $A_1, A_2, \ldots, A_\rho$. Essa è una $g^{n-\rho-\pi}_{n-\rho}$.

Per l'iperpiano, che si tratta di determinare, le $n-\rho$ intersezioni con la K, fuori di A_1, A_2, ..., A_ρ, devono distribuirsi in $\frac{1}{2}(n-\rho)$ coppie di punti [1], ciascuno dei quali risulta di tangenza alla K. Il problema proposto consiste nella bisezione della serie $g_{n-\rho}^{n-\rho-\pi}$ e diverrà certamente risolubile se sarà:

$$\frac{1}{2}(n-\rho) \geq \pi.$$

All'uopo basterà ovviamente prendere $n \geq 2\pi + \rho$ come è consentito dal fatto che n può essere preso arbitrariamente grande rispetto a ρ e π.

Alla sezione della Φ con uno degli iperpiani, tangenti alla K ovunque la incontrano, corrisponde sulla F (che è rappresentata *doppiamente* sulla Φ) una curva λ, *bisecante* le coniche C_2 del fascio γ, dato sulla F: infatti una sezione piana della Φ è *unisecante* le generatrici della Φ che sono le immagini delle coniche del fascio γ. La curva λ sega ogni conica C_2 in due punti distinti o eventualmente in due punti sovrapposti, costituenti per λ un punto doppio: due punti infinitamente vicini su una delle coniche C_2 potrebbero infatti provenire solamente da una intersezione semplice (ossia senza tangenza) della immagine di λ con la curva K; ma ciò non è possibile, giacchè detta immagine tocca la K ovunque la incontra.

Sopra la curva λ le coniche C_2 del fascio γ (di genere p) segano una involuzione γ_2^1 di genere p, *priva di punti di coincidenza*. Segue allora immediatamente, dalla formula di ZEUTHEN [2], che il genere della λ è il genere minimo per una bisecante e vale $P = 2p - 1$.

La curva λ può spezzarsi in due curve di genere p, unisecanti

---

[1] Si noti che il numero $\frac{1}{2}(n-\rho)$ è certamente intero, giacchè n e ρ sono entrambi pari o entrambi dispari, dovendo la curva K completata con ρ rette essere (come curva di diramazione) d'ordine pari.

[2] Cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. I, pag. 72-3.

le coniche C_2; anzi ciò accade sempre se $p = 0$; in questo caso si ottiene subito la rappresentazione della F, punto per punto, su di una rigata. Ma altrettanto non può dirsi per il caso in cui $p > 0$.

La curva λ incontra una conica C_2 di γ in due punti A e B; le tangenti in A e B si incontrano in un certo punto O (polo della retta AB) e da O la conica stessa può venir proiettata in una retta doppia. Tale operazione si compie razionalmente per ogni C_2 e quindi essa conduce a rappresentare la superficie F sopra una rigata doppia Ψ, in modo che la curva di diramazione della Ψ sia composta di una curva λ' corrispondente alla λ, più qualche generatrice.

Applicando allora alla λ', in relazione alla Ψ, i ragionamenti svolti innanzi per la Φ, in relazione alla K, si può costruire una nuova curva σ, bisecante le coniche del fascio γ, di genere minimo $P = 2p - 1$ e corrispondente ad una curva unisecante le generatrici della Ψ. La curva σ è in una semplice relazione con la curva λ: le coppie di punti segate da λ e σ sopra una conica C_2 del fascio γ si separano armonicamente. La dimostrazione di questa proprietà è molto semplice. Siano A e B i punti comuni a λ e ad una generica conica C_2 di γ. La generatrice della Ψ, che è immagine della conica C_2, si ottiene proiettando la C_2 dal polo O della C_2 rispetto alla retta AB; ogni punto di questa generatrice è quindi immagine di due punti della C_2 allineati con O. La curva σ si proietta ora in una curva unisecante le generatrici di Ψ: ne segue che i due punti comuni alla σ ed alla C_2 sono allineati con O, polo di AB, e quindi separano armonicamente la coppia AB.

Esprimeremo la relazione fra le curve λ e σ dicendo che esse costituiscono una coppia di *bisecanti armoniche* del fascio di coniche C_2.

Riassumendo, possiamo dire: *Se su di una superficie F esiste un fascio γ di coniche di genere p, esiste altresì una coppia di curve di genere $2p - 1$, bisecanti armoniche del fascio γ.*

5. Il caso ellittico.

Ciò premesso, consideriamo da prima il caso $p = 1$; otterremo sulla superficie F due bisecanti armoniche di genere uno, su ciascuna delle quali le coniche del fascio (ellittico) segano una involuzione ellittica γ_2^1. Nella ipotesi più sfavorevole, nella quale ci poniamo, entrambe le curve λ e σ sono irriducibili; nel caso contrario è senz'altro conosciuta sulla F una curva unisecante le coniche del fascio γ.

Scegliamo ora nel fascio ellittico γ (che si può concepire astrattamente come una curva ellittica, i cui punti rappresentano le coniche C_2) una qualsivoglia g_2^1. Otteniamo sulla F un fascio razionale costituito da coppie di coniche C_2: ci proponiamo di costruire sulla F una involuzione I_2 (di coppie di punti), che trasformi ogni conica nella sua coniugata, in guisa dunque che coniche coniugate vengano riferite l'una all'altra proiettivamente.

Osserviamo a questo scopo che alla g_2^1 nel fascio ellittico γ, corrisponde sulla curva λ (e sulla curva σ) una serie lineare g_4^1, le cui quaterne di punti sono composte da coppie di punti, coniugati nella involuzione ellittica γ_2^1, subordinata sulla λ (e sulla σ) dalle coniche del fascio γ. La nominata g_4^1 può (in due maniere diverse) riguardarsi come composta colle coppie (coniugate nella γ_2^1) di una g_2^1. Ciò segue dal fatto che sopra una curva ellittica quale è la λ (o la σ) una involuzione ellittica γ_2^1 ed una involuzione razionale g_2^1 sono *permutabili* (1): ed infatti, se C'_2 e C''_2 costituiscono una coppia particolare di coniche coniugate, che segano la λ nelle coppie di punti A', B' e A'', B'' (coniugati nella γ_2^1), la g_2^1 che rimane individuata sulla λ quando si faccia corrispondere ad A' il punto A'' (o il punto B''), fa altresì corrispondere — per la detta permutabilità — al punto B' il punto B'' (o il punto A''); prendendo allora due altre coniche coniugate generiche, i due punti in cui l'una di esse è segata dalla λ cor-

(1) Cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. III, pag. 263.

rispondono ai due punti di sezione dell'altra in un modo, che è razionalmente determinato appena sia fissata sulla λ la nominata g_2^1.

Ripetendo per la σ il ragionamento fatto sulla λ possiamo quindi dire: ad una qualsivoglia involuzione razionale g_2^1 nel fascio ellittico γ corrisponde tanto sulla curva λ come sulla curva σ una g_4^1, i cui gruppi di punti sono composti con due gruppi G_2 di una medesima g_2^1, la quale è *autoconiugata* rispetto alle involuzioni ellittiche segate sulla λ e sulla σ dalle coniche del fascio γ. La determinazione della g_2^1 autoconiugata sopra ciascuna delle curve λ e σ fa intervenire una *irrazionalità* quadratica puramente *aritmetica*.

Ciò posto, date due coniche coniugate generiche, ai quattro punti in cui l'una di esse è segata dalla λ e dalla σ, si possono far corrispondere ordinatamente i quattro punti d'incontro dell'altra con le stesse due curve; ma, essendo le curve λ e σ bisecanti armoniche, le due quaterne di punti sono armoniche e si corrispondono in esse le coppie di punti coniugati armonici: ne segue che le due coniche risultano riferite proiettivamente in un modo determinato.

Le coppie di punti omologhi di due coniche coniugate danno luogo sulla F alla involuzione di coppie di punti I_2, che ci eravamo proposti di costruire.

Concepiamo ora una nuova superficie F', i punti della quale corrispondano birazionalmente alle coppie di punti della involuzione I_2 su F. Alle coniche C_2 di F corrispondono su F' curve razionali C', e precisamente ogni C' corrisponde a due coniche coniugate. Le C' formano sulla F' un fascio *lineare* di curve razionali. Ma allora, come si è veduto nella dimostrazione del teorema di NOETHER, si può costruire sulla F' una curva unisecante le C'. A questa corrisponde sulla F una curva unisecante le coniche C_2.

Abbiamo già osservato che ciò è sufficiente per concludere che la F è birazionalmente identica ad una rigata ellittica.

6. Fascio di genere qualunque.

Consideriamo ora il caso, nel quale il fascio di coniche γ abbia un genere p qualsiasi; le due bisecanti armoniche λ e σ risultano qui di genere $P = 2p - 1$.

Se si riflette alla dimostrazione, che abbiamo dato nel caso $p = 1$, si vede che il suo successo dipende dalla possibilità di riferire proiettivamente le coppie di coniche di γ, coniugate in una g_2^1, in guisa da costruire sulla F una involuzione I_2 di coppie di punti, alla quale appartenga il fascio γ. Siamo riusciti a porre il detto riferimento proiettivo, dimostrando che alla g_2^1 di γ corrispondeva sulle due bisecanti armoniche λ e σ una g_4^1, i cui gruppi di punti riuscivano composti con due gruppi G_2 di una medesima g_2^1, autoconiugata rispetto alle involuzioni ellittiche segate sulle curve λ e σ dalle coniche di γ.

Per estendere ora il procedimento al caso $p > 1$ è naturale considerare una g_m^1 nel fascio γ e vedere se sia possibile riferire proiettivamente le coniche, formanti un gruppo generico di questa g_m^1, in modo da costruire sulla F una involuzione I_m di gruppi di punti.

Si riesce a porre un riferimento proiettivo siffatto quando alla g_m^1 del fascio γ corrisponda, tanto sulla λ come sulla σ, una g_{2m}^1, composta mediante una g_m^1 autoconiugata rispetto alle involuzioni (di genere p) segate sulle curve λ e σ dalle coniche di γ, ossia quando ogni gruppo della g_{2m}^1 sia composto di due gruppi G_m di una medesima g_m^1, coniugati nelle nominate involuzioni. Siamo dunque condotti a ricercare una g_m^1 nel fascio γ, la quale goda della proprietà anzidetta. Nel seguito dimostreremo che una simile g_m^1 esiste effettivamente e si può anzi scegliere in infiniti modi.

Per comodità di linguaggio riguarderemo il fascio γ come una curva di genere p, considerando astrattamente le coniche come dei punti; le due bisecanti λ e σ, di genere $P = 2p - 1$, sono allora delle curve, contenenti una stessa involuzione γ di genere p senza punti di coincidenza; cioè riferite ad una medesima

curva doppia γ, senza elementi di diramazione. Con questo linguaggio, onde dimostrare l'esistenza della g^1_m, che ci interessa, basta giustificare l'enunciato seguente:

Date due curve λ e σ, di genere $P = 2p - 1$, contenenti una stessa involuzione γ, priva di punti doppi, cioè riferite, senza elementi di diramazione, ad una curva doppia γ (di genere p), si può determinare una g^1_m cui corrisponda, su ciascuna delle due curve λ e σ, una g^1_{2m}, ciascun gruppo della quale sia composto con due gruppi (coniugati) di una g^1_m, autoconiugata rispetto all'involuzione γ.

La dimostrazione di questo enunciato si compie nel modo seguente.

Assumiamo sopra γ un generico gruppo G_n di n punti; e sia $n > p$, $n > 2p - 2$: ne viene $2n > 4p - 4 = 2P - 2$. Il gruppo G_n appartiene ad una serie lineare completa g^{n-p}_n, che indichiamo con s. Ad essa corrisponde sulla λ una serie $s_1 \equiv g^{n-p}_{2n}$, di cui ciascun gruppo è composto con n coppie dell'involuzione γ: la s_1 è contenuta in una serie completa $g^{2n-P}_{2n} \equiv g^{2n-2p+1}_{2n}$.

Ora osserviamo che la g^{2n-P}_{2n} non è certamente composta con i gruppi di un'involuzione sulla curva λ. Invero la g^{2n-P}_{2n} non può in primo luogo essère essa stessa una serie lineare semplicemente infinita: si avrebbe allora $2n = P + 1$, mentre è $2n > 2p = P + 1$. In secondo luogo non può ciascun gruppo della g^{2n-P}_{2n} essere composto con più di un gruppo di una γ^1_ν o di una g^1_ν. Invero, se ogni punto della λ determinasse altri $\nu - 1$ punti di un gruppo della g^{2n-P}_{2n}, potendosi di un gruppo di questa serie dare $2n - P$ punti ad arbitrio, dovrebbe essere $(2n - P)\nu \leq 2n$. Ma, poichè $2n > 2P - 2$, sarà $2n = 2P + 2h$ $(h \geq 0)$, e quindi:

$$(P + 2h)\nu \leq 2P + 2h,$$

ossia:

$$P(\nu - 2) \leq 2h(1 - \nu).$$

Se $h > 0$, essendo $\nu \geq 2$, questa disuguaglianza è manifestamente assurda. Se invece $h = 0$, ne viene $\nu = 2$. La g^{2n-P}_{2n} potrebbe dunque essere composta solamente con le coppie di un'involuzione del second'ordine; e ciò quando fosse $n = P$. Si vede fa-

cilmente che questa involuzione non può essere la γ. In questa ipotesi la s_1, che è la più ampia serie composta con le coppie della γ, che sia contenuta nella g_{2n}^{2n-P}, dovrebbe esaurire la g_{2n}^{2n-P}; dovrebbe quindi aversi $2n - P = n - p$, ossia $2n - 2p + 1 = n - p$, da cui $n = p - 1$: e ciò è assurdo perchè $n > p$. L'ipotesi che la g_{2n}^{2n-P} sia composta porta così che la s_1 sia composta con un'involuzione diversa dalla γ. Ma allora sarebbe composta con i gruppi di un'involuzione del second'ordine anche la $s \equiv g_n^{n-p}$, sulla curva γ. Ma ciò è assurdo perchè, essendo $n = P$, n è dispari; e perchè la s non ha punti fissi, per la genericità del gruppo G_n che la individua. Concludendo, la $g_{2n}^{2n-P} \equiv g_{2n}^{2n-2p+1}$ non è composta con i gruppi di un'involuzione.

Trasformiamo allora la curva λ, mediante la serie $g_{2n}^{2n-2p+1}$, in una curva λ' d'ordine $2n$ di un $S_{2n-2p+1}$ riferendo proiettivamente gli elementi (gruppi) della serie agli iperpiani di questo spazio. Avremo una curva λ' trasformata in sè da un'involuzione proiettiva, la γ. Per questa involuzione si avrà un primo spazio S_{n-p} di punti uniti (non secante la curva), base per il sistema ∞^{n-p} degli iperpiani che segano sulla λ' la serie s_1; esisterà dunque un secondo spazio S_{n-p} di punti uniti, e gli iperpiani per esso determineranno sulla λ', e quindi sulla λ, una seconda serie s_1', contenuta nella $g_{2n}^{2n-2p+1}$ completa, di cui ciascun gruppo sarà composto con n coppie dell'involuzione γ.

Ora alla serie s_1' corrisponde su γ una serie completa $s' \equiv g_n^{n-p}$ diversa dalla s, e quindi non avente con essa alcun gruppo comune. Alla serie $g_{2n}^{2n-2p+1}$ di λ corrisponde invece su γ una serie non lineare di gruppi di $2n$ punti, la quale comprende entro di sè i gruppi della s e della s' contati due volte; questa serie non lineare è però costituita da gruppi equivalenti e quindi contenuta in una serie lineare (completa) g_{2n}^{2n-p} contenente le serie doppie della s e della s'.

Un gruppo G_n di s ed un gruppo G_n' di s', contati due volte, appartengono dunque ad una serie lineare g_{2n}^1. A questa g_{2n}^1 di γ corrisponde sulla λ una g_{4n}^1, ciascun gruppo della quale è composto con due gruppi coniugati (in γ) di una g_{2n}^1, precisamente della g_{2n}^1 individuata dai gruppi G_{2n} e G_{2n}' corrispondenti a G_n

e G'_n: questi gruppi G_{2n} e G'_{2n} sono infatti equivalenti, appartenendo rispettivamente alla serie s_1 ed s_1'; e poichè sono composti ciascuno di n coppie di γ, determinano, sulla λ, una g^1_{2n} trasformata in sè dall'involuzione γ, cui corrisponde sull'ente (doppio) γ la g^1_{2n} innanzi nominata.

Ripetendo gli stessi ragionamenti in relazione alla curva σ otterremo sull'ente doppio γ un'altra serie completa $s'' \equiv g_n^{n-p}$ diversa da s, tale che un qualsiasi gruppo G di s ed un qualsiasi gruppo G'' di s'', contati due volte, determinano su γ una g^1_{2n}, cui corrisponderà su σ una g^1_{4n}, ciascun gruppo della quale sarà composto di due gruppi (coniugati) di una g^1_{2n} autoconiugata rispetto all'involuzione γ.

Due casi possono presentarsi: le serie complete s' ed s'' di γ non hanno gruppi comuni oppure coincidono. Nel secondo caso (che si presenta se λ e σ sono curve birazionalmente identiche) la g^1_{2n} di γ cui corrisponde tanto su λ come su σ una g^1_{4n} composta di una g^1_{2n} autoconiugata, è determinata senz'altro da due gruppi G, G' presi rispettivamente in s, s', contati due volte. Nel caso generale però λ e σ non sono curve birazionalmente identiche [1] e corrispondentemente le serie s' ed s'' di γ non avranno gruppi comuni. Avremo perciò su γ tre serie complete g_n^{n-p}: s, s', s'', senza gruppi comuni, che contate due volte saranno contenute in una stessa g_{2n}^{2n-p} (serie completa doppia di s). E pel nostro scopo basterà costruire, entro la detta g_{2n}^{2n-p} di γ, una g^1_{2n} la quale contenga tre gruppi di n punti ciascuno, contati due volte, ed appartenenti rispettivamente alle serie s, s', s'': infatti ad una tale g^1_{2n} corrisponde tanto sulla λ quanto sulla σ una g^1_{4n} composta colle coppie di gruppi di una g^1_{2n} autoconiugata.

Ora si riferiscano proiettivamente gli elementi (gruppi) della g_{2n}^{2n-p} di γ ai punti di un S_{2n-p}; entro questo spazio si avranno

---

[1] Ciò è conforme ad un teorema di HURWITZ secondo il quale esistono $2^{2p} - 1$ curve di genere $P = 2p - 1$, in generale birazionalmente distinte, rappresentate su una stessa curva doppia γ, di genere p, senza elementi di diramazione. Cfr. A. HURWITZ: *Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkte*; «Math. Ann.», Bd. XXXIX. Cfr. del resto F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Cap. IV, pag. 430-46.

tre varietà V_{n-p} di dimensione $n-p$, i cui punti corrispondono ai gruppi delle serie s, s', s'', contati due volte. Una retta di S_{2n-p} la quale si appoggi in tre punti (necessariamente distinti) alle tre varietà V_{n-p}, darà entro la g_{2n}^{2n-p} la serie g_{2n}^1 domandata. Ora, perchè esista una retta di S_{2n-p} la quale si appoggi a tre varietà V_{n-p} di dimensione $n-p$ (senza punti comuni), occorre e basta che esistano punti comuni alla varietà costituita dalle rette, che congiungono i punti di due delle V_{n-p} ed alla terza varietà V_{n-p}. Basta cioè che si abbia:

$$2(n-p)+1+n-p \geq 2n-p,$$

ossia:

$$n \geq 2p-1.$$

Posto $m=2n$, se $n=2p-1$ si ha un numero finito di g_m^1 di γ, a cui corrisponde tanto sulla λ quanto sulla σ una g_{2m}^1 composta colle coppie di una g_m^1 autoconiugata. Se invece $n>2p-1$ le predette g_m^1 sono in numero infinito.

Poichè abbiamo supposto $n>p$, rimane escluso per $p=1$ il caso di $n=1$, cioè di $m=2$. Il ragionamento precedente potrebbe tuttavia applicarsi con lievi modificazioni di parole anche a questo caso. Ma la questione è stata da noi precedentemente trattata e precisamente abbiamo fatto vedere che ad ogni g_2^1, presa su γ, corrisponde tanto sulla λ come sulla σ una g_4^1 la quale (in due modi) si può riguardare come composta colle coppie (coniugate nella γ) di una g_2^1: ciò era conseguenza della permutabilità di una involuzione ellittica e di una involuzione razionale, date entrambe su di una curva ellittica.

Siamo ora in grado di dimostrare che su ogni superficie F, sulla quale è dato un fascio γ di genere p di coniche C_2, esiste una curva unisecante le C_2.

Sappiamo che sulla F esistono due bisecanti armoniche λ e σ delle coniche di γ. Consideriamo nel fascio γ una g_m^1, alla quale corrisponda tanto sulla λ quanto sulla σ una g_{2m}^1 composta con una g_m^1 autoconiugata. Ai gruppi della nominata g_{2m}^1 corrispondono sulla F delle curve riducibili L, costituite da m coniche C_2', C_2'', ..., $C_2^{(m)}$, appartenenti ad un fascio lineare L.

Ci proponiamo di costruire sulla F una involuzione I_m di gruppi di m punti, alla quale il nominato fascio L appartenga, vale a dire un'involuzione I_m siffatta che il gruppo di punti, individuato da un punto di C_2', abbia un punto sopra C_2'', uno sopra C_2''', ..., uno sopra $C_2^{(m)}$.

La costruzione di una tale I_m esige che le curve C_2', C_2'', ..., $C_2^{(m)}$ vengano riferite l'una all'altra con un riferimento proiettivo, che sia razionalmente determinato allorchè è dato il gruppo di coniche C_2', C_2'', ..., $C_2^{(m)}$. Si può stabilire un riferimento siffatto per mezzo delle curve λ e σ. Osserviamo a questo scopo che le coniche C_2', C_2'', ..., $C_2^{(m)}$ costituiscono un gruppo G_m della g_m^1 che abbiamo considerato nel fascio γ; al gruppo G_m corrispondono per ipotesi $2m$ punti della λ, che si distribuiscono in due gruppi G_m' e G_m'' di una g_m^1 autoconiugata. Siano A_1', A_2', ..., A_m' i punti di G_m' e A_1'', A_2'', ..., A_m'' i punti di G_m''; la coppia A_1', A_1'', sta sulla C_1', la coppia A_2', A_2'' sulla C_2'', ..., la coppia A_m', A_m'' sulla $C_2^{(m)}$. Lo stesso ragionamento si può ripetere sulla σ, sulla quale si otterranno i due gruppi di punti B_1', B_2', ..., B_m' e B_1'', B_2'', ..., B_m''. Esiste ora una proiettività ben determinata fra due coniche qualunque $C_2^{(i)}$ e $C_2^{(j)}$ del gruppo C_2', C_2'', ..., $C_2^{(m)}$, nella quale si corrispondono i punti A_i', A_i'', B_i', B_i'' ed i punti A_j', A_j'', B_j', B_j'': infatti queste due quaterne sono entrambe armoniche, essendo le curve λ e σ bisecanti armoniche ed in esse si corrispondono coppie, che si separano armonicamente. Dopo questo, la costruzione della I_m è immediata. Preso un punto A_1 della superficie F, i punti ad esso coniugati si costruiscono così: per A_1 passa una conica C_2', che individua un gruppo G_m della g_m^1 considerata nel fascio γ, ossia altre $m-1$ coniche C_2'', C_2''', ..., $C_2^{(m)}$; con l'ausilio delle due curve λ e σ si determina, nel modo detto, una proiettività tra la conica C_2' e le coniche C_2'', C_2''', ..., $C_2^{(m)}$ e su ognuna di esse vi è di conseguenza un punto razionalmente determinato coniugato con A_1. La totalità A_2, ..., A_m di questi coniugati costituisce, insieme ad A_1, una m-*pla* della I_m che ci siamo proposti di costruire.

Mediante la I_m possiamo ora dimostrare l'esistenza sulla F di una curva unisecante le coniche del fascio γ.

Costruiamo infatti una superficie F', i punti della quale siano in corrispondenza birazionale con i gruppi della involuzione I_m. Alle curve $L = C_2' + C_2'' + \ldots + C_2^{(m)}$, che costituiscono un fascio lineare, corrispondono sulla F' delle curve razionali (perchè birazionalmente equivalenti ad una conica) costituenti ancora un fascio lineare. Sappiamo allora che esiste sulla F' una curva unisecante tali curve: questa unisecante è ovviamente immagine di una curva della F unisecante le coniche del fascio γ.

Abbiamo già notato che tanto basta per asserire che la superficie F è birazionalmente equivalente ad una rigata di genere p.

CAPITOLO II.

LE SUPERFICIE A SEZIONI RAZIONALI.

7. Il teorema di Picard ed il teorema di Kronecker-Castelnuovo.

Al teorema di NOETHER (stabilito nel capitolo precedente) si può riattaccare la determinazione delle *superficie a sezioni piane razionali dello spazio ordinario* che è dovuta ad E. PICARD (1878). In forza del detto teorema queste superficie sono *razionali* ed anzi il PICARD osserva che le sezioni piane di un fascio (con n punti base $A_1, A_2, \ldots, A_n$) possono venir rappresentate nel piano sopra le rette per un punto, la rappresentazione facendosi senz'altro in modo razionale, data la conoscenza dei punti $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dall'analisi del sistema piano rappresentativo il PICARD deduce il teorema:

Le superficie a sezioni piane razionali dello spazio ordinario sono rigate ovvero superficie di STEINER *del quarto ordine con tre rette doppie per un punto triplo.*

Noi dimostreremo il teorema di PICARD deducendolo da un teorema più generale, di KRONECKER-CASTELNUOVO, il quale afferma:

Una superficie algebrica F di S_3, irriducibile, la quale possegga ∞^2 sezioni piane riducibili è rigata ovvero è la superficie di STEINER.

Passiamo alla dimostrazione del teorema.

Consideriamo una sezione piana qualunque di una superficie F; se essa, variando con continuità, si spezza, acquista necessariamente un punto doppio almeno, fuori delle eventuali linee

doppie di F (1). Conseguentemente le ∞^2 sezioni piane spezzate, che, per ipotesi, supponiamo esistenti su F, appartengono agli ∞^2 piani tangenti ad F. Sia C una sezione riducibile generica e poniamo $C = C_1 + C_2$, indicando con C_1 una componente d'ordine minimo; la componente C_2 potrà anche essere riducibile.

Poichè la sezione piana contenente C è tangente, C_1 e C_2 hanno necessariamente un punto a comune (fuori delle linee multiple di F); se per ogni sezione piana C_1 e C_2 avessero più punti in comune, ogni piano tangente ad F sarebbe pluritangente, e ciò non è possibile se il piano non tocchi lungo tutta una linea retta, la superficie riuscendo allora una rigata sviluppabile (2).

Escluso dunque il caso in cui la F sia una rigata sviluppabile, C_1 e C_2 hanno per ogni sezione piana riducibile *un* solo punto comune. Due casi possono allora presentarsi: al variare del piano tangente C_1 descrive un sistema semplicemente infinito ovvero doppiamente infinito.

Nel primo caso la F risulta *rigata*: infatti in quella ipotesi ogni C_1 fa parte di ∞^1 sezioni piane (riducibili) e quindi è senz'altro una retta.

Nel secondo caso C_1 descrive lo *stesso* sistema di C_2: se infatti C_1 e C_2 descrivessero sistemi distinti, presi due punti gene-

---

(1) Ciò avviene in virtù del così detto principio di degenerazione, formulato dall'ENRIQUES. Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria....* Vol. III, Lib. V, Cap. III, pag. 405.

(2) La dimostrazione rigorosa dell'asserto si riconduce ad una nota proprietà della geometria differenziale. Il piano tangente in un punto A è intersecato dal piano tangente in un punto infinitamente vicino A' secondo una retta b, coniugata di $a = AA'$. Quando b risulti fissa, al variare di a per A, il punto A è parabolico.

Ciò posto, si ammetta che tutti i piani tangenti ad F siano ad es. bitangenti. Così il piano α per A toccherà la F in un altro punto B. Allora un altro piano tangente infinitamente vicino ad α, dovrà passare per A e B e quindi contenere la retta AB, che risulta dunque coniugata ad ogni altra tangente per A. Di conseguenza il punto A, che è un punto generico di F, è un punto parabolico e la F, essendo tutta costituita da punti parabolici, deve essere sviluppabile.

rici di F, per essi passerebbe almeno una curva C_1 e almeno una curva C_2. Ma allora una C_1 ed una C_2 avrebbero *sempre* due punti in comune, mentre abbiamo già notato che ciò non è possibile se C_1 e C_2 sono complanari.

Conseguentemente nel secondo caso le curve C_1 formano su F una rete *omaloidica*, giacchè esse sono una doppia infinità e due di esse si incontrano in un punto. Riferendo proiettivamente le curve della rete alle rette di un piano π, la F risulta rappresentata punto per punto su π in guisa che le immagini delle sue sezioni piane siano delle coniche: infatti le sezioni tangenti hanno come immagini delle coppie di rette, ossia delle *coniche* spezzate.

Concludendo, la F, nel caso in esame, è *razionale* e le sue ∞^3 sezioni piane possono essere rappresentate da ∞^3 coniche di un piano π. Segue che la F è la *superficie* del quart'ordine di STEINER.

Vediamo dunque che una superficie F irriducibile, la quale possegga ∞^2 sezioni piane riducibili, è necessariamente una rigata ovvero la superficie di STEINER.

Sia ora F una superficie a sezioni piane razionali. La superficie F possiede certamente ∞^2 sezioni piane riducibili: infatti le ∞^2 sezioni piane tangenti sono certamente riducibili, in virtù del principio di degenerazione. Tenuto presente il teorema di KRONECKER-CASTELNUOVO, segue allora immediatamente il Teorema di PICARD:

Ogni superficie a sezioni piane razionali dello spazio ordinario è una rigata ovvero una superficie di STEINER.

8. Le superficie d'ordine n dello spazio S_{n+1}.

Il teorema di PICARD, che abbiamo dedotto dal teorema di KRONECKER-CASTELNUOVO, si può anche dimostrare in relazione ai sistemi lineari di curve piane, rappresentativi di superficie a sezioni razionali; e ciò in due modi, che danno luogo ad un interessante confronto.

Si può in primo luogo rilevare che ogni sistema lineare di curve piane di genere zero è contenuto in un sistema lineare completo

(determinato dai punti base presi con le rispettive molteplicità). Ciò permette di dimostrare agevolmente che ogni superficie a sezioni piane razionali dello spazio ordinario è proiezione di una superficie, Φ_n^{n+1}, a sezioni iperpiane razionali, d'ordine n ed appartenente ad uno spazio ad $n+1$ dimensioni. Lo studio diretto di queste Φ_n^{n+1} porta a concludere che esse sono rigate (razionali normali) o superficie di VERONESE. Da qui, per proiezione nello spazio ordinario si perviene al teorema di PICARD.

In secondo luogo si possono ridurre i sistemi lineari di curve piane di genere zero a tipi d'ordine minimo, mediante trasformazioni quadratiche: i sistemi completi che così si ottengono ci riportano alle rigate razionali normali ed alle superficie di VERONESE; ed i sistemi ∞^3 in essi contenuti alle rigate razionali dello spazio ordinario ovvero a superficie di STEINER.

Nel seguito ci proponiamo di ritrovare il teorema di PICARD per l'una e per l'altra via.

Premettiamo alcuni lemmi sui sistemi lineari di curve piane.

Sia $|C_m|$ un qualsivoglia sistema lineare ∞^s (completo o no) di curve piane irriducibili d'ordine m, secantisi a due a due in n punti variabili, ed i punti base $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\nu$ del sistema abbiano le molteplicità rispettive $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_\nu$.

Ricordiamo che il sistema $|C_m|$ dicesi *regolare* o *sovrabbondante* secondo che la sua dimensione è uguale o maggiore a $\frac{1}{2}m(m+3) - \Sigma \frac{1}{2}r_i(r_i+1)$: la sovrabbondanza corrisponde dunque all'esistenza di legami fra i punti base.

Ciò premesso, dicesi — con C. SEGRE [1] — *serie caratteristica* del sistema $|C_m|$ la serie g_n^{s-1} segata sopra una C_m generica di $|C_m|$ dalle altre curve del sistema.

Ora si ha la proposizione fondamentale: *La serie caratteristica di un sistema lineare completo, costituito da curve irriducibili, è completa.*

---

[1] Cfr. C. SEGRE: *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », T. I, 1881.

Si ricordi infatti (1) che le curve d'ordine m, aggiunte ad una curva C_m, cioè passanti $r-1$ volte per ogni suo punto r-*plo*, segano sulla C_m una serie completa; ora la serie caratteristica si può ritenere segata su di una curva C_m generica di $|C_m$ dalle aggiunte d'ordine m, alle quali si sia imposto di contenere certi punti infinitamente vicini ai punti r-*pli*. (Per un punto r-*plo* ordinario O, basta ad esempio imporre alle aggiunte di toccare gli r rami per O). Si deduce che il sistema totale delle C_m sega sopra la C_m considerata una serie caratteristica completa.

Una seconda proposizione sulla serie caratteristica di un sistema lineare di curve piane irriducibili, di grande importanza per le sue applicazioni, è la seguente:

La serie caratteristica di un sistema lineare completo $|C_m|$ *costituito da curve irriducibili, è non speciale o speciale secondo che il sistema è regolare o sovrabbondante.*

Infatti chiamiamo rispettivamente n, r, p il grado, la dimensione ed il genere di $|C_m|$; e sia i l'indice di specialità della g_n^{r-1} caratteristica. Per la proposizione precedente, tenuto conto del teorema di RIEMANN-ROCH, si avrà:

$$r-1=n-p+i.$$

Ma, se $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ sono le molteplicità dei punti base di $|C_m|$, sarà:

$$n=m^2-\sum_1^\nu r_i^2, \qquad p=\frac{(m-1)(m-2)}{2}-\sum_1^\nu \frac{r_i(r_i-1)}{2};$$

e da queste relazioni, tenuto conto della precedente, si ricava:

$$r=\frac{m(m+3)}{2}-\sum_1^\nu \frac{r_i(r_i+1)}{2}+i,$$

ciò che dimostra il teorema enunciato. Si vede anzi che *la sovrabbondanza di un sistema completo* $|C_m|$ (cioè la differenza tra la sua dimensione effettiva e la dimensione che esso avrebbe se

(1) Cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. I, pag. 88.

tutti i suoi punti base presentassero condizioni indipendenti) *uguaglia l'indice di specialità della serie caratteristica.*

Applichiamo ora i due teoremi sulla serie caratteristica di un sistema lineare completo, che abbiamo dimostrato in generale, al caso particolare, nel quale le curve (irriducibili) del sistema lineare $|C_m|$ siano razionali.

Otteniamo subito la proposizione: *Un sistema lineare di curve piane irriducibili di genere zero, che sia completo (cioè determinato dai punti base) e tale che due sue curve si incontrino in n punti variabili è di dimensione* $s = n + 1$.

Infatti la serie caratteristica deve essere una g_n completa ed essendo una serie lineare sopra una curva razionale deve essere una g_n^n.

Inoltre: *un sistema lineare completo di dimensione* $s \geq 1$ *di curve piane irriducibili di genere zero è sempre regolare.*

Infatti la serie caratteristica del sistema non può essere speciale, perchè sopra una curva razionale non esistono serie speciali.

I sistemi lineari completi di curve piane razionali, aventi dimensione $s \geq 3$ e grado n, sono rappresentativi di superficie d'ordine n, normali e a sezioni iperpiane di genere zero (1); e poichè questi sistemi sono di dimensione $n + 1$, le corrispondenti superficie normali appartengono ad uno spazio S_{n+1} ad $n + 1$ dimensioni.

Ne viene: *Ogni superficie* F_n *d'ordine n a sezioni piane razionali è proiezione di una superficie normale* Φ_n^{n+1} *d'ordine n, appartenente ad uno spazio ad* $n + 1$ *dimensioni.*

---

(1) Il dubbio che queste superficie si riducano a superficie d'ordine $r = \frac{n}{s}$, contate s volte, si rimuove osservando che un sistema lineare completo, ∞^3 almeno, di curve irriducibili e razionali è sempre *semplice* (cfr. Lib. I, cap. IV, pag. 78). Invero l'ipotesi opposta permetterebbe di trasformare una curva generica del sistema in una curva d'ordine $\frac{n}{s}$ dello spazio ad n dimensioni. Ma ciò porta $\frac{n}{s} \geq n$, ossia $s = 1$.

Infatti il sistema rappresentativo della F_n, che è di grado n e di dimensione $3 \leq n+1$, si lascia ampliare in un sistema lineare completo di grado n e di dimensione $n+1$, rappresentativo di una Φ_n^{n+1}.

Questo teorema generale contiene in sè molte proposizioni particolari, che abbiamo trovato precedentemente.

Per $n=2$ le F_n a sezioni piane razionali sono le quadriche, le quali sono esse stesse normali.

Per $n=3$ si ha nello spazio ordinario una superficie F_3 a sezioni di genere zero, che è la rigata cubica; ed abbiamo veduto che questa F_3 proviene per proiezione da una rigata cubica Φ_3^4 dello spazio a quattro dimensioni.

Per $n=4$ abbiamo tre tipi di F_4 a sezioni di genere zero:

le rigate F_4 dotate di cubica gobba doppia,
le rigate F_4 dotate di retta tripla e
le superficie di STEINER.

In accordo con il teorema generale, abbiamo veduto che i primi due tipi si ottengono per proiezione di una rigata Φ_4^5 normale nello spazio a cinque dimensioni, mentre la superficie di STEINER proviene per proiezione dalla superficie di VERONESE.

Studiamo in generale le superficie d'ordine n dello spazio S_{n+1}.

Una Φ_n^{n+1} è sempre normale e a sezioni iperpiane di genere zero; infatti le sezioni iperpiane sono curve d'ordine n di uno S_n e quindi curve razionali e normali; anche la Φ_n^{n+1} risulta perciò normale. La Φ_n^{n+1} è poi sempre razionale, giacchè proiettandola successivamente da $n-2$ suoi punti generici in un S_3 essa si riduce ad una quadrica.

Dimostriamo la proposizione seguente, che vale a caratterizzare le Φ_n^{n+1} e che devesi a DEL PEZZO:

Le superficie irriducibili d'ordine n appartenenti allo spazio S_{n+1} sono rigate ovvero (nel caso in cui $n=4$) *la superficie di* VERONESE.

Premettiamo la seguente osservazione: *Se la proiezione di una*

Φ_n di S_{n+1} da un suo punto generico sopra un S_n è un cono, la Φ_n è essa stessa un cono (1).

Infatti, detto O il centro di proiezione ed M il vertice del cono proiezione, per $n-1$ generatrici generiche di questo cono passa un S_{n-1} e quindi un S_n, passante per O e contenente la retta OM. Le $n-1$ generatrici del cono proiezione sono proiezioni di altrettante curve razionali, e quindi (2) di rette ovvero di coniche passanti per O, che nel loro complesso costituiscono l'intersezione della Φ_n^{n+1} con S_n; non possono perciò tutte le $(n-1)$ generatrici essere proiezioni di coniche per O, giacchè in questa ipotesi la sezione della Φ_n^{n+1} col piano S_n avrebbe l'ordine $2n-2$, cioè (per $n>2$) l'ordine maggiore di n. Una generatrice almeno del cono proiezione è quindi proiezione di una retta della Φ_n^{n+1}: ne segue, poichè O è un punto generico, che la Φ_n^{n+1} è rigata.

Tutte le generatrici del cono proiezione passano ora per il punto M: ne viene che tutte le generatrici della Φ_n^{n+1} debbono incontrare la retta OM. Due ipotesi possono allora darsi: o la Φ_n^{n+1} è un cono (col vertice sulla retta OM) ovvero la retta OM è una direttrice. La seconda ipotesi è da escludere, perchè, essendo O generico, la Φ_n^{n+1} possiederebbe infinite direttrici rettilinee: sulla Φ_n^{n+1} esisterebbero allora due sistemi distinti di rette e la Φ_n^{n+1} sarebbe una quadrica ed apparterrebbe ad un S_3 e non ad un S_{n+1}.

---

(1) Questa osservazione, aggiunta alla proprietà che una Φ_n di S_{n+1} è proiettata da $n-2$ suoi punti generici in una quadrica dello spazio ordinario, dimostra che una Φ_n^{n+1} non possiede punti o linee multiple, tranne se sia un cono. Invero, se sulla Φ_n^{n+1} esiste un punto multiplo O, gli ∞^2 S_n di S_{n+1}, passanti per l'S_{n-2} determinato dagli $n-2$ centri di proiezione e da O, segano la Φ_n^{n+1} secondo sezioni spezzate. La quadrica proiezione della Φ_n^{n+1} in S_3 deve quindi possedere una stella di sezioni spezzate ed essere così un cono. È quindi un cono anche la Φ_n^{n+1}.

(2) Una curva razionale della Φ_n^{n+1} deve essere necessariamente *normale*. Se invero esistesse sulla Φ_n^{n+1} una curva razionale, C, d'ordine s, giacente in un S_t con $t<s$, la curva d'ordine n costituita dalla C e da $n-s$ generatrici starebbe in uno spazio di dimensioni minore di n. E ciò è assurdo.

Premessa questa osservazione, veniamo alla dimostrazione del teorema, che abbiamo in vista.

Per $n = 2$ il teorema è evidente, perchè le Φ_2 di S_3 sono le quadriche, che sono rigate.

Passiamo al caso $n = 3$. Una Φ_3 dello S_4, proiettata da un suo punto generico O sullo spazio ordinario, dà come proiezione una quadrica F_2; e se la Φ_3 non è un cono, in base all'osservazione dianzi fatta, anche la F_2 non è un cono. L'intorno del punto O si proietta in una retta g di F_2, che è la intersezione del piano tangente in O alla Φ_3 con l'S_3 su cui si proietta. Le rette di F_2 appartenenti allo stesso sistema della g (non incontrando la g) sono immagini di rette della Φ_3, che è dunque rigata.

Tenuto conto che anche il cono cubico dello S_4 è una superficie rigata possiamo quindi dire: ogni Φ_3 dello spazio a quattro dimensioni è una rigata; e se la Φ_3 non è un cono essa possiede una direttrice rettilinea (1).

Consideriamo ora lo spazio a cinque dimensioni e le Φ_4^5 in esso contenute.

Proiettando una Φ_4 di S_5, che non sia un cono, da un suo punto generico O in un S_4, si ottiene una Φ_3 di S_4 che è una rigata, ma non un cono; e l'intorno del punto O si rappresenta in una retta g della Φ_3. Due casi possono presentarsi: la retta g è una generatrice, ovvero la direttrice semplice della Φ_3. Nella prima ipotesi le generatrici della Φ_3 (non avendo punti comuni con la g poichè la Φ_3 non è un cono) sono immagini di rette della Φ_4, che risulta di conseguenza rigata. Nella seconda ipotesi le generatrici della Φ_3 (che si appoggiano alla direttrice g) sono immagini di coniche della Φ_4 passanti per O. Per un punto generico della Φ_4 passano quindi ∞^1 coniche, ossia la Φ_4 contiene ∞^2 coniche. La Φ_4 è necessariamente (cfr. Lib. I, cap. IV, n. 23) la superficie di VERONESE.

Poniamoci ora in uno spazio a sei dimensioni.

Proiettando una Φ_5 di S_6 (che non sia un cono) da un suo

(1) Infatti una Φ_3 di S_4, che non sia cono, viene proiettata da un punto esterno in una rigata cubica dotata di direttrice rettilinea.

punto generico O in un S_5, si ottiene una Φ_4 di S_5, che non è un cono. L'intorno del punto O si proietta in una retta g della Φ_4. Segue che la Φ_4 non può essere una superficie di VERONESE, la quale non contiene delle rette; la Φ_4 è dunque rigata. Se ora la g è una generatrice della Φ_4, anche la Φ_5 deve essere rigata. Se invece la g fosse una direttrice semplice della Φ_4, per un punto generico della Φ_5 passerebbero infinite coniche e la Φ_5 possiederebbe ∞^2 coniche: essa sarebbe allora una superficie di VERONESE e apparterrebbe allo S_5 e non all'S_6; questa ipotesi non si può dunque verificare. Troviamo perciò che ogni Φ_5 dello S_6 deve essere rigata.

È chiaro oramai che questo ragionamento si può ripetere per $n = 6, 7, 8 \ldots$; il teorema di DEL PEZZO risultando così dimostrato per induzione da n ad $n + 1$.

Dal teorema di DEL PEZZO risulta come semplice conseguenza il teorema di PICARD. Sappiamo infatti che ogni superficie F_n a sezioni piane razionali è proiezione di una Φ_n^{n+1}: essendo ora una Φ_n^{n+1} una rigata o una superficie di VERONESE, la superficie F_n che risulta da essa come proiezione, è una rigata ovvero una proiezione della superficie di VERONESE; ma una proiezione della superficie di VERONESE è ancora una rigata ovvero una superficie di STEINER. Ne segue il teorema di PICARD.

Dal teorema di DEL PEZZO si possono anche ricavare i tipi di sistemi lineari d'ordine minimo, rappresentativi di superficie d'ordine n dello spazio ad $n + 1$ dimensioni; in questi sistemi sono poi contenuti i sistemi lineari rappresentativi delle superficie F_n dello spazio ordinario, che sono a sezioni razionali.

Sia anzitutto la Φ_n^{n+1} la superficie di VERONESE; sappiamo allora che il sistema rappresentativo è costituito dal sistema lineare completo d'ordine minimo delle ∞^5 coniche del piano.

Se invece la Φ_n^{n+1} è una rigata, essa si rappresenta direttamente su di un piano π proiettandola da un S_{n-2}, determinato da $n - 1$ suoi punti generici $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. Per trovare quale sia il sistema rappresentativo, notiamo che gli S_n contenenti l'S_{n-2} da cui si proietta ed una generatrice della Φ_n^{n+1}, passano tutti

per uno stesso S_{n-1}, che sega la Φ_n^{n+1} in una linea d'ordine $n-1$ ed il piano π, su cui si proietta in un punto O di π; inoltre le $(n-1)$ generatrici, passanti rispettivamente per A_1, A_2, ..., A_{n-1}, si proiettano in $n-1$ punti T_1, T_2, ..., T_{n-1}, i cui intorni sono in corrispondenza proiettiva con le generatrici corrispondenti.

Ciò posto, è facile vedere che *le immagini delle sezioni iperpiane della* Φ_n^{n+1} *sono curve d'ordine n passanti semplicemente per* T_1, T_2, ..., T_{n-1} *ed* $n-1$ *volte per il punto* O: infatti le sezioni iperpiane della Φ_n^{n+1} hanno un punto comune con le generatrici passanti per A_1, A_2, ..., A_{n-1} ed $n-1$ punti comuni con la linea d'ordine $n-1$, secondo la quale la Φ_n^{n-1} è segata dall'S_{n-1} che sega π in O.

Inversamente: *un sistema lineare completo di curve razionali d'ordine n, passanti* $n-1$ *volte per un punto* O *e semplicemente per* $n-1$ *punti base semplici* T_1, T_2, ..., T_{n-1} *rappresenta una rigata d'ordine n dello* S_{n+1}: infatti le rette per il punto O sono curve unisecanti le immagini delle sezioni iperpiane e quindi immagini di rette; inoltre due curve generiche del sistema si incontrano in

$$n^2 - (n-1)(n-1) - (n-1) = n$$

punti variabili; infine il sistema essendo completo, costituito da curve razionali e di grado n, risulta di dimensione $n+1$.

Ne segue: *Le rigate razionali normali d'ordine n rispondono ai sistemi lineari di* $C_n(O^{n-1}\, T_1\, T_2\, \ldots\, T_{n-1})$; *e costituiscono pertanto una sola famiglia dipendente da parametri variabili con continuità.*

Se la rigata è generale, ossia i punti O, T_1, T_2, ..., T_{n-1} sono in posizione generica, il sistema delle $C_n(O^{n-1}\, T_1\, T_2 \ldots\, T_{n-1})$ può essere abbassato d'ordine con una successione di trasformazioni quadratiche. Invero la trasformazione quadratica, che ha i punti fondamentali in O, T_{n-2}, T_{n-1}, muta il sistema delle C_n in un sistema di $C_{n-1}(O^{n-2}\, T_1\, T_2 \ldots\, T_{n-3})$, sul quale si può ripetere una trasformazione quadratica dello stesso tipo. Se n è dispari, dopo $\frac{1}{2}(n-1)$ trasformazioni quadratiche, si perviene così ad

un sistema di $C_s(O^{s-1})$, d'ordine $s = \frac{1}{2}(n+1)$; se invece n è pari, dopo $\frac{1}{2}(n-2)$ trasformazioni quadratiche si perviene ad un sistema di $C_s(O^{s-1}T_1)$, d'ordine $s = \frac{1}{2}(n+2)$. I sistemi completi delle $C_s(O^{s-1})$ e delle $C_s(O^{s-1}T_1)$ non dipendono evidentemente da alcun modulo; ne segue che *le rigate razionali normali d'ordine n non dipendono da alcun invariante assoluto, risultando, in generale, proiettivamente identiche.*

Giova tuttavia osservare che delle rigate razionali normali *particolari* possono non essere rappresentabili dai sistemi di $C_s(O^{s-1})$ o $C_s(O^{s-1}T_1)$ dianzi ottenuti. Ciò succede ad esempio se nel sistema delle $C_n(O^{n-1}\ T_1\ T_2 \dots T_{n-1})$, dal quale abbiamo preso le mosse, tutti i punti $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ sono *prossimi* ad O. Invero la superficie rappresentata è qui un cono, proiettante da un punto di S_{n+1} una curva razionale normale d'ordine n: infatti le curve $C_n(O^{n-1}\ T_1\ T_2 \dots T_{n-1})$, passanti per un punto dell'intorno di O, si spezzano in n rette uscenti da O; l'intorno di O rappresenta dunque il vertice d'un cono; ed una retta generica è immagine di una curva (razionale normale) d'ordine n, direttrice del cono. Se ora il sistema delle $C_n(O^{n-1}\ T_1\ T_2 \dots T_{n-1})$, dove $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ sono prossimi ad O, fosse abbassabile d'ordine con una trasformazione cremoniana, esisterebbero sul cono d'ordine n, rappresentato dal detto sistema, delle curve irriducibili (rappresentate dalle rette) d'ordine minore di n; ciò che è assurdo.

Per trovare tutti i casi, nei quali il sistema rappresentativo di una rigata razionale normale Φ_n^{n+1} non è abbassabile all'ordine $\frac{1}{2}(n+1)$ o $\frac{1}{2}(n+2)$, conviene — con C. SEGRE — approfondire lo studio delle *direttrici* di una Φ_n^{n+1}.

Consideriamo in S_{n+1} una rigata razionale d'ordine n e conduciamo un S_n per un certo numero di generatrici. L'S_n taglierà ancora la Φ_n^{n+1} in una curva, la quale potrà decomporsi in altre generatrici, ma conterrà certamente una curva *direttrice,* ossia incontrata in un sol punto dalle generatrici della rigata: invero

ciascuna generatrice incontra quell'S_n. Siccome per un S_n la condizione di passare per una data generatrice equivale alle due condizioni di passare per due punti di questa, così possiamo assoggettare un S_n alla condizione di passare per $\frac{1}{2}(n+1)$ generatrici, se n è dispari, e per $\frac{1}{2}n$ generatrici, se n è pari. L'intersezione dell'S_n colla rigata conterrà oltre ad un certo numero di generatrici una direttrice, che sarà una curva razionale e normale [1], d'ordine minore o uguale ad $\frac{1}{2}(n-1)$ o ad $\frac{1}{2}n$. Ne viene:

Una rigata razionale normale d'ordine n dello spazio ad $n+1$ dimensioni possiede almeno una direttrice razionale e normale, il cui ordine non superi $\frac{1}{2}(n-1)$ ovvero $\frac{1}{2}n$, a secondo che n sia dispari o pari.

Possiamo dunque, a priori, *classificare le rigate razionali normali d'ordine n, secondo l'ordine minimo m delle direttrici tracciate su di esse;* includendo il caso del cono, per cui la direttrice d'ordine minimo si riduce ad un punto (il vertice), *il numero m può variare da 0 ad $\frac{1}{2}(n-1)$, ovvero ad $\frac{1}{2}n$ a seconda che n sia dispari o pari.*

Si osservi ora che una Φ_n^{n+1} non può contenere due direttrici, i cui ordini m' ed m'' siano tali che $m'+m''<n$: altrimenti, ogni generatrice dovendo incontrare le due direttrici, la rigata sarebbe contenuta nell'$S_t (t=m'+m''+1)$ condotto per gli $S_{m'}$, $S_{m''}$ contenenti quelle curve. Ne segue che una Φ_n^{n+1}, la quale contenga una direttrice d'ordine minimo $m \leq \frac{1}{2}(n-1)$ se n è dispari, ovvero $< \frac{1}{2}n$ se n è pari, non contiene altra direttrice il

[1] Una direttrice di una rigata razionale normale d'ordine n è razionale come il sistema delle generatrici della rigata. Se non fosse normale, ed appartenesse così ad uno spazio di dimensione minore del suo ordine s, la curva d'ordine n, costituita dalla direttrice e da $n-s$ generatrici sarebbe contenuta in uno spazio di dimensione minore di n; e ciò è assurdo.

cui ordine sia minore di $n - m$. Se poi, per n pari, la Φ_n^{n+1} contiene una direttrice d'ordine minimo $\frac{1}{2}n$, essa ne contiene ∞^1, che si ottengono segando la Φ_n^{n+1} con gli ∞^1 S_n che passano per $\frac{1}{2}n$ generatrici.

L'esistenza effettiva di rigate razionali normali d'ordine n, corrispondenti ad un valore prefissato del numero m, si dimostra così: nello S_{n+1} si considerino due spazi senza punti comuni di dimensioni rispettive m ed $n - m$; e si fissi in ciascuno di essi una curva razionale normale: ponendo una proiettività tra le due nominate curve razionali, e congiungendo punti corrispondenti in tale proiettività, si genera una rigata razionale normale d'ordine n, con curva direttrice dell'ordine minimo m. Il lettore si persuaderà d'altronde facilmente che il modo descritto è il più generale per costruire una Φ_n^{n+1} con curva direttrice dell'ordine minimo m.

Ciò premesso, ecco come si può arrivare ad una rappresentazione piana (d'ordine minimo) della rigata razionale normale d'ordine n, con curva direttrice d'ordine minimo m.

Escludiamo da prima il caso di n pari ed $m = \frac{1}{2}n$.

Abbiamo veduto che la rappresentazione sul piano di una Φ_n^{n+1} si ottiene proiettandola da un S_{n-2}, determinato da $n - 1$ suoi punti. Anzichè scegliere i nominati $n - 1$ punti di Φ_n^{n+1} in modo generico, prendiamone $2m$ sopra m generatrici della rigata (due sopra ogni generatrice) e $n - 2m - 1$ in modo generico: siano questi ultimi P_i ($i = 1, 2, \ldots, n - 2m - 1$). Le m generatrici ed i punti P_i determinano un S_{n-2}, il quale è contenuto in un S_{n-1}, che contiene: la direttrice d'ordine minimo C_m, le m generatrici e le $n - 2m - 1$ generatrici passanti per i punti P_i. Il nominato S_{n-1} interseca il piano su cui si proietta in un punto O, il cui intorno è l'immagine della C_m, esclusi certi $n - 2m - 1$ punti $T_1, T_2, \ldots, T_{n-2m-1}$ (prossimi ad O), che rispondono alle generatrici passanti per i punti P_i. Gli ∞^1 S_n, passanti per il predetto

S_{n-1} e contenenti una generatrice della Φ_n^{n+1}, segano invece il piano di proiezione in rette uscenti da O. Infine una sezione iperpiana generica della Φ_n^{n+1} interseca: in un punto le m generatrici su cui stanno $2m$ dei centri di proiezione, in un punto le generatrici passanti per i punti P_i, ed in m punti la C_m. Per conseguenza essa si proietta in una curva d'ordine $n-m$, con O $(n-m-1)$-*plo*, passante semplicemente per i punti T_1, T_2, ..., T_{n-2m-1}. Ne segue: *Una rigata razionale normale d'ordine n, con curva direttrice d'ordine minimo $m(<\frac{1}{2}n)$ si può rappresentare sul piano mediante il sistema, non ulteriormente abbassabile con trasformazioni quadratiche, delle $C_{n\ m}(O^{n-m-1}T_1T_2\ldots T_{n-2m-1})$, dove i punti $T_i (i=1, 2, \ldots, n-2m-1)$ sono punti prossimi ad O, in direzioni distinte* (1).

Ne caso escluso in cui $m=\frac{1}{2}n$, prendiamo l'S_{n-2} di proiezione in modo che contenga $\frac{1}{2}(n-2)$ generatrici ed un punto P fuori di esse: per P passa una generatrice che viene proiettata dallo S_{n-2} mediante un S_{n-1} in un punto fondamentale semplice T. Gli S_n che passano per l'S_{n-2} da cui si proietta e per una generatrice intersecano ulteriormente la rigata in una linea d'ordine $n-1$, della quale fanno parte le $\frac{1}{2}(n-2)$ generatrici giacenti in S_{n-2}: la parte residua è dunque d'ordine $\frac{1}{2}n$; e viene proiettata in un punto fondamentale $\frac{1}{2}n$-*plo*, O. Le sezioni iperpiane si mutano per proiezione in curve d'ordine $\frac{1}{2}(n+2)$ con

(1) È ovvio che prendendo in modo particolare i punti P_i, si può ottenere che i punti $T_1, T_2, \ldots, T_{n-2m-1}$ si succedano su uno o più rami *cuspidali* in un modo qualunque. Si vede così che gli avvicinamenti dei punti T_i non corrispondono a particolarizzazioni della rigata rappresentata, ma dipendono solamente dal modo della rappresentazione. Ciò è confermato dal fatto che un sistema di C_{n-m} del tipo indicato può sempre essere trasformato in modo che i punti T_i siano prossimi ad O in direzioni distinte. Cfr. più avanti a pag. 297.

O $\frac{1}{2}n$-*plo* e T semplice. Ne segue: *Una rigata razionale normale d'ordine* n *(pari), con curva direttrice d'ordine minimo* $\frac{1}{2}n$, *si può rappresentare sul piano mediante il sistema, non ulteriormente riducibile per trasformazioni quadratiche, delle* $C_s(O^{s-1}T)$, ove $s = \frac{1}{2}(n+2)$ e T *è un punto distinto da* O. Le ∞^1 direttrici d'ordine $\frac{1}{2}n$ sono rappresentate dalle rette, uscenti da T.

Abbiamo veduto che *ogni rigata razionale normale d'ordine* n *può essere rappresentata da un sistema di* $C_n(O^{n-1}T_1T_2 \dots T_{n-1})$. Questo sistema, per quanto precede, può essere ricondotto cremonianamente al sistema delle $C_s(O^{s-1})\left(s = \frac{1}{2}(n+1)\right)$ nel caso dispari o al sistema delle $C_s(O^{s-1}T)\left(s = \frac{1}{2}(n+2)\right)$ nel caso pari, solamente se esista sulla rigata una direttrice d'ordine minimo $\frac{1}{2}(n-1)$ se n è dispari o d'ordine $\frac{1}{2}n$ se n è pari. Le rigate con una curva direttrice d'ordine minimo $\frac{1}{2}(n-1)$ o $\frac{1}{2}n$ appaiono così come *generali*. Le rigate con curva direttrice d'ordine minimo $< \frac{1}{2}(n-1)$ sono invece *particolari* nel senso che esse sono rappresentate da un sistema di $C_n(O^{n-1}\,T_1\,T_2\,\dots\,T_{n-1})$, dove i punti $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ sono vincolati in tal modo che dopo un certo numero di trasformazioni quadratiche si arriva ad un sistema di $C_{n-m}(O^{n-m-1}T_1T_2 \dots T_{n-2m-1})\left(m < \frac{1}{2}(n-2)\right)$ che, essendo i punti T_i tutti prossimi ad O, non è più abbassabile con trasformazioni quadratiche.

Nota. - Come si è detto, i sistemi lineari del tipo

$$C_{n-m}(O^{n-m-1}T_1T_2 \dots T_{n-2m-1})$$

ove $T_1, T_2, \dots, T_{n-2m-1}$ sono prossimi ad O, non possono essere trasformati con trasformazioni quadratiche in sistemi d'ordine

minore. A rigore si potrebbe tuttavia dubitare che esistessero delle trasformazioni cremoniane d'ordine maggiore di due che servissero a questo scopo. È facile convincersi che ciò è impossibile. Se invero esistesse una rete omaloidica di curve irriducibili d'ordine s passanti per i punti $O, T_1, T_2, \ldots, T_{n-2m-1}$ con le molteplicità rispettive $r, r_1, r_2, \ldots, r_{n-2m-1}$, la quale desse origine ad una trasformazione cremoniana trasformante il sistema $|C_{n-m}|$ in un sistema d'ordine minore, dovrebbe essere:

$$s(n-m) - r(n-m-1) - r_1 - r_2 - \ldots - r_{n-2m-1} < n-m,$$

ossia:

$$(n-m)(s-r-1) + r - r_1 - r_2 - \ldots - r_{n-2m-1} < 0.$$

Ma per la relazione di prossimità è certo:

$$r - r_1 - r_2 - \ldots - r_{n-2m-1} \geq 0;$$

e per l'irriducibilità delle curve della rete omaloidica:

$$r \leq s-1.$$

Ne segue che la relazione, che dovrebbe essere verificata, è assurda.

Analogamente si prova che i sistemi di curve d'ordine $\frac{1}{2}(n+2)$, con un punto base $\frac{1}{2}$ *n-plo* O ed un punto base semplice T sono d'ordine minimo rispetto a *qualunque* trasformazione cremoniana. Invero la rete omaloidica d'ordine s, che risponde ad un'eventuale trasformazione cremoniana che muti il nominato sistema in uno d'ordine minore, dovrebbe avere in O, T molteplicità r, r_1 tali che

$$\frac{1}{2}(n+2)s - \frac{1}{2}nr - r_1 < \frac{1}{2}(n+2).$$

Ma da qui si deduce:

$$n(s-r-1) + 2(s-r_1-1) < 0;$$

e questa relazione è manifestamente assurda.

9. Riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane di genere zero.

Ci proponiamo ora di ritrovare i risultati del numero precedente ed in ispecie il teorema di PICARD, determinando a priori tutti i tipi d'ordine minimo, ai quali si possono ridurre cremonianamente i sistemi lineari (∞^3 almeno) di curve piane razionali.

Più in generale, eseguiremo la detta riduzione per sistemi lineari di curve piane razionali di dimensione qualsiasi $s\,(s \geq 1)$.

Sia $|C_m|$ un qualsivoglia sistema lineare (completo o no) di curve di genere zero; denominiamo con m l'ordine della curva generica C_m e con n il grado di $|C_m|$. Il sistema $|C_m|$ possiede in generale dei punti base A, A_1, A_2, ..., A_ν le cui molteplicità indichiamo con r, r_1, r_2, ..., r_ν, supponendo inoltre che sia: $r \geq r_1 \geq r_2 \ldots \geq r_\nu$.

La riduzione all'ordine minimo del sistema $|C_m|$ si basa sulla possibilità di abbassare l'ordine m delle curve di $|C_m|$ con successive trasformazioni quadratiche, fino ad arrivare ad un sistema, birazionalmente identico a $|C_m|$, il cui ordine non può più essere abbassato.

Vediamo come la accennata riduzione si eseguisca effettivamente. Supponiamo che il sistema possieda almeno tre punti base A, A_1, A_2, di molteplicità r, r_1, r_2 e dimostriamo il lemma: *nell'ipotesi in cui le molteplicità r, r_1, r_2 ..., r_ν dei punti base A, A_1, A_2, ..., A_ν sono disposte in ordine decrescente è*: $r + r_1 + r_2 > m$.

Anzitutto, poichè la curva generica di $|C_m|$ è di genere zero è:

$$(1) \qquad \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \sum_0^\nu \frac{1}{2} r_i(r_i - 1) = 0.$$

Il grado di $|C_m|$ è n e quindi:

$$(2) \qquad \sum_0^\nu r_i^2 = m^2 - n.$$

Dalle (1) e (2) si può ricavare:

$$(1') \qquad \sum_0^{\nu} r_i^2 = m^2 - n$$

$$(2') \qquad \sum_0^{\nu} r_i = 3m - n - 2$$

ed anche:

$$(1'') \qquad \sum_3^{\nu} r_i^2 = m^2 - n - r^2 - r_1^2 - r_2^2$$

$$(2'') \qquad \sum_3^{\nu} r_i = 3m - n - 2 - r - r_1 - r_2.$$

Moltiplicando la (2'') per r_2 e sottraendo la (1'') si trova:

$$r_2 \sum_3^{\nu} r_i - \sum_3^{\nu} r_i^2 = m(3r_2 - m) - n\,r_2 - 1) - r_2(r + r_1 + 2) + r^2 + r_1^2.$$

Il primo membro di questa disuguaglianza è certamente non negativo e quindi si ha:

$$-m(m - 3r_2) - n\,r_2 - 1) - r_2(r + r_1 + 2) + r^2 + r_1^2 \geq 0.$$

Se ora fosse: $m \geq r + r_1 + r_2$ sarebbe:

$$m(m - 3r_2) \geq (r + r_1 + r_2)(r + r_1 + r_2 - 3r_2)$$

e quindi:

$$-(r + r_1 + r_2)(r + r_1 - 2r_2) - n\,r_2 - 1) - r_2(r + r_1 + 2) + r^2 + r_1^2 \geq 0$$

ossia:

$$2(r_2^2 - rr_1) + n - r_2(n + 2) \geq 0.$$

Ma questa disuguaglianza è manifestamente assurda, poichè è certamente:

$$r_2^2 \leq rr_1, \quad n < r_2(n + 2).$$

Segue che deve essere:

$$r + r_1 + r_2 > m. \qquad \text{c.v.d.}$$

Il lemma precedente permette di abbassare l'ordine del sistema $|C_m|$ mediante una trasformazione quadratica, che abbia come punti fondamentali i tre punti base A, A_1, A_2, di molteplicità r, r_1, r_2: occorre soltanto che codesti tre punti siano base per una rete di coniche irriducibili. Ciò succede certamente se i detti tre punti sono propri, giacchè — essendo la somma delle

loro molteplicità maggiore dell'ordine di $|C_m|$ — essi non possono trovarsi in linea retta. La rete delle coniche per A, A_1, A_2 è costituita da curve irriducibili anche se A_1, (od A_2) diventa infinitamente vicino ad A ovvero se tanto A_1 quanto A_2 si avvicinano indefinitamente ad A sopra un ramo *lineare*: le coniche della rete si toccano in A nel primo caso e si osculano in A nel secondo. Se però A_1 ed A_2 si avvicinano ad A in direzioni distinte o succedendosi sopra un ramo cuspidale, la trasformazione quadratica riduttrice degenera e si ha un caso d'eccezione, che discutiamo più innanzi.

Nel caso generale i tre punti A, A_1, A_2 sono punti generici del piano e trasformando il sistema $|C_m|$ con la trasformazione quadratica, che ha i punti A, A_1, A_2 come punti fondamentali, si perviene ad un sistema $|C_{m'}|$ costituito da curve d'ordine $m' = 2m - r - r_1 - r_2 < m$.

Ripetiamo per il sistema $|C_{m'}|$ il ragionamento fatto per il sistema $|C_m|$ e, nell'ipotesi che le coniche passanti per i tre punti di molteplicità massima di $|C_{m'}|$ costituiscano una rete irriducibile, si passerà dal sistema $|C_{m'}|$ ad un sistema $|C_{m''}|$, le cui curve sono d'ordine $m'' < m'$ e così via.

Così seguitando, il procedimento si può arrestare solamente in due casi: o dopo un certo numero di trasformazioni il sistema a cui si perviene possiede meno di tre punti base, ovvero i tre punti di molteplicità massima non possono essere presi come punti fondamentali di una trasformazione quadratica. Tralasciando per il momento l'esame minuto del secondo caso, che appare eccezionale, concludiamo rapidamente la discussione per il primo.

È infatti evidente che i sistemi lineari completi di curve razionali, che possiedono nessuno od uno o due punti base, non possono essere altro che i seguenti:

a) la rete delle rette;

b) il sistema ∞^5 delle coniche;

c) il fascio delle rette per un punto;

d) il sistema delle curve d'ordine n con punto $(n-1)$-*plo* senza altri punti base ovvero con un altro punto base semplice, proprio o infinitamente vicino.

Quanto ai sistemi non completi, essi si ottengono dai sistemi completi prendendo in questi quei sistemi, che hanno dimensione minore ed ugual grado.

Concludiamo intanto: *A prescindere dal caso d'eccezione, che si presenta nell'analisi precedente, ogni sistema lineare di curve razionali può essere ricondotto, mediante trasformazioni quadratiche del piano, ad uno dei sistemi a), b), c), d) enumerati innanzi, o ad un sistema contenuto in uno di quelli.*

Dobbiamo ora discutere il caso d'eccezione, in cui il sistema $|C_m|$ stesso o uno dei suoi successivi trasformati sia tale che i tre punti base di molteplicità massima A, A_1, A_2 non possano essere presi come punti fondamentali di una trasformazione quadratica. Ciò avviene solamente se A_1 ed A_2 sono infinitamente vicini ad A in direzioni distinte o si succedono sopra un ramo cuspidale. Ci proponiamo di dimostrare che, escluso il caso in cui il punto di massima molteplicità sia $(n-1)$-*plo*, l'ordine del sistema può sempre venire abbassato con una conveniente *successione di trasformazioni quadratiche*; il caso in cui il sistema possiede un punto $(n-1)$-*plo*, che si presenterà come eccezionale nella nostra discussione, sarà trattato a parte.

Giova allo scopo che abbiamo in vista premettere il seguente:

Lemma di CHISINI: (1) *Se A è un punto base di massima molteplicità $r < m-1$ per un sistema lineare ∞^1 almeno $|C_m|$ di curve razionali d'ordine m, ed i punti base del sistema A_1, A_2, A_3, ..., A_t prossimi* (2) *ad A posseggono molteplicità r_1, r_2, r_3, ..., r_t, tali che:*

$$r + r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_t > m,$$

allora esiste un altro punto base P (proprio o anche infinitamente

(1) O. CHISINI ha stabilito questo lemma per il caso delle reti omaloidiche; ma esso si lascia generalizzare facilmente. Cfr. la nota storica al n. 10.

(2) Ricordiamo che si dicono prossimi ad A quei punti infinitamente vicini che — mediante una trasformazione quadratica col punto fondamentale A — si trasformano in punti (propri od infinitamente vicini) sopra la retta fondamentale, omologa di A.

vicino ma non prossimo ad A) la cui molteplicità k soddisfa alla relazione:

$$2k > m - r.$$

Incominciamo col dimostrare che, nelle ipotesi ammesse, esiste certamente qualche punto base non prossimo ad A.

Premettiamo a questo scopo due osservazioni.

Prima osservazione: se n è il grado del sistema e se, come abbiamo supposto, è:

$$\sum_0^t r_i > m$$

ne segue necessariamente:

$$n < 2m - 2.$$

Infatti per la somma delle molteplicità di *tutti* i punti base del sistema si ha:

$$\sum_0^\nu r_i \geq \sum_0^t r_i > m.$$

Ma per la (2'):

$$\sum_0^\nu r_i = 3m - n - 2$$

d'onde segue:

$$3m - n - 2 > m$$

ossia:

$$n < 2m - 2.$$

Seconda osservazione: in ogni sistema di curve razionali, per cui si abbia $r \leqslant m - 1$, ed $n < 2m - 2$, si ha:

$$r < r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_\nu.$$

Se infatti si congiunge il punto A ai punti A_1, A_2, ..., A_ν con delle rette contate rispettivamente r_1, r_2, ..., r_ν volte si ha una curva spezzata d'ordine $\sum_1^\nu r_i$, che ha il punto A come $\left(\sum_1^\nu r_i\right)$-*plo* e nei punti A_1, A_2, ..., A_ν le molteplicità virtuali r_1, r_2, ..., r_ν rispettivamente. Questa curva interseca una curva generica di $|C_m|$ in $m \cdot \sum_1^\nu r_i$ punti, dei quali, almeno

$$r \sum_1^\nu r_i + \sum_1^\nu r_i^2$$

sono riuniti nei punti base di $|C_m|$ (1). Sarà dunque:

$$m \cdot \sum_1^\nu r_i \geq r \cdot \sum_1^\nu r_i + \sum_1^\nu r_i^2$$

ovvero:

$$(m - r) \sum_1^\nu r_i \geq \sum_1^\nu r_i^2.$$

Ma è, per la (1'):

$$\sum_1^\nu r_i^2 = m^2 - n - r^2$$

e quindi viene:

$$(m - r) \sum_1^\nu r_i \geq m^2 - n - r^2.$$

Essendo però $n < 2m - 2$ si ottiene:

$$(m - r) \cdot \sum_1^\nu r_i > m^2 - 2m + 2 - r^2.$$

Se ora fosse $\sum_1^\nu r_i \leq r$ ne seguirebbe:

$$(m - r) \cdot r > m^2 - 2m + 2 - r^2$$

ossia:

$$m \cdot r > m(m - 2) + 2$$

che è una relazione manifestamente assurda se $r < m - 1$.

Si ha dunque, per $r < m - 1$ ed $n < 2m - 2$,

$$r < r_1 + r_2 + \ldots + r_\nu.$$

---

(1) Di fatto il numero delle intersezioni assorbite può essere maggiore di $r\sum_1^\nu r_i + \sum_1^\nu r_i^2$. Se invero r_i è la molteplicità per $|C_m|$ di un punto base A_i proprio o prossimo ad A (ma in quest'ultimo caso, non satellite di alcun punto base prossimo ad A), ed $r_i', r_i'', \ldots$ sono le molteplicità dei punti base $A_i', A_i'', \ldots$ di $|C_m|$ che cadono nei successivi intorni di A_i, la curva spezzata ha la molteplicità effettiva $r_i + r_i' + r_i'' + \ldots$ in A_i e nulla in $A_i', A_i'' \ldots$. Le intersezioni assorbite in A_i sono dunque $(r_i + r_i' + r_i'' + \ldots)r_i$; ossia, poichè $r_i' \leq r_i$, $r_i'' \leq r_i, \ldots$, in numero maggiore o uguale a $r_i^2 + r_i'^2 + r_i''^2 + \ldots$. Indipendentemente dall'esistenza di punti base infinitamente vicini si ha un numero d'intersezioni assorbite maggiore del normale, quando due punti base A_i ed A_j di molteplicità r_i ed r_j siano allineati con A: invero la molteplicità effettiva della curva spezzata in A_i, A_j è

Premesse queste due osservazioni, siamo in grado di dimostrare che, nelle ipotesi enunciate, esiste certamente un punto base di $|C_m|$, non prossimo ad A.

Infatti le molteplicità dei punti base prossimi ad A devono essere tali che:

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_t \leq r.$$

Ma la somma delle molteplicità di *tutti* i punti base di $|C_m|$, escluso A, è maggiore di r: ne segue che oltre ad A, A_1, A_2, ..., A_t devono esistere altri punti base del sistema, non prossimi ad A, c. v. d.

Per il punto di massima molteplicità fuori di A, A_1, A_2, ..., A_t essendo, come indicano le (1'), (2'):

$$\sum_0^\nu r_i^2 = m^2 - n$$

$$\sum_0^\nu r_i = 3m - n - 2,$$

avremo:

$$k \geq \frac{m^2 - n - r^2 - r_1^2 - r_2^2 - \ldots - r_t^2}{3m - n - 2 - r - r_1 - r_2 - \ldots - r_t}.$$

Ma poichè per le ipotesi fatte è:

$$r + r_1 + r_2 + \ldots + r_t > m$$

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_t \leq r$$

$$r_1 \leq m - r, \quad r_2 \leq m - r, \quad \ldots, \quad r_t \leq m - r,$$

si avrà:

$$k > \frac{m^2 - n - r^2 - (r_1 + r_2 + \ldots + r_t)(m - r)}{3m - n - 2 - m} \geq$$

$$\geq \frac{m^2 - n - r^2 - r(m - r)}{2m - n - 2} = \frac{m(m - r) - n}{2m - n - 2}.$$

Notiamo che nella frazione $\frac{m(m-r)-n}{2m-n-2}$, se $r < m - 1$, tanto il numeratore che il denominatore sono positivi.

Sappiamo infatti che:

$$2m - n - 2 > 0.$$

Essendo poi $r \leq m-2$ si ha:

$$m - r \geq 2 \text{ e } m(m-r) \geq 2m > 2m-2$$

da cui:

$$m(m-r) - n > 2m - n - 2 > 0.$$

È ora facile dimostrare che, sempre nella ipotesi $r \leq m-2$, è:

$$\frac{m(m-r)-n}{2m-n-2} > \frac{m(m-r)}{2m} = \frac{m-r}{2}.$$

Infatti da questa disuguaglianza supposta soddisfatta, si ottiene:

$$(m-r)(n+2) > 2n,$$

che è evidentemente esatta, qualunque sia n, se $m-r \geq 2$, ossia se $r \leq m-2$.

Si ha dunque per il punto di molteplicità massima fuori di A:

$$k > \frac{1}{2}(m-r) \qquad \text{c. v. d.}$$

OSSERVAZIONE. - Nel caso di una *rete omaloidica*, il lemma vale anche nel caso estremo in cui $r = m-1$.

In questo caso si ha infatti $n = 1$ e quindi:

$$k > \frac{m(m-r)-1}{2m-3} = \frac{m-1}{2m-3} > \frac{1}{2}.$$

Applicheremo questo lemma per ridurre con una serie di trasformazioni quadratiche l'ordine di un sistema lineare $|C_m|$ di curve razionali, per il quale i punti base A_1, A_2 di massima molteplicità dopo $A(r + r_1 + r_2 > m)$ diventino prossimi ad A in direzioni distinte o succedentisi sopra un ramo cuspidale.

Incominciamo coll'osservare che nelle ipotesi fatte esiste certamente un certo numero di punti base del sistema, prossimi ad A, la cui molteplicità supera $\frac{1}{2}(m-r)$. Siano questi punti A_1, A_2, ..., A_q.

Si potrebbe ora credere che la desiderata riduzione dell'ordine del sistema $|C_m|$ si ottenesse trasformando il sistema con una trasformazione quadratica, che ha come punti fondamentali il

punto A, uno dei punti A_i ed il punto base P, non prossimo ad A e di molteplicità maggiore di $\frac{1}{2}(m-r)$, che esiste per il sistema $|C_m|$ in virtù del lemma di CHISINI. Questa conclusione sarebbe però errata, giacchè la anzidetta trasformazione riesce ad es. degenere se i punti $A_1, A_2, \ldots, A_q$ e P si succedono sopra un ramo cuspidale.

Un esempio valga a chiarire la cosa. Si consideri il sistema $|C_6|$ delle sestiche razionali C_6, che hanno un punto quadruplo A e quattro punti doppi A_1, A_2, P, Q; supponiamo che i punti A_1 ed A_2 siano prossimi ad A e si succedano sopra un ramo cuspidale del secondo ordine che ha il punto A come origine. In base al lemma di CHISINI il sistema $|C_6|$ possiede (almeno) un punto base non prossimo ad A, di molteplicità maggiore di uno: nel caso nostro esistono infatti i punti doppi P e Q. Se uno di questi due punti si mantiene proprio, il sistema $|C_6|$ si può effettivamente abbassare con la trasformazione anzidetta. Ma può avvenire che i punti P e Q diventino successivi ad A_1 ed A_2 sopra il ramo cuspidale del secondo ordine che ha l'origine in A, ed allora la trasformazione degenera.

Si riesce invece in ogni caso ad abbassare l'ordine del sistema $|C_m|$ semplificando preventivamente il sistema stesso, in modo da sciogliere gli eventuali rami cuspidali passanti per A_1, A_2, ..., A_q.

Eseguiamo a questo scopo una prima trasformazione quadratica T_1 prendendo come punti base A, A_1 ed un punto generico O_1 del piano. Le curve C_m di $|C_m|$ verranno trasformate in curve $C_{m'}$ di ordine:

$$m' = 2m - r - r_1 = m + (m - r) - r_1,$$

passanti per A', omologo di A, con la molteplicità:

$$R_1 = m - r_1$$

e per A_1', punto (omologo alla retta AO_1 infinitamente vicino ad A', con $m - r$ rami lineari non osculantisi; inoltre le $C_{m'}$ passeranno per i punti (trasformati di) $A_2, \ldots, A_q, \ldots$ con le molteplicità primitive delle C_m. Importa notare che il punto A_1' riesce

in direzione affatto generica rispetto ai punti multipli dell'intorno di A', provenienti da quelli dell'intorno di A.

Eseguiamo ora una seconda trasformazione quadratica T_2, con i punti fondamentali A', A_2 ed un punto generico O_2 del piano; con notazioni analoghe a quelle usate nel caso precedente, possiamo dire che le curve trasformate saranno delle curve $C_{m''}$ d'ordine:

$$m'' = 2m' - R_1 - r_2 = m + 2(m - r) - (r_1 + r_2).$$

passanti:

$$R_2 = m' - r_2 = m + (m - r) - (r_1 + r_2)$$

volte per un punto A'', ed $m' - R_1 = m - r$ volte per un punto A_1'', infinitamente vicino ad A'', nonchè per i punti (trasformati di) A_1', A_3, ..., A_q, ... con le molteplicità primitive.

Eseguiamo analogamente le successive trasformazioni T_3, ..., T_q in corrispondenza ai punti A_3, ..., A_q, che hanno molteplicità maggiore di $\frac{1}{2}(m - r)$; la T_i è determinata dai punti base infinitamente vicini $A^{(i-1)}$, A_i e da un punto O_i generico. Arriveremo a curve $C_{m(q)}$ d'ordine:

$$m^{(q)} = m + q(m - r) - (r_1 + r_2 + \ldots + r_q)$$

passanti:

$$R_q = m + (q - 1)(m - r) - (r_1 + r_2 + \ldots + r_q)$$

volte per $A^{(q)}$; ed al punto $A^{(q)}$ saranno infinitamente vicini in direzioni generiche q punti A_1', A_1'', ..., $A_1^{(q)}$ di molteplicità $m^{(i)} - R_i = m - r$ creati dalla trasformazione, con parabole osculatrici distinte, ed eventualmente altri punti multipli, i quali tutti però avranno una molteplicità $\leq \frac{1}{2}(m - r)$.

Al sistema delle curve $C_{m(q)}$ si può ora applicare il nostro lemma, in virtù del quale esiste un punto base P_1 di molteplicità:

$$s_1 > \frac{1}{2}(m^{(q)} - R_q) = \frac{1}{2}(m - r),$$

che dovrà essere un punto proprio, non allineato con alcuno dei punti $(m - r)$-*pli*.

Conseguentemente si potrà ora ridurre l'ordine delle $C_{m^{(q)}}$ con una trasformazione quadratica T_{q+1}, nella quale si prendono come punti fondamentali $A^{(q)}$, A_1' e P_1: arriveremo a curve d'ordine:

$$m^{(q+1)} = 2m^{(q)} - R_q - (m - r) - s_1 =$$
$$= m + q(m - r) - (r_1 + r_2 + \ldots + r_q) - s_1$$

con un punto $A^{(q+1)}$ multiplo secondo

$$R_{q+1} = m + (q - 1)(m - r) - (r_1 + r_2 + \ldots + r_q) - s_1,$$

nel cui intorno si avranno $q - 1$ punti $(m - r)$-*pli*, (trasformati di) A_1'', A_1''', ..., $A_1^{(q)}$. Le curve a cui siamo pervenuti possiederanno — per il nostro lemma — un punto base P_2 di molteplicità $s_2 > \frac{1}{2}(m - r)$ distinto da $A^{(q+1)}$, e non allineato con alcuno dei punti $(m - r)$-*pli*, si avrà perciò una trasformazione T_{q+2}, riducente l'ordine delle nostre curve a:

$$m^{(q+2)} = m + q(m - r) - (r_1 + r_2 + \ldots + r_q) - s_1 - s_2.$$

Successivamente si avranno altre $q - 2$ trasformazioni dello stesso tipo, che ci condurranno a curve d'ordine:

$$m^{(2q)} = m + q(m - r) - (r_1 + r_2 + \ldots + r_q) - (s_1 + s_2 + \ldots + s_q).$$

Ma è:

$$2r_i > m - r, \quad 2s_i > m - r$$

e quindi:

$$q(m - r) < r_1 + r_2 + \ldots + r_q + s_1 + s_2 + \ldots + s_q$$

ed in definitiva:

$$m^{(2q)} < m.$$

Siamo quindi riusciti ad abbassare, mediante $2q$ trasformazioni quadratiche successive, l'ordine m di un sistema lineare $|C_m|$ di curve razionali, per il quale i tre punti di molteplicità massima non possono essere presi come punti fondamentali di una trasformazione quadratica; questa conclusione vale per il caso in cui il punto di molteplicità massima abbia molteplicità minore di $m - 1$ (ed in qualunque caso per le reti omaloidiche).

Riassumendo allora i risultati ottenuti, possiamo dire: *se in un sistema lineare di curve razionali il punto di molteplicità massima ha molteplicità minore di* $m-1$, *l'ordine del sistema si può sempre abbassare con trasformazioni cremoniane, sino a ridursi al caso in cui esistano meno di tre punti base.*

Il caso d'eccezione non dà quindi luogo, se $r < m-1$, a nuovi tipi di sistemi lineari di curve razionali.

Ma rimane da trattare il caso in cui il sistema $|C_m|$ o un altro, birazionalmente equivalente ad esso a cui si pervenga con successive trasformazioni quadratiche, sia dotato di un punto base A $(m-1)$ - *plo*. Il sistema non può allora possedere ulteriormente altro che punti base semplici e nel caso da esaminare $(r+r_1+r_2>m)$ dobbiamo ammettere che almeno due punti base semplici A_1, A_2 siano prossimi al punto $(m-1)$ - *plo*. Siano in generale A_1, A_2, ..., A_s i punti base di $|C_m|$, prossimi ad A. Si può supporre, senza ledere la generalità, che i punti A_1, A_2, ..., A_s siano tutti distinti. Con il procedimento prima esposto, si possono infatti sciogliere i rami cuspidali, che hanno origine in A. Con questo non si altera l'ordine di $|C_m|$, giacchè si tratta sostanzialmente di eseguire un certo numero di trasformazioni quadratiche, che hanno come punti fondamentali: il punto A, un punto prossimo ad A ed un punto generico del piano. Tali trasformazioni mutano un sistema di C_m con $A(m-1)$-*plo* in un sistema dello stesso tipo.

Sciolti i rami cuspidali, si possono fare due ipotesi: o il sistema $|C_m|$ possiede uno o più punti base (semplici) non prossimi ad A, ed allora l'ordine del sistema si può abbassare con una trasformazione quadratica che ha i punti fondamentali in A, A_1 ed in un punto base semplice non prossimo ad A; ovvero il sistema ha tutti i suoi punti base infinitamente vicini ad A in direzioni distinte: in quest'ultima ipotesi è chiaro che nessuna trasformazione cremoniana potrà mai abbassare l'ordine del sistema, sicchè troviamo che un nuovo tipo a cui si può arrivare abbassando successivamente l'ordine di un sistema cremoniano è quello costituito dalle curve d'ordine m con punto $(m-1)$ - *plo* e $2 \leq i \leq m-1$ punti base semplici infinitamente vicini ad esso.

Aggiungendo allora questo tipo di sistema lineare agli altri tipi già ottenuti, possiamo dire:

I sistemi lineari completi di curve razionali possono ridursi con trasformazioni cremoniane, ottenute come prodotto di trasformazioni quadratiche, ai seguenti tipi di ordine minimo:

1) *Rete delle rette;*

2) *Sistema* ∞^5 *di tutte le coniche del piano;*

3) *Fascio di rette passanti per un punto;*

4) *Sistema delle curve d'ordine m con un punto base* $(m-1)$*-plo* $(m \geq 2)$:

a) senza altri punti base;

b) ovvero con un punto base proprio;

c) ovvero con $i \leq m-1$ *punti base semplici infinitamente vicini ad A, in direzioni che si possono sempre supporre distinte.*

I tipi 1), 2), 3), 4) sono effettivamente d'*ordine minimo* nel senso che il loro ordine non può essere abbassato da *nessuna* trasformazione cremoniana del piano. Ciò è evidente per i primi tre tipi e per il quarto risulta dalla nota a pag. 284. I tipi 1), 2), 3), 4) sono inoltre irriducibili l'uno all'altro; e nell'esaminare il caso *c*) del tipo 4) si è tenuto conto della possibilità di sciogliere eventualmente — senza alzare l'ordine di $|C_m|$ — i rami cuspidali che la C_m generica potesse presentare per il punto $(m-1)$*-plo*.

I sistemi non completi di curve razionali si riducono ai sistemi contenuti nei sistemi completi anzidetti ed aventi dimensione minore ed ugual grado.

OSSERVAZIONE. - Conviene rilevare esplicitamente i seguenti corollari:

Ogni fascio di curve razionali può essere trasformato birazionalmente in un fascio di rette per un punto.

Ogni rete di grado uno di curve razionali può essere trasformata con successive trasformazioni quadratiche, nella rete delle rette [1].

---

[1] Questa proposizione equivale al teorema di NOETHER, affermante la decomponibilità di ogni trasformazione cremoniana in un prodotto di trasformazioni quadratiche. Cfr. del resto F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. II, pag. 173.

Partendo dalla conoscenza dei tipi d'ordine minimo ai quali possono cremonianamente ricondursi i sistemi lineari di curve piane razionali, è facile ritrovare il teorema di DEL PEZZO ed il teorema di PICARD.

Alla classificazione dei tipi birazionalmente distinti di sistemi lineari *completi* di curve razionali corrisponde infatti la classificazione dei tipi proiettivamente distinti di superficie *normali* a sezioni iperpiane di genere zero. Più precisamente, è un sistema rappresentativo di una superficie normale a sezioni iperpiane di genere zero ogni sistema lineare completo di curve razionali di dimensione maggiore o uguale a tre.

D'accordo con la distinzione proiettiva delle rigate razionali normali, per riguardo alle loro direttrici d'ordine minimo, si trova la proposizione:

Ogni superficie normale a sezioni iperpiane di genere zero si può rappresentare su di un piano in modo che il sistema rappresentativo delle sezioni iperpiane sia:

1) *il sistema* ∞^5 *delle coniche ovvero*

2) *il sistema delle curve d'ordine* $n \geq 2$ *con un punto base* $(n-1)$*-plo:*

a) senza altri punti base

b) o con un punto base proprio

c) o con $i \leq n-1$ *punti base infinitamente vicini in direzioni distinte.*

Questa proposizione equivale al teorema di DEL PEZZO: la superficie rappresentata dal sistema ∞^5 delle coniche è infatti la superficie di VERONESE; ed una superficie rappresentata da un sistema di curve d'ordine n con un punto O $(n-1)$*-plo* è certamente *rigata*, giacchè le rette per il punto O sono unisecanti le immagini delle sezioni iperpiane e quindi immagini di rette.

Una superficie normale a sezioni iperpiane di genere zero è quindi una rigata ovvero una superficie di VERONESE.

Per quanto riguarda le superficie a sezioni razionali dello spazio ordinario, esse si ottengono in corrispondenza ai sistemi lineari, che sono contenuti nei tipi sopra riportati e risultano di

ugual grado e di dimensione tre. Si trova così che tali superficie sono rigate o superficie di STEINER. Ritroviamo dunque il teorema di PICARD.

10. Nota storica.

Abbiamo veduto che lo studio delle superficie a sezioni razionali si può fare da due punti di vista:

a) riferendosi alle superficie proiettivamente date o alle superficie normali dalle quali esse provengono per proiezione, ovvero

b) studiando direttamente la riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane razionali mediante trasformazioni quadratiche.

Il primo in linea storica che si sia occupato delle superficie a sezioni razionali fu E. PICARD (1878) (1), il quale, riferendosi alle superficie proiettivamente date nello spazio ordinario, scoprì la proposizione fondamentale che le superficie a sezioni razionali sono o rigate razionali o superficie di STEINER. La trattazione iperspaziale è invece dovuta a P. DEL PEZZO (1885) (2), il quale studiò le superficie d'ordine n nello spazio ad $n+1$ dimensioni.

Nella nostra trattazione abbiamo dedotto il teorema di PICARD dal teorema più generale di KRONECKER-CASTELNUOVO. Questo teorema fu comunicato nel 1886 dal KRONECKER verbalmente in una seduta dell'Accademia dei Lincei. La dimostrazione che ne abbiamo data appartiene sostanzialmente al CASTELNUOVO (3) e risale al 1894.

Questa dimostrazione è stata rielaborata da E. BOMPIANI (4)

---

(1) La dimostrazione del PICARD trovasi riprodotta nel trattato: E. PICARD e G. SIMART: *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, Parigi, 1906, Tomo II, cap. III, pag. 59 e segg.

(2) Cfr. P. DEL PEZZO: *Sulle superficie di ordine n immerse nello spazio ad $n+1$ dimensioni*. « Rend. Acc. di Napoli », 1885.

(3) Cfr. G. CASTELNUOVO: *Sulle superficie algebriche che ammettono un sistema doppiamente infinito di sezioni piane riduttibili*. « Rend. Acc. Lincei », Vol. III (1894).

(4) Cfr. E. BOMPIANI: *Il teorema di* KRONECKER-CASTELNUOVO. « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana » (1932).

e nella forma da lui esposta trovasi riprodotta nella seconda edizione del noto trattato del BERTINI (1).

Per dimostrare che ogni superficie a sezioni piane razionali è proiezione di una superficie normale Φ_n^{n+1}, ci siamo serviti della nozione di *serie caratteristica*, che fu introdotta da C. SEGRE nel 1887 e subito da lui adoperata per illustrare da un punto di vista unitario molti risultati parziali che in quell'epoca erano stati ottenuti da vari autori nello studio delle superficie razionali e dei sistemi lineari di curve piane.

La dimostrazione, da noi presentata, del fatto che ogni Φ_n^{n+1} è una rigata ovvero la superficie di VERONESE, riproduce sostanzialmente la dimostrazione di DEL PEZZO.

Lo studio approfondito delle rigate razionali normali, specialmente in rapporto alle loro direttrici d'ordine minimo e alle loro rappresentazioni piane, è dovuto a C. SEGRE (2).

Le ricerche sulla riduzione all'ordine minimo di sistemi lineari di curve piane razionali mediante trasformazioni quadratiche incominciano dal caso delle reti omaloidiche. Pare che il CLIFFORD abbia per il primo acquistata la convinzione che ogni rete omaloidica si possa ridurre con trasformazioni quadratiche alla rete delle rette, ossia che ogni trasformazione cremoniana sia generabile mediante un numero finito di trasformazioni quadratiche. Il CLIFFORD giunse a questa scoperta per via di numerosi esempi e la sua induzione fu comunicata in una memoria di A. CAYLEY (3). Poco dopo (1871) M. NOETHER (4) e J. ROSANES (5) fornivano

(1) Cfr. E. BERTINI: *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, seconda edizione (Principato Messina) 1923, pag. 403.

(2) Cfr. C. SEGRE: *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque*, « Acc. delle Scienze di Torino », Vol. XIX, 1884.

(3) Cfr. A. CAYLEY: *On the rational Trasformation between two spaces*, « Proceedings of the London Math. Soc.. », III, 1869-71.

(4) Cfr. M. NOETHER: *Über Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen*, « Math. Ann. », Bd. III, 1871.

(5) Cfr. J. ROSANES: *Über diejenigen rationalen Substitutionen, welche eine rationale Umkehrung anlassen*, « Crelle's Journal », Bd. 73, 1871.

una base razionale per la riduzione delle reti omaloidiche, dimostrando che in una rete omaloidica le molteplicità dei tre punti base di massima molteplicità soddisfano alla disuguaglianza $r + r_1 + r_2 > n$. In queste dimostrazioni non è considerato il caso dei punti base infinitamente vicini, che tuttavia veniva trattato dal NOETHER [1] l'anno dopo (1872). Il NOETHER osserva che una rete omaloidica dotata di un punto base A r-*plo* con punti base prossimi in direzioni distinte, si può ridurre mediante una trasformazione quadratica, la cui possibilità risulta dall'esistenza di un altro punto base P di molteplicità $k > \frac{1}{2}(n-r)$, che non appartiene all'intorno di primo ordine di A. Questa trasformazione riduttrice è ancora non degenere se il punto P diventa infinitamente vicino ad A, succedendo — sopra un ramo lineare — ad un punto A_1 prossimo ad A. Ma, quando alcuni punti base prossimi ad A in direzioni distinte si avvicinino indefinitamente, dando origine a rami cuspidali, il punto P può cadere sopra uno di tali rami; e ciò dà luogo ad un'eccezione che fu rilevata da C. SEGRE [2]. La critica del SEGRE fu rimossa da G. CASTELNUOVO [3], il quale fece vedere che l'ordine di una rete omaloidica, comunque dotata di punti base infinitamente vicini, si può ridurre mediante una conveniente trasformazione di DE JONQUIÈRES, la quale a sua volta, come fu notato dallo stesso SEGRE, si lascia decomporre in un prodotto di trasformazioni quadratiche. Infine O. CHISINI [4] riuscì a definire direttamente una successione di

---

[1] Cfr. M. NOETHER: *Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen*, « Math. Ann. », Bd. V, 1872.

[2] Cfr. C. SEGRE: *Un'osservazione relativa alla riducibilità delle trasformazioni cremoniane e dei sistemi lineari di curve piane per mezzo di trasformazioni quadratiche;* « R. Acc. Sc. Torino », 1901.

[3] Cfr. G. CASTELNUOVO: *Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano*, « Acc. delle Scienze di Torino », Vol. XXXVI, 1900-1901.

[4] Cfr. O. CHISINI: *Sul teorema di* NOETHER *relativo alla decomponibilità di una trasformazione cremoniana in un prodotto di trasformazioni quadratiche*: « Atti della società dei naturalisti e matematici di Modena », s. 5, vol. VI, 1921.

trasformazioni quadratiche, mediante la quale si riesce ad abbassare l'ordine di una rete omaloidica, comunque dotata di punti base infinitamente vicini. L'analisi del CHISINI riprende e completa l'osservazione del NOETHER relativa al caso di punti infinitamente vicini ad A in direzioni distinte, stabilendo un lemma di cui si vale per dimostrare l'esistenza dei punti base multipli, che occorre considerare. Il prodotto delle trasformazioni quadratiche, definite dal CHISINI, darebbe come risultato la trasformazione di DE JONQUIÈRES, considerata dal CASTELNUOVO.

Assai prima che il teorema della riduzione (mediante trasformazioni quadratiche) di ogni rete omaloidica alla rete delle rette fosse rigorosamente provato, si estesero le ricerche alla riduzione di sistemi lineari di curve piane di genere zero o maggiore di zero e di dimensione diversa.

Nel 1871 il NOETHER, come conseguenza immediata del suo teorema sulle superficie che possiedono un fascio lineare di curve razionali, scopriva che ogni fascio di curve razionali è cremonianamente riducibile ad un fascio di rette. Nel 1877 E. BERTINI [1] era condotto alla riduzione dei fasci di curve ellittiche dal problema di classificare le trasformazioni cremoniane involutorie del piano, cioè le involuzioni del secondo ordine. Finalmente, per limitarci soltanto ai sistemi di curve di genere zero, il problema generale di determinare tutti i tipi di ordine minimo ai quali possono ricondursi cremonianamente i sistemi lineari di curve razionali fu risolto dal GUCCIA [2] nel 1886. Lo studio del GUCCIA — basato sulla generalizzazione del metodo tenuto dal NOETHER per la riduzione delle reti omaloidiche — urta nell'obbiezione critica, sollevata dal SEGRE, della quale abbiamo parlato dianzi. L'esame del caso di eccezione, istituito dal FERRETTI [3] (1902)

---

[1] Cfr. E. BERTINI: *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano*, « Ann. di Mat. », serie II, tomo VIII, 1877.

[2] Cfr. G. B. GUCCIA: *Generalizzazione di un teorema di* NOETHER, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », T. I, 1877.

[3] Cfr. G. FERRETTI: *Sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane irriducibili di genere p; in particolare per i valori* 0, 1, 2 *del genere*; « Rend. Circ. Mat. di Palermo ». T. 16, 1902.

— col metodo di CASTELNUOVO — ha però escluso il dubbio circa l'esistenza di nuovi tipi.

Nella nostra trattazione — che riproduce sostanzialmente la trattazione di NOETHER e di GUCCIA — il caso d'eccezione è stato risolto mercè un'analisi, che generalizza quella svolta dal CHISINI per la riduzione delle reti omaloidiche.

Capitolo III.

LE SUPERFICIE A SEZIONI PIANE ELLITTICHE.

11. Razionalità delle superficie non rigate a sezioni ellittiche.

Sia F una superficie algebrica, per la quale le ∞^3 sezioni piane siano curve di genere 1.

La superficie F sarà rigata oppure no. Nel primo caso la F è certamente *non razionale*: infatti, in una rappresentazione piana della F le generatrici dovrebbero essere rappresentate dalle curve di un certo sistema ∞^1 γ, e per un punto P generico passerebbe *una sola* curva di γ; conseguentemente il sistema γ sarebbe un fascio e perciò razionale [1] e non di genere 1 come si è supposto il sistema delle generatrici della F. Da questo assurdo segue che la rigata ellittica non è razionale.

Invece dimostreremo la seguente proposizione fondamentale:

Ogni superficie algebrica non rigata le cui sezioni piane sono curve ellittiche è razionale.

Sia F_n una superficie algebrica irriducibile non rigata d'ordine n, la quale sia segata da un piano generico in una curva C_n di genere 1. Tra le sezioni piane si possono trovare anche delle curve di genere zero o delle curve spezzate. La totalità delle sezioni riducibili non può essere però doppiamente infinita (giacchè in questa ipotesi, per il teorema di Kronecker-Castelnuovo (cfr. Lib. II, cap. II, n. 7) la F_n sarebbe rigata o la superficie di Steiner); ne segue che per una retta generica r dello spazio non passa alcun piano segante F_n in una curva spezzata.

---

[1] Cfr. ad es.: F. Enriques ed O. Chisini: *Teoria...*, Vol. I, Lib. II, Cap. II, pag. 231.

Sia ora C_n la sezione della F_n con un piano generico π. Come è noto, esiste sul piano π una curva C_{n-3}, aggiunta alla C_n, d'ordine $n-3$, la quale non sega C_n fuori dei punti multipli. Consideriamo la totalità ∞^3 di tutte le curve aggiunte alle sezioni piane. A priori due casi possono presentarsi:

a) le ∞^3 curve invadono tutto lo spazio e quindi per un punto generico ne passano ∞^1; ovvero

b) le ∞^3 curve C_{n-3} sono le sezioni piane di una superficie d'ordine $n-3$: Φ_{n-3}.

Nel primo caso, poichè una C_n irriducibile non è segata dalla aggiunta C_{n-3} fuori dei suoi punti multipli, si avranno per un punto generico P di F_n ∞^1 sezioni piane riducibili. Ma ciò porta che la F_n sia una rigata non potendo essere la superficie di STEINER, le cui sezioni piane sono di genere zero.

Il primo caso essendo da escludere, rimane solamente possibile il secondo e possiamo enunciare che:

Le ∞^3 curve d'ordine $n-3$ aggiunte alle curve di genere uno, sezioni piane di una superficie F_n non rigata, costituiscono una superficie Φ_{n-3} che passa $i-1$ volte per ogni linea i-pla della F_n.

La superficie Φ_{n-3} può essere generata anche così: presa una retta generica r, le curve d'ordine $n-3$ aggiunte alle ∞^1 sezioni (irriducibili) della F_n con gli ∞^1 piani del fascio, che ha come sostegno la r, generano la Φ_{n-3}.

Riprendiamo la retta r ed il piano π per essa, segante la F_n in una C_n e la Φ_{n-3}, nella sua aggiunta d'ordine $n-3$. La curva C_n possiede notoriamente ∞^{n-1} curve aggiunte d'ordine $n-2$, e per $n-2$ punti generici $A_1, A_2, \ldots A_{n-2}$ della retta r passano ∞^1 di queste curve. Una C_{n-2} è dunque individuata quando si imponga ad essa (oltre il passaggio per gli $n-2$ punti $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$) una determinata tangente t in uno di questi punti (sia A_1), che potremo sempre supporre diverso da una delle $n-3$ intersezioni di r con la Φ_{n-3}. Possiamo fissare la t come intersezione del piano della C_{n-2} con un piano τ per A_1, che non contenga la r.

Facciamo variare il piano π nel fascio che ha la r come sostegno; per ogni posizione del piano π rimane allora completamente

individuata una curva di ordine $n-2$, aggiunta alla curva C_n sezione della F_n con π, passante per $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$ e tangente alla t; si viene così a generare una superficie Φ, il cui ordine è certamente non minore di $n-2$. Dimostriamo che esso è effettivamente $n-2$. Se infatti l'ordine di Φ fosse superiore ad $n-2$, poichè le intersezioni delle C_{n-2} con la retta r sono fisse, dovrebbe esistere un piano π, per il quale la corrispondente C_{n-2} si spezzi nella r ed in una C_{n-3} aggiunta, che deve passare per A_1. Ma una C_{n-3} passante per A_1 non può esistere, giacchè A_1 non appartiene a Φ_{n-3}; ne segue che l'ordine di Φ è appunto $n-2$. Abbiamo così costruita una superficie Φ_{n-2} che passa $i-1$ volte per ogni linea i-*pla* della F_n ed è segata da ogni piano in una curva aggiunta alla corrispondente sezione piana della F_n.

Le Φ_{n-2} analoghe formano un sistema lineare ∞^n perchè le loro sezioni sopra un piano sono le $\infty^{n-1} C_{n-2}$ aggiunte alla sezione di F_n ed il piano fa parte di una sola Φ_{n-2} spezzata che contiene la predetta Φ_{n-3}.

Ora le ∞^n Φ_{n-2} segheranno sopra la F_n, fuori delle linee multiple, un sistema lineare ∞^n di curve d'ordine n, essendo n il numero dei punti comuni ad una sezione piana generica di F_n e ad una sua aggiunta C_{n-2} (fuori dei punti multipli); e questo sistema lineare conterrà totalmente il sistema delle sezioni piane. Poichè inoltre due sezioni piane di F_n si incontrano in n punti, così due curve segate sulla F_n da due Φ_{n-2} avranno n punti in comune.

Mediante il sistema delle ∞^n superficie Φ_{n-2}, la F_n può essere trasformata birazionalmente in una superficie Φ_n dello spazio S_n, che risulterà come la F_n d'ordine n e potrà essere proiettata sulla F_n da uno S_{n-4}, non avente punti comuni con essa. La superficie Φ_n risulta normale giacchè le sue sezioni iperpiane sono curve ellittiche dello S_{n-1} e perciò normali. Possiamo dunque affermare:

Ogni superficie F_n d'ordine n, non rigata, a sezioni ellittiche si può ritenere come proiezione di una superficie normale d'ordine n dello spazio ad n dimensioni.

La razionalità della F_n è allora una conseguenza immediata. Proiettando infatti una Φ_n, normale in S_n, da un suo punto in un S_{n-1} si ottiene in questo S_{n-1} una superficie normale d'ordine

$n-1$. Ripetendo lo stesso procedimento, si può ottenere in un S_{n-2} una superficie d'ordine $n-2$ e con successive proiezioni ci si può ridurre ad una superficie del terzo ordine dello spazio a tre dimensioni.

Questo procedimento di proiezione non può condurre ad un cono cubico ellittico. Ciò risulta subito dalla seguente osservazione. Siccome la F_n non è rigata, le curve, che si proietterebbero nelle generatrici del cono, dovrebbero avere un certo ordine $n > 1$ e costituire sopra la Φ_n un fascio ellittico dotato di punti basè (cadenti in punti generici semplici della Φ_n). Ma un tale fascio non può essere ellittico, perchè il gruppo delle tangenti (o, nel caso di tangenti fisse, delle curve osculatrici) alle sue curve in un punto basé descrive una involuzione razionale; il fascio risulta perciò razionale in base al teorema di LÜROTH [1].

In tal guisa si arriva alla conclusione:

Una superficie F_n a sezioni piane di genere uno non rigata è birazionalmente equivalente ad una superficie cubica, diversa dal cono di genere uno.

E quindi si ha il

Teorema di CASTELNUOVO: *Ogni superficie F_n a sezioni ellittiche non rigata è razionale.*

12. Le superficie non rigate d'ordine n normali in S_n.

Le superficie (non rigate) d'ordine n, Φ_n^n, normali in S_n, si lasciano studiare (con P. DEL PEZZO) mediante il procedimento sopra indicato, che permette di proiettarle da $n-3$ punti distinti in superficie cubiche. In particolare questo procedimento permette subito di riconoscere che l'ordine ha al massimo il valore 9. Infatti, se si avesse una Φ_{10} di S_{10}, proiettandola da 7 punti generici si avrebbe una F_3 contenente 7 rette, ciascuna delle quali rappresenterebbe l'intorno di un punto, a due a due prive di punti comuni. Ma la rappresentazione piana della F_3 permette di riconoscere che

[1] Cfr ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria....* Vol. I, Lib. II, Cap. I, pag. 169.

un tale gruppo di 7 rette non può appartenere a questa superficie F_3: date 6 rette a due a due sghembe, ogni altra retta della superficie è incidente a qualcuna di queste.

Vediamo dunque che *le superficie normali* Φ_n^n *di* S_n, *non rigate, rispondono soltanto ai valori* $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Un altro procedimento per lo studio delle superficie (non rigate) d'ordine n, Φ_n^n, normali in S_n, è stato indicato da F. ENRIQUES e permette agevolmente di trovare sia la limitazione $n \leq 9$ per l'ordine, sia il sistema rappresentativo di queste superficie. L'uno e l'altro procedimento permettono di dimostrare che *per* $n \leq 9$ *esistono effettivamente delle superficie* Φ_n^n, *normali in* S_n *e non rigate; esse costituiscono una sola famiglia* (dipendente da parametri variabili con continuità) *salvo il caso* $n = 8$, *nel quale si hanno due famiglie distinte.*

In quanto segue, riporteremo il procedimento di F. ENRIQUES (1).

Incominciamo con l'osservare che per $n = 3$ la superficie d'ordine tre, normale in S_3, è la superficie cubica generale, rappresentabile sul piano mediante il sistema delle cubiche per sei punti base semplici.

Per $n = 4$: *una superficie del quarto ordine normale in* S_4, *è necessariamente la superficie di* SEGRE, *base di un fascio di quadriche, generalmente rappresentabile sul piano dalle cubiche per cinque punti base semplici.* Anzitutto la sezione iperpiana generica della Φ_4 non può essere razionale, giacchè allora la Φ_4 — per i risultati del capitolo precedente — non sarebbe normale. Ne segue che per una quartica, sezione della Φ_4 con uno S_3, passano ∞^1 superficie del secondo ordine: se Φ è una di queste, esistono ∞^5 quadriche di S_4, le quali passano per Φ (2); esse segano sulla Φ_4

(1) Cfr. F. ENRIQUES: *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche*; « Math. Ann. », Bd. 46, 1893-94.

(2) Invero, imponendo alle quadriche di S_4, passanti per Φ, di contenere un punto generico di S_3 (una condizione lineare), si ottiene un sistema lineare ∞^4 costituito dalle quadriche spezzate nello S_3 ed in un iperpiano generico di S_4.

il sistema delle ∞^4 quartiche sezioni iperpiane, giacchè il nominato sistema, essendo la Φ_4 normale, non è ampliabile in un sistema ∞^5. Per ciascuna quartica sezione iperpiana della Φ_4 passano dunque ∞^1 quadriche di S_4, passanti per Φ, e quindi vi è *una* quadrica di S_4, passante per Φ e contenente la Φ_4: ne segue che la Φ_4 è la superficie base di un fascio di quadriche.

Ciò premesso, il procedimento di F. ENRIQUES per lo studio delle Φ_n^n, normali in S_n e non rigate, si fonda sulla considerazione che, per $n > 4$, su ogni Φ_n^n esiste una cubica gobba, ovvero una quartica razionale normale, segante in due punti le sezioni iperpiane residue.

Premettiamo a questo scopo la seguente osservazione: se una sezione iperpiana di una Φ_n^n si spezza, le sue componenti sono curve razionali normali: se infatti vi fosse una curva L_r d'ordine $r < n$, sezione iperpiana parziale della Φ_n^n, la quale appartenesse ad un S_ρ di dimensione $\rho < r$, le intersezioni residue degli iperpiani per S_ρ con la Φ_n^n costituirebbero sulla Φ_n^n un sistema lineare di curve d'ordine $n - r$, di dimensione $n - \rho - 1 \geq n - r$, ciò che è assurdo, perchè le sezioni (ellittiche) della Φ_n^n non possono contenere una g_{n-r} di dimensione maggiore di $n - r - 1$.

Ne segue che una sezione iperpiana parziale d'ordine r della Φ_n^n — ad es. la L_r — determina sulla Φ_n^n un sistema lineare completo di curve analoghe la cui dimensione è $r - 1$. Invero la dimensione del detto sistema non può essere maggiore di $r - 1$, chè allora su di una sezione iperpiana generica della Φ_n^n si avrebbe una g_r^s con $s > r - 1$. La detta dimensione è quindi $r - 1$, giacchè ∞^{r-1} sono gli iperpiani che passano per una generica curva d'ordine $n - r$, *razionale e normale, che insieme ad* L_r *formi una sezione iperpiana di* Φ_n^n.

Dopo ciò sia $n > 4$: vi sono allora infiniti iperpiani bitangenti alla Φ_n^n, che toccano la superficie in un dato punto generico O. Invero gli iperpiani tangenti in O alla Φ_n^n costituiscono un sistema lineare di dimensione maggiore di uno e cioè almeno una rete; riferendosi ad una rappresentazione piana della Φ_n^n, le curve immagini delle intersezioni di Φ_n^n con gli iperpiani tangenti in O costituiscono quindi un sistema lineare di dimensione due almeno.

nel quale esistono infinite curve dotate di punto doppio (1); e queste curve corrispondono a sezioni della Φ_n^n con iperpiani tangenti in O ed in un ulteriore punto. Le nominate sezioni bitangenti sono *spezzate,* essendo delle curve ellittiche normali dotate di due punti doppi; e — per l'osservazione precedente — lo spezzamento avviene in due curve razionali normali, C_r e C_s, passanti per O, aventi *un* ulteriore punto comune, nessuna delle quali può essere una retta, giacchè la Φ_n^n non è rigata.

Poichè la C_r e la C_s si incontrano in due punti, il sistema lineare $|C_r|$, ∞^{r-1}, individuato dalla C_r, sega sulla C_s una g_2; ed analogamente il sistema lineare $|C_s|$, ∞^{s-1}, individuato dalla C_s, sega una g_2 sulla C_r. Ora due casi possono darsi: o le dimensioni di $|C_r|$ e $|C_s|$ sono entrambe ≤ 2, ovvero una di esse — sia quella di $|C_r|$ — è > 2: poichè $|C_r|$ sega su una C_s una g_2, esisterà allora qualche C_r che contenga una generica C_s di $|C_s|$. In altre parole il sistema $|C_s|$ è contenuto o coincide con il sistema $|C_r|$. Se $|C_s|$ è contenuto in $|C_r|$ è $s < r$ e la generica curva di C_r non può quindi contenere come parte una C_s; la dimensione di $|C_s|$ è quindi ≤ 2. Se invece $|C_r|$ e $|C_s|$ coincidono, la serie segata da $|C_s|$ su una generica curva C_r è una g_2^{t-1} indicando con t la comune dimensione di $|C_r|$ e $|C_s|$; e sarà $t \leq 3$. In tutti i casi si può dunque asserire che uno dei sistemi $|C_r|$, $|C_s|$ ha la dimensione ≤ 3 e quindi una delle curve, C_r, C_s ha l'ordine ≤ 4. Perciò, se nessuna delle due curve è una conica, una di esse è una cubica o una quartica razionale normale. Se invece una delle C_r, C_s è una conica, si dimostrerà l'esistenza sulla Φ_n^n di una cubica gobba o di una quartica razionale normale, nel modo seguente.

Sia C_r una conica e C_s abbia l'ordine maggiore di 4 ed appartenga quindi ad un sistema lineare di dimensione maggiore di tre. In questo sistema vi sono delle curve aventi un punto

---

(1) Il luogo dei punti doppi delle curve di una rete è la *curva jacobiana* il cui ordine $(3n-3)$ è sempre maggiore di zero, se $n > 1$; e la jacobiana non può risultare indeterminata finchè le parti variabili delle curve della rete non siano composte con le curve di un fascio.

doppio in un punto generico della Φ_n^n, le quali si spezzano in due curve razionali normali d'ordine ≥ 2 aventi (soltanto) il detto punto comune. Ciascuna di queste due componenti ha *un* punto comune con la C_r; se infatti ciò non fosse, una di esse, C', incontrerebbe la C_r in due punti, e l'altra, C'', non incontrerebbe affatto la C_r: ma ciò è assurdo, perchè gli iperpiani per la $C_r + C'$ segherebbero sulla Φ_n^n un sistema lineare di curve dello stesso ordine di C'' e della stessa dimensione di quest'ordine. Ora, le due curve d'ordini s' ed s'', appartengono a sistemi lineari rispettivamente di dimensione $s' - 1$ ed $s'' - 1$; e poichè si incontrano in *un punto,* ripetendo un ragionamento già esposto, se ne deduce che almeno uno dei numeri s' ed s'' è ≤ 3. Vi è dunque sulla Φ_n^n una cubica gobba, ovvero una delle curve C' o C''' è una conica. In questa ultima ipotesi sia C' una conica: possiamo dire che un iperpiano speciale per la C'' sega la Φ_n^n secondo due coniche (la C_r e la C'); ne segue che un iperpiano generico per C'' sega la Φ_n^n secondo una quartica razionale normale.

Concludendo, rimane effettivamente provata l'esistenza su ogni Φ_n^n di una cubica gobba o di una quartica razionale normale, segante in due punti l'intersezione iperpiana residua.

Ciò posto, è facile arrivare alla rappresentazione piana di ogni Φ_n^n. Supponiamo da prima che la Φ_n^n contenga una cubica gobba L_3. Un iperpiano generico per la L_3 sega ulteriormente la Φ_n^n in una curva irriducibile L_{n-3} razionale normale, d'ordine $n - 3$ in S_{n-3}; e da questo S_{n-3} la Φ_n^n viene proiettata univocamente sopra un piano: invero ciò consegue immediatamente dal fatto che gli S_{n-1} di S_n che passano per l'S_{n-3} da cui si proietta, segano la Φ_n^n secondo cubiche gobbe, che hanno due punti comuni con il nominato S_{n-3}. Una generica sezione iperpiana di Φ_n^n incontra la L_{n-3} in $n - 3$ punti: ne segue che, nella proiezione dall'S_{n-3} di L_{n-3}, la Φ_n^n viene rappresentata su di un piano da un sistema lineare di cubiche.

Supponiamo invece che sulla Φ_n^n esista una quartica L_4 razionale e normale di S_4. Un iperpiano generico per L_4 sega la Φ_n^n in una residua L_{n-4} razionale e normale in uno spazio S_{n-4}. Proiettando la Φ_n^n dal nominato S_{n-4} nello spazio ordinario, si arriva

ad una quadrica F_2: invero gli iperpiani per l'S_{n-4} da cui si proietta intersecano ulteriormente la Φ_n^n in quartiche, che hanno *due* punti in comune con la L_{n-4}. Poichè le sezioni iperpiane generiche della Φ_n^n hanno $n-4$ punti a comune con la L_{n-4}, le loro proiezioni sono delle quartiche ellittiche di F_2. Due casi sono ora possibili: o le quartiche ellittiche, proiezioni delle sezioni iperpiane della Φ_n^n, hanno tutte (almeno) un punto a comune, ovvero non vi è alcun punto comune. Nel primo caso la proiezione stereografica della F_2 da uno dei punti comuni alle quartiche ellittiche, conduce a rappresentare la Φ_n^n mediante un sistema lineare di cubiche. Nel secondo caso la Φ_n^n, per proiezione da un punto generico della F_2, viene rappresentata su di un piano in modo che le sezioni iperpiane siano delle quartiche ellittiche, dotate di due punti doppi e prive di altri punti base.

Riepilogando le cose dette ed includendo anche i casi $n=3$ ed $n=4$, possiamo dunque enunciare il

Teorema di DEL PEZZO: *Ogni superficie algebrica d'ordine n, non rigata, normale nello spazio ad n dimensioni, è razionale e può rappresentarsi sul piano*:

a) con un sistema lineare di cubiche con $9-n$ *punti base* ($n=3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$); ovvero

b) (*per* $n=8$) *con un sistema lineare di quartiche con due punti base doppi.*

Risulta da questo enunciato che esistono delle superficie d'ordine n non rigate e normali nello spazio ad n dimensioni, per qualsivoglia valore di $3 \leq n \leq 9$. Per $n \neq 8$ esiste solamente una famiglia di tali superficie, rappresentate da cubiche per $9-n$ punti semplici. Per $n=8$ si hanno invece due tipi distinti: le superficie rappresentate da cubiche per un punto base e le superficie rappresentate dalle quartiche per due punti base doppi. Questi due tipi di superficie sono realmente distinti, giacchè si vede immediatamente che non esiste alcuna trasformazione cremoniana del piano che muti un sistema lineare di $C_4(A^2B^2)$ in un sistema lineare di $C_3(A)$.

Il risultato precedente porta di conseguenza che ogni sistema lineare semplice e completo (∞^3 almeno) di curve piane ellittiche

è cremonianamente equivalente ad un sistema di cubiche, ovvero al sistema delle quartiche per due punti base doppi. Ciò si può stabilire anche direttamente, ricercando a priori i tipi d'ordine minimo ai quali si possono ricondurre i sistemi lineari completi *di curve piane ellittiche (di dimensione tre almeno).*

Nel numero seguente intraprendiamo precisamente questa ricerca per sistemi di dimensione qualsivoglia.

13. Riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve ellittiche piane.

Sia $|C_m|$ un sistema lineare $\infty^s (s \geq 1)$ di curve ellittiche piane, n il suo grado; chiamiamo A, A_1, A_2, ..., A_ν i punti base del sistema, r, r_1, r_2, ..., r_ν le loro rispettive molteplicità e supponiamo: $r \geq r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_\nu$.

Il sistema $|C_m|$ può essere completo o no. Se il sistema $|C_m|$ non è completo, esso può estendersi considerando la totalità delle curve determinate dai punti base A, A_1, A_2, ..., A_ν con le loro rispettive molteplicità e si ha così *un sistema completo*. Ora, sopra una curva generica (irriducibile) di un sistema completo di genere 1 e grado n, le curve del sistema segano una serie caratteristica completa $g_n^{s-1} = g_n^{n-1}$. In generale la serie caratteristica è non speciale o speciale a seconda che il sistema è regolare o sovrabbondante. Nel caso nostro, la serie caratteristica g_n^{s-1} può essere speciale solamente se $n \leq 2p - 2 = 0$, ossia solamente se $n = 0$, risultando allora $s = 1$.

Ne segue: *un sistema lineare completo di curve ellittiche di dimensione $s > 1$ è sempre regolare ed il suo grado n è uguale alla sua dimensione*: $s = n$.

Un sistema di dimensione uno, cioè *un fascio di curve ellittiche* ha il grado zero ed *è sovrabbondante*: fra le condizioni imposte dai punti base una è conseguenza delle rimanenti. Invero *la serie caratteristica sopra una curva generica del sistema è la g_0^0 canonica, per cui l'indice di specialità vale* 1.

Ciò premesso, veniamo alla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche. Il procedimento è perfettamente parallelo a quello

già esposto per i sistemi lineari di curve razionali, trattandosi sostanzialmente di determinare tutti i tipi birazionalmente distinti di ordine minimo.

Riferiamoci al sistema $|C_m|$ (completo o no) di grado n con i punti base $A, A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ di molteplicità $r, r_1, r_2, \ldots, r_\nu (r \geq r_1 \geq r_2 \ldots \geq r_\nu)$.

Si supponga $\nu + 1 \geq 3$. Dimostriamo la proposizione: *In un sistema lineare di curve piane ellittiche d'ordine m la somma delle molteplicità dei tre punti base più elevati è generalmente maggiore dell'ordine m del sistema.* Fanno eccezione soltanto due casi:

a) il caso in cui, le curve del sistema essendo cubiche, si hanno soltanto punti base semplici, e

b) il caso di un fascio in cui i tre punti base più elevati hanno la stessa molteplicità.

Poichè le curve di $|C_m|$ sono ellittiche e si intersecano a due a due in n punti si avrà:

$$(1) \qquad \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \Sigma \frac{r_i(r_i-1)}{2} = 1$$

$$(2) \qquad \Sigma r_i^2 = m^2 - n.$$

da cui si deducono le

$$(1') \qquad \Sigma r_i^2 = m^2 - n.$$

$$(2') \qquad \Sigma r_i = 3m - n,$$

ovvero le:

$$(1'') \qquad \sum_3^\nu r_i^2 = m^2 - n - r^2 - r_1^2 - r_2^2,$$

$$(2'') \qquad \sum_3^\nu r_i = 3m - n - r - r_1 - r_2.$$

Moltiplicando la (2'') per r_2 e sottraendo la (1'') viene:

$$r_2 \sum_3^\nu r_i - \sum_3^\nu r_i^2 = m(3r_2 - m) - n(r_2 - 1) - r_2(r + r_1) + r^2 + r_1^2.$$

Ora, per le ipotesi fatte, il primo membro di questa uguaglianza è maggiore o uguale a zero, essendo zero solamente se $r_2 = r_3 = \ldots = r_\nu$. Quindi sarà anche:

$$m(3r_2 - m) - n(r_2 - 1) - r_2(r + r_1) + r^2 + r_1^2 \geq 0.$$

Se ora è $r + r_1 + r_2 \leq m$, sostituendo, si ottiene:

$$2(r_2^2 - r_1 r) + n - r_2 n \geq 0.$$

Questa disuguaglianza, avendosi $r_2^2 \leq r_1 r$ e $n - r_2 n \leq 0$, è manifestamente assurda, a meno che non sia contemporaneamente:

$$r_2^2 - r_1 r = 0, \quad n - r_2 n = 0.$$

Dalla prima si ha necessariamente (poichè $r \geq r_1 \geq r_2$): $r = r_1 = r_2$. La seconda può essere soddisfatta o per $n = 0$ ovvero per $r_2 = 1$. Ne concludiamo che è $r + r_1 + r_2 > m$ in ogni caso, salvo le due eccezioni sopra nominate, cioè:

a) se il sistema ha solamente punti base semplici, ossia è costituito dalle ∞^{9-i} cubiche passanti per $i \geq 3$ punti semplici;

b) se il sistema è un fascio, per cui è $r = r_1 = r_2$.

Supponiamo che il sistema lineare $|C_m|$ sia tale che $r + r_1 + r_2 > m$. Tranne il caso particolare — che discutiamo più avanti — in cui i punti A_1 ed A_2 siano infinitamente vicini al punto A in due direzioni distinte ovvero si succedano sopra un ramo cuspidale, esiste sempre una trasformazione quadratica, che trasforma il sistema lineare $|C_m|$ in un sistema lineare $|C_{m'}$ il cui ordine è $m' = 2m - r - r_1 - r_2 < m$.

Per il sistema lineare $|C_{m'}|$ si può ripetere lo stesso ragionamento fatto per $|C_m|$ e pervenire così ad un sistema $C_{m''}$ d'ordine $m'' < m'$. Proseguendo in questo modo, il procedimento si può arrestare solamente in tre casi:

a) ad un certo punto si arriva ad un sistema, che possiede meno di tre punti base, ovvero

b) si cade in un sistema lineare di cubiche per $i \geq 3$ punti base semplici o in un fascio, per cui $r = r_1 = r_2$, o infine

c) i tre punti base di massima molteplicità non possono essere presi come punti base di una rete di coniche *irriducibili*.

Poichè i sistemi lineari completi di curve ellittiche, con meno di tre punti base, non possono essere evidentemente altro che:

il sistema ∞^9 di tutte le cubiche del piano;

il sistema ∞^8 delle cubiche per un punto base semplice;

il sistema ∞^7 delle cubiche per due punti base semplici;

il sistema ∞^8 delle quartiche dotate di due punti doppi,

vediamo che, *tralasciando per il momento la discussione del caso d'eccezione c), ogni sistema lineare completo di curve ellittiche può ridursi con trasformazioni quadratiche successive ad uno dei tipi seguenti:*

1) *sistema lineare completo delle cubiche per* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 *punti base semplici;*

2) *sistema* ∞^8 *delle quartiche con due punti base doppi;*

3) *fascio di curve ellittiche, nel quale si ha* $r = r_1 = r_2$.

Daremo più tardi la costruzione effettiva di tutti i tipi possibili di questi fasci.

I sistemi non completi di curve ellittiche si riducono invece ai sistemi contenuti nei sistemi completi anzidetti, avendone grado uguale e dimensione minore.

Passiamo ora a discutere il caso, in cui nel sistema $|C_m|$ stesso o in uno dei suoi successivi trasformati i tre punti di molteplicità massima non possano essere presi come punti base di una rete di coniche *irriducibili*. Dimostreremo che in questo caso l'ordine del sistema può sempre essere abbassato con una conveniente successione di trasformazioni quadratiche, sicchè perverremo al risultato che tutti e soli i tipi, birazionalmente distinti, di sistemi lineari di curve ellittiche sono quelli, che abbiamo trovato precedentemente. La conclusione che abbiamo in vista può essere ottenuta immediatamente, qualora si premetta il seguente lemma, analogo a quello di Chisini, dianzi usato per la riduzione dei sistemi lineari di curve razionali.

Lemma: *Se* A *è un punto base di massima molteplicità per un sistema lineare* ∞^1 *almeno* $|C_m|$ *di curve ellittiche d'ordine* m, *ed i punti base del sistema* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_t$ *prossimi ad* A *posseggono molteplicità* $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_t$ *tali che*

$$r + r_1 + r_2 + \ldots + r_t > m,$$

allora esiste un altro punto base P (*proprio o almeno non prossimo ad* A), *la cui molteplicità* k *soddisfa alla relazione*:

$$2k > m - r.$$

La dimostrazione di questo lemma è completamente analoga a

quella già svolta per il caso di un sistema lineare di curve razionali.

Incominciamo col dimostrare, che esiste certamente un punto base di $|C_m|$, non prossimo ad A.

Osserviamo a questo scopo che il grado n del sistema, nelle ipotesi ammesse, soddisfa alla disuguaglianza:

$$n \leq 2m - 1.$$

Poichè infatti per ipotesi è $\sum_0^t r_i > m$, sarà altresì la somma delle molteplicità di *tutti* i punti base del sistema:

$$\sum_0^\nu r_i \geq \sum_0^t r_i > m.$$

Ma è, per la (2'):

$$\sum_0^\nu r_i = 3m - n,$$

e quindi:

$$3m - n > m,$$

ossia:

$$n \leq 2m - 1.$$

Ciò premesso, è facile dimostrare che in qualsiasi sistema lineare di curve ellittiche, per il quale sia $n \leq 2m - 1$, è

$$r < r_1 + r_2 + \ldots + r_\nu.$$

Con lo stesso ragionamento usato nel caso in cui $|C_m|$ è un sistema lineare di curve razionali, si dimostra infatti che:

$$m \cdot \sum_1^\nu r_i \geq r \sum_1^\nu r_i + \sum_1^\nu r_i^2,$$

da cui segue, per la (1'):

$$(m - r) \sum_1^\nu r_i \geq m^2 - n - r^2.$$

Poichè $n \leq 2m - 1$ viene anche:

$$(m - r) \sum_1^\nu r_i \geq m^2 - 2m + 1 - r^2.$$

Se ora fosse $\sum_1^\nu r_i \leq r$, verrebbe:

$$(m - r)r \geq m^2 - 2m + 1 - r^2,$$

ossia:

$$mr \geq m(m - 2) + 1.$$

Questa relazione è manifestamente assurda se $r < m-1$. Ma non può essere $r = m-1$, perchè le curve di $|C_m|$ sarebbero razionali. Ne viene che deve essere:

$$r < \sum_1^{\nu} r_i.$$

Siccome d'altra parte si ha:

$$\sum_1^{t} r_i \leq r,$$

ne segue che devono necessariamente esistere dei punti base di $|C_m|$ non prossimi ad A.

Ora per il punto di massima molteplicità fuori di A, A_1, A_2, ..., A_t, sarà:

$$k \geq \frac{m^2 - n - r^2 - r_1^2 - r_2^2 - \ldots - r_t^2}{3m - n - r - r_1 - r_2 - \ldots - r_t}$$

e siccome:

$$r + r_1 + r_2 + \ldots + r_t > m,$$

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_t \leq r,$$

$$r_1 \leq m - r, \quad r_2 \leq m - r, \quad \ldots, \quad r_t \leq m - r,$$

si avrà:

$$k > \frac{m^2 - n - r^2 - r(m-r)}{3m - n - m} = \frac{m(m-r) - n}{2m - n}.$$

È facile provare che:

$$\frac{m(m-r) - n}{2m - n} \geq \frac{m(m-r)}{2m} = \frac{m-r}{2};$$

infatti da questa disuguaglianza, supposta soddisfatta, si trae senz'altro: $r \leq m - 2$.

Il nostro lemma rimane così dimostrato.

Basta ora ripetere il ragionamento esposto nel caso di un sistema lineare di curve razionali [1], per poter senz'altro concludere:

L'ordine di un qualsivoglia sistema lineare di curve ellittiche, nel quale i tre punti di molteplicità massima (diventando infini-

---

[1] Cfr. cap. prec. n. 10, pag. 293.

tamente vicini) non possono essere punti fondamentali di una trasformazione quadratica, può sempre venir ridotto con una conveniente successione di trasformazioni quadratiche.

Ne segue la proposizione:

Qualunque sistema lineare completo di curve ellittiche di dimensione $s > 1$ può ridursi, con una trasformazione cremoniana del piano, ad un sistema di cubiche con 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 *punti base semplici ovvero al sistema ∞^8 delle quartiche con due punti base doppi.*

Per quanto riguarda i fasci di curve ellittiche, possiamo dire: ogni fascio di curve ellittiche può essere trasformato cremonianamente in un fascio, per cui i tre punti di molteplicità massima hanno molteplicità uguali ($r = r_1 = r_2$). Alla determinazione di tutti i tipi di fasci di curve ellittiche sono volte appunto le considerazioni che seguono.

OSSERVAZIONE. - Giova enunciare esplicitamente la seguente proposizione, che è contenuta in quanto precede:

Ogni rete di grado due di curve ellittiche piane si può trasformare birazionalmente nella rete delle cubiche per 7 punti base semplici.

14. I fasci di curve ellittiche.

Abbiamo detto che ogni fascio di curve ellittiche piane è cremonianamente equivalente ad un fascio, nel quale i tre punti di molteplicità massima hanno molteplicità uguale: $r = r_1 = r_2$.

Ricordiamo ora che per un qualsivoglia sistema lineare di curve ellittiche, i cui punti base siano A, A_1, A_2, ..., A_ν con le rispettive molteplicità r, r_1, r_2, ..., r_ν ($r \geq r_1 \geq r_2 \ldots \geq r_\nu$) si è dimostrata la disuguaglianza (cfr. pag. 315):

$$r_2 \sum_3^\nu r_i - \sum_3^\nu r_i^2 = m(3r_2 - m) - n(r_2 - 1) - r_2(r + r_1) + r^2 + r_1^2 \geq 0,$$

nella quale vale il segno di uguaglianza solamente nel caso in cui $r_2 = r_3 = \ldots = r_\nu$.

Se il sistema è un fascio ($n=0$) per il quale si abbia $r=r_1=r_2$, la anzidetta disuguaglianza si scrive:

$$m(3r-m)\geq 0$$

ossia:

$$3r\geq m.$$

Ma deve qui essere $3r=m$, giacchè, come sappiamo, per un fascio in cui $r=r_1=r_2$ non è

$$r+r_1+r_2=3r>m \text{ ma } r+r_1+r_2\leq m.$$

Ne segue: *Ogni fascio di curve ellittiche può essere cremonianamente trasformato in un fascio, in cui tutti i punti base hanno uguale molteplicità* ($r=r_1=r_2=\ldots=r_\nu$).

Siccome poi deve aversi per la (2') del n. prec.:

$$\sum_0^\nu r_i=3m-n=3m,$$

ne viene:

$$(\nu+1)r=3m=9r,$$

ossia:

$$\nu+1=9.$$

D'onde la proposizione: *Ogni fascio di curve ellittiche è birazionalmente equivalente ad un fascio di curve d'ordine* $3r$ *con* 9 *punti base r-pli.*

La costruzione effettiva di un tal fascio si può dare con Halphen, partendo da una cubica sopra cui i 9 punti base debbono costituire un gruppo particolare, *come segue.*

Notiamo anzitutto che, presi nel piano 9 punti in posizione generica, esiste *una curva* d'ordine $3r$ che passa per essi con la molteplicità r, la quale si riduce alla cubica determinata dai 9 punti contata r volte; se invece si abbia una curva irriducibile C_{3r}, d'ordine $3r$, con 9 punti r-*pli* $O_1, O_2, \ldots, O_9$, questa apparterrà al fascio determinato dalla C_{3r} e dalla cubica C_3 passante per $O_1, O_2, \ldots, O_9$, contata r volte. Ciò è d'accordo con la osservazione fatta innanzi, che i fasci di curve ellittiche hanno la sovrabbondanza 1: i punti base $O_1, O_2, \ldots, O_9$ del nostro fascio $|C_{3r}|$ non potranno assumersi ad arbitrio nel piano, o sopra la cubica C_3; anzi, dopo aver scelti su C_3 otto punti $O_1, O_2, \ldots, O_8$, la

ricerca del punto O_9 (appartenente alla stessa cubica) costituirà un problema determinato.

Per risolvere questo problema si considerino le curve d'ordine $3r$ passanti r volte per $O_1, O_2, \ldots, O_8$: esse segheranno sulla cubica C_3 una g_{9r}^{r-1} la quale possiederà r^2 punti r - *pli* (1): uno di questi punti (che non sia r/h - *plo* per la serie segata sulla cubica dalle curve d'ordine $3 \cdot r/h$ passanti r/h volte per $O_1, O_2, \ldots, O_8$, la quale serie moltiplicata per h dà la g_{9r}^{r-1}) costituirà precisamente uno dei punti O_9 che risolvono il nostro problema. Infatti quando imponiamo ad una curva C_{3r} d'ordine $3r$, già passante con le molteplicità r per $O_1, O_2, \ldots, O_8$, di avere come r-*plo* il nominato punto O_9, si è condotti a scrivere $\frac{1}{2}r(r+1)$ equazioni lineari, r delle quali esprimono il contatto r-punto della C_{3r} con la cubica in O_9; e fra queste ultime una è conseguenza delle rimanenti. Emerge di qui che le $C_{3r}(O_1^r O_2^r \ldots O_8^r O_9^r)$ sono almeno ∞^1; è poi chiaro che esse non possono essere di più, non avendo intersezioni variabili ed essendo irriducibili: l'irriducibilità delle C_{3r} segue dall'aver escluso che O_9 possa costituire insieme ad $O_1, O_2, \ldots, O_8$ il gruppo dei punti base s-*pli* (di molteplicità $s = r/h$) per un fascio di curve d'ordine $3s$, divisore di $3r$.

NOTA. - Giova notare che i fasci d'HALPHEN di C_{3n} $(O_1^n\ O_2^n \ldots \ldots O_9^n)$ sono sistemi lineari d'ordine *minimo*, non potendo esistere alcuna *trasformazione cremoniana*, che ne abbassi l'ordine. Se invero esistesse una tale trasformazione, essendo s l'ordine della rete omaloidica ad essa corrispondente ed $r_1, r_2, \ldots, r_9$ le molteplicità in $O_1, O_2, \ldots, O_9$ rispettivamente, per abbassare l'ordine del fascio dovrebbe essere:

$$3ns - n(r_1 + r_2 + \ldots + r_9) < 3n,$$

(1) Si rammenti che una g_m^{s-1} sopra una curva di genere p possiede:

$$n_s = ms + \frac{s(s-1)}{2}(2p-2)$$

punti $s-pli$. Cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. I, pag. 69.

ossia:

$$3s - 3 < r_1 + r_2 + \ldots + r_9.$$

Ma la somma delle molteplicità di *tutti* i punti base di una rete omaloidica vale $3s - 3$. Ne segue che l'ultima relazione scritta è assurda.

15. Nota sui fasci d'Halphen, i cui punti base appartengono ad una cubica ellittica degenere.

Nella costruzione dei fasci d'HALPHEN, che abbiamo ora esposto, si è implicitamente fatta l'ipotesi che la cubica C_3, determinata dai nove punti base $O_1, O_2, \ldots, O_9$ di un fascio, sia una cubica ellittica irriducibile. Da questa ipotesi si deduce infatti che le $C_3, (O_1^r O_2^r \ldots O_8^r)$ segano sulla C_3 una g_r^{r-1} e non una g_r^r completa.

Si domanda ora se la costruzione sopra esposta sia ancora possibile quando la cubica C_3 degeneri, per acquisto di un punto doppio o per uno spezzamento qualsiasi (in parti distinte o multiple).

Per rispondere a questa questione, incominciamo con l'osservare che una cubica di genere effettivo zero, cioè dotata di un punto doppio, può ritenersi come una curva spezzata in due parti razionali, una delle quali infinitesima, e perciò costituenti insieme una curva di genere virtuale uno. Più in generale, una cubica comunque composta di parti di genere zero (finite o infinitesime) si può ritenere virtualmente di genere uno o ellittica, in quanto si consideri come limite di una curva ellittica. Ora, agli effetti della costruzione d'HALPHEN sopra esposta, conviene porre la seguente definizione:

Una cubica C_3 razionale o comunque spezzata in parti distinte o sovrapposte, sulla quale siano fissati otto punti $O_1, O_2, \ldots, O_8$ (distinti o infinitamente vicini) si dirà virtualmente ellittica, quando il fascio delle cubiche, determinato dai detti otto punti, sia un fascio di curve ellittiche (irriducibili), quando cioè la C_3 si possa considerare come limite di una cubica ellittica passante per $O_1, O_2, \ldots, O_8$.

In base a questa definizione, la qualifica di « virtualmente ellittica » data ad una C_3 non è assoluta, ma dipende essenzial-

mente dal gruppo di otto punti O_1, O_2, ..., O_8, dato sulla C_3. Prendiamo ad esempio una cubica C_3 con punto doppio O e su di essa otto punti O_1, O_2, ..., O_8, nessuno dei quali cada in O: la nominata C_3 è da considerarsi virtualmente ellittica, giacchè il fascio di cubiche ellittiche determinato da O_1, O_2, ..., O_8, contiene la C_3 stessa. Sulla C_3 prendiamo invece O_1 coincidente con O ed O_2, O_3 infinitamente vicini ad O, ciascuno su uno dei rami passanti per O; ed O_4, O_5, O_6, O_7, O_8 siano in posizione generica sulla C_3: la C_3 *non può* ora considerarsi come virtualmente ellittica, giacchè le ∞^1 cubiche determinate dal passaggio per O_1, O_2, ..., O_8 possiedono tutte il punto O come doppio e sono quindi razionali.

L'importanza della definizione ora data è messa in luce dalla seguente proposizione:

*Condizione necessaria perchè, a partire da otto punti O_1, O_2, ..., O_8 dati sopra una cubica C_3 razionale o comunque spezzata in parti distinte o coincidenti, si possa costruire un fascio d'*HALPHEN *di curve irriducibili d'ordine $3r (r \geq 2)$ è che* (in relazione agli otto punti O_1, O_2, ..., O_8) *la cubica C_3 sia virtualmente ellittica.*

Sia infatti la C_3 non virtualmente ellittica e mostriamo che in questa ipotesi il fascio d'HALPHEN non si può costruire.

Nella nostra ipotesi il fascio di cubiche, determinato da O_1 O_2, ..., O_8, è costituito da cubiche ellittiche degeneri, dotate cioè di punto doppio o spezzate. Poichè il caso in cui esista un punto doppio si può considerare per una cubica (ellittica) come uno spezzamento (nella cubica con punto doppio e nell'intorno del punto doppio), possiamo brevemente dire, che, se la C_3 non è virtualmente ellittica, tutte le cubiche per O_1, O_2, ..., O_8 sono spezzate (in parti finite o infinitesime). Per il nostro fascio esisterà dunque una parte (finita o infinitesima) comune a tutte le curve di esso. Questa parte, staccandosi dalle cubiche per O_1, O_2, ..., O_8, si stacca anche dalle sestiche $C_6(O_1^2 O_2^2 \ldots O_8^2)$ ed in generale dalle curve $C_{3r}(O_1^r O_2^r \ldots O_8^r)$. Dunque se la C_3 non è virtualmente ellittica, non esistono curve *irriducibili* d'ordine $3r$, passanti r volte per O_1, O_2, ..., O_8 (o, per lo meno, non esistono C_{3r} con 8 punti multipli di molteplicità *effettiva* r); e a maggior ragione quindi non possono esistere dei fasci d'HALPHEN.

La condizione enunciata può apparire a prima vista anche sufficiente: effettivamente se la C_3, su cui giacciono O_1, O_2, ..., O_8, sia virtualmente ellittica, la costruzione d'HALPHEN dianzi esposta si può eseguire senza alcun inconveniente e determina (se $r > 2$ in più modi) il punto O_9.

Consideriamo una cubica generica K_3 per O_1, O_2, ..., O_8: essa sarà ellittica (e quindi irriducibile). Se si vuol costruire un fascio di sestiche, passanti doppiamente per O_1, O_2, ..., O_8 e per un punto O_9 di K_3, si è tratti a considerare la serie segata sulla K_3 dalle $C_6(O_1^2 O_2^2 \dots O_8^2)$: *il fatto che questa serie sia una* g_2^1 e non una g_2^2 risulta a priori perchè la K_3 è ellittica (ed irriducibile); ma risulta anche da ciò che la cubica K_3 fa parte di $\infty^1 C_6(O_1^2 O_2^2 \dots O_8^2)$ spezzate, la cui parte residua appartiene al fascio delle cubiche (irriducibili) passanti per O_1, O_2, ..., O_8: per conseguenza anche sulla C_3 (o su una parte razionale, finita ovvero infinitesima di essa) si presenterà una g_2^1 e non una g_2^2.

Lo stesso ragionamento dimostra, che le $C_3, (O_1^r O_2^r \dots O_8^r)$ segano sulla C_3 una g_r^{r-1} e non una g_r^r. Ora di questa g_r^{r-1} si possono determinare i punti *r - pli*, i quali sono in numero di r. Uno di essi è il nono punto base del fascio di cubiche, passanti per O_1, O_2, ..., O_8; gli altri $r-1$, ripetendo lo stesso ragionamento usato nel caso generale, danno invece luogo a fasci (o eventualmente a sistemi lineari più ampi) di curve $C_3, (O_1^r O_2^r \dots O_9^r)$. Senonchè occorre esaminare se i fasci ottenuti siano costituiti da curve irriducibili ovvero da curve riducibili. Solamente nel primo caso si può parlare di un fascio d'HALPHEN, propriamente detto.

Ora il caso in cui il fascio sia costituito da curve riducibili può effettivamente verificarsi, come dimostra il semplice esempio di una cubica C_3 dotata di *cuspide* O. Se infatti si prendono O_1, O_2, ... O_8 in modo generico sopra una siffatta C_3, le $C_6(O_1^2 O_2^2 \dots O_8^2)$ segano sulla C_3 una g_2^1 che ha due punti doppi; uno di essi è il nono punto base del fascio di $C_3(O_1 O_2 \dots O_8)$ e l'altro coincide con la cuspide O, perchè le ∞^1 $C_6(O_1^2 O_2^2 \dots O_8^2 O)$ sono da considerarsi *tangenti* alla C_3 in O avendo la C_3 nell'intorno di O due punti infinitamente vicini, cioè succedentisi sopra un ramo

cuspidale. Il punto O_9 coincide così con la cuspide O: se ora si impone che il punto O sia doppio, si ottiene bensì un fascio di $C_6\,(O_1^2\,O_2^2 \ldots O_8^2\,O^2)$, ma le curve di questo fascio sono spezzate nella C_3 e nelle cubiche del fascio determinato da $O_1, O_2, \ldots, O_8$.

La condizione che la cubica C_3 su cui giacciono $O_1, O_2, \ldots, O_8$ sia virtualmente ellittica è dunque *necessaria ma non sufficiente, perchè esistano dei fasci d'*Halphen.

Ora, un esame più minuto prova che *sopra una C_3, virtualmente ellittica rispetto agli otto punti $O_1, O_2, \ldots, O_8$, esiste sempre una coppia neutra per le $C_{3r}\,(O_1^r\,O_2^r \ldots O_8^r)$ $(r \geq 2)$* e che *la condizione ulteriore che deve essere verificata per la C_3, affinchè esistano dei fasci d'*Halphen, *è che la nominata coppia neutra sia costituita da due punti distinti* (e non coincidenti).

Il lettore troverà questo esame in una memoria di F. Conforto [1]. Qui basterà accennare schematicamente come si arrivi al risultato anzidetto.

Il metodo usato permette non solo di stabilire il risultato che abbiamo in vista, ma anche di trovare *i tipi, a cui si riducono cremonianamente, i fasci d'*Halphen, *che hanno i loro punti base sopra una cubica ellittica degenere.*

Ecco come si può procedere:

a) Si operi da prima come se la condizione che la C_3 sia virtualmente ellittica rispetto ad $O_1, O_2, \ldots, O_8$, sia sufficiente oltrechè necessaria; si ricerchino cioè tutti i possibili fasci di $C_{3r}\,(O_1^r\,O_2^r \ldots O_8^r)$ $(r \geq 2)$, che abbiano i punti base $O_1, O_2, \ldots, O_8$ su di una cubica C_3 virtualmente ellittica rispetto ad $O_1, O_2, \ldots, O_8$, il nono punto base O_9 rimanendo determinato da $O_1, O_2, \ldots, O_8$ mediante la costruzione d'Halphen, cioè come punto r-*plo* della g_r^{r-1} segata dalle $C_{3r}\,(O_1^r\,O_2^r \ldots O_8^r)$ su di una parte razionale della C_3. I fasci che così si otterranno saranno costituiti da curve *irriducibili* o *riducibili*.

La ricerca sopraddetta equivale a determinare tutte le configurazioni di otto punti, rispetto alle quali una C_3 degenere in un

[1] Cfr. F. Conforto: *Sui fasci* d'Halphen, *i cui punti base appartengono ad una cubica ellittica degenere*; « Memorie della R. Acc. dei Lincei », 1936.

modo determinato sia virtualmente ellittica. Essa porta ad un gran numero di casi possibili (76), i quali tuttavia si riducono con trasformazioni cremoniane a 6 tipi ben definiti.

b) Su ognuno dei sei tipi nominati è facile mettere in evidenza una *coppia neutra per le* C_3, $(O_1^r O_2^r \dots O_8^r)$; ed una *coppia neutra* esiste dunque anche per tutti i 76 casi, che può presentare una C_3 degenere, virtualmente ellittica.

c) Infine si dimostra che dei sei tipi ottenuti, due possiedono una coppia neutra di punti distinti e gli altri una coppia neutra, costituita da punti coincidenti; ed un esame diretto prova che per i tipi a coppia neutra distinta esistono dei fasci d'HALPHEN, mentre tali fasci sono riducibili per i tipi a coppia neutra costituita da punti coincidenti.

Si ottiene così il seguente risultato, che ci limitiamo qui ad enunciare:

Condizione necessaria e sufficiente, perchè, a partire da otto punti $O_1, O_2, \dots, O_8$ *dati sopra una* C_3 *razionale o comunque spezzata in parti distinte o coincidenti (finite ovvero infinitesime), si possa costruire un fascio d'*HALPHEN *di curve (irriducibili) d'ordine* $3r (r \geq 2)$, *è che la cubica* C_3 *sia virtualmente ellittica rispetto al gruppo di punti* $O_1, O_2, \dots, O_8$ *e che la coppia neutra per le* C_3, $(O_1^r O_2^r \dots O_8^r)$ *esistente sulla* C_3 *sia costituita da punti distinti.*

*Ogni fascio d'*HALPHEN *di curve (irriducibili) d'ordine* $3r (r \geq 2)$, *passanti r volte per nove punti* $O_1, O_2, \dots, O_9$ *di una cubica razionale o comunque spezzata, è cremonianamente equivalente:*

1) *ad un fascio per cui* $O_1, O_2, \dots, O_9$ *giacciono su di una* C_3 *non spezzata dotata di un nodo O: i nove punti* $O_1, O_2, \dots, O_9$ *sono tutti distinti da O, ovvero uno di essi — ad es.* O_1 *— coincide con O; in questo caso* O_1 *è seguito da* $1 \leq i \leq 8$ *punti infinitamente vicini, dei quali* $i - 1$ *si succedono sopra uno dei rami della* C_3, *passanti per* O_1, *mentre l'*i*— esimo giace nell'intorno di* O_{i-1}, *ma non è nè l'*i*— esimo punto successivo ad O sulla* C_3 *nè il punto comune all'intorno di* O_{i-1} *ed all'intorno di* O_{i-2}; *ovvero*

2) *ad un fascio per cui i punti* $O_1, O_2, \dots, O_9$ *giacciono su di una* C_3 *spezzata in una conica* C_2 *ed in una retta r secantisi: il*

punto O_1 è un punto comune alla C_2 ed alla r ed è seguito da 6 *punti infinitamente vicini — O_2, O_3, ..., O_7 — dei quali cinque, cioè O_2, O_3, ..., O_6, si succedono sul ramo della C_2, uscente da O_1, mentre O_7 giace nell'intorno di O_6, ma non è nè il sesto punto successivo ad O_1 sulla C_2 nè il punto comune all'intorno di O_6 ed all'intorno di O_5; infine O_8 ed O_9 stanno sulla r.*

I due tipi di fasci d'HALPHEN *ora descritti sono cremonianamente irriducibili l'uno all'altro* (1).

16. Nota storica.

Prima ancora di proporsi determinatamente lo studio delle superficie a sezioni ellittiche, i geometri hanno incontrato queste superficie come superficie d'ordine n normali nello spazio ad n dimensioni. P. DEL PEZZO le ha studiate (2) col procedimento, da noi accennato, di proiezione da $n-3$ punti sopra una superficie cubica. Il DEL PEZZO ha dimostrato che delle Φ_n^n non rigate possono esistere solamenti in spazi di dimensione $3 \leq n \leq 9$, e che queste superficie possono essere rappresentate su di un piano dalle cubiche per $9-n$ punti base, con la sola eccezione di una certa Φ_8^8, la quale si rappresenta mediante le quartiche dotate di due punti doppi.

Quasi contemporaneamente alle ricerche di DEL PEZZO si svolgono le ricerche sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane ellittiche. Questi studi incominciano con la riduzione dei fasci di curve ellittiche, che è dovuta ad E. BERTINI (3), il quale vi è stato condotto dal problema di classificare le trasformazioni cremoniane involutorie del piano, cioè le invo-

---

(1) Cfr. F. CONFORTO: *Sui tipi cremonianamente distinti a cui si riducono i fasci d'*HALPHEN, *che hanno i loro punti base su di una cubica ellittica degenere*, « Rend. del Sem. Mat. dell'Università di Roma », 1936.

(2) Cfr. P. DEL PEZZO: *Sulle superficie dell'n.mo ordine immerse nello spazio di n dimensioni*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », T. I. (1887).

(3) Cfr. E. BERTINI: *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano*, « Annali di Matematica », T. VIII, Serie II (1877).

luzioni del secondo ordine. Il BERTINI dimostra che ogni fascio di curve ellittiche piane si può ricondurre cremonianamente ad un fascio d'HALPHEN, cioè ad un fascio di curve d'ordine $3i$ passanti per 9 punti i-*pli*. I fasci di questo tipo erano già stati considerati precedentemente da G. E. HALPHEN [1], il quale ne aveva dato la costruzione considerando il problema come un caso di bisezione dell'argomento delle funzioni ellittiche. Il caso di un sistema lineare di curve piane ellittiche di dimensione maggiore di uno (e quindi regolare) è stato trattato da G. B. GUCCIA [2], con il metodo da noi esposto, che generalizza il metodo da lui stesso seguito, sulle traccie di NOETHER, per i sistemi lineari qualsiasi di curve piane razionali. La trattazione di GUCCIA urta nell'obbiezione critica, sollevata da C. SEGRE, in ordine alla possibile degenerazione della trasformazione quadratica definita da 3 punti infinitamente vicini. Questa obbiezione si potrebbe rimuovere, con le considerazioni dovute al CASTELNUOVO, di cui abbiamo parlato. Ma più direttamente può essere superata applicando un lemma che, per le reti omaloidiche, ha sviluppato il CHISINI.

Il legame tra le ricerche sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane e le ricerche di DEL PEZZO è stato messo esplicitamente in luce da C. SEGRE [3], il quale ha osservato la identità del problema della riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari completi di curve ellittiche piane e del problema di classificare le superficie razionali e normali a sezioni di genere uno.

Dopo queste ricerche, era acquisito il risultato, che ogni superficie a sezioni ellittiche razionale (e quindi non rigata) è proiezione di una Φ_n normale in S_n. Però restava il dubbio, che tutte le superficie a sezioni ellittiche non rigate fossero razionali. A que-

---

(1) Cfr. G. E. HALPHEN: *Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles*, « Bulletin de la Société math. de France », T. X.

(2) Cfr. G. B. GUCCIA: *Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche e sopra un teorema generale delle curve algebriche di genere p;* « Rend. del Circ. Mat. di Palermo », T. I (1887). Cfr. anche V. MARTINETTI: *Sui sistemi lineari di genere* 1; « Rend. del R. Ist. Lombardo » (1887).

(3) Cfr. C. SEGRE: *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p;* « Rend. del Circ. Mat. di Palermo », T. I (1887).

sto problema ha risposto G. CASTELNUOVO (1), il quale ha fatto vedere, indipendentemente dalla razionalità, che ogni superficie a sezioni ellittiche non rigata può ritenersi proiezione di una Φ_n non rigata normale in S_n.

NOTIZIA SUI SISTEMI LINEARI D'ORDINE MINIMO DI CURVE PIANE DI GENERE DUE E TRE. - La ricerca di tutti i sistemi lineari d'ordine minimo di curve piane d'un certo genere p, può essere affrontata con il procedimento (inaugurato da M. NOETHER) di riduzione mediante una successione di trasformazioni quadratiche, da noi diffusamente esposto per $p = 0$ ed 1. Le difficoltà vanno tuttavia crescendo notevolmente, giacchè col crescere del genere p cresce il numero dei sistemi per cui non è più verificata la relazione fondamentale $r + r_1 + r_2 > n$ ed il numero dei sistemi che riescono sovrabbondanti: si osservi infatti che per questi ultimi sistemi il metodo ricordato dimostra soltanto la loro possibilità *aritmetica*; l'effettiva esistenza del sistema rimane dopo ciò ancora dubbia e deve esere discussa caso per caso. Tuttavia per $p = 2$ e 3, il metodo ha dato ancora dei risultati, che ci proponiamo qui di riassumere.

Quando $p = 2$, un sistema lineare completo ∞^1 almeno, è sovrabbondante solo quando sia un fascio od una rete, il suo grado essendo inferiore od uguale a 2. Limitandoci per il momento ai sistemi lineari *regolari* si trovano facilmente i seguenti tipi d'ordine minimo:

a) sistema lineare ∞^{11-i}, *di grado* $12 - i$, *delle quartiche, dotate di un punto base doppio e di* $0 \leq i \leq 9$ *punti base semplici*;

b) sistema lineare ∞^{11-i}, *di grado* $12 - i$, *delle quintiche, dotate di un punto base triplo* O, *di un punto base doppio* A *ed eventualmente di* $0 \leq i \leq 8$ *punti base semplici*; se esistono punti base semplici, il punto A deve necessariamente essere infinitamente vicino ad O ed i punti semplici debbono susseguirsi su di un ramo lineare di classe due, uscente da O;

c) sistema lineare ∞^{11}, *di grado* 12, *delle sestiche, dotate*

(1) Cfr. G. CASTELNUOVO: *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane*

di un punto base quadruplo O e di due punti base doppi, prossimi ad O;

d) sistema lineare ∞^2, *di grado* 4, *delle sestiche per otto punti base doppi.*

Il sistema *d)* definisce un'involuzione di coppie di punti ed è così rappresentativo di una superficie doppia, che risulta un cono quadrico (cfr. Lib. II, cap. IV, n. 21).

Gli altri sistemi sono generalmente semplici, escluso il sistema *b)*, quando sia $i = 8$ (cfr. Lib. I, cap. VII, n. 39, osservazione). Essi rappresentano così delle superficie a sezioni piane di genere due, escluso il sistema *a)* per $i = 9$, che, per posizioni generiche dei punti base, risponde ad una rete regolare di grado 3.

Lo studio delle *reti sovrabbondanti di curve piane di genere due* fu iniziato, nel 1887, da V. MARTINETTI [1], il quale ha trovato i due tipi d'ordine minimo seguenti:

a) rete di grado due delle $C_4(A^2 B_1 B_2 \dots B_{10})$;

b) rete di grado due delle $C_6(A_1^2 A_2^2 \dots A_8^2 B_1 B_2)$.

Perchè esistano delle reti dei tipi indicati occorre e basta che tutti i punti base siano su di una cubica ellittica: un punto base semplice è conseguenza dei rimanenti (cfr. Lib. I, cap. VIII, pag. 195 e pag. 203).

Ai due tipi indicati M. DE FRANCHIS [2] ha aggiunto, nel 1899, un terzo tipo costituito da $C_5(O^3 A^2 B_1 B_2 \dots B_{10})$, dove A è prossimo ad O ed i punti B_1, B_2, ... B_{10} si susseguono su di un ramo lineare di classe due, uscente da O. Per la costruzione di questa rete cfr. Lib. I, cap. VIII, n. 47, pag. 225.

Infine i *fasci di curve piane di genere due* sono stati determinati da M. DE FRANCHIS [3]. Ci limitiamo qui ad elencare i tipi

---

[1] Cfr. V. MARTINETTI: *Sopra alcuni sistemi lineari di curve piane algebriche di genere due*; « Rend. Circ. Mat. di Palermo », T. I, 1887. In questa memoria sono in realtà indicati tre tipi di reti di grado 2. Ma è facile convincersi che il tipo 1° del MARTINETTI è un caso *particolare* del tipo 2°.

[2] Cfr. M. DE FRANCHIS: *Sulle reti sovrabbondanti di curve piane di genere due*; « Rend. Circ. Mat. di Palermo », T. XIII, 1899.

[3] Cfr. M. DE FRANCHIS: *Riduzione dei fasci di curve piane di genere*

d'ordine minimo, rimandando il lettore alla memoria del DE FRANCHIS per la dimostrazione della loro esistenza effettiva e per la loro costruzione più generale. *Un fascio d'ordine minimo di curve di genere due è un fascio di*:

a) $C_4(A^2 B_1 B_2 \dots B_{12})$, ovvero di

b) $C_5(A^3 B^2 C_1 C_2 \dots C_{12})$, ovvero di

c) $C_6(A_1^2 A_2^2 \dots A_8^2 B_1 B_2 B_3 B_4)$, ovvero di

d) $C_7(A^3 B_1^2 B_2^2 \dots B_{10}^2)$, ovvero di

e) $C_9(A_1^3 A_2^3 \dots A_8^3 B_1^2 B_2^2 C)$, ovvero di

f) $C_{13}(A^5 B_1^4 B_2^4 \dots B_9^4)$.

La riduzione a tipi d'ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane di genere due, che risulta dai lavori citati, è soggetta alla critica sollevata da C. SEGRE, in ordine alla possibile degenerazione della trasformazione quadratica riduttrice. Ma, come ha mostrato il FERRETTI nella memoria citata a pag. 303, non si presentano effettivamente altri tipi d'ordine minimo oltre a quelli indicati.

Per il genere $p = 3$ si ha una ricerca di DE FRANCHIS [1], nella quale sono determinati tutti i tipi d'ordine minimo, ∞^2 almeno.

Quando $p = 3$, un sistema lineare completo, che non sia un *fascio*, può essere sovrabbondante quando sia ∞^2 ovvero ∞^3 e quando il suo grado sia inferiore od uguale a 4.

Per i sistemi *regolari* il DE FRANCHIS ha trovato i seguenti tipi d'ordine minimo:

a) sistema ∞^{14-i}, *di grado* $16 - i$, *delle* C_4, *passanti per* $0 \leq i \leq 12$ *punti base semplici, in posizione generica;*

b) sistema ∞^{14-i}, *di grado* $16 - i$, *delle* $C_5(O^3)$, *passanti per* $0 \leq i \leq 12$ *punti base semplici, in posizione generica;*

c) sistema ∞^{14}, *di grado* 16, *delle* $C_6(O^4 A^2)$, *con* O *ed* A *distinti;*

d) sistema ∞^{14-i}, *di grado* $16 - i$, *delle* $C_6(O^4 A^2)$, *con* A *infinitamente vicino ad* O, *e passanti per* $0 \leq i \leq 12$ *punti base*

---

[1] Cfr. M. DE FRANCHIS: *Riduzione dei sistemi lineari* ∞^k *di curve piane*

semplici, che si succedono su uno o due rami lineari di classe due, uscenti da O;

e) sistema ∞^{14-i}, *di grado* $16-i$, *delle* $C_7(O^5A_1^2A_2^2)$, *con* A_1, A_2 *prossimi ad O, e passanti per* $0 \leq i \leq 10$ *punti base semplici, che si succedono su di un ramo lineare, di seconda classe, uscente da O;*

f) sistema ∞^{14}, *di grado* 16, *delle* $C_8(O^6A_1^2A_2^2A_3^2)$, *con* A_1, A_2, A_3, *prossimi ad O;*

g) sistema ∞^{6-i}, *di grado* $8-i$, *delle* $C_6(A_1^2A_2^2 \ldots A_7^2)$ *passanti per* $0 \leq i \leq 4$ *punti base semplici, in posizione generica;*

h) rete di grado 4 delle $C_7(A^3B_1^2B_2^2 \ldots B_9^2)$, *con i punti base in posizione generica.*

Per quanto riguarda i sistemi lineari *sovrabbondanti*, essi (qualora non siano dei fasci) possono essere ∞^3 e di grado 4, ovvero ∞^2 e di grado 3 o 2. Ci limiteremo qui a citare i tipi di sistemi d'ordine minimo, che sono ∞^3 e di grado 4: fra i quali ritroveremo qualche sistema in cui già ci siamo imbattuti precedentemente. Il DE FRANCHIS ha stabilito che *ogni sistema lineare,* ∞^3 *e di grado 4, di curve piane di genere tre, può essere trasformato, con una successione di trasformazioni quadratiche, in un sistema* (d'ordine minimo) *di*

a) C_4 *per 12 punti base semplici*; ovvero di

b) C_5 *con un punto base triplo e 12 punti base semplici;* ovvero di

c) C_6 *con 7 punti base doppi e 4 punti base semplici;* ovvero di

d) C_7 *con un punto base triplo e 9 punti base doppi;* ovvero di

e) C_9 *con 8 punti base tripli, un punto base doppio ed uno semplice*; ovvero di

f) C_6 *con un punto base quadruplo, un punto base doppio e 12 punti base semplici;* ovvero di

g) C_7 *con un punto base quintuplo, due punti base doppi e 12 punti base semplici.*

Per quanto riguarda la effettiva esistenza di sistemi lineari

1) Sistemi lineari semplici dei tipi *a*), *c*), *d*), *e*) sono stati da noi costruiti effettivamente nel Lib. I, cap. VIII, come rappresentativi di superficie del quart'ordine razionali e prive di linea multipla: i sistemi *a*), *c*), *d*), *e*) rispondono rispettivamente alla F_4 con punto triplo, alla F_4 con tacnodo ed alle superficie $F_4^{(2)}$, $F_4^{(3)}$ di NOETHER. Aggiungeremo solamente che, mentre un sistema del tipo *a*), è sempre semplice, si possono invece costruire dei sistemi dei tipi *c*), *d*), *e*), che non siano semplici.

2) Per costruire un sistema del tipo *b*) si assumano il punto triplo O ed 11 punti base semplici $B_1, B_2, \ldots, B_{11}$ ad arbitrio su di una cubica ellittica C_3. Le ∞^3 $C_5(O^3B_1B_2\ldots B_{11})$ segnano sulla C_3 una g_1^0 ossia incontrano la C_3 in un punto fisso B_{12}: esistono pertanto ∞^3 $C_5(O^3B_1B_2\ldots B_{12})$. Il sistema ∞^3 di $C_5(O^3B_1B_2\ldots B_{12})$ risponde a prima vista ad un nuovo tipo di superficie del quart'ordine razionale e priva di linea multipla. Ma non è così, giacchè il detto sistema *non è semplice*: invero la sua serie caratteristica è la g_4^2 canonica e riesce composta con una g_2^1, giacchè la curva generica del sistema è *iperellittica.*

3) Nei sistemi lineari, sempre composti, dei tipi *f*) e *g*) i punti base debbono cadere tutti infinitamente vicini al punto O di molteplicità massima e succedersi su rami lineari di seconda classe, uscenti da O. Per la costruzione effettiva rimandiamo alla memoria citata di DE FRANCHIS.

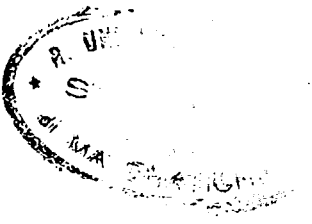
Giova osservare che la ricerca di DE FRANCHIS, di cui ora abbiamo parlato, è anteriore all'osservazione critica di SEGRE, della quale ci siamo occupati più volte; e non è stata più ripresa, tenendo conto di tale critica. A rigore non si può pertanto escludere l'esistenza di qualche altro tipo d'ordine minimo, il quale non rientri nella classificazione data dal DE FRANCHIS: benchè ciò sembri poco probabile.

Vogliamo infine citare l'ampia ricerca sui sistemi lineari d'ordine minimo, compiuta da G. JUNG negli anni 1887-88 [1]. Nelle

---

[1] G. JUNG: *Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche di genere p e sulla loro riduzione all'ordine minimo*; « Memorie I e II »; « Ann. di Mat. », s. II, T. XV, 1888 e s. II, T. XVI, 1889.

memorie citate sono già notati diversi sistemi d'ordine minimo di genere $p = 2$ e 3, che furono poi ritrovati in ricerche posteriori; vi si trovano inoltre varie proprietà generali dei sistemi lineari d'ordine minimo ed anche alcuni tipi d'ordine minimo di genere $p = 4$.



Capitolo IV

LE INVOLUZIONI PIANE DEL SECOND'ORDINE

17. Un lemma generale sui sistemi lineari di curve piane.

La riduzione dei sistemi lineari di curve di genere zero ed uno, che abbiamo stabilito nei capp. II e III, ha importanza per lo studio dei sistemi lineari di curve piane di genere qualunque e per la loro classificazione di fronte alle trasformazioni cremoniane. Ciò avviene in forza del teorema d'invarianza delle curve aggiunte (1), che permette di dedurre da un sistema lineare di curve d'ordine n sistemi covarianti d'ordine $n-3$, $n-6$, ... giungendo infine a sistemi di curve di genere zero od uno: infatti i sistemi lineari di curve C_n di un genere p qualsiasi si potranno classificare conside-

---

(1) Ricordiamo in forma precisa questo teorema: Se un sistema $|C_n|$ si trasforma cremonianamente in un sistema $|C_m|$, le curve C_{n-3} aggiunte alle C_n (cioè passanti $i-1$ volte per ogni punto base $i-plo$ di $|C_n|$) si trasformano in curve d'ordine $m-3$, aggiunte alle C_m. Tuttavia può accadere che alcune componenti delle C_{n-3}, costituenti curve fondamentali della trasformazione vengano mutate in punti (e così spariscano) o viceversa che a qualche punto fondamentale per la trasformazione corrisponda una componente fissa delle C_{m-3}. In ogni caso le aggiunte pure a C_{n-3}, cioè le C_{n-3}, private delle componenti fisse, formano un sistema lineare, che per effetto della trasformazione viene mutato nel sistema delle aggiunte pure di $|C_m|$.

Come le prime aggiunte C_{n-3} anche le seconde aggiunte C_{n-6} e le successive aggiunte C_{n-9}, ecc., ecc. costituiscono sistemi covarianti di $|C_n|$; e questa covarianza rispetto a trasformazioni birazionali del $|C_n|$ sussiste anche se manchino per es. le prime aggiunte C_{n-3} o qualcuna delle altre. Cfr. ad es. F. Enriques ed O. Chisini: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V. Cap. II, pagg. 186-7.

rando le successive aggiunte C_{n-3} C_{n-4}, ecc., ecc., fino all'ultimo sistema aggiunto ∞^1 almeno che — a prescindere da eventuali componenti fisse — risulterà costituito o composto da curve di genere zero od uno.

In ordine alla riduzione il sistema (∞^1 almeno) costituito dalle parti irriducibili variabili delle ultime aggiunte ci darà a priori:

α.) nel caso del genere zero, un sistema lineare di curve razionali trasformabile in uno dei sistemi seguenti:

1) rete delle rette,

2) sistema delle coniche senza punti base,

3) fascio di rette per un punto,

4) sistema delle curve d'ordine n con un punto base $(n-1)$-*plo*:

a) senza altri punti base,

b) ovvero con un altro punto base proprio,

c) ovvero con $i \leq n-1$ punti base infinitamente vicini al punto n-*plo* in direzioni distinte;

β.) nel caso del genere uno un sistema lineare di curve ellittiche trasformabile;

1) in un sistema di cubiche per $9-i$ punti semplici ($i = 0, 1, 2, \ldots, 9$), o

2) in un sistema ∞^8 di quartiche dotato di due punti doppi, o

3) in un fascio d'HALPHEN, costituito da curve d'ordine $3n$ passanti n volte per 9 punti scelti opportunamente su di una cubica.

In realtà si riesce a dimostrare che il caso del fascio d'HALPHEN propriamente detto ($n > 1$) non si presenta mai quando si procede per aggiunzione a partire da sistemi di curve di genere maggiore di 2; il caso del fascio di cubiche per 9 punti può invece presentarsi e si ha allora che il penultimo aggiunto è formato dalle sestiche C_6, aventi otto dei nove punti base del fascio come punti base doppi.

Ciò è facile a verificare se si suppone che dai successivi aggiunti non si stacchino mai parti fisse ma richiede un ragionamento delicato se non si ammette questa ipotesi.

Per i nostri scopi non importa di stabilire con rigore il lemma di riduzione nella forma sopra enunciata; basta dimostrare il teorema seguente:

Dato un sistema lineare $|C|$, *irriducibile, di genere* p *sufficientemente elevato di curve piane, per mezzo di aggiunzioni successive e di somme e sottrazioni si può costruire come covariante di esso* (*rispetto a trasformazioni birazionali*):

1) *un sistema lineare* ∞^1 *almeno di curve razionali,*

2) *ovvero un sistema lineare* ∞^2 *almeno di curve ellittiche,*

3) *ovvero un sistema lineare* ∞^3 *di genere* 2 *e grado* 4 *di sestiche* C_6 *per* 8 *punti base doppi,* che ha per aggiunto un fascio di cubiche.

Partiamo da un sistema lineare $|C|$ irriducibile e di genere p sufficientemente alto, al quale, ove occorra si potrà sempre sostituire un suo multiplo; procediamo a costruire il sistema aggiunto puro e poi l'aggiunto di questo, similmente spogliato di eventuali componenti fisse e così via. Questo procedimento avrà termine quando si giunga ad un sistema lineare ∞^1 almeno costituito o composto da curve di genere zero od uno, ovvero ad un sistema lineare composto con le curve di un fascio di genere $\pi \geq 2$; ma, in quest'ultimo caso, si potrà ancora procedere nell'aggiunzione a partire da queste curve di genere π, pervenendo infine ad un sistema lineare di curve di genere zero od uno.

In breve, ciò che abbiamo detto può essere concisamente riassunto come segue: col procedimento delle aggiunzioni successive, dal sistema lineare $|C|$ irriducibile di curve di genere p sufficientemente elevato si perviene sempre ad un sistema lineare covariante ∞^1 almeno, costituito o composto di curve di genere zero od uno. Eccettuato il caso in cui l'ultimo aggiunto sia costituito o composto con le curve ellittiche di un *fascio,* caso, che esigerà uno studio particolare, esiste pertanto per ogni sistema lineare $|C|$ irriducibile, di genere p qualsiasi, un sistema lineare covariante ∞^1 almeno di curve razionali o ∞^2 almeno di curve ellittiche.

Per completare la dimostrazione del lemma enunciato, basta dimostrare che l'ipotesi in cui l'ultimo aggiunto irriducibile puro del nostro sistema lineare irriducibile di genere elevato sia costi-

tuito o composto con le curve ellittiche d'un fascio d'HALPHEN di $C_{3s}(A_1^s, A_2^s, A_9^s)$, $s \geq 1$ può presentarsi nel solo caso $s = 1$: cioè quando l'ultimo aggiunto sia effettivamente un fascio di $C_3(A_1A_2...A_9)$, il penultimo aggiunto riducendosi ad un sistema lineare di $C_6(A_1^2A_2^2 ... A_8^2)$.

All'uopo facciamo vedere anzitutto, che si può — a priori — supporre che il sistema irriducibile, da cui si parte abbia dei punti base assegnati solamente in $A_1, A_2, ..., A_9$.

Sia $|C|$ un sistema lineare irriducibile di ordine n, per il quale l'ultimo sistema aggiunto puro (o formato dalle componenti dell'ultimo aggiunto) sia un fascio di curve ellittiche, cioè un fascio d'HALPHEN (costituito da curve d'ordine $3s$ passanti s volte per 9 punti $A_1, A_2, ..., A_9$ di una cubica C_3) o in particolare (per $s=1$) un fascio di cubiche. Il sistema $|C|$ possiederà certe molteplicità $i_1, i_2, ..., i_9$ in $A_1, A_2, ..., A_9$ ed eventualmente altri punti base A_{10}, A_{11}, ... Osserviamo che in funzione del sistema lineare $|C|$ è *razionalmente* definito il sistema lineare $|K|$, formato dalle curve d'ordine n assoggettate solamente a passare rispettivamente $i_1, i_2, ..., i_9$ volte per $A_1, A_2, ..., A_9$. Per giustificare questa osservazione, chiamiamo h la massima molteplicità dei punti $A_{10}, A_{11}, ...$ e con r il minimo intero per cui $r \cdot s \geq h$. Il sistema lineare $|K|$ si ottiene allora dal sistema lineare $|C|$ costruendo lo rs^{mo} aggiunto del sistema lineare $|L| \equiv |C + rC_{3s}|$: infatti il sistema $|L|$ è d'ordine $n + 3rs$, ha in $A_1, A_2, .., A_9$ le molteplicità $i_1 + rs, ..., i_9 + rs$ e nei punti $A_{10}, A_{11}, ...$ le stesse molteplicità del sistema $|C|$; il suo rs^{mo} aggiunto d'ordine n ha quindi in $A_1, A_2, ..., A_9$ le molteplicità $i_1, i_2, ..., i_9$ e (poichè $rs \geq h$) è *virtualmente* privo di punti base fuori di $A_1, A_2, ..., A_9$, coincidendo così con il sistema lineare $|K|$ sopra definito.

Ma il sistema $|K|$ può possedere dei *punti base, fuori di* $A_1, A_2, ..., A_9$, i quali siano *conseguenza della molteplicità* i_h *in* A_h ($h = 1, 2, ..., 9$). Dimostriamo però che *questi punti base non si presentano se le curve di* $|K|$ *segano la cubica* (*o le cubiche*) $C_3(A_1A_2...A_9)$ *fuori di* $A_1, A_2, ..., A_9$ (*o di* $A_1, A_2, ..., A_8$ se $i_9 = 0$) *in* $m > 1$ *punti; mentre si ha un punto semplice sulla cubica* $C_3(A_1A_2...A_9)$ *se, essendo* $s > 1$, *è* $m = 1$.

Supponiamo infatti che il sistema $|K|$ *possieda un punto base* A_{10} *s - plo*, il quale sia una conseguenza dei punti $A_1, A_2, \ldots, A_9$ presi con le loro molteplicità. Si può anzitutto escludere che A_{10} sia fuori della cubica $C_3(A_1A_2\ldots A_9)$. Infatti il sistema $|K|$ contiene il sistema spezzato nella curva $C_3(A_1A_2\ldots A_9)$ e nel sistema lineare $|K'|$, aggiunto a $|K|$ stesso, costituito da curve C_{n-3} che nei punti A_h hanno la molteplicità i_h-1. Ora il sistema $|K'|$ ha in A_{10} la molteplicità effettiva $s-1$ e non maggiore (altrimenti la serie canonica di $|K|$ avrebbe dei punti fissi). Il punto A_{10} non può per conseguenza essere *s - plo* per $|K|$, giacchè esso è $(s-1)$ *- plo* per il sistema $|K' + C_3|$, contenuto in $|K|$.

Il ragionamento precedente non si estende al caso in cui il punto A_{10} sia sulla $C_3(A_1A_2\ldots A_9)$. Per discutere anche questo caso premettiamo la seguente osservazione fondamentale:

Sia $|K|$ *un sistema lineare irriducibile, completo, di genere maggiore di uno, costituito dalle curve assoggettate solamente alle condizioni di passare* i_h *volte per* A_h $(h = 1, 2, \ldots, 9)$, dove $A_1, A_2, \ldots, A_9$ *sono i punti base di un fascio d'*Halphen *(o di cubiche); le curve di* $|K|$ *segano la cubica (o le cubiche) per* $A_1, A_2, \ldots, A_9$ *fuori di* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *(o fuori di* $A_1, A_2, \ldots, A_8$ se $i_9 = 0$*) in* $m = 3n - \sum_1^9 i_h$ *punti, che variano, descrivendo una* g_m^{m-1}*, completa.*

Incominciamo a dimostrare che, nelle ipotesi ammesse, è certamente $m > 0$. Se infatti le curve di $|K|$ non avessero intersezioni con la curva $C_3(A_1A_2\ldots A_9)$ fuori di $A_1, A_2, \ldots, A_9$, non avrebbero intersezioni fuori di $A_1, A_2, \ldots, A_9$ nemmeno con le $C_{3s}(A_1^sA_2^s\ldots A_9^s)$; ma per ogni punto di una generica curva di $|K|$ passa una curva $C_{3s}(A_1^sA_2^s\ldots A_9^s)$, la quale — se $m = 0$ — ha una intersezione più del possibile con la nominata curva di $|K|$: ne segue che le curve di $|K|$ sono o le curve ellittiche C_{3s} ovvero sono composte con le C_{3s}, il sistema $|K|$ risultando così riducibile ed egualmente di genere uno. In ogni caso è assurda l'ipotesi $m = 0$.

Essendo $m \geq 1$ si può quindi — ove occorra — supporre che m sia addirittura maggiore di uno: nel caso contarrio basta infatti

sostituire al sistema di partenza $|C|$ — e quindi a $|K|$ — il suo doppio.

Ora, per dimostrare che il sistema $|K|$ sega sulla C_3 una serie completa g_m^{m-1}, valutiamo la dimensione del sistema $|K|$ e la dimensione del sistema che si ottiene staccando da $|K|$ la cubica C_3. Per la dimensione di $|K|$, qualora non si escluda a priori che le condizioni imposte dai punti base A_1, A_2, ..., A_9 possano riuscire sovrabbondanti, si ha:

$$d \geq \frac{n(n+3)}{2} - \sum_1^9{}_h \frac{i_h(i_h+1)}{2}.$$

Per quanto si è già dimostrato, il sistema $|K|$ non possiede punti base che giacciano fuori della cubica $C_3(A_1A_2...A_9)$. Ne segue che il sistema che si ottiene da $|K|$ staccando la cubica $C_3(A_1A_2...A_9)$ è semplicemente il sistema aggiunto $|K'|$. I punti i-*pli* di $|K|$ sono $(i-1)$-*pli* per $|K'|$ ed offrono alle curve di $|K'|$ condizioni indipendenti. Ne viene che la dimensione del sistema completo, che si ottiene da $|K|$ staccando la C_3, è

$$d' = \frac{(n-3)n}{2} - \sum_1^9{}_h \frac{(i_h-1)i_h}{2}.$$

Si ha dunque:

$$d - d' \geq \frac{n(n+3)}{2} - \sum_1^9{}_h \frac{i_h(i_h+1)}{2} - \frac{(n-3)n}{2} + \sum_1^9{}_h \frac{(i_h-1)i_h}{2} =$$
$$= 3n - \sum_1^9{}_h i_h = m.$$

Da qui emerge senz'altro che la serie segata dalle curve di $|K|$ sulla C_3 è la serie completa g_m^{m-1}; (ed anche che è effettivamente:

$$d = \frac{n(n+3)}{2} - \sum_1^9{}_h \frac{i_h(i_h+1)}{2}.$$

Ora il risultato ottenuto ci permette di dimostrare che il sistema $|K|$ non possiede punti base che sieno conseguenza dei punti base A_1, A_2, ..., A_9 presi con le molteplicità i_1, i_2, ..., i_9 se $m > 1$; mentre se $m = 1$ si ha un punto semplice sulla cubica $C_3(A_1A_2...A_9)$: infatti le curve di $|K|$ segano sulla C_3 una g_m^{m-1} completa, la quale non può avere punti fissi se $m > 1$, mentre si riduce ad un unico punto fisso se $m = 1$. È poi evidente che

questo punto fisso viene a mancare se A_1, A_2, ..., A_9 sono punti base di un fascio di cubiche, giacchè in questo caso il sistema $|K|$ dovrebbe avere un punto base semplice su ogni cubica per A_1, A_2, ..., A_9.

Ritorniamo ora al sistema lineare $|C|$ da cui abbiamo preso le mosse: esso è costituito da curve d'ordine n dotate delle molteplicità i_1, i_2, ..., i_9 in A_1, A_2, ..., A_9 ed ha punti di data molteplicità in A_{10}, A_{11}, ... In base alla discussione precedente vediamo che si può associare al sistema $|C|$ il sistema covariante $|K|$, il quale è dello stesso ordine, è definito dalle molteplicità i_1, i_2, ..., i_9 in A_1, A_2, ..., A_9 e *possiede lo stesso ultimo aggiunto di* $|C|$. I successivi aggiunti di $|K|$ si ottengono dai successivi aggiunti di $|C|$, immaginando soppressi i punti base fuori di A_1, A_2, ..., A_9 e non possono avere altri punti base, conseguenza di A_1, A_2, ..., A_9 presi con le loro molteplicità, all'infuori (al più) di un punto semplice sulla $C_3(A_1A_2...A_9)$, che scompare nelle ulteriori aggiunzioni.

Partiamo da un sistema lineare completo di curve piane irriducibili, di genere alto quanto si vuole, il quale abbia punti base *assegnati* soltanto nei punti base A_1, A_2, ..., A_9 d'un fascio d'Halphen. Procediamo per successive aggiunzioni, prendendo ogni volta l'aggiunto puro ovvero il fascio di curve, con le quali è composto l'aggiunto puro. Supponiamo che si arrivi così ad un ultimo aggiunto, il quale sia costituito o composto con le curve del fascio d'Halphen. Si tratta di provare che ciò è impossibile tranne nel caso in cui il penultimo aggiunto puro non sia il sistema delle sestiche passanti doppiamente per A_1, A_2, ..., A_8.

Consideriamo il penultimo aggiunto puro. Esso sarà un sistema lineare completo, $|L|$, di curve irriducibili d'ordine n, con punti base *assegnati* solamente in A_1, A_2, ..., A_9; e siano r_1, r_2, ..., r_9 le molteplicità assegnate delle curve L in A_1, A_2, ..., A_9. L'ipotesi è che le curve aggiunte alle curve di $|L|$ siano costituite da $l(\geq 1)$ $C_{3h}(A_1^h A_2^h ... A_9^h)$ (ove $h \geq 1$), alle quali si aggiungano eventualmente delle parti fisse θ. Se $l = 1$, le L sono di genere 2 ed ogni $C_{3h}(A_1^h A_2^h ... A_9^h)$ sega una L secondo un gruppo canonico e quindi in 2 punti (fuori di A_1, A_2, ..., A_9). Se invece $l > 1$

le L sono curve iperellittiche, per le quali la serie canonica è composta con la g_2^1. Si conclude che in tutti i casi le $C_{3h}(A_1^h A_2^h \dots A_9^h)$ segano su una L la g_2^1. Ma tra le $C_{3h}(A_1^h A_2^h \dots A_9^h)$ vi è la (o una) C_3 determinata da A_1, $A_2 \dots A_9$ contata h volte. Se dunque il sistema $|L|$ sega sulla C_3 (fuori di $A_1, A_2, \dots, A_9$) una g_m, sarà $m \cdot h = 2$. E quindi due ipotesi solamente sono possibili: $h = 2$, $m = 1$ ovvero $h = 1$, $m = 2$.

Sia da prima $h = 2$, $m = 1$, ossia l'aggiunto puro di $|L|$ sia costituito o composto con sestiche d'HALPHEN passanti doppiamente per $A_1, A_2, \dots, A_9$. È anzitutto impossibile che $|L|$ abbia punti base solamente tra $A_1, A_2, \dots, A_8$. Invero, in questa ipotesi, l'ultimo aggiunto puro dovrebbe contenere il sistema di tutte le curve d'ordine $6l$ con $A_1, A_2, \dots, A_8$ $2l$-*pli*. Ma questo sistema ha almeno la dimensione $l(2l+1)$, mentre l'aggiunto puro ad $|L|$ è ∞^l. Se poi *tutti* i punti $A_1, A_2, \dots, A_9$ sono punti base di $|L|$, essendo per ipotesi $3n - \sum_1^9 r_i = 1$, sarà altresì $3(n-3) - \sum_1^9 (r_i - 1) = 1$, ossia anche l'aggiunto impuro ad $|L|$ dovrà segare la C_3, fuori di $A_1, A_2, \dots A_9$, in *un* punto. E poichè le $C_6(A_1^2 A_2^2 \dots A_9^2)$ *non* segano la C_3 fuori di $A_1, A_2, \dots, A_9$ dovrà esistere qualche curva fissa irriducibile θ, appartenente all'aggiunto di $|L|$, e segante la C_3 fuori di $A_1 A_2, \dots, A_9$ in un punto. La θ sarà di genere zero rispetto al gruppo $A_1, A_2, \dots, A_9$, giacchè in caso contrario esisterebbe un secondo aggiunto ad $|L|$, che non sarebbe così il penultimo aggiunto. Se quindi s ed $s_1, s_2, \dots, s_9$ sono l'ordine e le molteplicità della θ in $A_1, A_2, \dots, A_9$, sarà:

$$(s-1)(s-2) - \sum_1^9 s_i(s_i - 1) = 0$$

$$3s - \sum_1^9 s_i = 1$$

o anche:

$$s^2 - \sum_1^9 s_i^2 = -1, \quad 3s - \sum_1^9 s_i = 1.$$

Ma allora l'aggiunto di $|L|$ dovrebbe contenere il sistema completo delle curve d'ordine $6l + s$ che hanno le molteplicità asse-

gnate $2l + s_i$ in A_i $(i = 1, 2, ..., 9)$; e tenuto conto delle uguaglianze precedenti, si trova che questo sistema è almeno ∞^{2l}, mentre l'aggiunto ad $|L|$ è solamente ∞^l. L'ipotesi $h = 2$, $m = 1$ è dunque sempre assurda.

Passiamo a discutere l'ipotesi $h = 1$, $m = 2$, nella quale l'aggiunto puro ad $|L|$ è costituito o composto da cubiche per A_1, A_2, ..., A_9.

Se i punti base di $|L|$ sono solamente tra $A_1, A_2, ..., A_8$ l'aggiunto puro ad $|L|$ deve contenere il sistema completo delle curve d'ordine $3l$ con 8 punti l-*pli*, che è almeno di dimensione $\frac{1}{2}\, l(l+1)$: è dunque assurdo che sia $l > 1$, giacchè l'aggiunto ad $|L|$ è ∞^l. Se $l = 1$ *tutti* i punti $A_1, A_2, ..., A_8$, devono essere punti base di $|L|$, chè altrimenti l'aggiunto ad $|L|$ sarebbe più che ∞^1. Se poi vi sono parti fisse il sistema $|L|$ non può essere che il sistema delle $C_6(A_1^2 A_2^2 ... A_8^2)$. Esaminiamo se vi possano essere delle parti fisse θ. Poichè $3n - \sum_1^8 r_i = 2$, sarà altresì $3(n-3) - \sum_1^8 (r_i - 1) = 1$; in guisa che l'aggiunto impuro ad $|L|$ sega la C_3 in *un* punto fuori di $A_1, A_2, ..., A_8$. Poichè ora già le $C_3(A_1 A_2 ... A_8)$ segano una C_3 in un punto fuori di $A_1, A_2, ..., A_8$, una eventuale θ non può avere intersezioni con le C_3 fuori di $A_1, A_2, ..., A_8$. Dovrà dunque essere, con notazioni già usate: $3s - \sum_1^8 s_i = 0$. Ma una θ è fondamentale per le L, chè altrimenti la serie canonica su una L avrebbe dei punti fissi. Sarà dunque:

$$3ns - \sum_1^8 s_i r_i = 0,$$

e quindi:

$$\sum_1^8 s_i (n - r_i) = 0$$

che è assurda, essendo $r_i < n$. La θ non può dunque esistere.

Supponiamo invece che *tutti* i punti $A_1, A_2, ..., A_9$ siano punti base di $|L|$. Da $3n - \sum_1^9 r_i = 2$ si deduce $3(n-3) - \sum_1^9 (r_i - 1) = 2$,

ossia anche l'aggiunto impuro ad $|L|$ sega le C_3 in due punti, fuori di $A_1, A_2, \ldots, A_9$. Questi due punti debbono appartenere alle componenti fisse θ: ma non possono appartenere ad una stessa θ semplice, chè altrimenti la θ apparterrebbe ad un sistema lineare completo, che segherebbe la g_2^1 completa sulle C_3. Occorre dunque che esistano due θ sconnesse per cui, con notazioni evidenti sia: $3s - \sum_1^9 r_i = 1$, $3s' - \sum_1^9 r_i' = 1$, ovvero che vi sia una θ *doppia*, per cui $3s - \sum_1^9 r_i = 1$.

Esaminiamo il primo caso. Essendo le due θ sconnesse e ciascuna di genere zero rispetto al gruppo di punti $A_1, A_2, \ldots A_9$, tenuto conto delle precedenti, valgono le relazioni

$$ss' - \sum_1^9 r_i r_i' = 0$$

$$s^2 - \sum_1^9 r_i^2 = -1, \quad s'^2 - \sum_1^9 r_i'^2 = -1.$$

Ciò posto l'aggiunto ad $|L|$ deve contenere il sistema completo delle curve d'ordine $3l + s + s'$ con A_i $(l + r_i + r_i')$-*plo*. Ma questo sistema ha almeno la dimensione $2l$, e si cade dunque in un assurdo.

Se invece vi è una θ doppia, per cui $3s - \sum_1^9 r_i = 1$, $s^2 - \sum_1^9 r_i^2 = -1$, l'aggiunto ad $|L|$ deve contenere il sistema completo delle curve d'ordine $3l + 2s$ con A_i $(2r_i + l)$-*plo*. Ora questo sistema è almeno di dimensione $2l - 1$, sicchè l'ipotesi è assurda per $l > 1$. Se $l = 1$, non vi possono essere altre curve θ oltre la θ' doppia. Per un'altra θ dovrebbe infatti essere $3s' - \sum_1^9 r_i' = 0$; e ciò si dimostra assurdo come prima, tenuto conto che la θ è fondamentale per $|L|$. Siamo dunque condotti ad un sistema lineare $|L|$ d'ordine $6 + 2s$ per cui l'aggiunto è costituito dalle cubiche per $A_1, A_2, \ldots, A_9$ cui si aggiunge come parte fissa una θ d'ordine s, *di genere zero e di grado* -1 *rispetto al gruppo base* $A_1, A_2, \ldots, A_9$, *contata due volte*. Tale è ad es. il sistema delle

$C_8(A_1^4 A_2^4 A_3^2 A_4^2 \dots A_6^2)$ dove A_1, A_2, ..., A_9 sono i punti base d'un fascio di cubiche: lo aggiunto è qui costituito dalle C_3 per A_1, A_2, ..., A_9 a cui si aggiunge due volte la retta fissa A_1A_2. Ma una θ di genere zero e grado -1 si può far sparire con trasformazioni quadratiche successive, con i punti base tra A_1, A_2, ..., A_9, senza che si generino altre θ (Cfr. Lib. I, cap. VIII, n. 46). E quando la θ è ridotta ad un punto il sistema $|L|$ si riduce al sistema delle $C_6(A_1^2 A_2^2 \dots A_8^2)$. Vediamo dunque che sostanzialmente si è condotti solamente al sistema delle anzidette $C_6(A_1^2 A_2^2 \dots A_8^2)$.

NOTA I. - In tutto il discorso, che precede, abbiamo parlato della cubica C_3 passante per i punti A_1, A_2, ... A_9, come se questa sia una curva ellittica irriducibile. Ora se A_1, A_2, ..., A_9 sono i punti base di un fascio di cubiche, queste debbono supporsi irriducibili, poichè altrimenti saremmo condotti alla considerazione di un fascio covariante di curve razionali e quindi esiste certamente una tale cubica irriducibile; e basta nei ragionamenti svolti riferirsi costantemente a questa. Se invece A_1, A_2, ..., A_9 sono punti base di un fascio d'HALPHEN propriamente detto, la cubica $C_3(A_1A_2 \dots A_9)$ può riuscire effettivamente riducibile, presentando quei casi di riducibilità, di cui abbiamo fatto cenno nel Lib. II, cap. III, n. 15. Ma è facile convincersi che il ragionamento svolto conserva ciò nonostante il suo valore conclusivo. Invero i nostri computi aritmetici ci permettono di affermare che in ogni caso il sistema $|K|$ ed il suo aggiunto $|K'|$ segano la C_3 nello stesso numero di punti m, purchè A_1, A_2, ..., A_9 siano effettivamente punti base di $|K|$; ne viene che nelle aggiunzioni successive si dovrà sempre pervenire ad un sistema avente come punti base A_1, A_2, ..., A_8. In secondo luogo la serie segata sopra la C_3 dal sistema completo delle curve, che passano con data molteplicità per A_1, A_2, ..., A_8, segando ulteriormente la C_3 in m punti, sarà sempre una serie di dimensione $m-1$ (almeno) e tutt'al più si potrà ammettere a priori che questa g_m^{m-1} possegga un punto base semplice, i residui gruppi di $m-1$ punti variando in una g_m^{m-1} sopra una componente razionale della C_3. Questa circostanza

permette di ripetere, con breve modificazione di forma, il ragionamento che precede, escludendo che l'ultimo aggiunto puro, a cui si perviene, possa essere costituito o composto con le curve di un fascio d'HALPHEN.

NOTA II. - In quanto precede abbiamo determinato quali sistemi lineari si presentino come ultimi aggiunti a partire da un sistema lineare di curve di *genere elevato quanto si voglia* o da un suo multiplo; ed in particolare abbiamo trovato che fra questi ultimi aggiunti non si presentano mai dei fasci d'HALPHEN propriamente detti. Non si possono estendere senz'altro le nostre conclusioni quando si proceda per aggiunzione a partire da un *dato* sistema lineare di curve piane irriducibili, di genere non troppo alto, senza sostituirlo con un suo multiplo. Il problema di determinare l'ultimo sistema aggiunto di un sistema di curve piane si è presentato nello studio delle trasformazioni cremoniane cicliche o dei gruppi di esse a S. KANTOR [1], e d'altra parte appare nelle ricerche di G. CASTELNUOVO [2]. In queste ricerche però si può sempre supporre di partire da un sistema di curve di genere abbastanza alto, per cui valgono le conclusioni sopra esposte. Tuttavia A. WIMAN [3], approfondendo la questione posta dal KANTOR ha determinato tutti i casi in cui un fascio di HALPHEN può provenire per aggiunzione da un sistema lineare di curve. In realtà vi è un solo caso, che è il seguente: il fascio delle sestiche d'HALPHEN con nove punti doppi $A_1, A_2, \ldots, A_9$ è aggiunto di un fascio di curve del nono ordine C_9, che passano triplamente per $A_1, A_2, \ldots, A_8$ e posseggono un tacnodo in A_9; ed

---

(1) Cfr. S. KANTOR: *Premiers fondaments pour une théorie des transformations périodiques univoques*; « Atti dell'Accademia di Napoli », serie II, vol. IV (1888-92).

(2) I risultati delle ricerche di G. CASTELNUOVO in questo campo sono esposti in una nota aggiunta alla memoria: *Sui piani doppi di genere uno*, di F. ENRIQUES; « Memorie della Società Italiana delle Scienze », Serie III, Tomo X.

(3) Cfr. A. WIMAN: *Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene*; « Math. Ann. », Bd. 48, 1896.

il nominato fascio proviene a sua volta per aggiunzione da una C_{12} di genere 2, passante quattro volte per A_1, A_2, ..., A_8 ed avente in A_9 un punto triplo, cui sono infinitamente vicini due punti doppi successivi. Ma questa curva C_{12}, che è unica, non può presentarsi come aggiunta di un sistema lineare ∞^1 di curve di genere uno.

Per dimostrare rapidamente l'esistenza di un fascio di genere 2, del tipo indicato, anticipiamo (riservandoci più tardi di giustificarla, cfr. pag. 390) la seguente proposizione: il sistema lineare ∞^3 di genere 2 e grado 4 delle $C_6(A_1^2 A_2^2 \dots A_8^2)$ non è semplice e appartiene ad una involuzione piana, rappresentando un cono quadrico doppio; e la curva delle coincidenze della involuzione, che è una curva del nono ordine C_9 passante triplamente per gli otto punti A_1, A_2, ..., A_8 (cui si aggiunge quale punto isolato il punto A_9, nono punto base del fascio di $C_3(A_1 A_2 \dots A_8)$) si rappresenta su questo cono quadrico in una sestica di diramazione K_6, trisecante le generatrici, (alla quale si aggiunge, come punto isolato di diramazione, il vertice del cono).

Ciò premesso, osserviamo che ogni punto della curva delle coincidenze C_9 può essere preso come nono punto base d'un fascio di sestiche d'Halphen, passanti doppiamente per A_1, A_2, ..., A_8: infatti, preso un punto P della C_9, esiste una rete di $C_6(A_1^2 A_2^2 \dots A_8^2)$ che toccano in P la C_9 e per conseguenza un fascio di $C_6(A_1^2 A_2^2 \dots A_8^2)$ che hanno il punto P doppio.

Sia ora Q il corrispondente di P sulla curva di diramazione K_6 e consideriamo sul cono quadrico il fascio delle cubiche gobbe, le quali hanno in Q un contatto quadripunto con la K_6. Al nominato fascio di cubiche gobbe corrisponde nel piano dell'involuzione un fascio di C_9, che passano triplamente per A_1, A_2, ..., A_8 ed hanno un tacnodo in P, la tangente tacnodale coincidendo con la tangente in P alla curva delle coincidenze C_9; e l'aggiunto del fascio di curve piane così costruito è precisamente il fascio d'Halphen delle $C_6(A_1^2 A_2^2 \dots A_8^2 P^2)$.

18. Classificazione delle involuzioni piane del second'ordine: posizione del problema.

Applicheremo il lemma generale sui sistemi lineari di curve piane, ottenuto nel n. precedente, alla classificazione delle involuzioni piane del secondo ordine.

Dicesi *involuzione* nel piano π una totalità algebrica irriducibile ∞^2, I, di gruppi di n punti di π, tale che per un punto generico di π passi uno ed un solo gruppo di I. Il numero n è l'*ordine* dell'involuzione.

Se $n = 2$ abbiamo dunque una totalità irriducibile ∞^2 di *coppie* di punti, tale che per un punto generico del piano passa una ed una sola coppia e una coppia è costituita da due punti P', P'' che diconsi *coniugati* l'uno all'altro. Ad un'involuzione piana del secondo ordine I_2, è associata una trasformazione cremoniana, T, del piano π in se stesso, la quale si ottiene facendo corrispondere al punto generico di π il suo coniugato in I_2. La T è una trasformazione cremoniana *involutoria*, tale cioè che, senza essere identica, i punti omologhi si corrispondano in doppio modo. Inversamente le coppie di punti omologhi di una trasformazione cremoniana *involutoria*, generano un'involuzione piana del secondo ordine. Pertanto il problema della classificazione delle trasformazioni cremoniane involutorie coincide a priori con quello della classificazione delle involuzioni piane del second'ordine.

Sia I_2 una involuzione piana del secondo ordine ed S una trasformazione cremoniana qualsiasi. Siano P e P' una coppia di punti coniugati nella I_2. Operiamo la trasformazione S ed i due punti P e P' si mutino in Q e Q'. Tutte le coppie Q e Q' sono coniugate in una nuova involuzione I_2', che è la *trasformata* della I_2 mediante la S; con il linguaggio della teoria delle operazioni si ha:

$$I_2' = SI_2S^{-1}.$$

Vuol dire che per andare da Q a Q' si deve prima costruire il punto P, corrispondente di Q nella inversa della trasforma-

zione S, poi il punto P' coniugato di questo P in I_2 e finalmente il corrispondente di P' nella S, che è il punto Q'.

La circostanza che una involuzione piana del secondo ordine sia trasformata da una trasformazione cremoniana in un'altra involuzione piana del secondo ordine suggerisce la ricerca di tutti i tipi *birazionalmente distinti* di involuzioni piane del secondo ordine ossia la classificazione delle involuzioni piane del secondo ordine cremonianamente distinte, considerando come identiche le involuzioni che si deducono una dall'altra trasformando con una trasformazione cremoniana qualunque.

Il problema della classificazione delle involuzioni piane del secondo ordine, ovvero delle trasformazioni cremoniane involutorie, è stato posto in questi termini da E. BERTINI (1877), il quale è riuscitó pure a scoprire i tipi delle involuzioni anzi dette, sia pure con qualche riserva.

Noi procederemo per una via che schematicamente è la seguente: data una qualunque involuzione piana del secondo ordine, I_2, esistono sempre dei sistemi lineari trasformati in sè o invarianti per la I_2. Tale ad esempio risulta il sistema lineare più ampio, che contiene la somma di un sistema lineare qualsiasi e del suo trasformato. Partiamo allora da un sistema lineare $|C|$ invariante per I_2. Saranno invarianti per I_2 anche tutti i sistemi covarianti di $|C|$ rispetto a trasformazioni birazionali; in particolare saranno invarianti tutti i successivi aggiunti di $|C|$. A questo punto ricordiamo il teorema dimostrato precedentemente. Dato un sistema lineare irriducibile completo di genere alto quanto si vuole di curve piane $|C|$, per mezzo di aggiunzioni successive e di somme e sottrazioni si può costruire come covariante di $|C|$:

a) un sistema lineare (completo) ∞^1 almeno di curve razionali,

b) ovvero un sistema lineare (completo) ∞^2 almeno di curve ellittiche,

c) ovvero un sistema lineare (completo) ∞^3 di genere 2 e grado 4, riducibile al sistema delle sestiche per 8 punti doppi, che ha per aggiunto un fascio di cubiche.

In virtù di questo teorema l'esistenza di un sistema lineare invariante $|C|$ porta come conseguenza per la I_2 l'esistenza di un sistema lineare invariante del tipo *a*) o *b*) o *c*).

Converrà analizzare partitamente i casi in cui l'involuzione I_2 ha come invariante un sistema lineare del tipo *a*) o *b*) o *c*).

19. Le involuzioni di De Jonquières.

Supponiamo che una involuzione piana del secondo ordine, I_2, muti in sè un *fascio* di curve razionali; si può allora dimostrare l'esistenza di un *fascio di curve razionali unite*, che si può ridurre con una trasformazione cremoniana ad un fascio di rette unite per un punto.

Il fascio unito di curve razionali si può anzitutto ridurre ad un fascio unito di rette per un punto P (cfr. Lib. II, cap. II, n. 9). Ad ogni retta a per P, corrisponde per la I_2 una retta a' per P e le coppie aa' formano una involuzione nel fascio di centro P. Ogni punto di a si trasforma in un punto di a' e quindi tra a ed a' vi è una proiettività. Concepiamo una superficie F, i cui punti siano in corrispondenza biunivoca con le *coppie* di punti coniugati in I_2. Alla coppia di rette a, a' corrisponde su F una curva *razionale* perchè i suoi punti sono in corrispondenza biunivoca con i punti della retta a. Al variare della coppia di rette a, a' si ottengono su F delle curve razionali C, che variano in un fascio *razionale*, perchè esso è in corrispondenza biunivoca con le coppie di una involuzione di rette nel fascio di centro P.

La superficie F, contenendo un fascio razionale di curve razionali C, è essa stessa razionale, per il teorema di NOETHER, e si può costruire su di essa un secondo fascio lineare di curve K, razionali e unisecanti le C (1).

Ciò posto, alle K corrisponderanno sul piano della nostra involuzione delle curve autoconiugate, che intersecheranno le rette per

(1) Se la F è rappresentata sul piano in modo che alle C corrispondano rette per un punto O (cfr. Lib. II, cap. I, n. 3), si potranno determinare le K prendendo come immagini di esse curve d'ordine n del piano con O $(n-1)$-*plo*.

P in un punto e le coppie di rette a, a' in punti coniugati; queste curve unite saranno razionali e costituiranno un fascio, sicchè sarà lecito trasformarle in rette, passanti per un punto Q. Allora l'involuzione I_2 sarà trasformata in un'altra che possiede le rette per Q come unite e quindi ha sopra ciascuna di queste (al più) due punti doppi variabili, al variare della retta. Ne segue che l'involuzione I_2 possiede una curva d'ordine n con $Q(n-2)$ - *plo*, (o $(n-1)$ - *plo*) costituita da punti uniti.

Chiameremo involuzioni di DE JONQUIÈRES (o del secondo tipo di BERTINI [1]) le involuzioni che posseggono un fascio di rette unite e le loro trasformate.

Possiamo dunque dire: *una involuzione che possiede un fascio unito di curve razionali è una involuzione di* DE JONQUIÈRES.

Più generalmente si può mostrare che una involuzione la quale muti in sè un sistema lineare completo $|C|\infty^r$ $(r>1)$ di curve razionali è sempre una involuzione di DE JONQUIÈRES.

Consideriamo infatti le curve del sistema $|C|$ come i punti di uno spazio S_r ad r dimensioni. La involuzione I_2 per la quale $|C|$ è invariante si trasforma nello S_r in una involuzione proiettiva, che ammetterà perciò due spazi (duali) di punti uniti. Se $r \geq 2$ in uno (almeno) di questi spazi esisterà una retta di punti uniti, che sarà immagine di un *fascio* di curve razionali *unite* per la I_2. Ne segue che la I_2 è una involuzione di DE JONQUIÈRES.

Concludendo, si può dire: *Tutte le involuzioni piane del secondo ordine, che ammettono un sistema lineare invariante di curve razionali sono involuzioni di* DE JONQUIÈRES (o del secondo tipo di BERTINI); esse possono essere trasformate in involuzioni, che possiedono un fascio di rette unite di centro Q ed una curva d'ordine n con Q $(n-2)$ - *plo* (o $(n-1)$ - *plo*), luogo di punti uniti.

---

[1] Il BERTINI classifica nel primo tipo le omologie armoniche del piano, le quali sono involuzioni di DE JONQUIÈRES, in cui la curva dei punti uniti d'ordine n con $Q(n-2)$-*plo* ha il punto $Q(n-1)$-*plo* ed $n=1$. La curva di punti uniti si riduce così all'asse dell'omologia (non passante per il centro Q).

Passiamo ad esaminare le involuzioni che mutano in se stesso un sistema lineare ∞^r $(r > 1)$ di curve ellittiche.

Escluderemo in un primo tempo il caso $r = 2$ in cui la involuzione I_2 lasci invariante una rete supponendo dunque $r \geq 3$.

Un sistema lineare completo ∞^3 almeno di curve ellittiche si può ridurre (cfr. Lib. II, cap. III, n. 13), al sistema delle cubiche con r punti base $(0 \leq r \leq 6)$ ovvero al sistema delle quartiche con due punti base doppi.

Incominciamo a prendere in esame il caso $r = 3$, in cui esista un sistema invariante di ∞^3 cubiche C_3 passanti per 6 punti base $A_1, A_2, \ldots, A_6$.

Le ∞^3 cubiche per 6 punti base $A_1, A_2, \ldots, A_6$ si possono considerare come le immagini delle sezioni piane di una superficie cubica F_3 dello spazio S_3. La involuzione piana che lascia invariante il sistema delle C_3 si trasforma nello spazio S_3 in una involuzione proiettiva, che muta in sè la F_3.

Una trasformazione proiettiva dell'S_3 ordinario può essere:

a) l'omologia armonica, in cui vi è un punto ed un piano di punti uniti, ovvero

b) l'omografia biassiale armonica, nella quale vi sono due rette (sghembe) di punti uniti.

Se si verifica il primo caso, ponendo il punto unito dell'omologia nel punto all'infinito Z_∞ dell'asse delle z e facendo coincidere il piano dei punti uniti con il piano $z = 0$, l'equazione della F_3 è del tipo:

$$z^2 = f(x, y).$$

Il piano all'infinito, tangente nel punto Z_∞ a questa F_3, la sega in tre rette r_1, r_2, r_3 che sono unite per l'omologia, passando per il suo centro. Il fascio di piani, che ha come sostegno una qualunque delle tre rette r_1, r_2, r_3 sega sopra la F_3 un fascio di coniche, le quali sono mutate in sè dalla omologia. La involuzione I_2 lascia perciò invarianti le curve razionali di un fascio ed appartiene pertanto al tipo delle involuzioni di De Jonquières.

Se invece la F_3 è mutata in sè da una omologia biassiale armonica, una delle rette luogo dei punti uniti deve giacere sulla

F_3, giacchè le rette, che uniscono due punti coniugati della superficie intersecano ulteriormente la superficie in un punto unito. Il fascio di piani per questa retta sega allora sulla F_3 un fascio di coniche invarianti. Si conclude perciò come nel primo caso che l'involuzione I_2 appartiene al secondo tipo di BERTINI.

Supponiamo ora che la I_2 trasformi in se stesso un sistema lineare di ∞^4 o ∞^5 cubiche C_3 per 5 o 4 punti base.

Le cubiche per 5 punti base si possono considerare come le immagini delle sezioni iperpiane di una F_4 di S_4; l'involuzione I_2 si muta nell'S_4 in un'involuzione proiettiva I' che trasforma in sè la F_4 di S_4; ed esiste certamente un punto di F_4, unito per I', che non sia centro di una stella di raggi uniti. Infatti le involuzioni proiettive di S_4 hanno come spazi di punti uniti o un punto ed un S_3 ovvero una retta ed un S_2; nel primo caso basta prendere un punto comune alla F_4 ed all'S_3 di punti uniti, nel secondo un punto comune alla F_4 ed all'S_2 di punti uniti. Proiettando la F_4 da un suo punto (che sia unito e non sia centro di una stella di raggi uniti per I') in un S_3, si perviene ad una F_3 di S_3, trasformata in sè da una omografia non identica ed involutoria. Per quanto si è visto precedentemente, su questa F_3 esisterà un fascio di coniche invarianti, immagine di un fascio di coniche (o di cubiche razionali) della F_4, invarianti per I'. L'involuzione I_2 possiede dunque anche in questo caso un fascio di curve razionali invarianti ed appartiene perciò al tipo di DE JONQUIÈRES.

Analogamente si argomenta, nel caso in cui l'involuzione I_2 muti in sè le ∞^5 cubiche C_3 per 4 punti base. Un sistema di questo tipo si può considerare come il sistema immagine delle sezioni iperpiane di una F_5 di S_6, la quale sia mutata in sè da una involuzione proiettiva I', immagine della I_2. Esiste certamente un punto della F_5 che sia unito per I', senza essere centro di una stella di raggi uniti. Ciò si prova come sopra se la I' ha come spazi fondamentali un punto ed un S_4, ovvero una retta ed un S_3. Se la I' ha come spazi fondamentali due S_2, un S_3 passante per due coppie di punti coniugati di F_5 sega la F_5 in un quinto punto, che è unito, giacendo di conseguenza su uno dei due S_2 fondamentali.

Proiettando la F_5 da un suo punto (che sia unito e non sia

centro di una stella di raggi uniti per I') in un S_4 si cade in una F_4 di S_4, trasformata in sè da una involuzione proiettiva; e si può quindi concludere come prima che l'involuzione I_2 appartiene al tipo di DE JONQUIÈRES.

Passiamo a considerare il caso in cui l'involuzione I_2 ammetta un sistema lineare invariante di ∞^6 cubiche per tre punti base A_1, A_2, A_3. La superficie F_6 di S_6, rappresentata sul piano dalle ∞^6 cubiche per A_1, A_2, A_3 sarà trasformata in sè da una involuzione proiettiva I' di S_6 e possiederà tre fasci di coniche, rappresentati dai fasci di rette per A_1, A_2, A_3; uno almeno di questi fasci sarà invariante per I'. Esiste dunque un fascio di curve razionali, invariante per l'involuzione I_2, che è dunque del tipo di DE JONQUIÈRES.

Se finalmente l'involuzione I_2 lascia invariante un sistema di ∞^7 o ∞^8 o ∞^9 cubiche C_3 per due o uno o nessun punto base, la I_2 è certamente proiettiva, perchè la rete omaloidica corrispondente nella I_2 alla rete delle rette, se non è composta di rette, deve possedere almeno *tre* punti base, mentre qui ne sono disponibili al massimo due. L'involuzione è perciò una omologia armonica, che rientra nel tipo di DE JONQUIÈRES.

Rimane da discutere il caso in cui la I_2 muta in sè il sistema completo $|C_4|$ delle quartiche passanti doppiamente per due punti base A e B. In questa ipotesi è invariante anche il sistema delle coniche passanti per A e B, sistema definito dalla proprietà che il suo doppio coincide con il C_4 e quindi, essendovi un sistema lineare di curve razionali invariante, la involuzione I_2 è del tipo di DE JONQUIÈRES.

Riassumendo, possiamo dire: *se una involuzione I_2 lascia invariante un sistema lineare completo ∞^2 almeno di curve ellittiche, essa appartiene al tipo di* DE JONQUIÈRES.

20. Le involuzioni del terzo tipo di Bertini.

Passiamo ad esaminare il caso precedentemente escluso, in cui la trasformazione birazionale involutoria I_2 lascia invariante una rete di cubiche C_3 passanti semplicemente per 7 punti base A_1, A_2, ..., A_7.

È chiaro anzitutto che, data ad arbitrio una siffatta rete, esiste sempre una trasformazione involutoria I_2 che la muta in se stessa: è l'involuzione (*caratteristica*) che lascia ferme tutte le C_3 ed associa sopra ciascuna di esse le coppie della serie caratteristica g_2^1 segata dalle rimanenti. Questa involuzione costituisce una trasformazione d'ordine 8, in cui alle rette del piano corrispondono delle curve d'ottavo ordine C_8 passanti triplamente per $A_1, A_2, \ldots, A_7$. Lo dimostriamo così: Osserviamo anzitutto che l'involuzione I_2 lascia invariato il sistema lineare ∞^{12} $|C_9|$ delle C_9 passanti triplamente per $A_1, A_2, \ldots, A_7$, sistema triplo della rete delle C_3; il $|C_9|$ contiene in sè la rete delle rette e come sistema residuo la rete omaloidica delle C_8 passanti triplamente per $A_1, A_2, \ldots, A_7$. Ora il sistema $|C_9|$ sega sopra una C_3 la g_6^5 completa, triplo della g_2^1 caratteristica; ciò si rivela dal fatto che il sistema residuo della cubica C_3 rispetto al $|C_9|$ è il sistema ∞^6 delle C_6 passanti doppiamente per $A_1, A_2, \ldots, A_7$. Si assuma una retta generica r del piano e siano A, B, C le sue intersezioni con una C_3 e A', B', C' i punti coniugati di A, B, C nella I_2: la sestina $A\,B\,C\,A'\,B'\,C'$ appartiene ad ∞^7 curve del $|C_9|$ fra le quali ve n'è *una* spezzata nella retta r e nella residua C_8, che passa per A', B', C'. È facile vedere che la trasformazione I_2 trasforma la retta r per A, B, C nella C_8 per A', B', C' così costruita; invero se si fa muovere la retta r lasciando fisso il suo punto A, la C_8 corrispondente varia entro la propria rete omaloidica, descrivendo il fascio che ha per punto base A', sicchè la corrispondenza posta tra la rete delle rette e la rete delle C_8 appare proiettiva e la trasformazione cremoniana che essa porta nel piano associa i punti coniugati della nostra involuzione caratteristica.

Ma, oltre l'involuzione caratteristica I_2 potrà aversi un'altra involuzione π che trasformi in se stessa la rete $|C_3|$ senza possedere come invarianti le singole curve di essa. Questo caso non è a priori da escludersi, ma per il nostro scopo sarà sufficiente dimostrare che una involuzione π, che lasci invariata la rete delle C_3 e non le sue singole curve è una involuzione di DE JONQUIÈRES, cioè si lascia ricondurre al primo tipo.

Per giustificare l'asserto converrà esaminare i vari casi possibili. Alla rete delle rette, che è contenuta, come si è visto, nel

sistema lineare $|C_9|$ delle C_9 passanti triplamente per A_1, A_2, ... A_7 ed ha rispetto ad essa come residuo un'altra rete omaloidica, dovrà corrispondere nella π un'altra rete omaloidica di curve C_s, parimenti contenuta nel $|C_9|$ ed avente rispetto a questa una rete omaloidica residua. Quindi si avrà anzitutto $s \leq 8$, saranno cioè da esaminare i casi $s = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Se $s = 1$, la π è una involuzione proiettiva, ossia una omologia armonica; essa è pertanto una particolare involuzione di DE JONQUIÈRES.

Se $s = 1$, la π è una involuzione proiettiva, ossia una omologia per tre punti base A_1, A_2, A_3. Il sistema somma della rete delle rette e delle coniche per A_1, A_2, A_3 è invariante per la π e costituito dalle ∞^6 cubiche per A_1, A_2, A_3. La π lascia dunque invariante un sistema lineare ∞^6 di curve ellittiche e quindi è del tipo di DE JONQUIÈRES.

Passiamo al caso $s = 3$. Alle rette corrispondono le C_3, passanti doppiamente per A_1 e semplicemente per A_2, A_3, A_4, A_5.

Il sistema somma delle rette e delle $C_3(A_1^2A_2A_3A_4A_5)$ è il sistema delle:

$$C_4(A_1^2A_2A_3A_4A_5),$$

che sarà invariante per la π; ma l'aggiunto di esso è il fascio delle rette per A_1, e quindi, esistendo un fascio di curve razionali invariante, la π è del tipo di DE JONQUIÈRES.

Se $s = 4$, abbiamo due casi possibili. Alle rette corrispondono le $C_4(A_1^2A_2^2A_3^2A_4A_5A_6)$ ovvero le $C_4(A_1^3A_2A_3A_4A_5A_6A_7)$. Nel primo caso è invariante per la π il sistema delle $C_5(A_1^2A_2^2A_3^2A_4A_5A_6)$, che ha per aggiunte le ∞^2 $C_2(A_1A_2A_3)$; nel secondo caso è invariante il sistema delle:

$$C_5(A_1^3A_2A_3A_4A_5A_6A_7)$$

che ha le sue aggiunte composte con le coppie delle rette del fascio di centro A_1. I due sistemi primi aggiunti ottenuti essendo invarianti per la π, questa appartiene conseguentemente al tipo di DE JONQUIÈRES.

I casi $s = 5, 6, 7, 8$ si trattano facilmente, tenendo conto del

fatto che la rete di curve omaloidiche corrispondente alla rete delle rette ha come residuo una rete omaloidica del sistema $|C_9|$ delle $C_9(A_1^2 A_2^3 \dots A_7^3)$. In base a questa osservazione possiamo affermare senz'altro che nel caso $s = 5$ le sole reti da prendere in considerazione sono: la rete delle $C_5(A_1^3 A_2^2 A_3^2 A_4^2 A_5 A_6 A_7)$ e la rete delle $C_5(A_1^2 A_2^2 A_3^2 A_4^2 A_5^2 A_6^2)$ residue delle C_4 prima nominate.

Per l'involuzione π sono invarianti i sistemi lineari somma delle reti anzidette e della rete delle rette. È perciò invariante nel primo caso il sistema delle:

$$C_6(A_1^3 A_2^2 A_3^2 A_4^2 A_5 A_6 A_7)$$

e nel secondo caso il sistema delle:

$$C_6(A_1^2 A_2^2 A_3^2 A_4^2 A_5^2 A_6^2).$$

Il sistema aggiunto di questi due sistemi è rispettivamente costituito dalle ∞^3:

$$C_3(A_1^2 A_2 A_3 A_4)$$

e dalle ∞^3:

$$C_3(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6).$$

L'involuzione π lascia dunque invariato un sistema lineare di curve razionali o un sistema ∞^3 di curve ellittiche e quindi è sempre del tipo di DE JONQUIÈRES.

Passiamo a discutere il caso $s = 6$. L'involuzione π muta la rete delle rette nella rete delle:

$$C_6(A_1^3 A_2^2 A_3^2 A_4^2 A_5^2 A_6^2 A_7)$$

e muta in sè il sistema delle:

$$C_7(A_1^3 A_2^3 A_3^2 A_4^2 A_5^2 A_6^2 A_7),$$

il cui primo aggiunto è formato dalle ∞^4:

$$C_4(A_1^2 A_2^2 A_3 A_4 A_5 A_6).$$

Si ha dunque un sistema lineare invariante formato da ∞^4 curve ellittiche; per conseguenza siamo sempre nel secondo tipo di BERTINI.

Sia $s = 7$. La rete delle rette diviene la rete delle:

$$C_7(A_1^3 A_2^3 A_3^3 A_4^3 A_5^2 A_6^2 A_7^2)$$

e rimane invariante il sistema delle:

$$C_8(A_1^3 A_2^3 A_3^3 A_4^3 A_5^2 A_6^2 A_7^2),$$

il cui primo aggiunto, pure invariante, è formato dalle ∞^5:

$$C_5(A_1^2 A_2^2 A_3^2 A_4^2 A_5 A_6 A_7);$$

il secondo aggiunto, anche esso invariante, è un fascio di coniche per A_1, A_2, A_3, A_4. L'involuzione π muta in sè un fascio di curve razionali e quindi appartiene al tipo di DE JONQUIÈRES.

Sia finalmente $s = 8$. A priori abbiamo una involuzione π d'ordine 8, diversa dalla I_2, che fa corrispondere alla rete delle rette del piano la medesima rete omaloidica delle $C_8(A_1^3 A_2^3 A_3^3 A_4^3 A_5^3 A_6^3 A_7^3)$. Il prodotto πI_2 è una omografia T che d'altra parte è anche involutoria perchè la π trasforma in sè la rete delle $C_3(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7)$ e quindi la sua involuzione caratteristica. Pertanto la πI_2 è una omologia armonica, che trasforma in se stessa la rete delle:

$$C_3(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7).$$

Notiamo fin d'ora, che essendo (1):

$$T = \pi I_2 = I_2 \pi,$$

ne verrà anche:

$$\pi = I_2 T.$$

Discutiamo le varie possibilità che si affacciano in ordine ai *punti base della rete* $|C_3|$ *rispetto all'omologia armonica* T, che la trasforma in se stessa.

1) Può darsi che vi sia un punto A unito (nel centro dell'omologia o in un punto dell'asse) che sia base per $|C_3|$ e a cui sia infinitamente vicino un altro punto base. Da questa ipotesi se-

(1) Si rammenti che la condizione di permutabilità di due trasformazioni involutorie è che il prodotto sia involutorio.

gue che le cubiche C_3 aventi il punto A come doppio formano un fascio di curve razionali (o spezzate in parte fissa e curve razionali) invariante per la T, e quindi anche per la $\pi = I_2 T$. La involuzione π è in questo caso riconducibile ad una involuzione di De Jonquières.

2) Esclusa l'ipotesi 1), si può avere un punto base nel centro dell'omologia A: siccome vi sono altri 6 punti base, di cui 3 al più sull'asse a, vi sarà certamente una coppia di punti base B, B', coniugati in T, fuori dell'asse a, e perciò allineati con A. Ne viene allora che il fascio di curve razionali, residuo della retta fondamentale $A\,B\,B'$ rispetto a C, è invariante per la T e quindi anche per la $\pi = I_2 T$. In questo caso la π è dunque ancora del tipo di De Jonquières.

3) Se non è verificata nè l'ipotesi 1) nè l'ipotesi 2), resta da esaminare solamente il caso in cui la rete $|C_3|$ possegga *al più* 3 punti base sull'asse a dell'omologia T e un numero pari di punti base fuori di a (e del centro A) distribuiti in tante coppie di punti coniugati allineati con A: saranno dunque 6 o 4 punti base di questa specie (non necessariamente distinti).

a) Se esistono 6 punti base di $|C_3|$ fuori di a e di A, essi stanno su di una conica C_2 fondamentale, che dà un fascio di curve razionali invariante per la T e quindi per la $\pi = I_2 T$. La π appartiene al tipo di De Jonquières.

b) Nel caso in cui esistano 4 punti base di $|C_3|$ fuori di a e di A, vi sono 3 punti base sull'asse a: il fascio residuo della retta a, che è allora fondamentale, è costituito da curve razionali ed è invariante per la π. Segue che la π è sempre del tipo di De Jonquières.

Nota. - Si può chiarire per esercizio le circostanze della dimostrazione precedente, analizzando i casi a cui dà luogo una rete di:

$$C_3(A_1\,A_2\,A_3\,A_4\,A_5\,A_6\,A_7)$$

trasformata in sè da una omologia armonica T, almeno nella ipotesi dei punti base distinti

Supponiamo perciò che il punto A_1 sia centro dell'omologia

e sia uno dei punti base della rete $|C_3|$. Gli altri 6 punti base possono essere o tutti e 6 fuori dell'asse a e quindi costituire 3 coppie di punti coniugati su di una conica C_2, ovvero due sull'asse e quattro distribuiti in due coppie di punti coniugati per la T.

Nel primo caso tutte le C_3 sono unite per la T, hanno un flesso in A_1 e risulta evidente che le rette per A_1 segano su ogni C_3 una g_2^1 le cui coppie (di punti coniugati in T) coincidono con le coppie dell'involuzione caratteristica I_2. Infatti le rette per A insieme alla conica C_2 fondamentale sono tra le cubiche della rete $|C_3|$.

Questo fatto potrà apparire un paradosso, quando si rifletta che la T, essendo una omologia armonica, è una trasformazione cremoniana d'ordine 1, mentre si è detto che la I_2 è una trasformazione cremoniana del piano d'ordine 8, nella quale alle rette corrispondono delle C_8 passanti triplamente per A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7. Come è possibile che la I_2 equivalga all'omologia T? Perchè ciò accada bisogna che la rete delle C_8 sia composta di una curva fondamentale fissa

$$C_7(A_1^3A_2^3A_3^3 \dots A_7^3).$$

e di rette variabili.

Vediamo come queste circostanze si verifichino nel nostro caso. Avendo chiamato A_1 il centro dell'omologia, gli altri 6 punti base siano a coppie coniugati e quindi allineati con A_1: otterremo così le coppie A_2A_3, A_4A_5, A_6A_7. Poichè $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ stanno su di una conica C_2 vediamo che effettivamente l'omologia T si può considerare come una trasformazione dell'ordine 8 nella quale alle rette corrispondono le rette, aumentate della curva fissa costituita dalla conica C_2 contata due volte e dalle tre rette A_2A_3, A_4A_5, A_6A_7. Tanto la C_2 quanto queste tre rette sono infatti fondamentali per la rete di cubiche:

$$C_3(A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7).$$

Restando fissa l'ipotesi che A_1 sia il centro dell'omologia può anche avvenire che due dei punti base (A_6 e A_7) cadano sull'asse a mentre gli altri quattro (A_2, A_3 e A_4, A_5) sono a coppie coniugati in T e quindi allineati con A_1.

In questo caso le cubiche della rete $|C_3|$ sono certamente *non* tutte unite, giacchè non è unito il punto d'intersezione che una di esse ha con la retta $A_6 A_1$ all'infuori di A_6 e A_1. Dunque la I_2 è diversa dalla T e si ha nella $\pi = I_2 T$ un tipo effettivamente esistente di trasformazione dell'ottavo ordine, che trasforma in sè la $|C_3|$.

Passiamo a discutere l'ipotesi in cui il centro dell'omologia non sia un punto base della rete $|C_3|$: due casi possono presentarsi (restando esclusi punti base infinitamente vicini):

a) Sull'asse a vi è un punto base A_1 e gli altri 6 sono su una conica C_2 e a coppie allineati con il centro O dell'omologia;

b) sull'asse a esistono tre punti base A_1, A_2, A_3 e gli altri quattro (A_4, A_5 e A_6, A_7) sono a coppie allineati con O.

Nel caso *a*) è certamente $I_2 \neq T$. Infatti le C_3 della rete *non* possono essere tutte unite, giacchè l'omologia T permuta tra loro le rette per A_1, le quali insieme alla conica fissa $A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7$ formano cubiche appartenenti alla rete $|C_3|$.

Nel caso *b*) le cubiche C_3 per $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7$ sono del pari *non* tutte unite. Consideriamo infatti il fascio di C_3 appartenenti a $|C_3|$ ed aventi un ottavo punto base in O. Se le C_3 di questo fascio fossero mutate in sè dalla omologia T, le rette $A_1 O$, $A_2 O$, $A_3 O$ dovrebbero essere tangenti a tutte le C_3 o in O o nel punto d'incontro A_1 con l'asse a. Ma ciò è manifestamente impossibile.

Segue che è anche qui $I_2 \neq T$.

Il risultato degli sviluppi precedenti si può formulare nella seguente proposizione:

Se una involuzione I_2 lascia invariata una rete $|C_3|$ di cubiche, passanti semplicemente per sette punti base A_1, A_2, ..., A_7, senza essere riducibile ad un'omologia armonica o al secondo tipo di BERTINI, *essa coincide con l'involuzione caratteristica della rete.*

Si può riconoscere che una rete siffatta non possiede in generale come covariante un fascio di curve di genere zero: e per ciò l'involuzione caratteristica di una rete di C_3 con 7 punti base

è generalmente irriducibile al tipo di DE JONQUIÈRES; essa costituisce dunque un tipo nuovo, che designeremo col nome di *terzo tipo del* BERTINI. Invero le curve di un tal fascio dovrebbero comportarsi simmetricamente rispetto ai punti base A_1, A_2, ..., A_7 avendo in essi la stessa molteplicità x e per nessun ordine n è possibile determinare x in guisa che ciò succeda.

21. Le involuzioni del quarto tipo di Bertini.

L'unico caso, che ci rimane ancora da esaminare è quello di una involuzione, la quale muti in sè il sistema lineare ∞^3 delle sestiche passanti doppiamente per 8 punti base A_1, A_2, ..., A_8.

È chiaro anzitutto che per un siffatto sistema di $C_6(A_1^2 A_2^2 A_3^2 \ldots A_8^2)$ esiste sempre una trasformazione involutoria, che lo muta in se stesso. Infatti tale sistema *non è semplice*: se si sceglie un punto P generico del piano, le $\infty^2 C_6$ passanti per P passano *di conseguenza* per un altro punto P', ed associando al punto P il punto P' si crea nel piano una involuzione I_2, la quale muta in sè ciascuna delle C_6 di $|C_6|$, ed è l'*involuzione, con la quale è composta la serie caratteristica* del sistema $|C_6|$.

Il fatto che il sistema $|C_6|$ non è semplice si può dimostrare facilmente nel modo seguente: consideriamo le cubiche C_3 passanti per i punti base $A_1, A_2, \ldots A_8$; esse costituiscono un fascio che avrà un nono punto base A_9. Le C_6 segheranno sopra una C_3 qualsiasi una serie lineare g_2^1, poichè ogni C_3 fa parte di $\infty^1 C_6$ riducibili. Preso allora un punto P generico del piano, per esso passerà *una* C_3 del fascio che ha i punti base in $A_1, A_2, \ldots, A_9$ e le C_6 segheranno sopra questa C_3 una g_2^1 nella quale al punto P corrisponderà il punto P'. Segue che le C_6 passanti per un punto P di C_3 passano di conseguenza per il punto P', coniugato di P nella g_2^1 nominata. Il sistema risulta così appartenente all'involuzione delle coppie (PP') e riferendo proiettivamente le $\infty^3 C_6$ di $|C_6|$ ai piani di un S_3 si ottiene una *superficie doppia*, rappresentata sul piano dal sistema delle C_6 stesse. Poichè il sistema

$|C_6|$ è di grado 4, la superficie doppia è una quadrica, la quale risulta anzi un *cono, le cui generatrici corrispondono alle cubiche* C_3 *del fascio con i punti base* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_8, A_9$, questo fascio essendo autoresiduo rispetto al sistema $|C_6|$. (In questa rappresentazione il vertice del cono corrisponde al nono punto base A_9 del fascio $|C_3|$).

L'involuzione caratteristica I_2 del sistema $|C_6|$ costituisce una trasformazione cremoniana d'ordine 17, nella quale alle rette corrispondono C_{17}, passanti sei volte per $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_8$. Consideriamo infatti una C_3 del fascio coi punti base $A_1, A_2, \ldots, A_9$. Essa sarà incontrata da una retta generica r in tre punti A, B, C, ai quali corrisponderanno per la I_2 tre punti della stessa curva; A', B', C'. Le curve d'ordine 18 passanti 6 volte per $A_1, A_2, \ldots, A_8$ costituiscono un sistema lineare ∞^{21} e segano sulla C_3 la g_6^5 completa, come si rivela dal fatto che il sistema residuo della cubica C_3 rispetto al sistema completo delle C_{18} è il sistema delle $\infty^{15} C_{15}$ passanti cinque volte per $A_1, A_2, \ldots, A_8$. La sestina di punti A, B, C, A', B', C' appartiene ad $\infty^{16} C_{18}$, tra le quali ve n'è *una* spezzata nella r ed in una $C_{17}(A_1^6, A_2^6, \ldots, A_8^6)$. Infatti la retta r incontra le C_{18} in 18 punti, tre dei quali sono in A, B, C e quindi si può ottenere lo staccamento della r con l'imposizione di 16 condizioni lineari.

Dunque *l'involuzione caratteristica* I_2 a cui appartiene il sistema lineare delle $C_6(A_1^2 A_2^2 A_3^2 A_4^2 A_5^2 A_6^2 A_7^2 A_8^2)$ *è una trasformazione cremoniana nella quale alle rette corrispondono le curve* $C_{17}(A_1^6 A_2^6 \ldots A_8^6)$: ciò si vede come a pag. 356.

Ma oltre l'involuzione caratteristica I_2 potrà aversi un'altra involuzione π che trasformi in sè il sistema $\infty^3 |C_6|$ senza possedere come invarianti le singole curve. Questo caso non è a priori da escludersi, ma per il nostro scopo sarà sufficiente dimostrare che una involuzione π che lasci invariato il sistema $\infty^3 |C_6|$ e non le sue singole curve è riconducibile al primo o al secondo tipo.

Pongasi che l'involuzione π trasformi in se stesso il sistema lineare ∞^3 delle curve $C_6(A_1^2 A_2^2 \ldots A_8^2)$ e quindi il fascio delle cubiche aggiunte $C_3(A_1 A_2 \ldots A_8 A_9)$. A priori si possono fare due ipotesi:

1) le cubiche C_3 sono tutte trasformate in se stesse da π;

2) ovvero esse vengono permutate da π secondo una involuzione g_2^1 del fascio, che associa le cubiche coniugate.

Nell'ipotesi 1) si avrà sopra ciascuna C_3 una involuzione subordinata da π, che — a priori — potrebbe essere ellittica o razionale. Ma essa non può essere una γ_2^1 ellittica, perchè possiede un punto unito nel punto A_9 [1]: dovrà dunque essere una g_2^1, anzi la g_2^1 che ha per punto doppio A_9, cioè l'involuzione caratteristica segata sulla C_3 dalle C_6.

Nell'ipotesi 2) la rete delle C_6 spezzate in due C_3 contiene soltanto un fascio di curve unite per π, costituite da coppie di cubiche C_3 coniugate, e fra queste due sestiche ottenute contando due volte le cubiche unite $\overline{C}_3$ e $\overline{\overline{C}}_3$; di più vi sarà almeno un fascio di C_6 unite *irriducibili*, la trasformazione involutoria del $|C_6|$ in se stesso (che è, astrattamente, un'omografia involutoria dello S_3, omologia o omografia biassiale armonica) possedendo una rete o due fasci di curve unite. Ora, sopra una C_6 unita irriducibile, la nostra π subordinerà un'involuzione che, a priori, potrà essere:

a) la g_2^1 canonica,

b) ovvero una involuzione ellittica γ_2^1, dotata di due punti doppi coniugati nella g_2^1 e possedente inoltre *una* coppia comune colla g_2^1 [1].

Nell'ipotesi *a*) risulta senz'altro che l'involuzione π coincide con l'involuzione caratteristica cui appartiene il sistema $\infty^3 |C_6|$. Approfondiremo l'esame dell'ipotesi *b*).

In questa ipotesi le C_6 unite incontreranno la $\overline{C}_3$ (o la $\overline{\overline{C}}_3$) nei due punti doppi della γ_2^1, e l'altra, $\overline{\overline{C}}_3$ (o $\overline{C}_3$), in una coppia di punti coniugati per γ_2^1 e per π. Si avrà dunque una *curva di punti uniti o doppi* per π, cioè la *cubica* $\overline{C}_3$ (o $\overline{\overline{C}}_3$).

---

(1) Ciò appare nel modo più semplice, considerando il cono quadrico doppio rappresentato dal sistema lineare ∞^3 delle C_6: al punto A_9 corrisponde il vertice del cono, che è certo unito per le trasformazioni proiettive della superficie.

(2) Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. I, pagg. 72, 73, 76.

L'involuzione prodotto di π per l'involuzione caratteristica di $|C_6|$ (che sono permutabili) avrà invece come curva di punti doppi la $\overline{\overline{C}}_3$ (o la $\overline{C}_3$) e subordinerà la g_2^1 caratteristica sopra la cubica unita $\overline{C}_3$ (o $\overline{\overline{C}}_3$).

Si può dubitare che alla cubica $\overline{C}_3$ (o $\overline{\overline{C}}_3$) si aggiunga una curva di punti doppi di π che sia fondamentale per $|C_6|$ (p. es. una retta per i punti A_1, A_2, A_3 o una conica per A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, o una cubica per A_1^2, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8); ma in tal caso staccando questa curva fondamentale da $|C_6|$ si avrebbe una rete di curve ellittiche invariante per π: l'involuzione π si ricondurrà quindi al *tipo* II di BERTINI.

Dobbiamo esaminare le varie possibilità a cui conduce l'ipotesi che l'involuzione π possieda una curva di *punti uniti*, costituita unicamente dalla cubica $\overline{C}_3$.

La π farà corrispondere alle rette del piano delle curve C_n d'un certo ordine n, ciascuna delle quali incontrerà la retta omologa r nei 3 punti uniti, intersezioni di r con $\overline{C}_3$, e in $\frac{1}{2}(n-3)$ coppie di punti coniugati appartenenti alla r; perciò ($\frac{1}{2}(n-3)$ essendo la *classe* di π) n *è dispari*.

Ora la π_n deve trasformare in sè il sistema lineare $|3C_6| = C_{18}(A_1^6 A_2^6 \dots A_8^6)$, che contiene la rete delle rette e la rete omaloidica *complementare* delle curve residue; si deduce che anche la rete omaloidica delle curve C_n coniugate alle rette in π_n dovrà essere contenuta in $|C_{18}|$, rispetto a cui avrà anzi una rete omaloidica residua, complementare. Di qui segue:

$$n \leq 17.$$

Ma l'ipotesi $n = 17$ si scarta a priori, perchè l'involuzione prodotto di π_{17} per l'involuzione caratteristica di $|C_6|$ dovrebbe essere un'omologia (armonica) e non potrebbe quindi avere come curva di punti doppi la cubica $\overline{\overline{C}}_3$, d'accordo con l'osservazione fatta innanzi.

Si conclude:

$$n = 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.$$

L'analisi di questi casi possibili si compie più brevemente grazie ad alcune osservazioni preliminari:

α) I casi $n = 11, 13, 15$ corrispondono alle reti complementari di quelle che si hanno per $n = 7, 5, 3$; sicchè basta limitarsi ai casi:

$$n = 3, 5, 7, 9.$$

β) Ad ogni rete omaloidica di C_9, trasformante in sè il $|C_6|$, risponde una rete complementare di curve dello stesso ordine (e perciò una seconda soluzione delle equazioni indeterminate che caratterizzano questo problema), dove le molteplicità i dei punti $A_1, A_2, \ldots, A_8$ per le C_9 sono cambiate in $6 - i$.

Le reti omaloidiche $|C_n|$, i cui punti base cadono tra i punti $A_1, A_2, \ldots A_8$ (base per $|C_6|$), sono caratterizzate dalle seguenti relazioni aritmetiche.

Si indichi con s_i il numero dei punti base i-*pli* della rete $|C_n|$; dove $i = 0, 1, 2, \ldots, h$ e sia h l'ordine di molteplicità più elevato. Si avrà anzitutto:

$$s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_h = 8. \tag{1}$$

Poi, scrivendo che le C_n hanno 3 intersezioni variabili colle $C_3(A_1A_2\ldots A_8A_9)$:

$$s_1 + 2s_2 + \ldots + hs_h = 3n - 3. \tag{2}$$

Ed infine, scrivendo che le C_n formano una rete omaloidica, cioè che i punti base assorbono $n^2 - 1$ intersezioni fisse di due C_n:

$$s_1 + 4s_2 + \ldots + h^2 s_h = n^2 - 1. \tag{3}$$

Ora le relazioni 2) e 3) caratterizzano tutte le trasformazioni cremoniane aritmeticamente possibili, e per la loro esistenza effettiva non c'è che da aggiungere la condizione d'irriducibilità delle C_n [1]; perciò: *le reti* $|C_n|$ *corrispondenti a trasformazioni involutorie del sistema* $|C_6|$ *in se stesso, sono caratterizzate dalle relazioni* 1), 2), 3), *aggiunta la condizione d'irriducibilità delle* C_n *stesse.*

---

[1] Cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. II, pagg. 157-8.

Procediamo ad esaminare i casi possibili delle nostre trasformazioni, per:

$$n = 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.$$

Caso $n = 3$. - La rete trasformante è del tipo:

$$C_3(A_1^2 A_2 A_3 A_4 A_5),$$

dove sono evidentemente soddisfatte le relazioni 1), 2), 3).

Osserviamo ora che:

γ) Per $n \geq 5$ la rete $|C_n|$ non può avere un punto $(n-1)$-*plo* (cioè appartenere al tipo di De Jonquières). Infatti, nell'ipotesi che esista un tale punto $(n-1)$-*plo*, per la irriducibilità delle C_n,

$$s_h = 1, \qquad h = n - 1;$$

quindi le relazioni 1) e 2) divengono:

$$s_0 + s_1 = 7$$
$$s_1 = (3n - 3) - (n - 1) = 2n - 2,$$
$$2n - 2 \leq 7$$
$$n \leq \frac{9}{2} < 5 \qquad \text{c. d. d.}$$

Caso $n = 5$. - Escluso il tipo di De Jonquières (oss. γ) si hanno, per $n = 5$, i due noti *tipi* di trasformazioni cremoniane:

$$C_5(A_1^3 A_2^2 A_3^2 A_4^2 A_5 A_6 A_7)$$
$$C_5(A_1^2 A_2^2 A_3^2 A_4^2 A_5^2 A_6^2),$$

che soddisfano alle relazioni (1), (2), (3) e alla condizione di irriducibilità.

Osserviamo dopo ciò che:

δ) Per $n \geq 7$ la rete $|C_n|$ non può avere un punto base $(n-2)$-*plo*. Infatti nell'ipotesi che esista un tale punto $(n-2)$-*plo*, si avrà anzitutto, per l'irriducibilità delle C_n,

$$s_h = 1, \quad h = n - 2;$$

quindi le relazioni (1), (2), (3) divengono:

$$s_0 + s_1 + s_2 = 7$$
$$s_1 + 2s_2 = 2n - 1$$
$$s_1 + 4s_2 = 4n - 5 ,$$

e sottraendo se ne deduce:

$$2s_2 = 2n - 4 ,$$
$$s_2 = n - 2 , \qquad s_1 = 3 ,$$

da cui:

$$s_0 + s_2 = 4$$
$$n - 2 \leq 4 ,$$
$$n \leq 6 < 7$$ c. d. d.

Caso $n = 7$. - Essendo escluso che la rete delle C_7 abbia un punto base sestuplo o quintuplo (osservazioni γ e δ) il massimo ordine di molteplicità sarà:

$$h \leq 4 .$$

Distinguiamo le due ipotesi possibili per C_7 irriducibili:

$$h = 4 , \qquad s_4 = 1 ,$$

ed:

$$h < 4 , \qquad s_4 = 0 .$$

Le (1), (2), (3) divengono:

$$s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 8$$
$$s_1 + 2s_2 + 3s_3 + 4s_4 = 18$$
$$s_1 + 4s_2 + 9s_3 + 16s_4 = 48 ,$$

e, *nella prima ipotesi*:

(1′) $$s_0 + s_1 + s_2 + s_3 = 7$$

(2′) $$s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 14$$

(3′) $$s_1 + 4s_2 + 9s_3 = 32 ,$$

da cui si deduce:

(4′) $$2s_2 + 6s_3 = 18 .$$

Di qui ricaviamo per s_3 quattro valori possibili:

$$s_3 = 3 , \qquad s_3 = 2 , \qquad s_3 = 1 , \qquad s_3 = 0 ;$$

Ma *due* di questi valori, $s_3 = 0$ e $s_3 = 3$, si scartano subito, perchè danno rispettivamente:

$$s_2 = 9 \text{ incompatibile colla } (1'),$$

ed:

$$s_2 = 0 \text{ donde per la } (2') \; s_1 = 5,$$

valori similmente incompatibili colla (1'), perchè darebbero:

$$s_1 + s_2 + s_3 = 8\,!$$

Restano così da esaminare i valori:

$$s_3 = 2\,, \qquad s_3 = 1\,.$$

Ora $s_3 = 2$ dà, per la (4'):

$$s_2 = 3$$

e quindi per la (2'):

$$s_1 = 2\,,$$

e per la (1'):

$$s_0 = 0\,,$$

valori che soddisfano anche alla (3') e rispondono al tipo:

$$C_7(A_1^4 A_2^3 A_3^3 A_4^2 A_5^2 A_6^2 A_7 A_8)\,.$$

Invece $s_3 = 1$ dà, per la (4'):

$$s_2 = 6\,,$$

valore che contraddice alla (2') (dando: $2s_2 + 3s_3 = 15 > 14$!).

Passiamo alla *seconda ipotesi*:

$$s_4 = 0\,.$$

Le nostre relazioni fondamentali (1), (2), (3) diventano ora:

(1'') $$s_0 + s_1 + s_2 + s_3 = 8$$

(2'') $$s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 18$$

(3'') $$s_1 + 4s_2 + 9s_3 = 48\,,$$

da cui si deduce:

(4'') $$2s_2 + 6s_3 = 30\,, \qquad s_2 + 3s_3 = 15\,.$$

Di qui ricaviamo per s_3 *sei* valori possibili:

$$s_3 = 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,$$

e corrispondentemente:

$$s_2 = 0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15;$$

ma i quattro valori $s_3 = 3,\ 2,\ 1,\ 0$ sono da scartare, portando:

$$s_2 + s_3 > 8$$

in contraddizione alla (1″).

Restano così da esaminare i due casi:

$$s_3 = 5; \qquad s_2 = 0,$$

e:

$$s_3 = 4, \qquad s_2 = 3.$$

Il primo caso dà per la (2″):

$$s_1 = 3 \quad \text{e per la (1″)} \quad s_0 = 0,$$

valori che soddisfano anche alla (3″) e condurrebbero al tipo:

$$C_7(A_1^3A_2^3A_3^3A_4^3A_5^3A_6A_7A_8);$$

ma le C_7 di questo tipo sono *riducibili*, essendo incontrate in 15 punti dalla conica:

$$C_2(A_1A_2A_3A_4A_5).$$

Il secondo caso ($s_3 = 4,\ s_2 = 3$) da:

$$s_1 = 0, \qquad s_0 = 1.$$

valori che soddisfano pure alla (3″) e conducono al tipo:

$$C_7(A_1^3A_2^3A_3^3A_4^3A_5^2A_6^2A_7^2).$$

Caso $n = 9$. - Essendo escluso che la rete delle C_9 abbia un punto base di molteplicità 8 o 7 (osservazioni γ e δ), il massimo ordine di molteplicità sarà $h \leq 6$. D'altra parte le C_9 che hanno punti tripli in tutti gli 8 punti $A_1, A_2, \ldots, A_8$ sono di genere 4; per conseguenza le C_9 di una rete omaloidica dovranno avere in qualcuno di questi punti una molteplicità superiore o almeno

uguale a 4. Ciò posto, avremo per una rete di C_9 irriducibili:

$$h = 6 \quad \text{o} \quad h = 5 \quad \text{o} \quad h = 4.$$

La *prima ipotesi*, tenuto conto dell'irriducibilità delle C_9, dà:

$$s_6 = 1, \qquad s_5 = 0, \qquad s_4 = 0$$

e quindi le relazioni fondamentali (1), (2), (3) diventano:

(1′) $$s_0 + s_1 + s_2 + s_3 = 7$$

(2′) $$s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 18$$

(3′) $$s_1 + 4s_2 + 9s_3 = 80 - 36 = 44$$

da cui:

$$2s_2 + 6s_3 = 26$$

ossia:

(4′) $$s_2 + 3s_3 = 13 .$$

Ora, (tenendo presente l'osservazione β), notiamo che la rete complementare della nostra $|C_9|$ dovrà avere un punto sestuplo, in uno dei punti $A_1, A_2, \ldots, A_8$ che non appartengono alle C_9 e un punto quintuplo in un punto base semplice della $|C_9|$; perciò:

$$s_0 + s_1 \leq 1,$$

ossia:

$$s_0 + s_1 = 0 \quad \text{ovvero:} \quad s_0 + s_1 = 1.$$

Assumendo $s_0 + s_1 = 0$ si trova dalla (1′):

$$s_2 + s_3 = 7$$

e confrontando con la (4′):

$$s_3 = 3 \quad , \quad s_2 = 4;$$

valori che non soddisfano alla (3′).

Se invece si pone:

$$s_0 + s_1 = 1$$

viene:

$$s_2 + s_3 = 6$$

e risulterebbe:

$$2s_3 = 7$$

che è impossibile, dovendo s_3 essere intero. Così resta scartata

l'ipotesi $s_6 = 1$ e — avuto riguardo all'osservazione β) — da $s_6 = 0$ si ricava anche $s_0 = 0$.

Passiamo dunque ad esaminare la seconda ipotesi:

$$h = 5 \quad , \quad s_5 = 1,$$

(con $s_0 = 0$).

Le nostre relazioni fondamentali divengono:

$$(1'') \qquad s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 7$$

$$(2'') \qquad s_1 + 2s_2 + 3s_3 + 4s_4 = 19$$

$$(3'') \qquad s_1 + 4s_2 + 9s_3 + 16s_4 = 55 .$$

Da qui si deduce:

$$(4'') \qquad s_2 + 2s_3 + 3s_4 = 12$$

e:

$$(5'') \qquad 2s_2 + 6s_3 + 12s_4 = 36$$

e quindi:

$$(6'') \qquad 2s_3 + 6s_4 = 12$$

cioè:

$$(7'') \qquad s_3 + 3s_4 = 6 .$$

Quest'ultima uguaglianza dà per s_4 tre valori possibili:

$$s_4 = 2,\ 1,\ 0$$

cui corrisponde:

$$s_3 = 0,\ 3,\ 6$$

e quindi per la (4''):

$$s_2 = 6,\ 3,\ 0.$$

Ma la prima terna di valori $s_4 = 2$, $s_3 = 0$, $s_2 = 6$ è incompatibile con la (1'').

Invece le altre due terne conducono rispettivamente a $s_1 = 0$, $s_1 = 1$, valori che soddisfano alla (3'') e quindi conducono a due tipi aritmeticamente possibili:

$$C_9(A_1^5 A_2^4 A_3^3 A_4^3 A_5^3 A_6^2 A_7^2 A_8^2),$$

e:

$$C_9(A_1^5 A_2^3 A_3^3 A_4^3 A_5^3 A_6^3 A_7^3 A_8).$$

Ma il *secondo* di questi è composto di curve *riducibili* aventi 28 invece che 27 intersezioni con la

$$C_3(A_1^2 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7).$$

In conclusione l'ipotesi $s_5 = 1$ porta ad un solo tipo di C_9 irriducibili, per cui non solo $s_0 = 0$, ma anche $s_1 = 0$.

Resta da esaminare la *terza ipotesi*:

$$h = 4.$$

Le nostre relazioni fondamentali, tenuto conto che $s_9 = 0$, danno ora:

$$(1''') \qquad s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 8$$

$$(2''') \qquad s_1 + 2s_2 + 3s_3 + 4s_4 = 24$$

$$(3''') \qquad s_1 + 4s_2 + 9s_3 + 16s_4 = 80.$$

Possiamo subito determinare le soluzioni del problema che rispondono a $s_1 = 1$, giacchè qui si presenta la rete complementare della C_9 con un punto 5-*plo*, esaminata innanzi. Si avrà dunque per $s_1 = 1$:

$$s_2 = 1\,, \quad s_3 = 3, \quad s_4 = 3\,,$$

a cui corrisponde il *tipo*:

$$C_9(A_1^4 A_2^4 A_3^4 A_4^3 A_5^3 A_6^3 A_7^2 A_8).$$

Ora lasciando da parte il valore $s_1 = 1$, si avrà: $s_1 = 0$ e quindi le equazioni precedenti si ridurranno a

$$(1''') \qquad s_2 + s_3 + s_4 = 8$$

$$(2''') \qquad 2s_2 + 3s_3 + 4s_4 = 24$$

$$(3''') \qquad 4s_2 + 9s_3 + 16s_4 = 80.$$

Di qui si ricava:

$$s_3 + 2s_4 = 8$$

$$3s_3 + 8s_4 = 32$$

$$2s_4 = 8\,, \qquad s_4 = 4$$

e quindi:

$$s_3 = 0$$

$$s_2 = 4\,.$$

Questi valori soddisfano anche alla $(3''')$ e conducono al tipo:

$$C_9(A_1^4 A_2^4 A_3^4 A_4^4 A_5^2 A_6^2 A_7^2 A_8^2).$$

Caso $n = 11$. - In virtù dell'osservazione α) sono possibili i tipi complementari di $|C_7|$, cioè:

$$C_{11}(A_1^5 A_2^5 A_3^4 A_4^4 A_5^4 A_6^3 A_7^3 A_8^2)$$
$$C_{11}(A_1^6 A_2^4 A_3^4 A_4^4 A_5^3 A_6^3 A_7^3 A_8^3).$$

Caso $n = 13$. - Analogamente si avranno qui due tipi complementari delle C_5:

$$C_{13}(A_1^6 A_2^5 A_3^5 A_4^5 A_5^4 A_6^4 A_7^4 A_8^3)$$
$$C_{13}(A_1^6 A_2^6 A_3^4 A_4^4 A_5^4 A_6^4 A_7^4 A_8^4).$$

Caso $n = 15$. - Si ha il tipo complementare della rete delle C_3:

$$C_{15}(A_1^6 A_2^6 A_3^6 A_4^5 A_5^5 A_6^5 A_7^5 A_8^4).$$

RIASSUNTO DELL'ANALISI PRECEDENTE. - La nostra analisi porta che le eventuali involuzioni trasformanti in sè il sistema $|C_6|$ e diverse dalla sua involuzione caratteristica debbono appartenere ad uno dei 13 tipi definiti dalle reti omaloidiche d'ordine

$$n = 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$$

sopra indicate.

Queste involuzioni lascieranno invariato il sistema lineare che si ottiene sommando alle rette le curve C_n coniugate e quindi un sistema lineare appartenente ad uno dei seguenti tipi:

$$C_4\ (A_1^2 A_2 A_3 A_4 A_5)$$
$$C_6\ (A_1^3 A_2^2 A_3^2 A_4^2 A_5 A_6 A_7)$$
$$C_6\ (A_1^2 A_2^2 A_3^2 A_4^2 A_5^2 A_6^2)$$
$$C_8\ (A_1^4 A_2^3 A_3^3 A_4^2 A_5^2 A_6^2 A_7 A_8)$$
$$C_8\ (A_1^3 A_2^3 A_3^3 A_4^3 A_5^2 A_6^2 A_7^2)$$
$$C_{10}(A_1^5 A_2^4 A_3^3 A_4^3 A_5^3 A_6^2 A_7^2 A_8^2)$$
$$C_{10}(A_1^4 A_2^4 A_3^4 A_4^3 A_5^3 A_6^3 A_7^2 A_8)$$
$$C_{10}(A_1^4 A_2^4 A_3^4 A_4^4 A_5^2 A_6^2 A_7^2 A_8^2)$$
$$C_{12}(A_1^5 A_2^5 A_3^4 A_4^4 A_5^4 A_6^3 A_7^3 A_8^2)$$
$$C_{12}(A_1^6 A_2^4 A_3^4 A_4^4 A_5^3 A_6^3 A_7^3 A_8^3)$$
$$C_{14}(A_1^6 A_2^5 A_3^5 A_4^5 A_5^4 A_6^4 A_7^4 A_8^3)$$
$$C_{14}(A_1^6 A_2^6 A_3^4 A_4^4 A_5^4 A_6^4 A_7^4 A_8^4)$$
$$C_{16}(A_1^6 A_2^6 A_3^6 A_4^5 A_5^5 A_6^5 A_7^5 A_8^4).$$

Procedendo per aggiunzioni successive, dedurremo che le nostre eventuali trasformazioni involutorie del $|C_6|$ dovranno lasciare invariato un sistema lineare ∞^1 almeno di curve razionali, ovvero un sistema lineare ∞^2 almeno di curve ellittiche e perciò saranno riducibili ai tipi secondo e terzo di BERTINI.

Infatti dai sistemi invarianti precedentemente indicati si deducono rispettivamente i seguenti:

Fascio delle rette per il punto A_1,

Sistema ∞^3 delle cubiche razionali:

$$C_3(A_1^2A_2A_3A_4).$$

Sistema ∞^3 delle C_3 ellittiche:

$$C_3(A_1A_2A_3A_4A_5A_6).$$

Sistema ∞^5 delle C_5 ellittiche:

$$C_5(A_1^3A_2^2A_3^2A_4A_5A_6).$$

Fascio delle coniche $C_2(A_1A_2A_3A_4)$.

Rete delle curve composte della retta A_1A_2 e delle cubiche razionali $C_3(A_1^2A_2A_3A_4A_5)$.

Rete delle quartiche razionali:

$$C_4(A_1^2A_2^2A_3^2A_4A_5A_6).$$

Sistema ∞^2, doppio del fascio di coniche:

$$C_2(A_1A_2A_3A_4).$$

Sistema ∞^4 delle sestiche ellittiche:

$$C_6(A_1^3A_2^3A_3^2A_4^2A_5^2A_6A_7).$$

Sistema ∞^4 delle sestiche ellittiche:

$$C_6(A_1^4A_2^2A_3^2A_4^2A_5A_6A_7A_8).$$

Rete delle quintiche razionali:

$$C_5(A_1^3A_2^2A_3^2A_4^2A_5A_6A_7).$$

Rete delle curve composte della retta A_1A_2 e delle quar-

tiche ellittiche:

$$C_4(A_1^2A_2^2A_3A_4A_5A_6A_7A_8).$$

Fascio delle quartiche razionali:

$$C_4(A_1^2A_2^2A_3^2A_4A_5A_6A_7).$$

In conclusione possiamo enunciare:

Le involuzioni, trasformanti in sè il sistema lineare delle $C_6(A_1^2A_2^2 \dots A_8^2)$, *le quali non coincidano con l'involuzione caratteristica, sono riducibili ai primi tre tipi di* BERTINI.

22. Nota storica.

Nella teoria delle trasformazioni cremoniane del piano si è affacciato assai presto il problema delle trasformazioni involutorie e delle trasformazioni cicliche, cui si riferiscono i primi lavori di E. CAPORALI, di E. BERTINI, di C. F. GEISER, di L. BERZOLARI e di altri [1], dove le dette trasformazioni e più in generale le involuzioni piane di qualunque ordine (siano esse o no generate da una trasformazione cremoniana ciclica) vengono considerate dal punto di vista proiettivo. Nei lavori di questo indirizzo, che sono proseguiti anche più tardi, le proprietà delle involuzioni del secondo ordine si studiano in ispecie in relazione alla classe (numero delle coppie di punti coniugati giacenti su di una retta generale), ai punti fondamentali ed ai punti uniti. Ma una veduta più elevata si affaccia col BERTINI nel 1877, il quale propone la questione generale di determinare i tipi d'involuzioni piane del second'ordine, birazionalmente distinti. A questo problema sono dedicate le *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie del piano* (« Ann. di Mat. », Tomo VIII, Serie II, 1877) nelle quali il BERTINI è riuscito effettivamente a scoprire i tipi che qui presentiamo, cioè:

---

[1] Per la estesa bibliografia sull'argomento rimandiamo all'articolo di L. BERZOLARI: *Algebraische Transformationen und Korrespondenzen* nella « Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften », III c. 11, nn. 60-61.

il tipo I: involuzioni di DE JONQUIÈRES, le quali posseggono un fascio di rette unite di centro O ed una curva di coincidenza di un certo ordine n con O $(n-2)$-*plo* (o in particolare $(n-1)$-*plo* ed unito) (1);

il tipo II: involuzione definita dalla rete (di grado 2) delle cubiche C_3 che passano per 7 punti fissi $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$;

il tipo III: involuzione definita dal sistema non semplice e triplamente infinito delle sestiche C_6 passanti per 8 punti doppi $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$.

Il tipo II era già stato indicato da C. F. GEISER (2), che considera la rete delle cubiche per 7 punti $A_1A_2...A_7$ come immagine delle sezioni piane di una superficie cubica passanti per un punto.

L'analisi del BERTINI importa qualche restrizione, che l'autore non potè eliminare; fu tuttavia generalmente ammesso dopo il BERTINI, che la classificazione così offerta fosse effettivamente completa, cioè che non si dessero altri tipi di involuzioni del second'ordine irriducibili ai precedenti. Convalidava questa convinzione il fatto che i tipi delle involuzioni debbono corrispondere ai tipi dei piani doppi razionali e l'esame di questi — fatto da M. NOETHER (3) — portava soltanto ai tipi del BERTINI. Però anche l'analisi di M. NOETHER in proposito restava, secondo l'autore stesso, non esauriente.

Col progresso della geometria algebrica si è affacciata più tardi la visione del metodo che si basa sull'invarianza dei sistemi aggiunti ad un sistema lineare. S. KANTOR (4) e G. CASTELNUOVO hanno proposto di valersi di quest'osservazione per determinare

---

(1) Il BERTINI classifica a parte l'omologia armonica, che tuttavia si può far rientrare nel tipo I, come caso particolare $(n=1)$.

(2) Cfr. C. F. GEISER: *Über zwei geometrische Probleme;* «Crelle's Journal», Bd. 67, (1867).

(3) Cfr. M. NOETHER: *Über die ein-zweideutigen Ebenentransformationen;* «Sitzungsberichte der physik. medicin. Soc. zu Erlangen» (1878).

(4) Cfr. S. KANTOR: *Premiers fondaments pour une théorie des transformations périodiques univoques;* «Atti dell'Accademia di Napoli», serie II, vol. IV (1888-92).

le involuzioni del second'ordine e le trasformazioni cremoniane cicliche d'ordine superiore.

In particolare il CASTELNUOVO, che anche in altri sensi ha largamente adoperato il detto teorema d'invarianza, ha rilevato esplicitamente ciò che esso importa di diverso in confronto al teorema d'invarianza della serie canonica per trasformazioni birazionali della curva e non del piano, con cui S. KANTOR aveva creduto erroneamente di identificarlo.

In quest'ordine di considerazioni il CASTELNUOVO si convinse che l'analisi delle trasformazioni involutorie a partire da un sistema lineare di curve invariante potesse rendersi perfetta; tuttavia questa analisi non sembra mai essere stata sviluppata da lui in maniera completa, anche perchè il risultato veniva nel frattempo messo fuori contestazione in base alla trattazione dei piani doppi razionali che — con lo stesso metodo dei sistemi aggiunti — istituirono G. CASTELNUOVO ed F. ENRIQUES [1].

Nel corso degli studi sopra accennati e anche nella trattazione di altri problemi relativi alla teoria delle superficie, è occorso di esaminare quali sistemi lineari si presentino effettivamente come ultimi aggiunti a partire da un sistema lineare di curve dato ed il CASTELNUOVO in una nota che accompagna un lavoro di F. ENRIQUES [2], ha in particolare avvertito come il fascio d'HALPHEN d'ordine $3s$ ($s > 1$) non nasca mai per aggiunzione da sistemi di curve d'ordine superiore che sieno ∞^2 almeno. Ritroviamo così l'origine del lemma sui covarianti razionali di un sistema lineare di genere elevato, che abbiamo messo a capo di questo capitolo; il nominato lemma non è nuovo per la sostanza ma solo per la forma, assai più semplice ed elementare. A partire dal detto lemma anche tutta l'analisi, che conduce a tipi del BERTINI, riesce notevolmente semplificata ed ordinata secondo un disegno sistematico.

---

(1) Cfr. G. CASTELNUOVO e F. ENRIQUES: *Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi*; « Rend. Circ. Mat. di Palermo », T. XIV (1900).

(2) Cfr. F. ENRIQUES: *Sui piani doppi di genere uno*; « Memorie della Società Italiana delle Scienze » (detta dei XL), Serie III, T. X (1896).

Abbiamo già accennato ad altre applicazioni notevoli del metodo basato sull'invarianza dei successivi sistemi aggiunti di un sistema lineare che si trovano nelle ricerche di S. KANTOR [1] ed A. WIMAN [2], nelle quali si mira alla determinazione di tutti i tipi birazionalmente distinti di *gruppi finiti di trasformazioni birazionali del piano*. L'analisi del KANTOR ripresa successivamente con maggior rigore dal WIMAN, il quale ha anche scoperto alcuni tipi, sfuggiti al KANTOR, porta a riconoscere che:

Ogni gruppo finito di trasformazioni birazionali piane è equivalente:

a) ad un gruppo finito d'omografie, ovvero

b) ad un gruppo (chiamato dal KANTOR *di* DE JONQUIÈRES) *che trasforma in sè un fascio di rette, ovvero*

c) ad un gruppo di trasformazioni quadratiche, che mutano in sè un sistema lineare di coniche per due punti, ovvero

d) ad un gruppo che muta in sè un sistema di cubiche per 3, 4, 5, 6, 7, *punti base, ovvero*

e) ad un gruppo, che muta in sè un sistema di sestiche per 8 *punti doppi e quindi il fascio di cubiche aggiunte a questo sistema.*

Per l'esame particolareggiato dei vari gruppi, che appartengono a questi tipi, rimandiamo il lettore alla citata memoria di A. WIMAN.

Lo stesso metodo dell'invarianza dei successivi aggiunti di un sistema lineare permette anche di determinare i *gruppi continui di trasformazioni cremoniane del piano*. Basta a questo scopo osservare che la serie dei trasformati di un dato sistema lineare per le trasformazioni di un gruppo continuo è una serie continua, la quale appartiene ad un sistema lineare completo invariante per il gruppo: risultano di conseguenza invarianti anche i successivi

---

(1) Cfr. S. KANTOR: *Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene* (Mayer e Müller, Berlino, 1895).

(2) Cfr. A. WIMAN: *Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene*; « Math. Ann. », Bd. 48, 1896.

sistemi aggiunti ecc., ecc. L'analisi completa è stata svolta da F. ENRIQUES [1] e conduce al seguente risultato:

I gruppi continui di trasformazioni cremoniane del piano si possono ridurre cremonianamente ad uno dei tre gruppi tipici seguenti o ad un loro sottogruppo:

a) gruppo ∞^8 *delle omografie;*

b) gruppo ∞^6 *delle trasformazioni per raggi vettori reciproci*, ovvero (prescindendo da particolarità metriche) delle trasformazioni quadratiche, che lasciano invariante il sistema ∞^3 delle coniche per due punti;

c) gruppo ∞^{n+5} *delle trasformazioni di* DE JONQUIÈRES *d'ordine n, che lasciano invariato il sistema lineare delle curve d'ordine n, con un punto* $(n-1)$*-plo ed* $(n-1)$ *tangenti fisse.*

Infine giova anticipare che il metodo dell'invarianza dei successivi sistemi aggiunti permette di trattare certe questioni di geometria delle superficie: così F. ENRIQUES [2] ha determinato le irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'una equazione algebrica $f(x, y, z) = 0$ con funzioni razionali di due parametri; e G. CASTELNUOVO [3] ha potuto dar risposta affermativa alla questione della razionalità delle involuzioni piane nonchè determinare le condizioni necessarie e sufficienti per la razionalità di una superficie algebrica.

Alcune di queste importanti applicazioni saranno sviluppate per disteso più avanti.

---

[1] Cfr. F. ENRIQUES: *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane nel piano*; « Rend. Acc. Lincei », Vol. II, 1893 e: *Sopra un gruppo continuo di trasformazioni di* DE JONQUIÈRES *nel piano;* Id., Vol. II, 1893.

[2] Cfr. F. ENRIQUES: *Sulla irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'una equazione algebrica* $f(x, y, z) = 0$ *con funzioni razionali di due parametri*; « Math. Ann. », Bd. 49, 1895.

[3] Cfr. G. CASTELNUOVO: *Sulle superficie di genere zero*; « Memorie della Società Italiana delle Scienze », detta dei XL, Serie III, Tomo X, 1896.

CAPITOLO V.

I PIANI DOPPI RAZIONALI

23. Rappresentazione delle involuzioni del second'ordine su di un piano doppio.

Risulta dagli sviluppi del capitolo precedente che ogni involuzione piana del second'ordine, I_2, può essere birazionalmente trasformata in un'involuzione appartenente ad uno dei tre tipi seguenti:

TIPO I o di DE JONQUIÈRES: *Involuzione nella quale vi è un fascio di rette unite per un punto O ed una curva di punti uniti C d'ordine m con il punto O $(m-2)$-plo* o $(m-1)$-*plo* (che in questo caso risulta unito sopra tutte le rette che vi passano).

TIPO II, corrispondente al terzo tipo della classificazione di BERTINI: *Involuzione definita dalla rete di grado 2 delle cubiche C_3, che passano per sette punti fissi $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$*: le curve della rete si intersecano a due a due in due punti coniugati.

TIPO III, corrispondente al quarto tipo della classificazione di BERTINI: *Involuzione definita dal sistema lineare non semplice e triplamente infinito delle sestiche C_6 passanti doppiamente per otto punti $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$*; le curve del sistema ∞^3 che passano per una coppia di punti coniugati costituiscono una rete di curve secantisi a due a due in due punti coniugati.

Questi tre tipi corrispondono *tutti* ad involuzioni *razionali*, cioè per ciascuno di essi la varietà delle coppie di punti coniugati si può porre in corrispondenza birazionale con un piano punteggiato π, sicchè ad una coppia generica di punti coniugati corrisponda un punto del piano π e viceversa.

Ciò discende in modo immediato per le involuzioni piane del

primo tipo dal teorema di NOETHER; infatti su di una superficie F che rappresenti con i suoi punti le coppie di punti coniugati nell'involuzione I_2 il fascio di rette unite per O diviene un fascio lineare di curve razionali, sicchè la F risulta *razionale*.

Quanto alle involuzioni del secondo e terzo tipo, la loro razionalità risulta evidente dal fatto che le coppie di punti coniugati in esse si ottengono come intersezioni di curve di una rete di grado due: se infatti si pone una corrispondenza proiettiva fra la rete di queste curve e la rete delle rette di un piano, ad ogni punto del piano (centro di un fascio di rette) corrisponde una coppia di punti coniugati (per la quale passano ∞^1 curve della rete di grado 2).

La rappresentazione delle coppie di punti coniugati di un'involuzione I_2 sopra un piano π conduce a considerare quest'ultimo come un *piano doppio* in corrispondenza [1, 2] col piano ω, che contiene la I_2.

Le corrispondenze [1, 2] fra due piani (e fra due spazi) sono state studiate sistematicamente da R. DE PAOLIS.

Alle rette di π rispondono in ω le curve di una rete di grado 2; e due curve della rete si intersecano (fuori dei punti base) in due punti, che sono coniugati nella I_2. Viceversa alle rette del piano ω corrisponderanno su π curve razionali K costituenti un sistema ∞^2 d'indice 4: infatti le curve K che passano per due punti A e B di π sono immagini delle quattro rette A_1B_1, A_1B_2, A_2B_1, A_2B_2, di ω, che uniscono in tutti i modi possibili i punti delle coppie A_1A_2 e B_1B_2 corrispondenti rispettivamente ad A e B.

Nel piano ω dell'involuzione I_2 esiste una curva $\overline{C}$ luogo dei punti uniti per I_2: ad essa risponde sul piano doppio π una certa curva C, che dicesi la *curva di diramazione* (o curva limite) del piano doppio.

Una curva K di π si deve ritenere come doppia e ad essa corrisponde in ω una *curva* $\overline{K}$, *unita nell'involuzione* I_2, tale cioè che insieme ad ogni suo punto P' contenga il coniugato P''. I punti P' e P'' costituiscono coppie dell'involuzione γ_2^1 subordinata dalla I_2 sulla $\overline{K}$. Le intersezioni della K con la curva di diramazione C di π sono, in generale, i punti di diramazione della curva doppia

K e ad essi corrispondono sulla $\overline{K}$ semplici coincidenze della γ_2^1. Se due punti di diramazione di K vengono a coincidere — la K toccando la C — due diramazioni spariscono e danno luogo ad un *punto critico apparente* a cui corrisponde sulla $\overline{K}$ un punto doppio. Se in particolare la curva $\overline{K}$, omologa di K, si spezza in due parti K' e K'' coniugate nella I_2, la K non avrà più punti di diramazione e quindi dovrà risultare *tangente alla curva di diramazione C, ovunque la incontri*. Ne segue che l'immagine su π di una curva di ω, non appartenente all'involuzione I_2, è una curva tangente, ovunque la incontri, alla curva di diramazione C del piano doppio π.

Se quindi si interseca la curva di diramazione C con una retta r, si avrà sul piano π una retta doppia, alla quale corrisponde su ω una curva iperellittica sopra cui la I_2 subordina la g_2^1. Tale g_2^1 avrà un numero necessariamente *pari* di coincidenze, corrispondenti ai punti di diramazione della r. Poichè i punti di diramazione della r sono nelle sue intersezioni con la C, ne segue che *la curva di diramazione del piano doppio ha un ordine necessariamente pari* (1).

24. I tipi di piani doppi razionali.

Ciò premesso, vediamo quali piani doppi si ottengano dalla rappresentazione su di un piano doppio delle involuzioni dei tipi di BERTINI.

Consideriamo, per incominciare, l'involuzione di DE JONQUIÈRES.

La sua rappresentazione su di un piano doppio si ottiene immediatamente così. Sia C_m la curva dei punti uniti sul piano della involuzione. Essa possiede il punto O come $(m-2)$-*plo* (o come $(m-1)$-*plo*), ed è incontrata così dalle rette unite passanti per O in due punti variabili (o in un punto variabile e nel punto fisso O). Prendiamo una curva K' d'ordine s con il punto O $(s-1)$-*plo* e sia K'' la sua coniugata. Sopra ogni retta unita a uscente da

(1) Tuttavia essa può figurare come curva d'ordine dispari nel piano metrico quando contenga come parte la retta all'infinito.

O, la I_2 subordina un'involuzione, nella quale sono punti doppi i due punti di intersezione con la C_m fuori di O (ed eventualmente il punto O e l'intersezione variabile con C_m) e sono coniugati il punto P', in cui la a incontra K' (fuori di O) ed il punto P'' comune alla a ed alla K'' (fuori di O). Facciamo corrispondere proiettivamente i punti di a alle coppie dell'involuzione subordinata da I_2 su a, per modo che ai punti doppi rispondano le coppie costituite dai punti stessi contati due volte e per esempio a P' risponda la coppia $P'P''$. Così, variando a, si viene a rappresentare l'involuzione I_2 sopra il piano doppio che ha per curva di diramazione la C_m stessa, eventualmente completata con alcune rette per O: queste rette sono, in generale, quelle che da O proiettano i punti comuni alla C_m ed alla K'.

Il fatto che le rette proiettanti da O i punti comuni alla C_m ed alla K', entrino, in generale, a far parte della curva di diramazione del piano doppio, nella costruzione indicata, si può giustificare facilmente per via analitica. Ed invero, ponendo il punto O nel punto all'infinito dell'asse delle y, l'equazione della C_m e della K' sono rispettivamente della forma:

$$A_{m-2}y^2 + 2A_{m-1}y + A_m = 0$$
$$B_{s-1}y + B_s = 0\,,$$

dove le A e B sono polinomi in x, dei gradi indicati dal loro indice, ed s è l'ordine della curva K'. Ora la costruzione esposta porta alla determinazione, sulla generica parallela all'asse delle y, di una corrispondenza [1, 2], per guisa tale che ad un punto di ordinata Y rispondono due punti y_1, y_2 costituenti una coppia dell'involuzione subordinata su tale retta dalla I_2, mentre ad un punto di ordinata y, risponde un solo punto di ordinata Y. Analiticamente la nominata corrispondenza sarà della forma:

$$(1) \qquad (\lambda_2 y^2 + \mu_2 y + \nu_2)Y = (\lambda_1 y^2 + \mu_1 y + \nu_1)\,,$$

ove λ_1, μ_1, ν_1, λ_2, μ_2, ν_2 sono funzioni *razionali* della x. Per determinare, a meno di un fattore moltiplicativo, le funzioni razionali λ_1, ..., ν_2, basta imporre le cinque condizioni seguenti:

a) quando Y è l'ordinata di un punto appartenente alla C_m,

cioè quando

$$Y = y_{1,2} = \frac{-A_{m-1} \pm \sqrt{A_{m-1}^2 - A_{m-2}A_m}}{A_{m-2}},$$

l'equazione di secondo grado in y, fornita dalla (1), deve possedere la radice *doppia* $y = y_{1,2}$;

b) quando $y = -B_s/B_{s-1}$, è altresì $Y = -B_s/B_{s-1}$.

Determinate così le $\lambda_1, \ldots, \nu_2$ si risolva la (1) rispetto ad y. Si otterrà in definitiva:

$$y = -\frac{A_{m-2}B_sY + A_mB_{s-1}}{A_{m-2}B_{s-1}Y - A_{m-2}B_s + 2A_{m-1}B_{s-1}} \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{(A_{m-2}B_s^2 - 2A_{m-1}B_sB_{s-1} + A_mB_{s-1}^2)(A_{m-2}Y^2 + 2A_{m-1}Y + A_m)}}{A_{m-2}B_{s-1}Y - A_{m-2}B_s + 2A_{m-1}B_{s-1}} \tag{2}$$

La (2), aggiunta alla

$$x = X,$$

dà la rappresentazione sul piano doppio XY della totalità delle coppie di punti coniugati nell'involuzione I_2, data sul piano xy. La curva di diramazione consta della curva C , d'equazione:

$$A_{m-2}Y^2 + 2A_{m-1}Y + A_m = 0$$

ed, in generale, delle $m + 2s - 2$ rette rappresentate complessivamente dall'equazione:

$$A_{m-2}B_s^2 - 2A_{m-1}B_sB_{s-1} + A_mB_{s-1}^2 = 0\,; \tag{3}$$

questo gruppo di rette è costituito precisamente dalle rette che da O proiettano i punti comuni alla C_m ed alla K'. Si è detto che le nominate rette fanno parte della curva di diramazione *in generale*: più precisamente una retta fa parte della curva di diramazione soltanto quando essa entri *semplicemente* o con *molteplicità dispari* nel gruppo (3); invero i fattori quadratici che si possono estrarre dal gruppo (3) possono portarsi fuori dal segno di radicale, dando luogo al fattore *inessenziale* del discriminante della (2).

Se la C_m è d'ordine *pari* ($m = 2n$) ed ha il punto O come $(m-2)$-*plo*, si può scegliere la K' in modo che le rette proiet-

tanti da O i punti comuni alla C_m ed alla K', non entrino a far parte della curva di diramazione. Basta a questo scopo che *la K' sia tangente alla C_m ovunque la incontri* (fuori di O) [1], condizione che si può certo realizzare nelle ipotesi ammesse; invero la C_m e la K' si intersecano, fuori di O, in $ms - (m-2)(s-1) = 2s + m - 2 = 2(s + n - 1)$ punti; e per s sufficientemente alto esisteranno delle curve $K'_s(O^{s-1})$ per cui questi punti si distribuiscono in $s + n - 1$ contatti.

Se invece $m = 2n + 1$, i punti comuni alla C_m ed alla K' fuori di O sono $2(s + n - 1) + 1$, cioè in numero dispari; e quindi, comunque si scelga la K', nella curva di diramazione entra sempre a far parte (almeno) una retta. Tuttavia questo caso può essere ricondotto al precedente, trasformando l'involuzione I_2 mediante la trasformazione quadratica T, che ha i punti fondamentali nel punto O, in un punto generico A della C_m, ed in punto generico B del piano. La T muta l'involuzione I_2, in una nuova involuzione I'_2 per la quale la curva dei punti uniti è d'ordine pari.

Rimane da discutere il caso, in cui il punto O sia di molteplicità effettiva $m-1$ per la C_m. Se m è pari la discussione è completamente analoga a quella già svolta, purchè si prenda s dispari; se m è dispari basta trasformare la I_2 mediante la trasformazione quadratica, che ha i punti fondamentali nel punto O ed in due punti generici del piano; l'involuzione trasformata ha come curva di punti uniti una $C_m(O^{m-1})$, dove m è un numero pari.

Riassumendo possiamo dire:

Le involuzioni di De Jonquières *si possono rappresentare su di un piano doppio con curva di diramazione, C, d'ordine $2n$ con un punto $(2n-2)$-plo* (o $(2n-1)$-*plo*); la curva C può risultare riducibile, ma in questo caso *si può supporre che da essa non si stacchino delle rette uscenti da O.*

Passiamo a considerare l'involuzione del terzo tipo di Bertini, cioè l'involuzione determinata da una rete di cubiche per 7 punti base semplici $A_1, A_2, \ldots, A_7$.

---

[1] In questa ipotesi infatti, l'equazione (3) si riduce ad un quadrato perfetto.

Le coppie dell'involuzione I_2 appartenenti ad una generica cubica C_3 della rete, determinata dai punti base A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, costituiscono la g_2^1 caratteristica segnata su di essa dalle altre curve della rete; tale g_2^1 possiede quattro punti doppi e la curva luogo delle coincidenze della I_2 interseca ogni C_3 della rete in questa quaterna. La nominata curva delle coincidenze non è altro che jacobiana della rete e perciò è una *sestica di genere tre passante doppiamente per i punti base* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 (1).

Se quindi riferiamo proiettivamente le rete delle cubiche alla rete delle rette di un piano, l'involuzione viene rappresentata su di un piano doppio con una curva di diramazione incontrante le rette in quattro punti che rispondono alle quattro coincidenze della g_2^1 subordinata sopra le C_3 dalla I_2.

Ne segue: *l'involuzione piana del secondo tipo di* BERTINI *si può rappresentare sopra un piano doppio dotato di quartica di diramazione, di genere tre.*

Veniamo infine alle involuzioni dell'ultimo tipo. Presa una C_6 generica del sistema delle $C_6(A_1^2 A_2^2 A_3^2 A_4^2 A_5^2 A_6^2 A_7^2 A_8^2)$, le coppie di punti coniugati nella I_2 sono segate sopra di essa dal fascio delle cubiche $C_3(A_1 A_2 \dots A_8)$, (passanti ulteriormente per un nono punto base A_9). Le cubiche del fascio segano sulla C_6 la g_2^1

(1) Invero, se P è un punto di una C_3, che sia doppio per la g_2^1 segnata sopra la C_3 dalle $C_3(A_1 A_2 \dots A_7)$, per P passano ∞^1 cubiche che ivi si toccano e quindi una C_3 dotata in P di un punto doppio. Inversamente, se esiste una cubica per A_1, A_2, ..., A_7 che abbia un punto doppio in P, le ∞^1 cubiche $C_3(A_1 A_2 \dots A_7 P)$ hanno ivi una tangente fissa e la serie caratteristica g_2^1 segnata su una di queste C_3 dalle ∞^2 $C_3(A_1 A_2 \dots A_7)$ ha in P un punto doppio. Dunque, tenuto conto che la rete delle $C_3(A_1 A_2 \dots A_7)$ non possiede in generale delle curve fondamentali (le quali farebbero parte della jacobiana), la curva delle coincidenze della I_2 coincide con la jacobiana (luogo dei punti doppi delle curve) della nominata rete. Si rammenti poi che la jacobiana di una rete di curve d'ordine n è d'ordine $3n-3$, mentre un punto semplice della rete è in genere doppio per la jacobiana. Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. II, Lib. III, Cap. I, pagg. 31 e 39.

canonica, che — essendo la C_6 di genere 2 — possiederà sei coincidenze. La sestupla di questi punti è il gruppo jacobiano della g_2^1 canonica; e perciò è un gruppo della serie somma della serie canonica e del doppio della g_2^1 stessa (1), ossia appartiene alla serie tripla della g_2^1, e viene segata sulla C_6 dal sistema triplo del fascio delle C_3 (aggiunte a C_6): ne segue che *la curva delle coincidenze* dell'involuzione I_2 fa parte di questo sistema e quindi *è una curva del nono ordine* C_9, *passante triplamente per gli otto punti base* $A_1, A_2, \ldots, A_8$ (2). La curva C_9 avendo tre (e non più) intersezioni con le C_3 fuori di A_9, non passa per A_9; ma *il punto* A_9 *è un punto unito isolato* che si aggiunge alla curva delle coincidenze, costituendo un punto doppio della I_2 sopra ciascuna cubica per $A_1, A_2, \ldots, A_8$.

Riferendo proiettivamente il sistema ∞^3 delle C_6 ai piani dello spazio S_3, il piano dell'involuzione I_2 si può rappresentare (cfr. pagg. 364-65) su di un cono quadrico doppio F_2, sopra il quale le sezioni piane corrispondono alle $C_6(A_1^2 A_2^2 \ldots A_8^2)$, le generatrici alle $C_3(A_1 A_2 \ldots A_8)$ ed il vertice al nono punto base A_9 del fascio delle $C_3(A_1 A_2 \ldots A_8)$. La curva delle coincidenze $C_9(A_1^3 A_2^3 \ldots A_8^3)$ dà luogo sul cono ad una *curva di diramazione,* che incontra le coniche sezioni piane in tanti punti quante sono le coincidenze della I_2 sopra ogni C_6. La curva di diramazione sul cono doppio F_2 è perciò una *sestica,* per la quale le generatrici di F_2 sono trisecanti e giacente per conseguenza su di una superficie cubica. La sestica di diramazione non contiene

---

(1) Si rammenti che la serie jacobiana di una serie data è data dalla somma della serie canonica e del doppio della serie data. Cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III. Lib. V. Cap. I, pag. 57); e si applichi questa osservazione alla serie canonica stessa.

(2) A questa stessa conclusione si può anche giungere così: dato un punto P generico del piano, per esso passano ∞^2 $C_6(A_1^2 A_2^2 \ldots A_8^2)$, che si intersecano ulteriormente nel punto P' coniugato di P in I_2 e costituiscono una rete di grado 2, la cui involuzione caratteristica coincide con la I_2. La curva jacobiana di questa rete è una $C_{15}(A_1^5 A_2^5 A_3^5 A_4^5 A_5^5 A_6^5 A_7^5 A_8^5 P^2 P'^2)$, dalla quale, come si vede facilmente, si stacca la $C_3(A_1 A_2 \ldots A_8 P P')$ contata due volte, sicchè rimane in definitiva una $C_9(A_1^3 A_2^3 \ldots A_8^3)$.

il vertice del cono, il quale però si aggiunge ad essa come *punto di diramazione isolato.*

Ricapitolando, possiamo dire: *l'involuzione del quarto tipo di* BERTINI *si può rappresentare sopra un cono quadrico doppio con sestica di diramazione appartenente ad una superficie cubica, alla quale si aggiunge, come punto isolato di diramazione, il vertice del cono.*

Proiettando il cono doppio F_2 da un suo punto generico su di un piano π, si ottiene un *piano doppio, con sestica di diramazione* C_6 *dotata di due punti tripli O, O' infinitamente vicini* (immagine della sestica del cono, trisecante le generatrici).

Riassumendo, possiamo quindi dire:

I tre tipi di involuzioni piane del second'ordine, si possono rappresentare su di un piano doppio, il quale ha come curva di diramazione una curva d'ordine $2n$ *con un punto* $(2n-2)$*-plo, ovvero una quartica, ovvero una sestica con due punti tripli infinitamente vicini.*

25. Generalità sui piani doppi.

L'esistenza di una corrispondenza [1, 2] fra i punti di un piano π ed i punti di un piano ω ci ha tratti a definire (con il CLEBSCH) il piano π come un *piano doppio,* ogni punto del quale sia immagine di due punti di ω mentre un punto di ω dà origine ad un solo punto di π.

Questa definizione si può generalizzare ogni qualvolta si abbia *una corrispondenza* [1, 2] *fra i punti di un piano* π *ed i punti di una superficie* F (razionale o no) ovvero — ciò che è lo stesso — ogni qualvolta sopra una superficie F si abbia un'involuzione *razionale* di coppie di punti. Se invero sopra F esiste un'involuzione razionale I_2 di coppie di punti, ponendo una corrispondenza birazionale tra la totalità di queste coppie ed i punti di un piano π, si dà origine ad una corrispondenza, nella quale ad ogni punto di π corrispondono due punti di F, coniugati nella I_2, mentre ogni punto di F ha un corrispondente in π. Il *piano* π apparisce così come *doppio* e si definirà ovviamente come *curva di diramazione* di esso l'immagine della curva dei punti di coin-

cidenza dell'involuzione I_2 sopra la F. La curva di diramazione sarà d'ordine $2 \cdot 2 + 2p - 2 = 2p + 2$ se alla rete delle rette su π risponde sulla F una rete (di grado 2) di curve di genere p.

Dette x, y le coordinate di un punto P di π, la determinazione delle coordinate X, Y, Z dei *due* punti di F, corrispondenti a P, dipenderà in definitiva dalla risoluzione di un'equazione di secondo grado, a coefficienti funzioni razionali di x, y, il cui discriminante — che si può sempre supporre ridotto a forma intera — sarà una certa funzione $f(x, y)$ della x e della y. Ne segue che *le coordinate di un punto variabile su F si esprimono in funzione razionale di x, y e $\sqrt{f(x, y)}$, ossia dei punti della superficie*:

$$z^2 = f(x, y).$$

Poichè, reciprocamente, è immediato che le coordinate di un punto della $z^2 = f(x, y)$ si esprimono razionalmente per X, Y, Z, ne concludiamo che *la superficie*

$$z^2 = f(x, y)$$

è in corrispondenza birazionale con la F.

La superficie F', d'equazione $z^2 = f(x, y)$, è una superficie d'ordine n, se n è l'ordine della curva $f(x, y) = 0$; ed il punto all'infinito dell'asse delle z, che indichiamo con O, è per essa un punto $(n-2)$-*plo* particolare. La rete di curve di grado due, che sulla F dava luogo all'involuzione I_2, si muta sulla F' nella rete delle sezioni piane condotte per il punto O: infatti ad ogni punto (x, y) del piano doppio π, corrispondono sulla F' due punti coniugati, ed allineati con O, in guisa che le rette del piano π rispondono alle sezioni piane della F', condotte per O. *Insomma, a partire dalla F', il piano doppio π si costruisce per proiezione dal punto $(n-2)$-plo O.*

Ora, a prima vista, la curva di diramazione del piano doppio π è costituita dalla $f(x, y) = 0$, eventualmente completata con la retta impropria di π: invero, solamente per i punti della $f(x, y) = 0$ e per i punti impropri la z *assume due valori coincidenti.* Conviene tuttavia precisare la questione con le considerazioni che seguono.

Un piano generico α per O sega la F' secondo una curva iper-

ellittica, di genere p, che, per proiezione da O, si rappresenta su di una retta doppia a del piano π, con $2p+2$ punti di diramazione, *distinti*. La retta a sega la $f(x, y)=0$ in n punti; ed un punto di diramazione della a può cadere fra questi n punti, ovvero nel punto all'infinito della a. Più precisamente, un punto di diramazione al finito cade solamente in un punto semplice od in un punto di molteplicità dispari della $f(x, y)=0$. Ne segue che *la effettiva curva di diramazione di π contiene, semplicemente, tutte le componenti semplici o di molteplicità dispari della $f(x, y)=0$, mentre non contiene le componenti di molteplicità pari*; se le componenti di molteplicità dispari danno come somma una curva, C, d'ordine pari, tale ordine è $2p+2$, e la C esaurisce la curva di diramazione di π; se invece la C riesce d'ordine dispari, tale ordine è $2p+1$, e la effettiva curva di diramazione del piano doppio è costituita dalla C, *cui si aggiunge la retta impropria di π*. Tutto ciò riesce evidente quando si osservi che le componenti doppie della $f(x, y)=0$ corrispondono a curve doppie *non cuspidali* della F', le componenti quadruple a curve tacnodali (a carattere non cuspidale) della F' e così via: tali componenti di molteplicità pari entrano soltanto *impropriamente* a far parte della curva di diramazione di π, in quanto un punto di una linea doppia non cuspidale di F' non corrisponde ad un'effettiva coincidenza dell'involuzione I_2, ma solamente ad una coppia di punti coniugati, che casualmente si sono venuti a sovrapporre. Invece una componente ad es. tripla della $f(x, y)=0$ corrisponde sulla F' ad una curva doppia *cuspidale*: la componente tripla entra *una volta* nella curva di diramazione, giacchè in un punto di una linea cuspidale di F' vengono effettivamente a coincidere due punti coniugati nella I_2.

Riassumendo, possiamo dunque dire: *Il piano doppio, che si ottiene proiettando sul piano xy dal punto all'infinito dell'asse delle z la superficie $z^2=f(x, y)$, possiede come curva di diramazione impropria la $f(x, y)=0$* (eventualmente completata con la retta all'infinito, se l'ordine della f è dispari); *la effettiva curva di diramazione si ottiene sopprimendo un numero pari di volte le componenti multiple della f, in guisa da ottenere una curva sem-*

plice o composta di parti semplici (ed aggiungendo la retta impropria, se l'ordine della f è *dispari*).

L'analisi svolta porta a riconoscere che *la curva di diramazione di un piano doppio può sempre supporsi priva di componenti multiple*. Questa conclusione può lumeggiarsi anche dal punto di vista analitico, mostrando come la superficie $z^2 = f(x, y)$ possa trasformarsi birazionalmente in una superficie $z^2 = F(x, y)$, ove $F(x, y)$ è un polinomio, privo di fattori multipli. Sia invero $f(x, y) = \varphi^2(x, y) f_1(x, y)$, e si ponga $x = X, y = Y, z = \varphi(x, y)Z$. Si tratta di una trasformazione birazionale, la quale muta la $z^2 = f(x, y)$ nella $Z^2 = f_1(X, Y)$. Procedendo similmente per le altre componenti multiple, si arriva alla conclusione voluta.

Altro risultato dell'analisi che precede, è che *la curva di diramazione di un piano doppio è sempre d'ordine pari*: essa può apparire come curva d'ordine dispari nel piano metrico, ma allora si aggiunge ad essa la retta impropria, contata una volta. E poichè la retta impropria può esser portata a distanza finita con una omografia, ne segue che anche nel piano metrico la curva di diramazione di un piano doppio può sempre supporsi d'ordine pari.

Abbiamo detto che quale curva di diramazione di un piano doppio si può assumere una curva semplice o composta di parti semplici, d'ordine pari. Ora si può osservare che, data *ad arbitrio* una curva $f(x, y) = 0$ che soddisfaccia alle nominate condizioni, essa si può sempre considerare come curva di diramazione del piano doppio, che si ottiene, proiettando sul piano xy, dal punto all'infinito dell'asse delle z, la superficie $z^2 = f(x, y)$. Inoltre *due superficie rappresentabili su di un piano doppio* π *con la stessa curva di diramazione* $f(x, y) = 0$ *sono birazionalmente identiche, appartenendo alla classe, che ha per modello proiettivo la superficie*

$$z^2 = f(x, y).$$

Ne segue che *una curva arbitraria* $f(x, y) = 0$ (che si può immaginare priva di componenti multiple e d'ordine pari) *determina una classe di superficie*, costituita da tutte le superficie che si possono rappresentare sul piano doppio che ha la $f(x, y) = 0$

come curva di diramazione. Le equazioni parametriche di queste superficie si ottengono uguagliando le coordinate di punto a funzioni razionali di x, y, $\sqrt{f(x, y)}$. Si indica ciò brevemente dicendo che il piano doppio determina la classe delle superficie, aventi per campo di razionalità x, y, $\sqrt{f(x, y)}$. Con il simbolo:

$$\{x, y, \sqrt{f(x, y)}\},$$

si intenderà il piano doppio che ha per curva di diramazione la $f(x, y) = 0$, ed anche ogni superficie della classe, da esso determinata.

Supponiamo ora di eseguire sul piano una trasformazione cremoniana:

$$X = X(x, y)$$
$$Y = Y(x, y),$$

la quale muti la curva di diramazione, $f(x, y) = 0$, nella curva $\varphi(X, Y) = 0$. Se alle relazioni precedenti si aggiunge la $Z = z$, si ottiene una trasformazione cremoniana dello spazio (xyz) nello spazio (XYZ), la quale muta la superficie $z^2 = f(x, y)$ nella superficie $Z^2 = \varphi(X, Y)$. (Ed anzi queste due superficie sono non solamente identiche birazionalmente, ma la trasformazione che muta l'una nell'altra, muta l'involuzione I_2 segnata sulla prima dalle parallele all'asse delle z, nell'involuzione analoga, che sulla seconda segano le parallele all'asse delle Z). Ne segue: *quando esiste una trasformazione cremoniana, che muti la curva di diramazione del piano doppio*

$$\{x, y, \sqrt{f(x, y)}\}$$

nella curva di diramazione del piano doppio

$$\{X, Y, \sqrt{\varphi(X, Y)}\},$$

i due piani doppi sono da considerarsi identici nella geometria delle trasformazioni birazionali.

Sia C una curva d'ordine *pari*, ed assumiamo la C come curva di diramazione di un piano doppio π. Quando si eseguisca sulla C una trasformazione cremoniana, conviene precisare come si

debbano considerare le curve fondamentali che nascono dalla trasformazione, in corrispondenza a punti particolari.

Supponiamo che la trasformazione muti nella rete delle rette una rete omaloidica di curve a punti base distinti, avente un punto base *i-plo* in un punto A, che sia *s-plo* per la C. Allora l'intorno del punto A si muta in una *curva fondamentale a* d'ordine i, che fa parte s volte della trasformata della C. Solitamente, nel considerare la trasformata della C, si prescinde dalle componenti che nascono in corrispondenza a punti della C, che si trasformano in curve fondamentali. Ma quando la C è la curva di diramazione di un piano doppio, questa regola non può essere mantenuta inalterata: altrimenti una curva d'ordine pari potrebbe essere trasformata in una curva d'ordine *dispari*. Necessita quindi,, quando la C sia la curva di diramazione di un piano doppio, di considerare la trasformata *completa*, C', della C; tuttavia, per quanto precede, se una componente della C', che sia la trasformata di un punto della C ha una molteplicità pari, essa può essere soppressa; mentre deve essere considerata *semplicemente*, se abbia una molteplicità dispari.

Questa osservazione porta alla seguente *regola*: *in una trasformazione cremoniana di un piano doppio, con punti fondamentali distinti, si deve computare come facente parte* (*una volta*) *della curva di diramazione, ogni curva fondamentale proveniente da un punto di molteplicità dispari della curva di diramazione primitiva.*

Trasformando la C con questa regola, la sua trasformata è sempre una curva d'ordine *pari*. Una conseguenza immediata della regola anzidetta è anche la seguente: *la curva di diramazione C d'ordine* $2n$, *si può sempre trasformare in un'altra d'ordine pari e dotata soltanto di punti multipli distinti di molteplicità pari.*

Invero, eseguiamo una trasformazione quadratica, che abbia un punto fondamentale A in un punto *s-plo* di C, ed i due rimanenti punti fondamentali A_1 ed A_2 affatto generici. Supponiamo che s sia dispari. La trasformata della C consta di una parte C',

proveniente propriamente da C, e della retta fondamentale a, che rappresenta l'intorno di A.

Se A', A'_1, A'_2 sono rispettivamente i trasformati delle rette A_1A_2, AA_2, AA_1 (in guisa che $a \equiv A'_1A'_2$), la curva C' ha in A' un punto $2n$-*plo* ed in A_1', A_2' punti multipli di molteplicità dispari $2n - s$; inoltre essa possiede sulla retta a altri punti multipli, provenienti dallo scioglimento dell'intorno del prim'ordine di A ed aventi la stessa molteplicità, che hanno per C. Ne segue che la nuova curva di diramazione $C' + a$ ha in A' un punto $2n$-*plo*, ed in A'_1, A'_2 due punti di molteplicità pari $2n - s + 1$; come pure ha dei punti di molteplicità pari in quelli (di molteplicità dispari per C') che provengono da punti di C appartenenti all'intorno del prim'ordine di A ed aventi molteplicità dispari. Così i soli punti multipli dispari della $C' + a$ sono gli omologhi dei punti multipli di molteplicità pari dell'intorno di A, oltre a quelli che provengono da punti di C non prossimi ad A e di molteplicità dispari. Trattando ora i punti propri di molteplicità dispari come A, con successive trasformazioni quadratiche, si perviene ad una trasformata della C che ha solo punti di molteplicità pari, ovvero punti di molteplicità dispari infinitamente vicini a punti di molteplicità pari. Ma questi punti di molteplicità dispari si possono trasformare in punti propri d'ordine dispari con una o più trasformazioni quadratiche; e quindi possono essere trattati come i precedenti punti di molteplicità dispari. Così proseguendo si perverrà infine ad una curva di diramazione dotata di soli punti multipli di molteplicità *pari*. Da questo punto in poi si può adoperare l'ordinario procedimento di NOETHER (1) per lo scioglimento delle singolarità, operando sempre con trasformazioni quadratiche, che, avendo per punti fondamentali punti di molteplicità pari ovvero punti generici del piano, portano sempre a curve d'ordine pari con punti di molteplicità pari. Si perviene così ad una curva di diramazione dotata solamente di punti multipli di molteplicità pari, *distinti*.

---

(1) Cfr. ad es. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. II, Lib. IV, Cap. II, pag. 417.

La circostanza che la curva, trasformata dell'intorno di un punto, A, di molteplicità dispari per una curva di diramazione, C, entri a far parte della trasformata della C, si può interpretare dicendo che *la curva infinitesima, costituente l'intorno di A, fa parte di C*. Di questo fatto ci si può rendere ragione a priori, senza trasformare la C. Se l'ordine della C è $2n$ e la molteplicità del punto A $2s+1$, una retta generica del piano è una retta doppia, dotata di $2n$ punti di diramazione. Se ora la retta tende a passare per A, al limite essa deve sempre possedere un numero *pari* di punti di diramazione; di questi $2n-2s-1$ cadono fuori di A ed *uno* nell'*intorno* di A. Tutto va dunque *come se il punto* $(2s+1)$*-plo fosse effettivamente* $2s$*-plo ed alla* C *si aggiungesse l'intorno di* A.

Questa semplice osservazione si generalizza al caso in cui la C possegga dei punti multipli infinitamente vicini ad un punto proprio, offrendo un criterio per decidere quali siano i punti di C, per i quali l'intorno faccia parte della C, trasformandosi eventualmente in una curva, che fa parte della trasformata della C, quando siano presi come fondamentali per una trasformazione cremoniana.

Supponiamo che il punto multiplo A_1 della C sia infinitamente vicino al punto A. Se la molteplicità di A è dispari, l'intorno di A fa parte della C. Ma che cosa si deve dire dell'intorno di A_1? Consideriamo qui le parabole del second'ordine passanti per A, A_1. Se la molteplicità di A_1 è dispari, il punto A assorbe un numero *pari* di punti di diramazione delle nominate parabole; l'intorno di A_1 non fa quindi parte della C. Se invece la molteplicità di A_1 è pari, il punto A assorbe un numero *dispari* di punti di diramazione; e l'intorno di A_1 fa parte della C. Così *l'intorno del punto* A_1, (*infinitamente vicino al punto di molteplicità dispari A*) *fa parte della curva di diramazione o no, a seconda che la molteplicità di* A_1 *sia pari o dispari.*

Allo stesso risultato si arriva anche ragionando così: se A è di molteplicità dispari $2s+1$, l'intorno di A fa parte della C ed il punto A è come se fosse $2s$*-plo*; lo staccamento dell'intorno di

A porta l'innalzamento di un'unità di tutti i punti di C, prossimi ad A; se A_1 è uno di questi, di molteplicità dispari, esso diviene di molteplicità pari, e quindi il suo intorno non fa parte della C; se invece A_1 è di molteplicità pari, esso diviene di molteplicità dispari ed il suo intorno entra così a far parte della C. Questo ragionamento equivale in fondo ad eseguire successivamente due trasformazioni quadratiche, di cui una sciolga l'intorno di A e la seconda quello di A_1.

Le cose dette si estendono a tutti i casi, sia in rapporto alle parabole ed iperparabole approssimanti i vari rami della C uscenti da A, sia in rapporto alle successioni di trasformazioni quadratiche, che sciolgono i successivi intorni dei punti della C, infinitamente vicini ad A; e l'esecuzione effettiva delle nominate trasformazioni può essere evitata, tenendo conto che una trasformazione quadratica che muti in una retta l'intorno di un punto A di C, lascia inalterate ovvero innalza di un'unità le molteplicità dei punti di C prossimi ad A, a seconda che A sia di molteplicità pari o dispari.

Ci limiteremo qui a chiarire la cosa con un esempio. Per la curva di diramazione di un piano doppio il punto A sia di molteplicità 11; prossimi ad esso e succedentisi su di un ramo cuspidale del terz'ordine vi siano A_1 quadruplo, A_2 quadruplo, A_3 doppio; ed inoltre un punto B semplice, tale che la direzione AB sia diversa dalla direzione AA_1; al punto A_3 sia infine prossimo (ma non satellite) un punto A_4 doppio (necessariamente non prossimo ad A). Quali sono gli intorni che fanno parte della curva di diramazione C?

Anzitutto della C entra a far parte l'intorno del punto A, di molteplicità dispari. Ciò porta un innalzamento delle molteplicità dei punti prossimi ad A. Precisamente A_1, A_2, A_3, B diventano rispettivamente di molteplicità 5, 5, 3, 2. L'intorno del punto B di molteplicità pari non fa parte della C; invece l'intorno di A_1 fa parte della C e quindi la molteplicità di A_2 si innalza ancora e diviene 6. Ciò mostra che l'intorno di A_2 non fa parte della C. Invece l'intorno di A_3 (di molteplicità 3) è parte

della C; e, staccandosi, alza la molteplicità di A_4, che diviene triplo. Ne segue che anche l'intorno di A_4 fa parte della C. Concludendo possiamo dire: *alla curva di diramazione C si aggiungono le parti infinitesime, costituite dagli intorni di* A, A_1, A_3, A_4. Gli intorni di B e di A_2 non fanno invece parte della C.

Riassumendo la nostra analisi, possiamo enunciare: *Se si assume come curva di diramazione di un piano doppio una curva d'ordine pari C, dotata di singolarità qualsiasi, la effettiva curva di diramazione del piano doppio consta della C, alla quale si aggiungono certe parti infinitesime, costituite dagli intorni dei punti propri di molteplicità dispari o dei punti che si possono mutare in punti di molteplicità dispari con una successione di trasformazioni quadratiche.*

In quanto segue, quando parleremo della curva di diramazione di un piano doppio, intenderemo sempre la curva *completa*, alla quale siano cioè aggiunte le nominate parti infinitesime.

Le considerazioni che precedono portano sostanzialmente a stabilire alcune *convenzioni* per le quali alla molteplicità effettiva di un punto della curva di diramazione, C, di un piano doppio π si sostituisce una *molteplicità virtuale* secondo i criteri seguenti.

a) Gli intorni dei punti propri di molteplicità dispari fanno parte della C e quindi diminuisce di un'unità la molteplicità di tali punti e si innalza di un'unità quella dei punti prossimi; un punto proprio di molteplicità *effettiva* $2s + 1$ ha quindi molteplicità *virtuale* $2s$ (salvo un caso di cui discorriamo più avanti);

b) gli intorni dei punti propri di molteplicità pari non fanno invece parte della C; e quindi per questi punti molteplicità effettiva e molteplicità virtuale coincidono; ed i punti prossimi ad un punto proprio di molteplicità pari si trattano come punti propri;

c) se un punto prossimo riceve, per i criteri precedenti, una molteplicità pari, tale è la sua molteplicità virtuale; se invece esso riceve una molteplicità dispari $2l + 1$, il suo intorno fa parte della C e quindi la sua molteplicità virtuale è $2l$ e si innalza

di un'unità la molteplicità dei punti ad esso prossimi (che risultano, in generale, in un intorno del second'ordine rispetto al punto proprio);

d) si prosegue in tal modo, attribuendo una molteplicità virtuale a tutti i punti che si succedono sui vari rami della C, uscenti da un punto proprio.

I criteri *a*), *b*), *c*), *d*) permettono in tutti i casi il calcolo della molteplicità virtuale di un qualsiasi punto, proprio od infinitamente vicino ad un punto proprio, della curva di diramazione. Tuttavia vi è un caso in cui conviene discostarsi dal criterio *a*); e l'opportunità di questa *eccezione* riesce evidente esaminando il comportamento in un punto proprio della C, supposta di ordine $2n$, delle aggiunte d'ordine $2n-6$ e d'indice 2.

Osserviamo anzitutto che le osservazioni fatte precedentemente circa il modo con cui si trasforma la curva di diramazione C di fronte ad una trasformazione cremoniana, portano che il teorema d'invarianza delle curve aggiunte è ancora valido, purchè le molteplicità imposte alle aggiunte siano calcolate in base alle molteplicità *virtuali* della C. Ciò si dimostra facilmente, partendo dal caso elementare in cui la C abbia solamente punti multipli distinti di molteplicità pari — caso, in cui le aggiunte coincidono con le aggiunte definite al modo solito — ed indagando come si trasformino le aggiunte quando si eseguisca una trasformazione cremoniana che muti in un punto di molteplicità dispari una componente della C. Da questo caso si passa poi, con facile generalizzazione, al caso generale.

Ciò premesso, sia O un punto multiplo proprio della C ed $A_1, A_2, \ldots, A_s$ i punti ad esso prossimi. Sia $2h$ la molteplicità virtuale di O; indichiamo inoltre con $i_1, i_2, \ldots, i_s$ le molteplicità virtuali e con $h_1, h_2, \ldots, h_s$ le molteplicità effettive di $A_1, A_2, \ldots, A_s$.

Se imponiamo alle successive aggiunte della C le molteplicità ad esse dovute quando si considerino i punti multipli della C con le loro molteplicità *virtuali*, le molteplicità imposte alle seconde aggiunte alla C nei punti $O, A_1, A_2, \ldots, A_s$ saranno rispettivamente: $2h-2, i_1-2, i_2-2, \ldots, i_s-2$. Mostriamo che queste molteplicità soddisfano alla relazione di prossimità, escluso il

caso in cui O sia di molteplicità effettiva $2h+1$ ed infinitamente vicino ad esso vi sia un altro punto $(2h+1)$-*plo*. Si tratta in sostanza di provare che, escluso il caso citato, è:

$$2h-2 \geq \sum_1^s{}_k (i_k - 2).$$

Distinguiamo due casi: *a*) la molteplicità effettiva di O per la C è $2h$; *b*) la detta molteplicità è $2h+1$.

a) Se la molteplicità effettiva di O per la C è $2h$, si avrà:

$$2h = \sum_1^s{}_k h_k.$$

Ma, come segue immediatamente dalle convenzioni che servono a calcolare le molteplicità virtuali, nella nostra ipotesi è:

$$\sum_1^s{}_k i_k \leq \sum_1^s{}_k h_k$$

ne segue:

$$2h \geq \sum_1^s{}_k i_k$$

ed *a fortiori*:

$$2h-2 \geq \sum_1^s{}_k (i_k - 2).$$

b) Se la molteplicità effettiva di O per la C è $2h+1$ si avrà:

$$2h+1 = \sum_1^s{}_k h_k$$

$$\sum_1^s{}_k i_k \leq \sum_1^s{}_k (h_k + 1)$$

ossia:

$$\sum_1^s{}_k (i_k - 1) \leq \sum_1^s{}_k h_k.$$

Ne segue:

$$2h+1 \geq \sum_1^s{}_k (i_k - 1).$$

Se ora $s \geq 3$, si ha:

$$2h-2 \geq (i_1 - 2) + (i_2 - 2) + (i_3 - 2) + \sum_4^s{}_k (i_k - 1)$$

e quindi *a fortiori*:

$$2h - 2 \geq \sum_{1}^{s} {}_k (i_k - 2).$$

Sia invece $s = 2$. Poichè O è di molteplicità effettiva $2h + 1$, i due punti O_1, O_2, ad esso prossimi, saranno l'uno di molteplicità effettiva dispari $2l_1 + 1$ e l'altro di molteplicità effettiva pari $2l_2$; e sarà inoltre $2l_1 + 2l_2 + 1 = 2h + 1$.

Ora, essendo O_1 ed O_2 prossimi ad O, le loro molteplicità virtuali sono:

$$i_1 = 2l_1 + 2, \qquad i_2 = 2l_2$$

e quindi è:

$$2h - 2 = (i_1 - 2) + (i_2 - 2).$$

Sia infine $s = 1$. In questo caso, infinitamente vicino al punto O di molteplicità effettiva $2h + 1$, vi è un altro punto, O', di molteplicità $2h + 1$. Con il criterio *a*) la molteplicità virtuale di O sarebbe $2h$ e quella di O', $2h + 2$. Per le seconde aggiunte le molteplicità di O, O' sarebbero così $2h - 2$ e $2h$ e la relazione di prossimità *non* è soddisfatta. Si produce quindi *scaricamento;* e le molteplicità effettive delle seconde aggiunte in O, O' vengono dunque ad essere $2h - 1$ e $2h - 1$. A questo medesimo risultato si sarebbe giunti se, invece di partire dalle molteplicità virtuali di O, O' calcolate in base al criterio *a*) fossimo partiti direttamente dalle molteplicità effettive $2h + 1$.

Se dunque si vuole che valga *incondizionatamente* la proposizione che le molteplicità virtuali dei punti prossimi ad un punto proprio siano tali da non dar luogo a scaricamento per le aggiunte d'ordine $2n - 6$ e d'indice 2, giova fare *una esplicita eccezione* al criterio *a*) e ritenere che *due punti infinitamente vicini O, O' della C, i quali abbiano la molteplicità effettiva* $2s + 1$, *abbiano altresì la molteplicità virtuale* $2s + 1$.

Ammesso questo criterio, *a fortiori*, non si ha scaricamento in un punto proprio nemmeno per le aggiunte di ordine $2n - 9$, $2n - 12$, ... e d'indice 3, 4, ... L'osservazione non si applica però alle aggiunte d'ordine $2n - 3$.

In quanto precede il punto O era un punto proprio; la nostra osservazione si generalizza anche al caso in cui lo stesso O sia

un punto conveniente, ed abbia infinitamente vicino ad esso un punto O', della stessa molteplicità effettiva. In conclusione siamo così portati ad aggiungere ai quattro criteri *a*), *b*), *c*), *d*) sopra enunciati un quinto criterio *e*) in base al quale

e) se due punti infinitamente vicini O, O' di C sono successivi su di un ramo qualsiasi e le loro molteplicità virtuali, in base ai criteri *a*), *b*), *c*), *d*), dovessero essere h_1 ed $h_2 = h_1 + 2$, *si darà* tanto ad O quanto ad O' la molteplicità virtuale $h_1 + 1$.

Riassumendo possiamo enunciare che *le molteplicità virtuali, calcolate in base ai criteri a), b), c), d), e) non danno mai luogo a scaricamento — almeno nei punti propri — per le aggiunte d'ordine* $2n - 6$ *e d'indice* 2.

Giova osservare esplicitamente che le molteplicità virtuali, calcolate con i criteri predetti, non soddisfano alle relazioni di prossimità: ad es. un punto $(2s+1)$-*plo* ordinario diviene un punto di molteplicità virtuale $2s$, al quale sono prossimi $2s+1$ punti di molteplicità virtuale 2. Tuttavia le molteplicità virtuali, come le effettive, rispettano il principio di scaricamento, nel senso che *in una successione di punti infinitamente vicini,* uscenti da un punto proprio, *le molteplicità virtuali non vanno aumentando.* È questo un altro vantaggio, proveniente dall'applicazione del criterio *e*).

Illustriamo ora i criteri enunciati con qualche esempio:

1) La C sia una $C(A^5B^4C^3)$ ed A, B, C siano infinitamente vicini (su di un ramo lineare). L'intorno di A fa parte della C e quindi la molteplicità virtuale di A è 4; B diviene così quintuplo, ma il suo intorno fa parte di C e quindi la molteplicità virtuale di B è 4 e quella di C, innalzandosi di un'unità, ancora 4.

2) La C sia una $C(A^5B^5C^3)$, con A, B, C infinitamente vicini su di un ramo lineare. A prima vista le molteplicità virtuali di A e B appaiono 4 e 6. Ma, per il criterio *e*), esse si riducono a 5 e 5. La molteplicità di C è 2, tranne il caso in cui infinitamente vicino a C non vi sia un punto D ancora triplo; in questo caso le molteplicità virtuali di C e D sarebbero 3 e 3.

3) La C sia una $C(A^4B^3C^3)$ con A, B, C infinitamente vicini su di un ramo lineare. Le molteplicità virtuali di A, B, C sono

rispettivamente (cfr. criterio *e*)) 4, 3, 3; e coincidono dunque con le effettive.

4) La C sia una $C(A^{11}A_1^4A_2^4A_3^2A_4^2)$ ed A_1, A_2, A_3, A_4 si succedano sopra un ramo cuspidale del terz'ordine, uscente da A. La molteplicità virtuale di A è 10, mentre A_1, A_2, A_3, che sono prossimi ad A, assumono le molteplicità rispettive 5, 5, 3. L'intorno di A_1 fa parte della C e quindi la molteplicità di A_1 sarebbe a prima vista 4 e quella di A_2 6; ma per il criterio *e*) le molteplicità virtuali di A_1, A_2 sono invece 5, 5. Il punto A_3 ha la molteplicità virtuale 2, mentre quella di A_4, innalzandosi di un'unità, diviene 3; ne segue che ancora l'intorno di A_3 fa parte della C e quindi che la molteplicità virtuale di A_4 è 2. Le molteplicità virtuali di A, A_1, A_2, A_3, A_4 sono dunque rispettivamente 10, 5, 5, 2, 2.

Consideriamo un piano doppio π, di cui sia C la curva di diramazione, ed una superficie F, rappresentabile sul piano doppio π: la F conterrà un'involuzione razionale I_2, le cui coppie di punti coniugati saranno in corrispondenza birazionale con i punti di π. Vogliamo mettere in luce alcune proprietà della corrispondenza [1, 2] tra π ed F, che si genera quando ad un punto P di π si associ la coppia di punti coniugati P' e P'', corrispondenti a P: generalizzeremo così talune delle proprietà già trovate al n. 23, dove la superficie F era un piano.

Anzitutto alla *curva di diramazione* C di π corrisponde sulla F *la curva delle coincidenze*, $\overline{C}$, della I_2: cioè il luogo dei punti P', per cui il coniugato P'' cade infinitamente vicino a P'.

Sia ora K una *curva generica* del piano doppio π. Ad essa corrisponde sulla F una curva, $\overline{K}$, *autoconiugata per la* I_2, tale cioè che insieme ad ogni punto P' essa contenga anche il suo coniugato P''. La I_2 subordina sulla $\overline{K}$ una γ_2^1, le cui coppie di punti sono in corrispondenza biunivoca con i punti di K: il genere della γ_2^1 è perciò lo stesso del genere di K. La curva K del piano doppio possiede dei punti di diramazione, che cadono nelle intersezioni della K con la curva di diramazione C: alle nominate intersezioni, corrispondono sulla $\overline{K}$ semplici coincidenze della γ_2^1, che cadono nelle intersezioni della $\overline{K}$ con la curva delle coinci-

denze $\overline{C}$. Se due delle intersezioni della K con la C si avvicinano indefinitamente, in guisa che al limite la K *tocchi* la C, la curva doppia K perde due diramazioni e si abbassa di una unità il suo genere per l'acquisto di un *punto critico apparente*: corrispondentemente la $\overline{K}$ acquista un *punto doppio*, che cade sulla linea delle coincidenze, nel punto che risponde al punto di contatto della K con la C. Inversamente, se una curva autoconiugata $\overline{K}$ ha un punto doppio sulla curva delle coincidenze $\overline{C}$, l'immagine della $\overline{K}$ sul piano doppio ha un contatto con la curva di diramazione C.

Se la curva K del piano doppio π varia in un *sistema lineare* $|K|$, a tale sistema risponde sulla F un sistema lineare $|\overline{K}|$ *costituito da curve autoconiugate per la* I_2. Ed inversamente, un *sistema lineare di curve autoconiugate sulla* F *ha come immagine sul piano doppio un sistema lineare di curve.*

In quanto precede, siamo partiti da una curva generica del piano doppio π. Partiamo invece da *una curva generica* K', *tracciata sulla superficie* F. La curva K' non sarà autoconiugata per la I_2: sia K'' la coniugata della K'. I punti comuni alla K' ed alla curva delle coincidenze $\overline{C}$ appartengono anche alla K'' (ed anzi la K' e la K'' non possono mai incontrarsi fuori della curva delle coincidenze). Dunque la curva spezzata $K' + K''$ è una curva autoconiugata, la quale non ha altre intersezioni con la curva delle coincidenze, all'infuori di quelle che cadono nei punti doppi. Di conseguenza, *la curva* K *del piano* π, *che è immagine della* $K' + K''$, *risulta tangente ovunque la incontra alla curva di diramazione* C, *e non ha così punti di diramazione.*

Se la K' varia sulla F in un *sistema lineare* $|K'|$, l'immagine del sistema $|K'|$ è offerta sul piano doppio da un *sistema continuo* (*non lineare*), $\{K\}$, *di curve, tangenti ovunque la incontrano alla curva di diramazione.* Naturalmente il sistema continuo $\{K\}$ rappresenta non solamente il sistema lineare $|K'|$ ma anche il sistema lineare coniugato.

OSSERVAZIONE. - In quanto precede abbiamo implicitamente affermato che una curva K, tangente ovunque la incontra alla curva di diramazione C, è priva di punti di diramazione.

Importa osservare, onde non cadere in equivoci, che questa affermazione è vera, solamente se la curva K abbia intersezioni infinitamente vicine a coppie, con *tutte* le componenti della effettiva curva di diramazione, *comprese le componenti infinitesime, costituite da intorni di punti* (cfr. l'enunciato a pag. 400).

Sia ad esempio la curva di diramazione una quartica C_4, dotata di un punto triplo O. Se consideriamo una generica cubica C_3, che abbia in O un punto doppio a tangenti distinte e sia tritangente alla C_4, la nominata C_3 appare, a prima vista, come tangente *ovunque* la incontra alla curva di diramazione, e così priva di punti di diramazione. Ma ciò è errato, perchè la $C_4(O^3)$, concepita come curva di diramazione di un piano doppio, deve essere completata con l'intorno del punto O; e la nominata $C_3(O^2)$ interseca in due punti *distinti l'intorno di* O, e *non* risulta così tangente a questa componente della curva di diramazione: corrispondentemente la $C_3(O^2)$ possiede ***due*** punti di diramazione, nei punti comuni ad essa ed all'intorno di O. Perchè la $C_3(O^2)$ risulti tangente ovunque la incontra alla curva di diramazione occorre che le due intersezioni della $C_3(O^2)$ con l'intorno di O coincidano, ossia che il punto O sia per la C_3 una *cuspide*: solamente in quest'ipotesi la $C_3(O^2)$ è una curva priva di punti di diramazione.

Ritorniamo a considerare il piano doppio π e la sua curva di diramazione C. E, come prima, indichiamo con F una superficie rappresentata sul piano doppio π: sulla F esisterà un'involuzione razionale I_2 di coppie di punti, ciascuna coppia della quale risponde ad un punto di π e viceversa.

Per semplicità si può anche, se si vuole, ritenere che la curva C sia dotata soltanto di punti multipli distinti di molteplicità pari, in guisa che una qualsivoglia curva di π, passante (eventualmente) per i punti multipli della C e tangente alla C ovunque la incontra fuori dei punti multipli, risulti, come curva doppia, priva di punti di diramazione.

Abbiamo detto che ad una curva K' non autoconiugata di F risponde su π una curva K priva di punti di diramazione, che è immagine anche della curva K'', coniugata della K'. Ora vogliamo indagare se questa proposizione si possa invertire. Par-

tiamo cioè da una curva K priva di punti di diramazione, e quindi tangente alla curva di diramazione ovunque la incontra, e domandiamoci se essa rappresenti sulla F una curva spezzata in due parti coniugate K' e K'', ovvero una curva autoconiugata irriducibile.

Se la K è *razionale* la risposta è immediata. Invero la curva che sulla F risponde alla K, supposta irriducibile, dovrebbe contenere un'involuzione lineare g_2^1, i cui punti doppi dovrebbero rispondere ai punti di diramazione della curva doppia K. Ma la K è priva di punti di diramazione e quindi la nominata g_2^1 dovrebbe essere *priva di punti doppi*. Ma ciò è assurdo, perchè una g_2^1 su di una curva irriducibile possiede sempre almeno due punti doppi.

Ne segue che *una curva K, razionale e tangente alla curva di diramazione C ovunque la incontra, rappresenta sulla F una curva, spezzata in due parti coniugate.*

Il ragionamento che precede *non* si estende, se la K ha un genere $p > 0$. Invero in quest'ipotesi alla K viene a corrispondere sulla F una curva, che, quando sia supposta irriducibile, contiene un'involuzione irrazionale γ_2^1 di genere p, priva di punti doppi. Ma ciò non porta ad alcun assurdo, poichè è noto che su di una curva *irriducibile* possono esistere delle involuzioni irrazionali γ_2^1, prive di punti doppi.

Un esame più minuto porta a riconoscere che la riducibilità o irriducibilità della curva di F, di cui la K è l'immagine sul piano doppio π, dipende dal gruppo dei punti critici apparenti della curva doppia K (ossia dal gruppo dei punti di contatto della K con la C); e precisamente dall'appartenenza di questo all'una o all'altra delle serie che risultano dalla bisezione della serie segata sulla K dal sistema lineare delle curve che hanno lo stesso ordine e gli stessi punti multipli con le stesse molteplicità della C. Senza dilungarci in questo esame [1], ci limiteremo

[1] Per un esame esauriente della questione, che si ricollega alla costruzione delle curve che sono in corrispondenza [2, 1] con una data K, cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. IV, pagg. 427-440, dove il lettore troverà altresì la bibliografia sull'argomento.

ad enunciare la proposizione seguente: *condizione necessaria e sufficiente perchè la curva doppia K, tangente alla curva di diramazione C ovunque la incontra, sia immagine di una curva spezzata di F, è che il gruppo dei suoi punti critici apparenti* (ossia il gruppo dei suoi contatti con la C fuori dei punti multipli) *sia equivalente a quelli segati sulla K dal sistema metà del sistema $|C|$, individuato dalle curve che hanno lo stesso ordine e gli stessi punti multipli con uguali molteplicità della C.*

Tralasciando la dimostrazone della necessità della condizione, accenniamo rapidamente a come si dimostra la sua sufficienza. All'uopo osserviamo che, se si fa variare la curva di diramazione C di π in un sistema continuo in modo che il gruppo dei punti di contatto della K con la C descriva una delle serie, metà di quella segata su K dal sistema lineare $|C|$, l'immagine della K sulla F rimane sempre irriducibile o sempre spezzata in due parti coniugate. Invero da una curva irriducibile si può passare ad una curva spezzata in due parti coniugate solamente con l'acquisto di punti doppi sulla curva delle coincidenze; e ciò è escluso perchè la K ha già il massimo numero possibile di contatti con la C. Ora se il gruppo dei contatti della K con la C appartiene al sistema metà del sistema $|C|$, si potrà per continuità ridurre la C ad una curva contata due volte d'equazione $\varphi^2 = 0$. La F degenera allora nelle *due* superficie $z = +\varphi$ e $z = -\varphi$. Se poi $\psi = 0$ è l'equazione della K, il limite della curva obiettiva è costituita dalle intersezioni del cilindro $\psi = 0$ con le due superficie $z = \varphi$ e $z = -\varphi$. Dunque al limite la curva corrispondente alla K è spezzata in due parti coniugate e tale deve quindi essere anche prima del passaggio al limite.

Per intendere meglio il significato della proposizione, che precede, discutiamo alcuni esempi.

a) Consideriamo un piano doppio, che abbia come curva di diramazione una quartica priva di punti doppi. Una cubica sestitangente alla C_4 di diramazione rappresenta una curva spezzata in due parti coniugate se il gruppo dei sei punti di contatto sta su di una conica.

b) Sia invece la curva di diramazione una sestica C_6, dotata

di due punti tripli infinitamente vicini O, O'. Qui è necessario anzitutto determinare quale sia il sistema metà del sistema lineare $|C_6|$. All'uopo si trasformi la C_6 in una curva dotata di punti multipli distinti di molteplicità pari. Con una trasformazione quadratica che ha uno dei punti fondamentali in O e gli altri due in due punti generici A, B, la C_6 si muta in una $C_9(O^6A^3B^3O'^3)$, per la quale i tre punti tripli sono allineati; alla nominata C_9 si aggiunge la retta ABO', quale trasformata dell'intorno di O. In definitiva la nuova curva di diramazione è una $C_{10}(O^6A^4B^4O'^4)$. Ne segue che il sistema metà del $|C_{10}|$ è il sistema delle $C_5(O^3A^2B^2O'^2)$, ossia delle $C_4(O^3ABO')$, alle quali si aggiunge la retta ABO'. Prima della trasformazione quadratica il sistema metà del $|C_6|$ è dunque il sistema delle $C_3(O^2O')$.

Consideriamo ora ad es. una $C_4(O^2O'^2)$ che sia sestitangente alla $C_6(O^3O'^3)$ di diramazione. Essa rappresenta una curva spezzata in due parti coniugate se il gruppo dei sei punti di contatto sta sopra una $C_3(O^2O')$.

26. Dimostrazione diretta della razionalità dei tipi di piani doppi razionali.

Abbiamo veduto come un'involuzione del second'ordine I_2, definita sopra un piano ω, si possa rappresentare sopra un piano doppio π, il quale è *razionale*.

Viceversa consideriamo i piani doppi (o le superficie $z^2=f(x,y)$) che siano razionali, rappresentabili cioè su di un piano semplice ω. Ad una coppia di punti sovrapposti del piano doppio corrisponde una coppia di punti del piano ω; e la totalità di tutte queste coppie costituisce su ω un'involuzione piana del second'ordine I_2.

Questa osservazione mostra che il problema della classificazione di fronte alle trasformazioni cremoniane delle involuzioni del second'ordine è identico al problema di determinare i tipi birazionalmente distinti di piani doppi razionali; (due piani doppi dicendosi birazionalmente distinti quando non esista alcuna trasformazione cremoniana del piano che muti un piano nell'altro

trasformando l'una nell'altra le rispettive curve di diramazione).

Ora, partendo dai tre tipi di involuzioni piane del second'ordine, costruiti nel Lib. II, cap. IV, abbiamo mostrato, al n. 24, che si ottengono dei piani doppi razionali, i quali rispondono ai seguenti tipi della curva di diramazione:

a) curva di diramazione d'ordine $2n$ con punto $(2n-2)$-*plo*,

b) quartica,

c) sestica dotata di due punti tripli infinitamente vicini.

Possiamo quindi enunciare:

Ogni piano doppio razionale possiede una curva di diramazione cremonianamente riducibile ad uno dei seguenti tipi:

a) *curva d'ordine* $2n$ *con punto* $(2n-2)$-*plo, ovvero*

b) *quartica, ovvero*

c) *sestica con due punti tripli infinitamente vicini.*

Ma la via, per cui siamo pervenuti a questo risultato non ci assicura senz'altro che il piano doppio, il quale abbia come curva di diramazione la più generale curva del tipo *a*), *b*), *c*) sia razionale: invero la rappresentazione sul piano doppio delle involuzioni dei tipi di BERTINI potrebbe condurre solamente a piani doppi con curve di diramazione *particolari*, benchè appartenenti ai tipi nominati. Conviene pertanto studiare a priori i piani doppi con curva di diramazione del tipo *a*), *b*), *c*) per dimostrare direttamente come essi siano, in generale, razionali e si possano quindi rappresentare sul piano semplice.

Incominciamo a studiare il piano doppio dotato di curva di diramazione d'ordine $2n$ con punto $(2n-2)$-*plo*. È facile mostrare che *in generale* esso è razionale. Se invero la curva di diramazione è una curva generica d'ordine $2n$ con un punto O $(2n-2)$-*plo*, il fascio di rette uscenti da O dà luogo, sopra una superficie F che si rappresenti sul piano doppio, ad un fascio lineare di curve *razionali* (perchè trasformabili in rette doppie con due punti di diramazione): per il teorema di NOETHER, la superficie F, e quindi anche il piano doppio, è razionale.

Lo stesso ragionamento vale anche a dimostrare la razionalità

del piano doppio, comunque si particolarizzi la curva di diramazione, purchè esista sempre un punto di molteplicità $2n-2$. Ma anche se la molteplicità di O diviene $2n-1$ il piano doppio è ancora razionale: in questa ipotesi invero, l'intorno del punto O fa parte della curva di diramazione e le rette doppie uscenti da O hanno due punti di diramazione, uno dei quali cade nell'intorno di O.

Un'*eccezione* essenziale alla razionalità si ha invece se il punto O diviene $2n$-*plo*, ossia se *la curva di diramazione si spezza in* $2n$ *rette distinte, uscenti da* O. In questo caso una retta generica uscente da O, qualora si consideri come doppia, è priva di punti di diramazione; e dà quindi luogo sulla superficie F a due curve razionali C' e C''. Al variare della retta per O si ottiene così sulla F un *fascio* di curve razionali, accoppiate in una g_2^1. Il genere del fascio è $p = n-1$. Si consideri invero una retta generica del piano doppio. Essa rappresenta una unisecante le curve del fascio ed è di genere $p = n-1$, possedendo $2n$ punti di diramazione; anche il fascio è quindi di genere $p = n-1$. Ma una superficie F, la quale possieda un fascio di genere p di curve razionali, è trasformabile (cfr. Lib. II, cap. I) in una rigata di genere p. Tenuto poi presente che, nel nostro caso, il fascio delle generatrici può essere trasformato in sè con una g_2^1, possiamo concludere:

Un piano doppio, la cui curva di diramazione consti di $2n$ *rette, uscenti da un punto* O, *rappresenta una rigata iperellittica di genere* $p = n-1$.

I risultati che precedono si possono confermare, mostrando direttamente come si possa costruire sopra la superficie F, rappresentata sul piano doppio, che ha per curva di diramazione la più generale curva d'ordine $2n$ con punto $(2n-2)$-*plo*, una rete omaloidica, la quale permette di rappresentare la F e quindi il piano doppio sul piano semplice.

Consideriamo il piano doppio, che ha come curva di diramazione la più generale $C_{2n}(O^{2n-2})$. La curva C_{2n} è di genere $p = 2(n-1)$; e su di essa le curve d'ordine $n+1$, che hanno

in O un punto *n-plo*, segnano una serie completa $g_{4n}^{4n-p} = g_{4n}^{2(n+1)}$. La nominata $g_{4n}^{2(n+1)}$ si può bisecare in $2^{2p} = 2^{4(n-1)}$ modi, dando luogo a delle serie lineari g_{2n}, che risultano non speciali (1), e quindi di dimensione $2n - p = 2n - 2(n-1) = 2$.

Si consideri una delle g_{2n}^2, metà della serie completa $g_{4n}^{2(n+1)}$ segata sulla curva di diramazione da tutte le $C_{n+1}(O^n)$; assegnato un gruppo di $2n$ punti di questa serie, esisterà una $C_{n+1}(O^n)$, la quale toccherà la $C_{2n}(O^{2n-2})$ di diramazione in tutti i punti di questo gruppo. Le ∞^2 $C_{n+1}(O^n)$ analoghe costituiscono un sistema continuo ∞^2, che indichiamo con $\{C_{n+1}\}$.

Mostriamo che al sistema continuo $\{C_{n+1}\}$ rispondono sulla superficie F, rappresentabile sul piano doppio, due sistemi ∞^2, che sono due reti omaloidiche.

All'uopo osserviamo che una generica C_{n+1} di $\{C_{n+1}\}$ — essendo razionale e priva di punti di diramazione, perchè tangente ovunque incontra alla $C_{2n}(O^{2n-2})$ di diramazione — è immagine di una curva della superficie F rappresentata sul piano doppio, la quale è composta di due parti razionali K' e K'', coniugate nell'involuzione I_2, che genera il piano doppio stesso.

Ne segue che il sistema continuo ∞^2 $\{C_{n+1}\}$ è immagine di due sistemi razionali ∞^2, $\{K'\}$ e $\{K''\}$, tracciati sulla F. Determiniamo il grado ad esempio di $\{K'\}$, ossia il numero dei punti variabili in cui si intersecano due curve di $\{K'\}$. All'uopo conviene calcolare il numero delle intersezioni fuori di O e dei loro contatti con la C_{2n} di diramazione, di due C_{n+1} infinitamente vicine (2): esso è:

$$(n+1)^2 - n^2 - 2n = 1;$$

e quindi il sistema $\{K'\}$ è di grado uno.

---

(1) Invero per un gruppo generico di $2n$ punti, che, raddoppiato, appartenga alla $g_{4n}^{2(n+1)}$ segata sulla $C_{2n}(O^{2n-2})$ di diramazione dalle $C_{n+1}(O^n)$, non può passare alcuna curva canonica della $C_{2n}(O^{2n-2})$, spezzata in $2n-3$ rette uscenti da O.

(2) Se invero ci si riferisce a due C_{n+1} distinte, un punto comune di esse è immagine di una coppia dell'involuzione I_2, che è comune alle due curve

Poichè il sistema $\infty^2 \{K'\}$ su F è di grado uno, per due punti generici di F passa *una* curva di K'. Ne segue che il sistema $\{K'\}$ è una *rete omaloidica*. E ciò porta a rappresentare la F e quindi il piano doppio sul piano semplice.

Passiamo a studiare il piano doppio, che ha come curva di diramazione la più generale curva del quart'ordine.

Si può mostrare facilmente che il nominato piano doppio è razionale. All'uopo mostriamo che un piano doppio con una C_4 di diramazione si può sempre ottenere da una superficie cubica per proiezione da un suo punto.

Anzitutto una superficie cubica passante per il punto all'infinito dell'asse delle z ha un'equazione della forma:

$$\varphi_1(x, y)z^2 + 2\varphi_2(x, y)z + \varphi_3(x, y) = 0,$$

dove φ_1, φ_2, φ_3 sono polinomi in x, y del grado indicato dal loro indice. Proiettando la superficie dal punto all'infinito dell'asse delle z sul piano xy, si ottiene un piano doppio, la cui curva di diramazione è la quartica:

$$\varphi_2^2 - \varphi_1 \cdot \varphi_3 = 0. \tag{1}$$

Il nostro asserto sarà dunque provato se si riuscirà a mostrare che l'equazione della più generale quartica del piano può assumere la forma (1).

Sia $f_4(x, y) = 0$ l'equazione della quartica C_4 ed a una delle (28) bitangenti ad essa: A e B i punti di contatto. Indichiamo con $f_2(x, y) = 0$ l'equazione di una conica passante per A e B e consideriamo il fascio:

$$f_4(x, y) + \lambda f_2(x, y)^2 = 0: \tag{2}$$

(riducibili) rappresentate dalle C_{n+1}; e per un punto di tale coppia può passare una curva di K' ed una curva di K'': per modo che al punto nominato non corrisponde una intersezione delle due curve di $\{K'\}$. Questo inconveniente invece — per ragioni di continuità — non nasce se si considerano due C_{n+1} infinitamente vicine.

esso è costituito da curve del quart'ordine, che toccano la a nei punti A e B. Imponendo alla curva generica del fascio (2) di passare per un punto generico della a, si stacca la retta a e si ottiene una cubica residua (1), la cui equazione sia $f_3(x, y) = 0$. Se dunque $f_1(x, y) = 0$ è l'equazione della a, dalla (2), per un particolare valore del parametro λ, si avrà:

$$f_4(x, y) + \lambda f_2(x, y)^2 = f_1(x, y) \cdot f_3(x, y);$$

da cui segue:

$$f_4(x, y) = f_1(x, y) \cdot f_3(x, y) - \lambda f_2(x, y)^2.$$

L'equazione della C_4 può quindi essere posta sotto la forma (1). Ne viene:

Il piano doppio, che ha come curva di diramazione la quartica generale, può essere ottenuto da una superficie cubica per proiezione da un suo punto; e risulta così generalmente razionale.

L'unico caso di eccezione si ha quando la superficie cubica si riduca ad un cono cubico ellittico. Ma proiettando da un suo punto un cono cubico ellittico si ottiene un piano doppio, la cui curva di diramazione è costituita da quattro rette uscenti da un punto. Pertanto:

Il piano doppio con quartica di diramazione è sempre razionale, tranne il caso in cui la quartica si riduca a quattro rette uscenti da un punto.

Approfondiamo ora lo studio del *piano doppio con quartica di diramazione generale,* allo scopo di mostrarne la razionalità, e quindi la possibilità di rappresentarlo sul piano semplice, direttamente, senza passare attraverso la superficie cubica di cui è immagine.

All'uopo cerchiamo di costruire sul piano doppio un sistema continuo di curve, il quale rappresenti una *rete omaloidica.* Sia C_4 la curva di diramazione del piano doppio: essa sarà di genere

(1) La cubica che così si ottiene è *sestitangente* alla C_4, nei punti in cui la C_2 sega la C_4, fuori di A e B. Invero il fascio $f_4 + \lambda f_2^2 = 0$ è costituito da curve che toccano la C_4 nei punti comuni a C_2 e a C_4.

$p = 3$. Il sistema lineare ∞^9 di tutte le cubiche del piano segna sulla C_4 una serie lineare g^9_{12}, la quale si può bisecare in $2^{2p} = 2^6 = 64$ modi diversi, dando luogo a 64 serie g^3_6 distinte. Esistono pertanto 64 *sistemi continui* ∞^3 *di cubiche sestitangenti alla quartica di diramazione* C_4; indicheremo uno di essi con $\{C_3\}$.

Sia ora F una superficie rappresentabile sul piano doppio con quartica di diramazione. Sulla F esiste un'involuzione razionale del second'ordine, I_2, le cui coppie di punti sono in corrispondenza birazionale con i punti del piano doppio. Ad uno dei 64 sistemi $\{C_3\}$ corrisponde su F un sistema razionale ∞^3 di curve, appartenente all'involuzione I_2 e la cui curva generica è costituita da due componenti coniugate nella I_2, ovvero è irriducibile. Si verifica la prima o la seconda ipotesi a seconda che i sei punti di contatto della generica C_3 di $\{C_3\}$ stiano o no sopra una conica (cfr. il criterio enunciato al n. 25, pag. 409). Ciò posto, è facile contare quanti dei sistemi $\{C_3\}$ rappresentino sistemi di curve spezzate.

Sia invero C_3 la cubica generica di un tale sistema e C_2 la conica a cui appartengono i suoi punti di contatto con la C_4. Il fascio individuato dalla C_4 e dalla C_2 contata due volte è tutto costituito da quartiche tangenti alla C_4 negli otto punti in cui questa interseca la C_2. Ora la quartica del fascio che passa per un punto della C_3 sopra considerata, si spezza nella C_3 stessa ed in una retta residua che dovendo costituire con la C_3 una quartica ottotangente a C_4, è bitangente alla curva di diramazione C_4. Inversamente, come abbiamo già visto, se si prende una retta bitangente alla C_4, e per i suoi due punti di contatto si manda una conica C_2, nel fascio individuato da C_4 e dalla C_2, contata due volte, esiste una cubica C_3 che tocca la C_4 in sei punti di C_2. Per costruire i sistemi $\{C_3\}$ rappresentativi di sistemi costituiti da curve spezzate basta dunque procedere così: si parta da una retta, bitangente a C_4 in A e B e si consideri la g^3_6 segnata sulla C_4 dalle coniche per A e B; esiste una C_3 che tocca la C_4 in una sestina generica di questa serie e che, al variare della conica per A e B, descrive un sistema $\{C_3\}$. Ne viene: *i sistemi* $\{C_3\}$,

immagini di sistemi di curve spezzate, sono tanti quante le tangenti doppie della curva di diramazione C_4: cioè in numero di 28.

Escludendo i 28 sistemi così costruiti, rimangono (fra i 64) 36 sistemi $\{C_3\}$ la cui cubica generica rappresenta una curva irriducibile.

Se si considera un sistema $\{C_3\}$ di quest'ultimo tipo, e si fa variare con continuità la sua cubica generica C_3 fino a farle acquistare un punto doppio, allora evidentemente la curva irriducibile della superficie F, rappresentata dalla C_3, varia pure con continuità ed al limite si spezza (cfr. n. 25, pag. 408) in due parti che sono fra loro connesse, poichè s'incontrano nei due punti che corrispondono al punto del piano in cui cade il punto doppio della C_3. (Se invece si parte da un sistema $\{C_3\}$ rappresentativo di un sistema di curve di F, tutte riducibili, e si fa acquistare alla curva generica C_3 di esso un punto doppio, si ottiene al limite una curva le cui due parti hanno ciascuna un punto doppio nei punti di F, che corrispondono al punto doppio della C_3).

Ne segue che se alle cubiche di un sistema $\{C_3\}$ la cui curva generica sia immagine di una curva *irriducibile* di F, s'impone di acquistare un punto doppio (una condizione), si ottengono uno o più sistemi doppiamente infiniti di cubiche razionali, ciascuno dei quali rappresenta due *reti omaloidiche* di F: infatti due cubiche infinitamente vicine di un tal sistema hanno in comune nove punti, sei dei quali sono assorbiti dai loro contatti con la C_4, e due cadono nei loro punti doppi [1]; questi otto punti *non* corrispondono ad intersezioni delle curve obiettive su F: su F vi è dunque un solo punto comune alle curve rappresentate da quelle due cubiche, e perciò su F si ha un sistema ∞^2 di curve razionali di grado uno; per due punti generici di F passa solamente *una* curva di questo sistema, che è perciò *lineare*.

---

[1] Se una curva C'' dotata di un punto doppio O'' è infinitamente vicina ad una curva C' dotata di un punto doppio O', due delle intersezioni della C'' con la C' sono assorbite da O'. Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. I, Lib. II, Cap. I, pag. 182.

Siamo così giunti a determinare sulla superficie F una rete omaloidica, rappresentata sul piano doppio da *un sistema doppiamente infinito di cubiche sestitangenti alla quartica di diramazione e dotate di un punto doppio variabile.* Per rappresentare il piano doppio sopra un piano semplice, basterà considerare la g_6^2 che le C_3 del nominato sistema segano sulla C_4 di diramazione, e riferire proiettivamente i gruppi di questa alle rette di un piano.

Veniamo finalmente allo studio del piano doppio, che ha per curva di diramazione la più generale sestica, dotata di due punti tripli infinitamente vicini. Si tratta di dimostrare che questo piano doppio è razionale e si può rappresentare sul piano semplice, per modo che ad un punto di esso risponda una coppia di punti coniugati in un'involuzione I_2 del quarto tipo di BERTINI. La verità dell'asserto si può anzitutto provare con un computo di costanti, che sarà poi confermato dalla rappresentazione diretta del piano doppio sul piano semplice, di cui discorriamo più avanti.

Un'involuzione del quarto tipo di BERTINI è l'involuzione con cui è composta la serie caratteristica di un sistema lineare ∞^3 di sestiche, passanti doppiamente per 8 punti $A_1, A_2, \ldots, A_8$. Ora, la determinazione del sistema delle sestiche con otto punti base doppi dipende da 16 costanti arbitrarie (le coordinate dei punti base). Ma un sistema lineare di $C_6(A_1^2 A_2^2 \ldots A_8^2)$ è mutato in un sistema dello stesso tipo da un gruppo misto di trasformazioni birazionali, che risulta dal moltiplicare le ∞^8 omografie piane per un numero finito di trasformazioni quadratiche, e dipende così da 8 parametri. Pertanto *le involuzioni del quarto tipo di* BERTINI *dipendono da* 8 *moduli.*

D'altra parte, sia C_6 una sestica piana dotata di due punti tripli O, O', infinitamente vicini. Le coniche per O, O' rappresentano un cono quadrico, sul quale la C_6 diviene una sestica gobba di genere quattro, trisecante le generatrici del cono. Siamo così portati a contare gli invarianti proiettivi delle sestiche gobbe di genere quattro dello spazio ordinario, che appartengono ad un

cono quadrico. Ora, se K_6 è una tale sestica gobba, con un'omografia dello spazio possiamo sempre ricondurla ad una K_6 appartenente ad un cono *dato*. Ma le K_6 che stanno su di un cono sono (come le C_6 piane passanti per due punti tripli infinitamente vicini, *assegnati*) ∞^{15}; e poichè il cono è mutato in sè da ∞^7 omografie, sul cono vi sono ∞^8 sestiche gobbe di genere quattro, proiettivamente distinte. Dunque *le sestiche piane con due punti tripli infinitamente vicini dipendono da* 8 *moduli.*

Tenuto conto dell'uguaglianza del numero dei moduli, da cui dipendono le involuzioni del quarto tipo di BERTINI ed i piani doppi con sestica di diramazione con due punti tripli infinitamente vicini, risulta così la razionalità del piano doppio, che ha come curva di diramazione la più generale sestica del tipo indicato.

Volgiamoci ora a dimostrare in modo diretto la razionalità del piano doppio, che ha per curva di diramazione la sestica dotata di due punti tripli infinitamente vicini.

Se prescindiamo dal computo di costanti ora esposto, si dovrebbe a priori pensare che i piani doppi con sestica di diramazione con due punti tripli infinitamente vicini, che si ottengono rappresentando su di un piano doppio le coppie di punti coniugati in un'involuzione del quarto tipo di BERTINI, fossero solamente dei piani doppi con curva di diramazione *particolare*. Per dimostrare che ciò di fatto non succede, giova approfondire lo studio della corrispondenza [2, 1] che intercorre tra un piano semplice ω ed un piano doppio π, ogni punto del quale risponde ad una coppia di punti coniugati in un'involuzione del quarto tipo di BERTINI. Le proprietà che metteremo in luce nella nostra *analisi*, permetteranno reciprocamente la *sintesi*, cioè la dimostrazione a priori della razionalità del piano doppio che ci interessa.

ANALISI. Sul piano semplice ω consideriamo il sistema lineare ∞^3 delle sestiche passanti doppiamente per 8 punti base A_1, $A_2, \ldots, A_8$. Le coppie di punti coniugati nell'involuzione I_2, che vogliamo considerare, si ottengono intersecando una $C_6(A_1^2 A_2^2 \ldots A_8^2)$ generica con il fascio delle $C_3(A_1 A_2 \ldots A_8)$. La curva delle coin-

cidenze della I_2 è una curva $C_9(A_1^3 A_2^2 \ldots A_8^2)$. Come abbiamo già descritto (cfr. n. 24, pag. 390), la rappresentazione dell'involuzione I_2 su di un piano doppio, si ottiene semplicemente così: il sistema lineare non semplice, ∞^3, delle $C_6(A_1^2 A_2^2 \ldots A_9^2)$ rappresenta un cono quadrico doppio, Φ_2, sul quale la curva delle coincidenze C_9 diviene una sestica di diramazione K_6 di genere quattro, trisecante le generatrici ed appartenente così ad una superficie cubica irriducibile; proiettando Φ_2 da un suo punto generico, la K_6 diviene una sestica C_6 con due punti tripli O, O' infinitamente vicini, e si ottiene così un piano doppio π con curva di diramazione del tipo che stiamo studiando.

Dalla rappresentazione indicata del piano semplice ω sul piano doppio π, *risultano senz'altro evidenti le seguenti proprietà:*

a) Il sistema lineare ∞^3 delle coniche per O, O' risponde al sistema delle sezioni piane del cono Φ_2 e così al sistema lineare delle $C_6(A_1^2 A_2^2 \ldots A_8^2)$; in particolare le rette di π, che insieme alla retta OO' rappresentano delle particolari $C_2(OO')$, rispondono alle sezioni piane del cono Φ_2 condotte per il centro di proiezione e sul piano ω a $C_6(A_1^2 A_2^2 \ldots A_8^2)$ appartenenti ad una particolare rete dotata di due punti base semplici coniugati nella I_2; infine le $C_2(OO')$ spezzate in due rette per O sono le trasformate delle $C_6(A_1^2 A_2^2 \ldots A_8^2)$, spezzate in due $C_3(A_1 A_2 \ldots A_8)$; (e su Φ_2 rappresentano le sezioni piane spezzate in due generatrici).

b) *Il sistema lineare* ∞^8 *delle* $C_4(O^2 O'^2)$ *che è il sistema* doppio del sistema delle $C_2(OO')$, è il trasformato di un sistema lineare ∞^8 di $C_{12}(A_1^4 A_2^4 \ldots A_8^4)$, ciascuna curva del quale appartiene alla I_2; ed inversamente ogni $C_{12}(A_1^4 A_2^4 \ldots A_8^4)$, che appartenga alla I_2, è rappresentata da una $C_4(O^2 O'^2)$.

c) Il sistema lineare ∞^{15} delle $C_6(O^3 O'^3)$, che è il sistema triplo del sistema delle $C_2(OO')$, è il trasformato di un sistema lineare ∞^{15} di $C_{18}(A_1^6 A_2^6 \ldots A_8^6)$, ciascuna curva del quale appartiene alla I_2; ed inversamente ogni $C_{18}(A_1^6 A_2^6 \ldots A_8^6)$, che appartenga alla I_2, è rappresentata da una $C_6(O^3 O'^3)$.

Premesse queste proprietà, che abbiamo raccolte, per procedere più speditamente nel seguito, osserviamo che tra le sestiche

$C_6(A_1^2A_2^2\dots A_8^2)$ ve n'è un numero finito e precisamente 120, le quali risultano spezzate in due parti distinte, coniugate nella I_2. Invero, tenuto conto che almeno una delle componenti delle nominate C_6 deve avere l'ordine minore o uguale a 3, si trovano le seguenti soluzioni:

a) la curva infinitesima rappresentata dall'intorno ad es. di A_1, alla quale è coniugata la $C_6(A_1^3A_2^2\dots A_8^2)$; e le altre curve analoghe, in tutto in numero di 8;

b) la retta congiungente due punti A_iA_k, ad es. A_1A_2, alla quale è coniugata la $C_5(A_1A_2A_3^2A_4^2\dots A_8^2)$; vi sono $\binom{8}{2} = 28$ curve analoghe;

c) le coniche per cinque punti A_i, ad es. la $C_2(A_1A_2A_3A_4A_5)$, alla quale è coniugata la $C_4(A_1A_2A_3A_4A_5A_6^2A_7^2A_8^2)$; le curve analoghe sono $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$;

d) le cubiche con un punto base doppio e sei punti base semplici, ad es. la $C_3(A_1^2A_2A_3\dots A_7)$, alla quale è coniugata la $C_3(A_2A_3\dots A_7A_8^2)$; si hanno qui altre $\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7 = 28$ soluzioni.

A queste 120 $C_6(A_1^2A_2^2\dots A_8^2)$, spezzate in due parti coniugate *distinte*, si aggiungono poi le ∞^1 $C_6(A_1^2A_2^2\dots A_8^2)$ costituite da una cubica $C_3(A_1A_2\dots A_8)$ (autoconiugata) contata due volte.

Ora, le due parti coniugate distinte, che costituiscono una delle C_6 del tipo *a*), *b*), *c*), *d*) si incontrano, fuori di A_1, A_2, ..., A_8, in tre punti, che debbono cadere sulla curva delle coincidenze. Corrispondentemente la nominata C_6 (per la proprietà *a*)) si rappresenta sul piano doppio π in una conica irriducibile, passante per O, O' e tangente in tre punti alla curva di diramazione del piano doppio π. (Invece le C_6, spezzate in una $C_3(A_1A_2\dots A_8)$ contata due volte, si rappresentano nelle rette per O, contate due volte). Ne viene che *esistono* 120 *coniche, irriducibili, passanti per* O, O' *e tritangenti alla* $C_6(O^3O'^3)$ *di diramazione*; e non ce n'è altre, giacchè, inversamente, una conica, che abbia le proprietà indicate, dovrebbe essere rappresentata da una $C_6(A_1^2A_2^2\dots A_8^2)$, spezzata in due parti coniugate distinte.

È facile riconoscere sul piano ω che le 120 coniche tritangenti alla $C_6(O^3O'^3)$ costituiscono una *configurazione simmetrica*; ossia, più precisamente, che l'equazione algebrica, da cui dipende la loro determinazione, possiede un gruppo di GALOIS, che risulta transitivo. Invero ci si persuade facilmente che una curva del tipo *a*), *b*), *c*), *d*) può essere mutata in un'altra qualsivoglia, con una trasformazione cremoniana, che trasformi il sistema delle $C_6(A_1^2A_2^2...A_8^2)$ in un sistema dello stesso tipo.

Invece *la configurazione costituita dalle coppie di coniche tritangenti non è simmetrica,* essendovi degli *accoppiamenti di due tipi diversi.* Invero siano C_2 e D_2 due coniche tritangenti ed A, B i punti, in cui esse si intersecano fuori di O ed O'. Nel piano ω, ai punti A e B corrrisponderanno rispettivamente le coppie A', A'' e B', B''. Se con γ', γ'' e δ', δ'' indichiamo le coppie di curve coniugate, che in ω rispondono a C_2 e D_2 rispettivamente, γ' può intersecare δ', fuori di A_1, A_2, ..., A_8, in 0, 1 o 2 punti. Se γ' non interseca δ', γ' dovrà intersecare δ'' in due punti; ma allora, scambiando la denominazione di δ' e δ'', ricadiamo nel terzo caso. Possiamo dunque supporre a priori che γ' e δ' si incontrino in due punti, ovvero in un punto solo. Nella prima ipotesi si realizza la configurazione messa in evidenza dalla fig. 1; mentre la seconda ipotesi porta alla configurazione rispondente alla fig. 2. Diremo brevemente che *due coniche tritangenti danno luogo ad un accoppiamento di prima specie o di seconda specie a seconda che le coppie di curve coniugate, che ad essa rispondono, realizzano la* fig. 1 *o la* fig. 2.

Nell'accoppiamento di prima specie vi è una curva corrispondente alla prima conica ed una curva rispondente alla seconda conica, che non si intersecano; invece nell'accoppiamento di seconda specie le due curve nominate si incontrano sempre in un punto.

Come esempio di accoppiamento di prima specie si prenda la conica tritangente, che sul piano ω è rappresentata dalla curva $\gamma' + \gamma''$, ove $\gamma' \equiv C_0(A_1)$, $\gamma'' \equiv C_6(A_1^3A_2^2A_3^2...A_8^2)$ e la conica tritangente che è rappresentata dalla $\delta' + \delta''$, con $\delta' \equiv C_3(A_1^2A_2A_3...$ $...A_7)$, $\delta'' \equiv C_3(A_2A_3...A_7A_8^2)$.

Per realizzare un accoppiamento di seconda specie si prenda invece $\gamma' \equiv C_1(A_1A_2)$, $\gamma'' \equiv C_5(A_1A_2A_3^2A_4^2 \dots A_8^2)$, $\delta' \equiv C_1(A_3A_4)$ $\delta'' \equiv C_5(A_1^2A_2^2A_3A_4A_5^2A_6^2A_7^2A_8^2)$.

Giova inoltre per il seguito mettere in evidenza che *una coppia di coniche tritangenti $C_2(OO')$, che dia luogo ad un accoppiamento di prima specie, è contenuta in un sistema continuo ∞^2 di $C_4(O^2O'^2)$ (sestitangenti alla curva di diramazione di π), rappresentativo di due reti coniugate di curve ellittiche di grado due.*

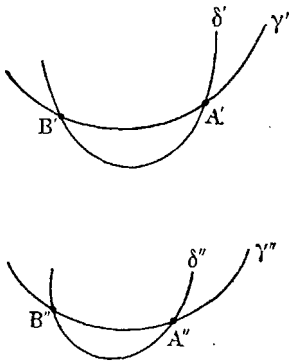


Fig. 1.

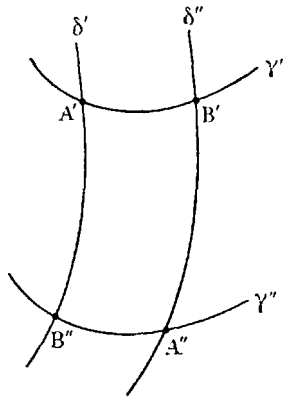


Fig. 2.

Invero riferendoci alla fig. 1, consideriamo la curva $\gamma' + \delta'$ (o la sua coniugata $\gamma'' + \delta''$). Il sistema lineare più ampio che in A_1, A_2, ..., A_8 ha le stesse molteplicità della $\gamma' + \delta'$, è costituito da curve ellittiche: infatti, si riguardino, nella fig. 1, i punti A' e B' come punti doppi accidentali per la curva spezzata $\gamma' + \delta'$, e si ricordi la formula che dà il genere di una curva spezzata [1]; essendo γ' e δ' curve razionali, risulta che la $\gamma' + \delta'$ è virtualmente di genere uno. Ed è facile convincersi che il sistema più ampio che così si ottiene è una rete di curve

[1] Cfr. Lib. I, Cap. VIII, n. 41, pag. 183.

ellittiche di grado due. Così nell'esempio sopra riportato, la $\gamma' + \delta'$ determina la rete di curve ellittiche di grado due delle $C_3(A_1A_2...A_7)$, mentre la $\gamma'' + \delta''$ dà luogo alla rete coniugata delle $C_9(A_1^3A_2^3...A_7^3A_8^4)$; questo esempio ha del resto valore generale, giacchè si vede subito che due curve rappresentative di due coniche tritangenti, che non si intersechino fuori di A_1, A_2, ..., A_8, possono ridursi con una trasformazione cremoniana l'una all'intorno di A_1 e l'altra alla $C_3(A_1^2A_2A_3...A_7)$. È poi ovvio (tenuta presente la proprietà b)) che le reti di curve ellittiche così costruite sono rappresentate sul piano doppio da sistemi continui ∞^2 di $C_4(O^2O'^2)$, sestitangenti alla curva di diramazione.

Invece *una coppia di coniche tritangenti* $C_2(OO')$, *che dia luogo ad un accoppiamento di seconda specie, è contenuta in un sistema continuo* ∞^1 *di* $C_4(O^2O'^2)$, *sestitangente alla curva di diramazione di* π *e dotate di un punto doppio variabile; il nominato sistema continuo di* $C_4(O^2O'^2)$ *è rappresentativo di due fasci lineari coniugati di curve razionali.* Basta qui riferirsi alla fig. 2 e considerare nella curva spezzata $\gamma' + \delta'$ come virtualmente inesistente il punto doppio A'. Per la formula che dà il genere della curva spezzata, la $\gamma' + \delta'$ risulta di genere zero; e tale è dunque anche il genere del sistema lineare più ampio che ha in A_1, A_2, ..., A_8 le stesse molteplicità di $\gamma' + \delta'$. Nell'esempio sopracitato il sistema individuato dalla $\gamma' + \delta'$ è il fascio delle coniche $C_2(A_1A_2A_3A_4)$; ed il suo coniugato, determinato in modo simile dalla $\gamma'' + \delta''$, è il fascio delle $C_{10}(A_1^3A_2^3A_3^3A_4^3A_5^4A_6^4A_7^4A_8^4)$. Anche qui l'esempio ha valore generale, giacchè due curve rappresentative di due coniche tritangenti, che abbiano un punto comune fuori di A_1, A_2, ..., A_8, possono sempre trasformarsi nelle due rette A_1A_2, A_3A_4.

E, per la proprietà b), i due fasci coniugati così costruiti divengono su π un sistema ∞^1 di $C_4(O^2O'^2)$ sestitangenti alla curva di diramazione e di genere zero, dotate cioè di un punto doppio (variabile).

Consideriamo ora nel piano ω la rete omaloidica delle rette. Poichè una retta generica incontra in tre punti variabili le

$C_3(A_1A_2...A_8)$ ed in sei punti variabili le $C_6(A_1^2A_2^2...A_8^2)$, tenute presenti le proprietà *a*) e *b*), si vede che le rette di ω si mutano sul piano doppio π in sestiche, passanti triplamente per O, O'. Le nominate sestiche risulteranno nonitangenti alla $C_6(O^3O'^3)$ di diramazione, perchè le rette non appartengono all'involuzione I_2; ed inoltre saranno dotate di quattro punti doppi, dovendo, come le rette, risultare di genere zero: i quattro punti doppi saranno *variabili*, perchè non esiste alcuna coppia di punti coniugati per cui passino tutte le rette del piano ω.

Fra le rette del piano semplice consideriamo quelle che congiungono due dei punti A_i ($i = 1, 2 \ldots 8$) ad es. la retta A_1A_2. Ad essa corrisponde sul piano doppio π una $C_6(O^3O'^3)$ spezzata in tre coniche tritangenti la curva di diramazione, una delle quali è propriamente la trasformata della retta A_1A_2, mentre le altre due sono le trasformate degli intorni di A_1, A_2 rispettivamente. Queste ultime due coniche danno luogo ad un accoppiamento di prima specie, poichè gli intorni di A_1 ed A_2 non hanno punti comuni; invece la conica, che risponde alla retta A_1A_2, dà luogo ad un accoppiamento di seconda specie con ciascuna delle due coniche, trasformate degli intorni di A_1 ed A_2.

Riassumendo, possiamo dunque dire: *La rete omaloidica delle rette del piano ω si trasforma sul piano doppio π in un sistema continuo, ∞^2, $\{C_6\}$ di sestiche $C_6(O^3O'^3)$ nonitangenti alla curva di diramazione e dotate di quattro punti doppi variabili; il sistema continuo $\{C_6\}$ contiene un numero finito* (28) *di curve spezzate in tre coniche tritangenti, tali che una determinata di esse dia luogo ad un accoppiamento di seconda specie con le altre due che a loro volta danno invece luogo ad un accoppiamento di prima specie.*

Questa proposizione si può generalizzare ad *una qualunque rete omaloidica del piano ω, la quale abbia i suoi punti base solamente nei punti A_1, A_2, ..., A_8.* Invero, se r_1, r_2, ..., r_8 sono le molteplicità dei punti A_1, A_2, ..., A_8 per le curve della rete ed n è il suo ordine, si avrà:

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_8 = 3n - 3.$$

Da questa relazione si ricava immediatamente che le $C_3(A_1A_2...A_8)$ e le $C_6(A_1^2A_2^2...A_8^2)$ interseçano le curve della rete rispettivamente in tre e sei

punti. Per le proprietà *a*) e *b*) le curve della rete sono dunque rappresentate sul piano doppio π da $C_n(O^3O'^3)$, le quali risultano nonitangenti e dotate di quattro punti doppi variabili. Ora, per la proprietà *c*), le $C_n(O^3O'^3)$ sono le trasformate delle $C_{18}(A_1^6A_2^6\ldots A_8^6)$, appartenenti all'involuzione I_2: ne segue che sarà $n \leq 17$ e che ad ogni rete omaloidica d'ordine n, che abbia i punti base solamente in $A_1, A_2, \ldots, A_8$ si può associare una rete omaloidica coniugata, d'ordine $n' = 18 - n$ ed avente nel punto A_i la molteplicità $6 - r_i$. L'esame dei casi possibili si compie facilmente ed il risultato è il seguente: una rete omaloidica che abbia i suoi punti base solamente in $A_1, A_2, \ldots, A_8$ è una rete omaloidica appartenente ad uno dei tipi seguenti (dove sono poste l'una accanto all'altra reti coniugate):

C_1

$C_2(A_1A_2A_3)$

$C_3(A_1^2A_2A_3A_4A_5)$

$C_4(A_1^2A_2^2A_3^2A_4A_5A_6)$

$C_4(A_1^3A_2A_3A_4A_5A_6A_7)$

$C_5(A_1^2A_2^2A_3^2A_4^2A_5^2A_6^2)$

$C_5(A_1^3A_2^2A_3^2A_4^2A_5A_6A_7)$

$C_6(A_1^3A_2^3A_3^2A_4^2A_5^2A_6^2A_7)$

$C_6(A_1^3A_2^3A_3^3A_4^2A_5A_6A_7A_8)$

$C_6(A_1^4A_2^2A_3^2A_4^2A_5^2A_6A_7A_8)$

$C_7(A_1^3A_2^3A_3^3A_4^3A_5^2A_6^2A_7^2)$

$C_7(A_1^4A_2^3A_3^3A_4^2A_5^2A_6^2A_7A_8)$

$C_8(A_1^3A_2^3A_3^3A_4^3A_5^3A_6^3A_7^3)$

$C_8(A_1^4A_2^3A_3^3A_4^3A_5^3A_6^3A_7A_8)$

$C_8(A_1^5A_2^3A_3^3A_4^2A_5^2A_6^2A_7^2A_8^2)$

$C_8(A_1^4A_2^4A_3^3A_4^3A_5^2A_6^2A_7^2A_8)$

$C_9(A_1^4A_2^4A_3^4A_4^3A_5^3A_6^3A_7^2A_8)$

$C_9(A_1^4A_2^4A_3^4A_4^4A_5^2A_6^2A_7^2A_8^2)$

$C_{17}(A_1^6A_2^6A_3^6A_4^6A_5^6A_6^6A_7^6A_8^6)$

$C_{16}(A_1^5A_2^5A_3^5A_4^6A_5^6A_6^6A_7^6A_8^6)$

$C_{15}(A_1^4A_2^5A_3^5A_4^5A_5^5A_6^6A_7^6A_8^6)$

$C_{14}(A_1^4A_2^4A_3^4A_4^5A_5^5A_6^5A_7^6A_8^6)$

$C_{14}(A_1^3A_2^5A_3^5A_4^5A_5^5A_6^5A_7^5A_8^6)$

$C_{13}(A_1^4A_2^4A_3^4A_4^4A_5^4A_6^4A_7^6A_8^6)$

$C_{13}(A_1^3A_2^4A_3^4A_4^4A_5^5A_6^5A_7^5A_8^6)$

$C_{12}(A_1^3A_2^3A_3^4A_4^4A_5^4A_6^5A_7^5A_8^6)$

$C_{12}(A_1^3A_2^3A_3^3A_4^4A_5^5A_6^5A_7^5A_8^5)$

$C_{12}(A_1^2A_2^4A_3^4A_4^4A_5^4A_6^5A_7^5A_8^5)$

$C_{11}(A_1^3A_2^3A_3^3A_4^3A_5^4A_6^4A_7^4A_8^6)$

$C_{11}(A_1^2A_2^3A_3^3A_4^4A_5^4A_6^4A_7^5A_8^5)$

$C_{10}(A_1^3A_2^3A_3^3A_4^3A_5^3A_6^3A_7^3A_8^6)$

$C_{10}(A_1^2A_2^3A_3^3A_4^3A_5^3A_6^3A_7^5A_8^5)$

$C_{10}(A_1A_2^3A_3^3A_4^4A_5^4A_6^4A_7^4A_8^4)$

$C_{10}(A_1^2A_2^2A_3^3A_4^3A_5^4A_6^4A_7^4A_8^5)$

$C_9(A_1^2A_2^2A_3^2A_4^3A_5^3A_6^3A_7^4A_8^5)$

$C_9(A_1^2A_2^2A_3^2A_4^2A_5^4A_6^4A_7^4A_8^4)$

In base a questo elenco il lettore potrà facilmente constatare, caso per caso, l'esistenza di *un numero finito s di curve della rete, alle quali corrispondono delle* $C_n(O^3O'^3)$ *spezzate in tre coniche tritangenti, formanti la configurazione prima descritta.* L'esame caso per caso può del resto essere evitato, tenendo conto che ogni rete può essere mutata nella rete delle rette

con una successione di trasformazioni quadratiche, che hanno i loro punti fondamentali solamente nei punti A_i. Ne segue che *il numero s è a priori lo stesso per tutte le reti: e precisamente* (come per la rete delle rette) $s = 28$.

Siano ora C_2, D_2, E_2 tre coniche tritagenti alla curva di diramazione del piano doppio π, in corrispondenza [1, 2] col piano semplice ω; alla conica C_2 rispondano le due curve coniugate γ', γ''; e così alla D_2 δ' e δ'' ed alla E_2 ε' ed ε''. Le due coniche C_2 e D_2 si intersechino fuori di O, O', nei punti A, B e similmente C_2 ed E_2

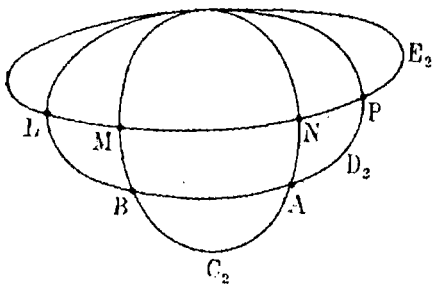


Fig. 3.

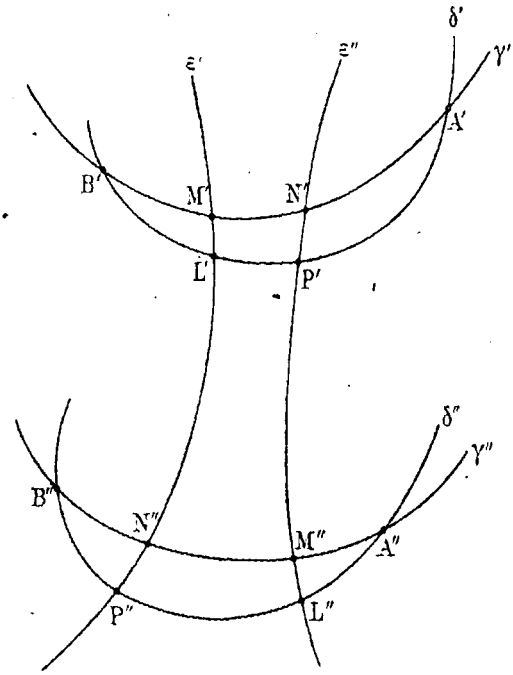


Fig. 4.

in M, N e D_2 ed E_2 in L, P. Ai punti A, B, L, M, N, P rispondano rispettivamente le coppie di punti coniugati $A'A''$, $B'B''$, $L'L''$, $M'M''$, $N'N''$, $P'P''$.

Supponiamo che E_2 dia luogo ad un accoppiamento di seconda specie con C_2 e D_2, mentre C_2 e D_2 diano luogo ad un accoppiamento di prima specie. In questa ipotesi e con le notazioni introdotte, le configurazioni delle tre coniche C_2, D_2, E_2 e delle curve $\gamma', \gamma'', \delta', \delta'', \varepsilon', \varepsilon''$, che ad esse corrispondono, sono messe schematicamente in evidenza dalle figg. 3 e 4.

Per quanto precede sappiamo che ad una rete omaloidica del piano ω, che abbia i suoi punti base solamente in A_1, A_2, ..., A_8, corrisponde sul piano doppio π un sistema continuo ∞^2 di $C_6(O^3O'^3)$ nonitangenti alla curva di diramazione e dotate di quattro punti doppi variabili; ed il nominato sistema continuo contiene un numero finito di C_6 spezzate in tre coniche tritangenti e formanti una configurazione uguale a quella della terna C_2, D_2, E_2. Inversamente vogliamo provare che *una terna di coniche tritangenti come la $C_2\,D_2\,E_2$ determina due sistemi continui ∞^2 di $C_6(O^3O'^3)$ del tipo anzidetto, ciascuno dei quali è rappresentativo di due reti omaloidiche coniugate.*

All'uopo, riferiamoci alla fig. 4 e consideriamo la curva spezzata $\gamma' + \varepsilon' + \delta''$ (o la sua coniugata $\gamma'' + \varepsilon'' + \delta'$). Se nella $\gamma' + \varepsilon' + \delta''$ consideriamo come *virtualmente inesistenti* i punti doppi M' e P'', vediamo che il sistema lineare completo, costituito dalle curve che hanno lo stesso ordine e gli stessi punti multipli (con le stesse molteplicità) della $\gamma' + \varepsilon' + \delta''$, è un sistema lineare di curve non autoconiugate di genere zero: invero la $\gamma' + \varepsilon' + \delta''$, risulta nella nostra ipotesi e per la formula che dà il genere di una curva spezzata, una curva di genere zero. Il sistema lineare così costruito è rappresentato sul piano doppio da un sistema continuo $\{C_6\}$ di $C_6(O^3O'^3)$ nonitangenti alla curva di diramazione e dotate di quattro punti doppi variabili (perchè ogni $C_6(O^3O'^3)$ del sistema è di genere zero): il nominato sistema continuo è determinato dalla particolare $C_6(O^3O'^3)$ spezzata nelle tre coniche C_2, D_2, E_2, quando nella $C_2 + D_2 + E_2$ si immaginino come non esistenti i punti doppi M e P (cfr. fig. 3). Naturalmente il sistema $\{C_6\}$ è rappresentativo non solo del sistema lineare determinato dalla $\gamma' + \varepsilon' + \delta''$ supposta priva dei punti doppi M', P'' ma anche del sistema lineare coniugato determinato dalla $\gamma'' + \varepsilon'' + \delta'$ supposta priva dei punti doppi M'', P'.

Ciò posto, è facile mostrare che il sistema $\{C_6\}$ è rappresentativo di due reti omaloidiche, coniugate. Si consideri invero una curva del sistema che sia infinitamente vicina alla $C_2 + D_2 + E_2$: essa avrà quattro punti doppi, infinitamente vicini ai punti A, B, L, N, ma non passerà nè per M nè per P. Delle 36 intersezioni

della nominata curva con la $C_2 + D_2 + E_2$, 18 sono assorbite dai punti O, O', 9 dai contatti con la curva di diramazione ed 8 sono distribuiti in 4 coppie infinitamente vicine rispettivamente ai punti A, B, L, N. Uno sguardo alla fig. 4 mostra evidente che queste ultime 8 intersezioni non corrispondono ad intersezioni delle curve obbiettive. Ne segue che i due sistemi lineari coniugati, rappresentati dal sistema $\{C_6\}$ sono di grado uno e sono così due reti omaloidiche coniugate.

È ovvio ora come partendo, anzichè dalla $\gamma' + \varepsilon' + \delta''$, dalla $\gamma' + \varepsilon'' + \delta''$, si costruisca un altro sistema continuo ∞^2 di $C_6(O^3O'^3)$, nonitangenti e dotate di quattro punti variabili: questo secondo sistema è determinato dalla particolare $C_6(O^3O'^3)$ spezzata nelle tre coniche C_2, D_2, E_2, quando nella $C_2 + D_2 + E_2$ si considerino come non esistenti i punti L ed N. Rimane così provato il nostro asserto.

Sintesi. - In quanto precede siamo partiti da un'involuzione del quarto tipo di Bertini data su di un piano ω, e, rappresentata l'involuzione su di un piano doppio π dotato di una $C_6(O^3O'^3)$ di diramazione, abbiamo studiata la corrispondenza [2, 1] tra i piani ω e π che così veniva posta.

Ora, invece, vogliamo partire da un piano doppio π con una $C_6(O^3O'^3)$ di diramazione e dimostrare la possibilità di rappresentarlo su di un piano semplice ω.

Il piano doppio π, che ha per curva di diramazione la più generale sestica dotata di due punti tripli infinitamente vicini, O, O', rappresenta una superficie F, di cui si tratta di *dimostrare la razionalità* e che è in corrispondenza [2, 1] con il piano doppio π.

Ciò premesso, giova osservare come alcuni risultati dell'analisi che precede *si estendano alla corrispondenza* [2, 1] *tra la superficie F ed il piano doppio* π.

Anzitutto se esiste una conica tritangente alla C_6 di diramazione, essa rappresenta due curve coniugate sulla superficie F; e due coniche tritangenti debbono dar luogo sulla F ad un accoppiamento di prima o di seconda specie: basta immaginare materialmente le figg. 1 e 2 disegnate sulla F anzichè sul piano ω.

Inoltre, *se esistono tre coniche C_2, D_2, E_2 tali che E_2 dia luogo ad un accoppiamento di seconda specie con C_2 e D_2 mentre C_2 e D_2 diano luogo ad un accoppiamento di prima specie, si può ancora trarre la conclusione che la terna C_2, D_2, E_2 determina due sistemi continui ∞^2 di $C_6(O^3O'^3)$ nonitangenti e dotati di quattro punti doppi variabili, ciascuno dei quali sia rappresentativo di due reti omaloidiche coniugate.* Invero la dimostrazione da noi data di questa proprietà si basa sostanzialmente sulla formula che dà il genere di una curva spezzata e sul computo del grado di uno dei nominati sistemi continui $\{C_6\}$.

Invece, *è strettamente legata all'ipotesi che esista una corrispondenza* [1, 2] *tra il piano doppio π ed un piano semplice ω:*

a) l'esistenza di coniche tritangenti alla $C_6(O^3O'^3)$ di diramazione;

b) l'esistenza di coppie di coniche tritangenti, che diano luogo ad un accoppiamento di prima o di seconda specie;

c) l'esistenza di terne di coniche tritangenti, tali che due di esse diano luogo ad un accoppiamento di prima specie, mentre la terza dia luogo ad un accoppiamento di seconda specie con le prime due.

Ne segue che si potrà senz'altro costruire sul piano doppio π un sistema continuo ∞^2 di $C_6(O^3O'^3)$, nonitangenti alla curva di diramazione e dotate di quattro punti doppi variabili, rappresentativo di una rete omaloidica su F, se risolveremo il problema di *costruire direttamente una terna di coniche tritangenti, tale che due coniche della terna formino un accoppiamento di seconda specie con la terza, mentre le prime due formino un accoppiamento di prima specie.*

Come vedremo, per dimostrare la razionalità del piano doppio non ci sarà necessario risolvere completamente questo problema. Vediamo tuttavia quali difficoltà esso implichi.

La prima questione che si presenta è di dimostrare l'esistenza di coniche, tritangenti alla $C_6(O^3O'^3)$ di diramazione. All'uopo osserviamo che le coniche $C_2(O\,O')$ segnano sulla $C_6(O^3O'^3)$, che risulta di genere 4, la g_6^3 canonica, che si può bisecare, per $p = 4$,

in 120 modi diversi, dando luogo così, almeno in generale, a 120 coniche distinte ed irriducibili, tritangenti alla $C_6(O^3O'^3)$ di diramazione (cfr. la nota a pag. 437).

Volgiamoci dopo ciò a dimostrare l'esistenza di coppie di coniche tritangenti, che diano luogo ad accoppiamenti di prima e di seconda specie. Ricordiamo perciò che, quando si sa *a priori* che il piano doppio è in corrispondenza [1, 2] con un piano semplice, valgono le due proprietà seguenti:

a) una coppia di coniche tritangenti che dà luogo ad un accoppiamento di prima specie è contenuta in un sistema continuo ∞^2 di $C_4(O^2O'^2)$, sestitangenti alla curva di diramazione, rappresentativo di due reti coniugate di grado due di curve ellittiche;

b) due coniche tritangenti che diano luogo ad un accoppiamento di seconda specie sono contenute in un sistema continuo ∞^1 di $C_4(O^2O'^2)$, sestitangenti alla curva di diramazione e dotate di un punto doppio variabile, rappresentativo di due fasci coniugati di curve razionali.

Queste proprietà ci suggeriscono di studiare i sistemi continui di quartiche $C_4(O^2O'^2)$, sestitangenti alla $C_6(O^3O'^3)$ di diramazione.

All'uopo consideriamo la serie g_{12}^8 segnata sulla $C_6(O^3O'^3)$ di diramazione dal sistema lineare completo delle $C_4(O^2O'^2)$. La nominata g_{12}^8 si può bisecare in $2^{2p} = 2^8 = 256$ modi distinti, dando luogo a 256 serie lineari g_6, metà della g_{12}^8 data. Delle 256 serie g_6 così costruite, 255 sono delle g_6^2; ed ognuna di esse dà luogo ad un sistema continuo ∞^2 di $C_4(O^2O'^2)$, sestitangenti alla $C_6(O^3O'^3)$ nei gruppi della g_6^2 considerata. Oltre alle g_6^2 anzidette, vi è poi la g_6^3, segnata sulla $C_6(O^3O'^3)$ dal sistema lineare ∞^3 delle coniche per O, O': anche il doppio di tale g_6^3 è evidentemente contenuto nella g_{12}^8 segnata sulla $C_6(O^3O'^3)$ dalle $C_4(O^2O'^2)$ (1). Le quartiche $C_4(O^2O'^2)$ che toccano la $C_6(O^3O'^3)$ nei gruppi di questa g_6^3 si riducono a $C_2(OO')$ contate due volte.

---

(1) L'intima ragione per cui nella bisezione della g_{12}^8, segnata sulla $C_6(O^3O'^3)$ dalle $C_4(O^2O'^2)$, si presentano 255 g_6^2 ed *una* g_6^3 si può illustrare così: presi ad arbitrio due punti A e B sulla $C_6(O^3O'^3)$, le $C_4(O^2O'^2)$ che toccano

Ora un sistema continuo ∞^1 di $C_4(O^2O'^2)$ sestitangenti, può rappresentare sulla superficie F un sistema di curve irriducibili, ovvero un sistema di curve spezzate. Questa seconda ipotesi si verifica se le C_4 del sistema toccano la C_6 di diramazione in sei punti, situati sopra una cubica passante doppiamente per O e semplicemente per O' (cfr. il criterio, enunciato a pag. 409). Vediamo di contare quanti siano i sistemi continui $\{C_4\}$, che rappresentano curve spezzate.

Sia C_4 la curva generica di un sistema $\{C_4\}$, che rappresenti curve spezzate, e $C_3(O^2O')$ la cubica passante per i sei punti di contatto con la C_6 di diramazione. Consideriamo il fascio, ottenuto combinando linearmente la C_6 e la C_3 contata due volte: esso è costituito da $C_6(O^3O'^3)$, nonitangenti alla C_6 di diramazione, nei punti semplici in cui essa è incontrata dalla C_3. Imponendo alle curve del fascio di passare per un punto della C_4, si ottiene una curva spezzata nella C_4 ed in una conica per O, O', tritangente alla C_6 di diramazione. Se questa conica si riducesse ad una retta per O contata due volte, la C_3 dovrebbe spezzarsi in tale retta ed in una residua conica per O, O': la C_4 dovrebbe allora toccare la C_6 nei punti di una conica per O, O' e quindi ridursi essa stessa ad una conica contata due volte. Il sistema $\{C_4\}$ sarebbe allora il sistema ∞^3 delle $C_2(O\,O')$, contate due volte. Se invece la conica anzidetta non si riduce ad una retta per O, contata due volte, essa non può variare al variare della C_4 nel sistema $\{C_4\}$: essa è una delle 120 coniche per O, O' che risultano dalla bisezione della serie canonica g_6^3 della $C_6(O^3O'^3)$. Indicando con A, B, C i punti di contatto della conica nominata, i punti di contatto delle curve di $\{C_4\}$ descrivono la g_6^2 segnata sulla $C_6(O^3O'^3)$ dalle $C_3(O^2O'ABC)$. Vediamo dunque che un sistema continuo $\{C_4\}$, rappresentativo di un sistema di curve spezzate, si costruisce

---

la C_6 in A e B segnano su di essa una $g_{2p}^p \equiv g_8^4$, che è *il doppio della* g_4^1 *speciale*, segnata sulla C_6 dal fascio di coniche $C_2(OO'AB)$. Ne segue che la bisezione della g_8^4 porta a 255 quaterne di punti ed alla nominata g_4^1. (Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. III, pag. 393).

così: si prenda ad arbitrio una delle 120 $C_2(O\,O')$, tritangenti alla $C_6(O^3O'^3)$ e siano A, B, C i suoi punti di contatto; si consideri la g_6^2 segnata sulla $C_6(O^3O'^3)$ dalle $C_3(O^2O'ABC)$; esiste una $C_4(O^2O'^2)$ tangente alla C_6 in una sestina generica di questa g_6^2; invero, prendendo una generica $C_3(O^2O'ABC)$, ed imponendo alle curve del fascio $C_6 + \lambda C_3^2$ di passare per un punto della C_2, si stacca la C_2 e rimane una $C_4(O^2O'^2)$ del tipo voluto.

Riassumendo possiamo quindi dire: *Dei* 256 *sistemi continui di* $C_4(O^2O'^2)$, *sestitangenti alla* $C_6(O^3O'^3)$ *di diramazione,* 120 *rappresentano sistemi* ∞^2 *di curve spezzate,* 135 *sistemi* ∞^2 *di curve irriducibili, mentre uno è il sistema* ∞^2 *delle* $C_4(O^2O'^2)$, *che si riducono ad una* $C_2(O\,O')$ *contata due volte.*

Ciò posto, consideriamo un sistema continuo $\{C_4\}$, ∞^2, di $C_4(O^2O'^2)$ sestitangenti, il quale sia rappresentativo di un sistema di curve spezzate. Al nominato sistema corrispondono sulla superficie F, che si rappresenta sul piano doppio, due sistemi razionali coniugati di curve di genere uno: vogliamo dimostrare che ognuno di tali sistemi è una *rete di curve ellittiche di grado due.* Invero per valutare il grado di uno dei nostri sistemi osserviamo che due quartiche di $\{C_3\}$ si segano in due punti variabili: ciò risulta contando le intersezioni di due C_4 infinitamente vicine di $\{C_4\}$, tolte le intersezioni assorbite in O ed O' e le intersezioni che corrispondono ai sei contatti. Il grado dei due sistemi è dunque due; e si tratta poi di due sistemi *lineari* giacchè la serie caratteristica segata su di una curva dalle altre curve del sistema è una serie *razionale* di coppie di punti su di una curva ellittica, e quindi una g_2^1.

Supponiamo ora di imporre alle curve di $\{C_4\}$ un punto doppio. Poichè, sulla F, alle curve di $\{C_4\}$ rispondono delle curve spezzate in due parti coniugate, quando la curva generica di $\{C_4\}$ tende, entro $\{C_4\}$, ad una curva dotata di punto doppio, ciascuna delle parti coniugate tende ad una curva dotata di punto doppio. Le reti di curve ellittiche dianzi costruite contengono dunque ∞^1 curva dotate di punto doppio, le quali rispondono alle ∞^1 curve del sistema $\{C_4\}$, che possiedono un punto doppio. Se imponiamo

un ulteriore punto doppio alle curve di $\{C_4\}$ che già possiedono un punto doppio, otteniamo un numero finito di curve di C_4, spezzate in due coniche tritangenti. Ad una di tali curve risponde, sulla F, una coppia di curve coniugate ognuna delle quali è spezzata in due parti, che si intersecano in due punti. Si vede così riapparire la fig. 1 e riesce dimostrata l'*esistenza di coppie di coniche tritangenti, le quali danno luogo ad un accoppiamento di prima specie.*

Partiamo invece da un sistema continuo $\{C_4\}$, ∞^2, di $C_4(O^2O'^2)$ sestitangenti, il quale sia rappresentativo di un sistema di curve irriducibili autoconiugate. Imponendo alle curve di $\{C_4\}$ un punto doppio si ottengono ∞^1 curve *razionali* di $\{C_4\}$, alle quali rispondono sulla F delle curve, spezzate in due parti coniugate λ', λ''; ma qui la curva $\lambda' + \lambda''$, come limite di una curva irriducibile, deve risultare connessa, e quindi non possono λ' e λ'' avere ciascuna un punto doppio nei due punti coniugati, A', A'', che rispondono al punto doppio A della C_4; bensì tanto λ' quanto λ'' passano per entrambi i punti A', A''; in guisa che la $\lambda' + \lambda''$ rimane virtualmente una curva ellittica. È poi facile dimostrare che la curva λ' (e così la λ'') varia sulla superficie F, descrivendo un *fascio lineare di curve razionali.* Si consideri invero il sistema ∞^1 delle curve di $\{C_4\}$, che hanno un punto doppio variabile: due curve infinitamente vicine del sistema si segano in 16 punti, 8 dei quai sono assorbiti da O, O', 6 dai contatti con la curva di diramazione e due sono infinitamente vicini al punto doppio; ora, nessuna di tali intersezioni risponde ad intersezioni delle curve obbiettive λ'. Pertanto la λ' (e così la coniugata λ'') varia in un sistema di grado zero, e quindi in un *fascio* (1).

Riprendiamo ora il sistema continuo ∞^1 delle curve di $\{C_4\}$,

(1) Si tratta di un fascio *lineare*, giacchè le curve λ' (o λ'') si possono porre in corrispondenza biunivoca con i gruppi di una serie lineare. Invero si consideri il sistema di gruppi di sei punti, determinato sulla $C_6(O^3O'^3)$ dai contatti delle $C_4(O^2O'^2)$, immagini delle λ'. Il sistema gode della proprietà involutoria, giacchè per un punto di F passa una sola λ'. Ma una γ_6^1 contenuta in una g_6^2 è certamente una serie lineare g_6^1.

che possiedono un punto doppio variabile, ed imponiamo alle curve di questo sistema un ulteriore punto doppio. Otterremo un numero finito di C_4 spezzate in due coniche tritangenti. Se la C_4 generica del nominato sistema ∞^1 tende ad una $\{C_4\}$ con punto doppio, tanto la λ' quanto la coniugata λ'', che rispondono all'anzidetta C_4, tendono ad acquistare un punto doppio, ossia a spezzarsi in due componenti di genere zero, che si incontrano in un punto. Ed è evidente che, al limite, ciascuna delle componenti di λ' intersecherà in un punto una determinata delle componenti di λ''. Riappare così la fig. 2 e riesce dimostrata l'*esistenza di coppie di coniche tritangenti, le quali danno luogo ad un accoppiamento di seconda specie.*

Dimostrata nel modo che precede, l'esistenza di coppie di coniche tritangenti, che diano luogo ad accoppiamenti di prima e di seconda specie, bisognerebbe dimostrare l'esistenza di una *terna* di coniche tritangenti tale che due coniche di essa diano luogo ad un accoppiamento di prima specie, mentre la terza dia luogo ad un accoppiamento di seconda specie con le prime due: invero, per quanto abbiamo mostrato precedentemente, l'esistenza di una terna del tipo anzidetto ci permetterebbe la costruzione di un sistema continuo ∞^2 di $C_6(O^3O'^3)$ rappresentativo di una rete omaloidica.

Ma, per il nostro scopo immediato ci possiamo dispensare dalla dimostrazione della possibilità di costruire una simile terna. Infatti noi ci proponiamo di dimostrare la razionalità del piano doppio, che ha per curva di diramazione la più generale sestica, dotata di due punti tripli infinitamente vicini, o ciò che è lo stesso, la razionalità di una superficie F, che si possa rappresentare su di un piano doppio del tipo anzidetto. Ora lo studio dei sistemi continui di quartiche $C_4(O^2O'^2)$ sestitangenti, che abbiamo svolto allo scopo di dimostrare l'esistenza di coppie di coniche tritangenti, che realizzano accoppiamenti di prima o di seconda specie, ci ha permesso di stabilire l'esistenza sulla superficie F di reti di grado due di curve ellittiche, ovvero di fasci lineari di curve razionali. Ma una superficie F che possieda una rete di

grado due di curve ellittiche è rappresentabile sul piano doppio con quartica di diramazione ed è così generalmente razionale. Similmente l'esistenza di un fascio lineare di curve razionali, permette (cfr. Lib. II cap. I) di rappresentare la superficie F su di un piano doppio del primo tipo, che è razionale. Concludendo, possiamo dunque enunciare: *Il piano doppio, che ha per curva di diramazione la più generale sestica dotata di due punti tripli infinitamente vicini, è razionale.*

NOTA I. - I ragionamenti che precedono sono riferiti al piano doppio la cui curva di diramazione sia una *generica sestica* C_6 con due punti tripli, infinitamente vicini, O, O'. Un esame, che qui ci dispensiamo dallo svolgere conduce a riconoscere che le nostre conclusioni valgono sempre per *ogni* C_6 con le dette singolarità, che non possieda altri punti singolari (e sia così di genere $p = 4$): invero conservandosi il genere della C_6, si hanno sempre le medesime serie *distinte* provenienti dalla bisezione di quella *non speciale* segata sopra di essa dalle $C_4(O^2\,O'^2)$ [1] e ciò porta a distinguere i sistemi rapresentativi di curve spezzate ed i sistemi rappresentativi di curve irriducibili, ecc., ecc.

Rimangono da considerare i casi in cui la C_6, pur essendo caso particolare di una C_6 con due punti tripli infinitamente vicini O, O', acquisti delle singolarità, che ne abbassano il genere. Se il punto O diviene di molteplicità effettiva superiore a tre, il piano doppio ha come curva di diramazione una sestica con punto quadruplo o un suo caso particolare. Si ricade dunque in un piano doppio del primo tipo, che è razionale salvo il caso in cui la sestica di diramazione non si riduca a *sei rette uscenti da O*. Se invece i punti O, O' rimangono tripli, occorre esaminare il caso in cui esistano altri punti multipli per la curva di diramazione. E poichè una $C_6(O^3O'^3)$ non può possedere ulteriormente un punto più che triplo senza spezzarsi in parti multiple, dobbiamo esaminare solamente il caso di una $C_6(O^3O'^3A^2)$ o di una

(1) Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. III, pag. 394.

$C_6(O^3O'^3A^3)$. Eseguendo la trasformazione quadratica che ha i punti fondamentali O, O', A, otteniamo, in entrambi i casi, una quartica di diramazione C_4, passante semplicemente per due punti infinitamente vicini O, O'. Si ricade dunque in un piano doppio del secondo tipo, che risulta razionale, purchè la $C_4(O\,O')$ non si spezzi in quattro rette per un punto, una delle quali sia la $O\,O'$. In quest'ultima ipotesi la quartica proviene da una $C_3(O^3O'^3A^3)$ spezzata in *tre coniche, che si toccano in O ed in A*, avendo in O come tangente comune la $O\,O'$.

Riassumendo possiamo dire: *Un piano doppio con sestica di diramazione C_6, dotata di due punti tripli infinitamente vicini O, O', è razionale, salvo i casi in cui la $C_6(O^3O'^3)$ si riduca*:

a) a sei rette distinte uscenti da O, ovvero

b) a tre coniche, appartenenti ad un fascio di coniche bitangenti.

Nel caso *a*) il piano doppio rappresenta *una rigata di genere due.* Nel caso *b*) invece, il piano doppio rappresenta *una superficie con un fascio ellittico di curve razionali,* ed è riconducibile ad *un cono cubico ellittico*: le curve razionali del fascio sono rappresentate dalle coniche del fascio a cui appartengono le componenti della sestica di diramazione.

NOTA II. - Abbiamo affermato che la serie canonica g_6^3, segnata su di una C_6 con due punti tripli infinitamente vicini O, O' dalle $C_2(O\,O')$, si può bisecare in 120 modi, dando luogo a 120 coniche $C_2(O\,O')$, in generale distinte ed irriducibili tritangenti alla $C_6(O^3O'^3)$.

Ora effettivamente sopra un ente di genere 4, *generico,* la bisezione della g_6^3 dà luogo a 120 terne, che contate due volte appartengono alla g_6^3 canonica. Ma, nel caso nostro, l'ente di genere 4 di cui si tratta, è *particolare,* nel senso che sopra la curvâ canonica, che ad esso corrisponde, vi è una g_3^1 autoresidua rispetto alla serie canonica, il che porta che la nominata curva stia su di un *cono quadrico*; e poichè fra i piani tritangenti ad una sestica canonica, giacente su di un cono quadrico, vi è la serie ∞^1 dei piani tangenti al cono, si potrebbe dubitare a priori che questa

serie ∞^1 di piani assorbisse un certo numero di soluzioni del problema di bisezione, ossia che la bisezione della g_6^3 segnata su di una $C_6(O^3O'^3)$ (con O, O' infinitamente vicini) dalle $C_2(O\,O')$ portasse ad un certo numero < 120 di coniche tritangenti ed alla serie ∞^1 delle coniche (tritangenti) costituite da una retta per O, contata doppiamente.

In fatto ciò non avviene: cioè la serie anzidetta ha un'*equivalenza numerativa nulla* ed è solamente una soluzione *estranea* del problema di bisezione. Il fatto si può chiarire per via trascendente: invero, dal punto di vista trascendente (1), i gruppi semicanonici, cioè i gruppi il cui doppio appartiene alla serie canonica, si ottengono dalle equazioni:

$$\theta_{\lambda\mu}(X) = 0$$

dove $\theta_{\lambda\mu}$ è una serie θ a caratteristica dispari; e per $p = 4$ le caratteristiche dispari sono precisamente 120. Invece l'esistenza di una g_3^1 autoresidua rispetto alla serie canonica — come ha rilevato esplicitamente H. WEBER (2) — porta all'annullars insieme ai suoi argomenti di una θ a caratteristica *pari*: cioè ad una circostanza del tutto diversa dalla precedente.

Dal punto di vista geometrico H. G. ZEUTHEN (3) ha mostrato direttamente come un piano tangente ad un cono quadrico non sia mai limite di un piano tritangente ad una sestica canonica, giacente su una quadrica che tende al cono anzidetto. Invero se un piano α, tritangente ad una sestica canonica K_6 giacente su una quadrica F_2, tendesse, al tendere della F_2 ad un cono, ad un piano tangente al cono, la conica sezione della F_2 con α degene-

(1) Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. IV, Lib. VI, Cap. III, pag. 211.

(2) Cfr. H. WEBER: *Über gewisse in der Theorie der Abel-schen Funktionen auftretende Ausnahmefälle*; « Mat. Ann. », Bd. 13, 1877. Le funzioni abeliane, collegate ad una sestica canonica, giacente su di un cono quadrico, sono state studiate altresì da F. SCHOTTKY: cfr. *Über specielle Abel-sche Funktionen vierten Ranges*; « Crelle's Journal », Bd. 103, 1887.

(3) Cfr. H. ZEUTHEN: *Erklärung eines « Paradox » in der abzählenden Geometrie;* « Archiv für Math. und Phys. », Bd. 27, 1918.

rerebbe come inviluppo in una generatrice doppia dotata di *due* punti di diramazione. Ma la nominata conica aveva *tre* tangenti in comune con la K_6; e si cade così in un assurdo.

Sempre dal punto di vista geometrico, ci si può rendere ragione della proprietà che ci interessa anche nel modo che qui accenniamo (1). Tra gli enti di genere 4 contenenti una g_3^1 autoresidua rispetto alla serie canonica, vi sono gli enti iperellittici sui quali vi sono 10 g_3^1 autoresidue, che si ottengono sommando alla g_2^1 i 10 punti doppi della g_2^1 stessa. Ora, quando un ente contenente una g_3^1 autoresidua tende per continuità ad un ente iperellittico, un gruppo semicanonico (non appartenente alla g_3^1) va in un gruppo semicanonico, costituito da tre punti doppi della g_2^1; ed inversamente si riesce a dimostrare che un gruppo arbitrario costituito da tre punti doppi della g_2^1 è sempre limite di un gruppo semicanonico (non appartenente alla g_3^1). Ma le terne di punti doppi della g_2^1 sono 120; e pertanto sono 120 anche i gruppi semicanonici isolati sull'ente generico, contenente una g_3^1 autoresidua. Pertanto gli ∞^1 gruppi costituiti dal doppio di un gruppo della g_3^1 non assorbono nessuna soluzione del problema di bisezione.

27. Condizioni di razionalità di un piano doppio.

Sappiamo che un piano doppio razionale possiede una curva di diramazione d'ordine $2n$, che si può ridurre cremonianamente (fatte le convenzioni del n. 25):

a) ad una curva d'ordine $2n$ con un punto O, $(2n-2)$-*plo*; o

b) ad una quartica; o

c) ad una sestica con due punti tripli O, O', infinitamente vicini.

Se i punti multipli della curva di diramazione vengono considerati con le loro molteplicità *virtuali* (cfr. le convenzioni fatte al n. 25), le curve del tipo *a*), *b*), *c*) possono oppure no possedere

(1) Cfr. F. Conforto: *Sopra la bisezione della serie canonica su di una curva di genere quattro*; « Rend. del Sem. Mat. della R. Univ. di Roma », 1938.

delle aggiunte d'ordine $2n-3$; ma in ogni caso le nominate curve non possiedono, per $i>1$, le successive aggiunte d'ordine $2n-3i$ e d'indice i: non esistono cioè, per $i>1$, delle curve d'ordine $2n-3i$ che passino $h-i$ volte per ogni punto di molteplicità *virtuale* h della curva di diramazione. Tenuto conto del teorema sull'invarianza delle successive aggiunte ad una curva data [1], ne segue:

La curva di diramazione di un piano doppio razionale (o, eccezionalmente, rappresentativo di una rigata irrazionale), supposta d'ordine $2n$, *è priva delle aggiunte degli ordini* $2n-6$, $2n-9$, ..., *e, rispettivamente, di indici* 2, 3, ... (le molteplicità dei punti multipli della curva essendo quelle *virtuali*, secondo i criteri del n. 25).

Ora, è importante riconoscere che la condizione *necessaria* della mancanza delle sucessive aggiunte d'ordine $2n-3i$ e d'indice i (per $i>1$) è oltresì *sufficiente* perchè una curva sia di diramazione per un piano doppio razionale. Invero dimostreremo il seguente teorema:

Se una curva piana d'ordine pari, irriducibile o riducibile in parti semplici, che si assume come curva di diramazione di un piano doppio, è dotata di punti multipli di molteplicità virtuali $s_1, s_2, \ldots, s_h$ *e non possiede, per* $i>1$, *successive aggiunte d'ordine* $2n-3i$ *e d'indice* i, *essa (è ovvero) si può trasformare cremonianamente in una curva d'ordine* $2n$ *con un punto* $(2n-2)$*-plo, o in una quartica od in una sestica con due punti tripli infinitamente vicini.*

Pertanto la nominata curva è la curva di diramazione di un *piano doppio razionale* (o riferibile a rigata).

Per dimostrare il teorema, che abbiamo in vista, assunto $2n$ come ordine della curva di diramazione, divideremo la discussione

---

[1] Questo teorema, come sarebbe facile verificare, vale anche quando i punti multipli della curva di diramazione del piano doppio si considerino con le loro molteplicità virtuali, anzichè effettive .

in tre parti, in relazione alla forma del numero n rispetto al modulo 3. Avremo da considerare tre casi:

$$A)\ 2n = 6m, \qquad B)\ 2n = 6m + 2, \qquad C)\ 2n = 6m + 4.$$

Ipotesi A). - La mancanza di curve (d'ordine zero) aggiunte d'indice $2m$ alla C_{6m} porta che la C_{6m} abbia (almeno) un punto di molteplicità virtuale $\geq 2m + 1$. Il punto O della C_{6m} la cui molteplicità (virtuale) è massima, avrà dunque una certa molteplicità virtuale:

$a)$ $2m + 2s + 1$, o $a')$ $2m + 2s + 2$, ove $s \geq 0$;

e, nella prima ipotesi, la C_{6m} possiederà secondo le nostre convenzioni (cfr. pag. 403) due punti $(2m + 2s + 1)$-*pli* O, O', infinitamente vicini.

Il massimo valore, che s può assumere, è $s = 2m - 1$. In quest'ipotesi non può verificarsi il caso $a)$, perchè da una $C_{6m}(O^{6m-1}O'^{6m-1})$ la retta $O\,O'$ si staccherebbe più di una volta. Se invece $s = 2m - 1$ e si verifica il caso $a')$, *la* C_{6m} *è composta da* $6m$ *rette uscenti dal punto* O, ed è così un caso particolare dei nostri tipi.

Sia ora $s = 2m - 2$. Il caso $a)$ dà luogo ad una $C_{6m}(O^{6m-3}O'^{6m-3})$; se la retta $O\,O'$ non si stacca dalla C_{6m}, deve essere $6m \geq 12m - 6$, cioè $m = 1$: *la* C_{6m} *è pertanto una sestica con due punti tripli infinitamente vicini*; se al contrario la retta $O\,O'$ si stacca dalla C_{6m}, viene $m > 1$, e quindi la retta $O\,O'$ si stacca ancora, e la C_{6m} avrebbe così delle componenti multiple. Invece il caso $a')$ porta ad *una curva d'ordine* $6m$, *con un punto di molteplicità virtuale* $6m - 2$, che è appunto uno dei nostri tipi.

Poniamoci, dopo ciò, nell'ipotesi $s < 2m - 2$. Poichè $2m - s - 1 > 1$, per ipotesi non esistono le aggiunte alla C_{6m} d'ordine $6m - 3(2m - s - 1) = 3s + 3$ e d'indice $2m - s - 1$. Distinguiamo i due casi $a)$ ed $a')$.

$a)$ Per effetto dei due punti $(2m + 2s + 1)$-*pli* infinitamente vicini, O, O', ogni aggiunta d'ordine $3s+3$ e d'indice $2m-s-1$, C_{3s+3}, avrebbe quei punti come $(3s + 2)$-*pli* e si ridurrebbe così alla retta $O\,O'$ da contarsi $3s + 1$ volte, e ad una conica tangente

alla $O\,O'$ in O; per escludere l'esistenza della C_{3s+3} è necessario dunque che la C_{6m} abbia qualche punto di molteplicità virtuale $\geq 2m-s$, fuori della retta $O\,O'$. Allora però l'ordine della C_{6m} si può abbassare, eseguendo sulla C_{6m} la trasformazione quadratica, che ha i punti fondamentali in O, O', ed uno dei nominati punti di molteplicità virtuale $2m-s+l$ $(l \geq 0)$ [1]. Ben inteso se $2m-s+l$ è dispari, alla trasformata propria della C_{6m} si aggiunge una retta, trasformata dell'intorno del punto A, di molteplicità virtuale $2m-s+l$; altrettanto dicasi se $2m-s+l$ è pari ma il punto A è di molteplicità effettiva $2m-s+l+1$; in ogni caso l'ordine della nuova curva di diramazione è minore di $6m$.

a') Se il punto O della C_{6m} ha la molteplicità virtuale $2m+2s+2$, ogni C_{3s+3}, aggiunta d'indice $2m-s-1$ alla C_{6m}, si ridurrebbe ad un gruppo di $3s+3$ rette per O. Per escludere l'esistenza di una C_{3s+3} occorre dunque ammettere che la C_{6m} sia dotata di (almeno) $3s+4$ punti di molteplicità virtuale $2m-s$, fra i quali non si trovino due punti allineati con O. Del resto potrebbe darsi che due dei detti punti venissero sostituiti da un punto $(2m-s+1)$-*plo*, oppure tre da un punto $(2m-s+2)$-*plo*; per contemplare tutti i casi ammetteremo l'esistenza di t punti di molteplicità virtuale $2m-s+l_i-1 (i=1, 2, \ldots, t)$, dove $l_i \geq 1$, $\sum_1^t l_i = 3s+4$ e mai due punti sono allineati con O. Se uno (almeno) dei nominati t punti multipli è un punto proprio A_1 di molteplicità virtuale $2m-s+l_1-1$ (con $l_1 \geq 1$), l'ordine della C_{6m} si può certo abbassare con una trasformazione quadratica. Invero, se $2m-s+l_1-1$ è pari si eseguisca sulla C_{6m} la trasformazione quadratica che ha i punti fondamentali in O, A_1

[1] Si noti che il punto di molteplicità virtuale $2m-s+l$ potrebbe cadere *infinitamente vicino ad* O'; allora la C_{6m} si abbassa d'ordine mediante una rete omaloidica di coniche che si osculano in O, avendo ivi la tangente OO'. Inoltre il lettore escluderà facilmente il dubbio che il punto $(2m-s+l)$-*plo* cada infinitamente vicino ad un punto multiplo della C_{6m}, giacente sulla retta OO': caso in cui verrebbe a mancare la trasformazione quadratica riduttrice.

ed in un punto A_2 di molteplicità virtuale $2m-s+l_2-1$ ($l_2 \geq 1$), che sia un punto proprio, ovvero infinitamente vicino ad O o ad A_1; se invece $2m-s+l_1-1$ sia dispari, A_1 sarà di molteplicità effettiva $2m-s+l_1-1$ ed infinitamente vicino ad esso vi sarà un punto A'_1, parimenti di molteplicità effettiva $2m-s+l_1-1$: basterà allora eseguire la trasformazione quadratica, che ha i punti fondamentali in O, A_1, A'_1.

Se ora nessuno dei t punti multipli, di molteplicità $\geq 2m-s$, è un punto proprio, la trasformazione quadratica riduttrice esiste ancora, se vi siano due punti A_1 ed A_2 tali che O, A_1 ed A_2 si succedano sopra un ramo lineare (non di flesso). Se invece la nominata ipotesi non si verifica, (e ciò succede ad es. se tutti i t punti multipli anzidetti si succedono su di un ramo cuspidale. che ha origine in O), si ha un *caso di eccezione*, che discutiamo minutamente più avanti: il risultato della nostra discussione porterà ad abbassare l'ordine della C_{6m} con una *successione* di trasformazioni quadratiche, che si compongono in una trasformazione di De Jonquières.

Ipotesi B. - Se $m=0$, la C_{6m+2} si riduce ad una *conica*, che è una delle curve appartenenti ai nostri tipi. Escluso questo caso, si potrà supporre $m \geq 1$ e quindi $2m \geq 2$. La mancanza di coniche aggiunte d'indice $2m$ alla C_{6m+2} porta allora che la C_{6m+2} abbia dei punti di molteplicità virtuale non inferiore a $2m+1$.

Se la più alta molteplicità virtuale dei punti di C_{6m+2} è appunto $2m+1$, si avranno 6 punti $(2m+1)$-*pli*, a coppie infinitamente vicini, e non appartenenti ad una conica. Allora adoperando le quintiche (componenti una rete omaloidica), che hanno come doppi i nominati 6 punti, si riesce a trasformare la C_{6m+2} in una curva d'ordine $6m-2$.

Se vi sono punti della C_{6m+2} di molteplicità più elevata, possiamo supporre che il punto O, di più alta molteplicità per la C_{6m+2}, abbia la molteplicità virtuale:

b) $2m+2s+1$ con $s \geq 1$, o b') $2m+2s+2$ con $s \geq 0$.

Il massimo valore che può assumere s è $s=2m$. Questa ipotesi non può verificarsi nel caso b), giacchè la retta OO' farebbe parte

più di una volta della C_{6m+2}. Invece, nel caso b') essa porta che *la* C_{6m+2} *si riduca a* $6m+2$ *rette distinte, uscenti dal punto* O, cioè ad uno dei nostri tipi.

Sia invece $s = 2m-1$. Nel caso b) la C_{6m+2} diviene una $C_{6m+2}(O^{6m-1}O'^{6m-1})$ con O, O' infinitamente vicini: la retta OO' si stacca più di una volta e questo caso non può dunque verificarsi. Il caso b') porta invece ad una $C_{6m+2}(O^{6m})$ che è appunto uno dei nostri tipi. Possiamo dunque supporre senz'altro $s < 2m-1$.

Distinguiamo dopo ciò i due casi b) e b').

b) Per ipotesi si hanno due punti $(2m+2s+1)$-*pli*, O, O', infinitamente vicini. Poichè $2m-s>1$, non esistono le aggiunte d'ordine $6m+2-3(2m-s) = 3s+2$ e d'indice $2m-s$. Una C_{3s+2}, aggiunta d'indice $2m-s$ alla C_{6m+2}, dovrebbe avere i punti O, O' come $(3s+1)$-*pli* e quindi spezzarsi nella retta OO', da contarsi $3s$ volte ed in una conica, passante per O, O'. Ad escludere l'esistenza di una tale C_{3s+2} occorre dunque che la C_{6m+2} abbia qualche punto di molteplicità virtuale $(2m-s+1)$ (o superiore) fuori della retta OO'. Allora le coniche, passanti pei due punti $(2m+2s+1)$-*pli* infinitamente vicini e per uno dei punti nominati fuori della OO', permettono di abbassare l'ordine della C_{6m+2}.

b') Se O è di molteplicità virtuale $2m+2s+2$ per la C_{6m+2} (con $s \geq 0$), una C_{3s+2}, aggiunta d'indice $2m-s$, dovrebbe essere composta di $3s+2$ rette per O. Ad escludere l'esistenza di una siffatta C_{3s+2} bisogna dunque ammettere che la C_{6m+2} sia dotata di (almeno) $3s+3$ punti di molteplicità virtuale $2m-s+1$, fra i quali non si trovino due allineati con O. Ben inteso, l dei detti punti $(2m-s+1)$-*pli* possono venir sostituiti da un punto di molteplicità virtuale $2m-s+l$; in guisa che, nell'ipotesi più generale, la C_{6m+2} possiederà t punti multipli $A_1, A_2, \ldots, A_t$, di molteplicità $2m-s+l_i (i = 1, 2, \ldots, t)$, ove $l_i \geq 1$, $\sum_1^t l_i = 3s+3$ e mai due dei nominati punti siano allineati con O.

Supponiamo ora che i punti multipli $A_1, A_2, \ldots, A_t$ *non siano*

tutti infinitamente vicini ad O o per lo meno, se quest'ipotesi si verifichi, che due di essi A_1, A_2 si succedano su di un ramo lineare di curvatura non nulla, uscente da O. Con questa ammissione, la C_{6m+2} si può trasformare in una curva d'ordine più basso mediante la trasformazione quadratica, che ha i punti fondamentali in O ed in due, A_1, A_2, dei nominati punti $(2m - s + l_i)$-*pli*; occorre solamente scegliere questi due ultimi punti infinitamente vicini, quando s sia pari ed $l_i = 1$; e ciò è certo possibile.

Il caso d'eccezione, in cui la trasformazione quadratica riduttrice venga a mancare, sarà trattato più avanti.

IPOTESI *C*). - Se $m = 0$, la C_{6m+4} si riduce ad una *quartica generale*, cioè ad uno dei nostri tipi. Sia dunque $m \geq 1$. La mancanza di rette aggiunte d'indice $2m+1$ alla C_{6m+4}, porta che la C_{6m+4} abbia almeno tre punti di molteplicità virtuale $2m + 2$, non allineati, oppure punti di molteplicità superiore. Se la C_{6m+4} ha tre punti di molteplicità virtuale $2m + 2$, il suo ordine si abbassa di due unità con una trasformazione quadratica che ha tre punti $(2m + 2)$-*pli* come fondamentali. Supposto invece che la C_{6m+4} abbia un punto O di molteplicità superiore, conviene distinguere i due casi, in cui O abbia la molteplicità virtuale:

c) $2m + 2s + 1$, con $s > 1$, o *c'*) $2m + 2s + 2$, con $s > 0$.

Il massimo valore che può assumere s è $s = 2m + 1$. In questa ipotesi non può verificarsi il caso *c*), perchè dalla C_{6m+4} si staccherebbe più di una volta la retta $O\,O'$. Invece nel caso *c'*) la C_{6m+4} si riduce a $6m + 4$ rette distinte, uscenti da O.

Sia invece $s = 2m$. Nel caso *c*) si avrebbe una $C_{6m+4}(O^{6m+1}\,O'^{6m+1})$, dalla quale la retta $O\,O'$ si stacca certo più di una volta. Nel caso *c'*) si ha al contrario una $C_{6m+4}(O^{6m+2})$, che è uno dei nostri tipi.

Sia dunque $s < 2m$ e distinguiamo i due casi *c*) e *c'*).

c) Poichè $2m - s + 1 > 1$, mancano per ipotesi le aggiunte alla C_{6m+4} d'ordine $6m + 4 - 3(2m - s + 1) = 3s + 1$ e d'indice $2m - s + 1$. Ciò porta, ragionando come nei casi analoghi, l'esistenza di punti di molteplicità virtuale (almeno) $2m - s + 2$ per la C_{6m+4}, non giacenti sulla OO'; sicchè l'ordine della C_{6m+4} potrà sempre abbassarsi con una trasformazione quadratica.

c') La mancanza di C_{3s+1}, aggiunte d'indice $2m-s+1$, che dovrebbero ridursi a $3s+1$ rette uscenti da O, porta l'esistenza di $3s+2$ punti di molteplicità virtuale $2m-s+2$, i quali saranno a coppie infinitamente vicini, se s è dispari; i nominati punti di molteplicità virtuale $2m-s+2$ possono naturalmente venir sostituiti da t punti multipli $A_1, A_2, \ldots, A_t$, di molteplicità virtuale $2m-s+l_i+1$, con $l_i \geq 1$ e $\sum_1^t l_i = 3s+2$; e mai due degli A_i possono essere allineati con O. Se fra i punti, di cui ora è stata dimostrata l'esistenza ve ne sono due, A_1 ed A_2, che insieme ad O possano essere assunti come punti base di una rete di coniche *irriducibili*, l'ordine della C_{6m+4} può essere abbassato dalla trasformazione quadratica, che ha i punti fondamentali O, A_1, A_2 (con l'avvertenza che, se s è dispari ed $l_1 = 1$, si deve assumere A_2 infinitamente vicino ad A_1).

Se invece non esistono due punti A_1 ed A_2 che soddisfacciano alla nominata condizione, tutti i punti $A_1, A_2, \ldots, A_t$ sono infinitamente vicini ad O e non si susseguono su rami lineari di curvatura non nulla, uscenti da O. La trasformazione quadratica riduttrice viene a mancare e si ha un caso d'eccezione, che passiamo a discutere nelle considerazioni, che seguono.

Da quanto precede risulta che, *in generale*, una curva piana d'ordine pari $2n$, che sia la curva di diramazione di un piano doppio e manchi, per $i > 1$, di successive aggiunte d'ordine $2n-3i$ e d'indice i, è una curva d'ordine $2n$ con punto $(2n-2)$-*plo*, o una quartica, o una sestica con due punti tripli infinitamente vicini, ovvero si può abbassare d'ordine con una conveniente trasformazione cremoniana. Per estendere questa conclusione a *tutte* le curve che soddisfano alle anzidette ipotesi, occorre solamente esaminare il caso d'eccezione, nel quale i punti multipli, che, in generale, permettono l'abbassamento dell'ordine della curva, acquistino posizioni particolari tali, che venga a mancare la trasformazione cremoniana riduttrice.

Per i nostri scopi, senza ormai fermarci ad un'inutile distinzione di casi, basterà dimostrare che se *una curva piana d'ordine*

$2n (n \geq 3)$, *che si assume come curva di diramazione di un piano doppio, ha un punto, O, di molteplicità virtuale massima* $2h$, *e manca, per* $i > 1$, *di aggiunte d'ordine* $2n - 3i$ *e d'indice* i, *essa è una curva d'ordine* $2n$ *con punto* $(2n-2)$*-plo, ovvero si può abbassare d'ordine con una trasformazione di* De Jonquières, *di vertice O.*

Consideriamo una $C_{2n}(O^{2h})(n \geq 3)$, priva delle ultime aggiunte d'ordine $2n - 3\left[\frac{2n}{3}\right]$ e di indice $\left[\frac{2n}{3}\right]$ (1). Per le nominate aggiunte il punto O dovrebbe essere almeno semplice, e quindi si ha la disuguaglianza:

$$2h - \left[\frac{2n}{3}\right] \geq 1;$$

ma, essendo:

$$2n - 3\left[\frac{2n}{3}\right] = 0, \quad \text{o} \quad 1, \quad \text{o} \quad 2,$$

viene:

$$\left[\frac{2n}{3}\right] = \frac{2n}{3}, \quad \text{o} \quad \frac{2n-1}{3}, \quad \text{o} \quad \frac{2n-2}{3},$$

e, tenuto conto dell'ultima disuguaglianza, tutte e tre queste ipotesi portano che:

$$n < 3h.$$

Si vede dunque che *la mancanza delle ultime aggiunte, d'indice* $\left[\frac{2n}{3}\right]$, *porta alla disuguaglianza*:

$$n < 3h.$$

Ciò posto, consideriamo nuovamente la $C_{2n}(O^{2h})$ e le aggiunte ad essa, d'ordine $2n - 3(n-h) = 3h - n$ e d'indice $n - h$. Per queste aggiunte il punto O dovrebbe essere di molteplicità $2h - (n-h)$; ossia $(3h-n)$*-plo*. Ne segue che le aggiunte d'ordine $3h - n$, C_{3h-n}, d'indice $n - h$, dovrebbero ridursi a $3h - n$ rette, uscenti da O. Ora le aggiunte C_{3h-n} o sono le

(1) Col simbolo $\left[\frac{2n}{3}\right]$ indichiamo il massimo intero contenuto nella frazione $2n/3$.

prime, e quindi d'ordine $2n-3$, o non esistono. Nella prima ipotesi è $3h-n=2n-3$, ossia $h=n-1$: *la* $C_{2n}(O^{2h})$ è quindi *una curva d'ordine* $2n$ *con punto* $(2n-2)$*-plo*. Nella seconda ipotesi è $h \leq n-2$ e devono esistere altri punti multipli della C_{2n}, che rendano impossibile l'esistenza della C_{3h-n}. Più precisamente, devono esistere $3h-n+1$ punti di molteplicità virtuale $n-h+1$, fra i quali non si trovino due punti allineati con O. Tuttavia vi possono essere anche dei punti di molteplicità superiore, un punto di molteplicità $n-h+l$ $(l \geq 1)$ potendo sostituire l punti $(n-h+1)$*-pli*. Per trattare contemporaneamente tutti i casi possibili, ammetteremo che ci siano t *punti multipli* $A_1, A_2, \ldots, A_t$ (fra i quali non vi siano due allineati con O), *di molteplicità* $n-h+l_i$ $(l_i \geq 1)(i=1, 2, \ldots, t)$, ove

$$\sum_1^t l_i = 3h-n+1.$$

Osserviamo inoltre che *i punti multipli* $A_1, A_2, \ldots, A_t$ *non possono in alcun caso essere tutti prossimi ad* O. Se invero $A_1, A_2, \ldots, A_t$ fossero tutti prossimi ad O, rammentando (cfr. n. 25 pag. 404) che per le aggiunte alla C_{2n} d'ordine $2n-6$ e d'indice 2, i punti prossimi ad un punto proprio, presi con le loro molteplicità virtuali, non danno mai luogo a scaricamento, si avrebbe:

$$2h-2 \geq \sum_1^t (n-h+l_i-2) = t(n-h-2) + \sum_1^t l_i.$$

Ma è:

$$\sum_1^t l_i = 3h-n+1,$$

e quindi:

$$(n-h-2)(t-1)+1 \leq 0;$$

e questa disuguaglianza è assurda, giacchè $h \leq n-2$,

Come si è visto precedentemente, l'esistenza dei punti multipli $A_1, A_2, \ldots, A_t$ permette, in generale, di abbassare l'ordine della C_{2n} con una trasformazione quadratica. Il caso d'eccezione, che qui vogliamo discutere, si presenta quando $A_1, A_2 \ldots, A_t$ siano tutti infinitamente vicini ad O (senza succedersi su rami lineari di curvatura non nulla). Mostreremo che anche in questo

caso l'ordine della C_{2n} si può abbassare: occorre però una *successione* di trasformazioni quadratiche, che si compongono in una trasformazione di DE JONQUIÈRES.

All'uopo siano A_1, A_2, ..., A_s $(s < t)$ i punti multipli della C_{2n} che sono di molteplicità virtuale $> n - h$, e risultano prossimi ad O. In generale essi si succederanno su uno o più rami cuspidali. Noi scioglieremo anzitutto i detti rami cuspidali, mediante una successione di s trasformazioni quadratiche T_1, T_2, ..., T_s, che alzano, in generale, l'ordine della C_{2n}: la trasformazione T_1 ha come punti fondamentali O, A_1 ed un punto generico B_1 del piano; la trasformazione T_2 ha come punti fondamentali il punto (trasformato di) O (per la T_1), il punto (trasformato di) A_2 (per la T_1) ed un punto generico B_2 del piano; ecc., ecc.

Esaminiamo più da vicino come operi la trasformazione T_1.

La trasformazione T_1 trasforma le rette per O nelle rette per un punto O', mutando l'intorno di O nell'intorno di O'. Se quindi la molteplicità *effettiva* di O per la C_{2n} è $2h$, la T_1 muterà la C_{2n} in una $C_{2n'}$, per la quale la molteplicità effettiva di O' sarà $2h'$, con $2n - 2h = 2n' - 2h'$; se invece la molteplicità effettiva di O è $2h + 1$, la molteplicità effettiva di O' sarà $2h' + 1$, con $2n - 2h - 1 = 2n' - 2h' - 1$. Dunque, in tutti i casi, la molteplicità virtuale di O' per la $C_{2n'}$ è $2h'$, essendo $n - h = n' - h'$. Inoltre se O è di molteplicità effettiva $2h$ per la C_{2n}, la retta OB_1 si muterà per la T_1 in un punto $(2n-2h)$-*plo* per la $C_{2n'}$, prossimo ad O' e con parabole osculatrici tutte distinte, che risulterà in direzione affatto generale rispetto ai trasformati per la T_1 di A_2, ..., A_s e degli altri (eventuali) punti multipli di molteplicità virtuale $\leq n - h$, che la C_{2n} possiede nell'intorno di O. Se invece il punto O è $(2h + 1)$-*plo* per la C_{2n}, il punto trasformato della retta OB_1 è per la $C_{2n'}$ di molteplicità effettiva $2n - 2h - 1$ e di molteplicità virtuale $2n - 2h$. Infine, tenuto conto che l'intorno di A_1 può far parte della C_{2n}, osserviamo che l'ordine $2n'$ della $C_{2n'}$ soddisfa alle disuguaglianze:

$$2n' \leq 4n - 2h - n + h - l_1 + 1 = 3n - h - l_1 + 1$$

$$2n' \geq 3n - h - l_1,$$

ossia, poichè $l_1 \geq 1$, dalla prima disuguaglianza:

$$2n' \leq 2n + (n - h) = 3n - h,$$

ovvero, poichè, come si vede immediatamente, $l_1 \leq n - h$, dalla seconda disuguaglianza:

$$2n' \geq 2n.$$

Riassumendo, possiamo dunque dire: *la trasformazione quadratica T_1 muta la C_{2n}, dotata di un punto O di molteplicità virtuale massima $2h$, in una $C_{2n'}$, dotata di un punto O' di molteplicità virtuale massima $2h'$, ove $2n' \leq 2n + (n - h)$, $2n' \geq 2n$, ed $n - h = n' - h'$; prossimi ad O' cadono: un punto A' di molteplicità virtuale $2n' - 2h'$ à parabole osculatrici tutte distinte, gli $s - 1$ punti* (trasformati di) $A_2, A_3, \ldots, A_s$, *di molteplicità virtuale $> n' - h'$ ed eventualmente altri punti di molteplicità virtuale $\leq n' - h'$; ed il punto A' cade in direzione generica rispetto agli altri punti multipli della $C_{2n'}$.*

Analogamente, eseguendo sulla $C_{2n'}$ la trasformazione T_2, si otterrà una $C_{2n''}$, con un punto O'' di molteplicità virtuale massima $2h''$, ove $2n'' \leq 2n' + (n' - h') \leq 2n + 2(n - h)$, $2n'' \geq 2n' \geq 2n$ ed $n - h = n'' - h''$. La $C_{2n''}$ avrà due punti distinti A', A'', di molteplicità virtuale $2n'' - 2h''$, prossimi ad O'' e con parabole osculatrici tutte distinte. Inoltre prossimi ad O'' vi saranno $s - 2$ punti (trasformati di) $A_3, A_4, \ldots, A_s$, di molteplicità virtuale $> n'' - h''$, nonchè eventualmente altri punti di molteplicità virtuale $\leq n'' - h''$; ed i punti A' ed A'' saranno in direzione generica rispetto agli altri punti multipli della $C_{2n''}$.

Finalmente, dopo le trasformazioni quadratiche $T_1, T_2, \ldots, T_s$, la C_{2n} diviene *una $C_{2n^{(s)}}$ con un punto di molteplicità virtuale massima $2h^{(s)}$, al quale sono prossimi, in direzioni distinte e con parabole osculatrici tutte distinte, s punti $A', A'', \ldots, A^{(s)}$ di molteplicità virtuale $2(n^{(s)} - h^{(s)}) = 2(n - h)$; ed, oltre ai punti $A', A'', \ldots, A^{(s)}$, nell'intorno di prim'ordine di $O^{(s)}$ vi possono essere solamente punti di molteplicità virtuale $\leq n - h$. Quanto all'ordine della $C_{2n^{(s)}}$, esso soddisfa alle disuguaglianze*:

$$2n^{(s)} \leq 2n + s(n - h), \quad 2n^{(s)} \geq 2n.$$

A questo punto osserviamo che la $C_{2n^{(s)}}$, come la C_{2n} di partenza, manca delle ultime aggiunte d'indice $\left[\frac{2n^{(s)}}{3}\right]$ e delle aggiunte d'indice $n - h = n^{(s)} - h^{(s)}$. Infatti se esistessero delle aggiunte alla $C_{2n^{(s)}}$, d'ordine $2n^{(s)} - 3\left[\frac{2n^{(s)}}{3}\right]$ e d'indice $\left[\frac{2n^{(s)}}{3}\right]$, dovrebbero esistere per la C_{2n} delle aggiunte d'ordine $2n - 3\left[\frac{2n^{(s)}}{3}\right]$ e d'indice $\left[\frac{2n^{(s)}}{3}\right]$; e ciò è impossibile, poichè, essendo $2n^{(s)} \geq 2n$, è altresì $\left[\frac{2n^{(s)}}{3}\right] \geq \left[\frac{2n}{3}\right]$ e quindi le nominate aggiunte alla C_{2n}, d'ordine $2n - 3\left[\frac{2n^{(s)}}{3}\right]$, dovrebbero essere le ultime o di ordine minore di zero. Nè può la $C_{2n^{(s)}}$ possedere delle aggiunte d'indice $n^{(s)} - h^{(s)}$, poichè allora la C_{2n} possiederebbe delle aggiunte d'indice $n - h$.

Ne viene di conseguenza che la $C_{2n^{(s)}}$, come la C_{2n}, deve possedere (almeno) un punto di molteplicità virtuale $> n^{(s)} - h^{(s)}$, non prossimo ad $O^{(s)}$, non potendo *tutti* i punti di molteplicità virtuale $> n^{(s)} - h^{(s)}$ essere prossimi ad $O^{(s)}$. Sia B' tale punto. Esso è necessariamente un punto proprio, e non può cadere su nessuna delle rette $O^{(s)}A', O^{(s)}A'', \ldots, O^{(s)}A^{(s)}$; invero il punto B' non può essere successivo ad $A', A'', \ldots, A^{(s)}$, giacchè questi punti sono a parabole osculatrici distinte; nè potrebbe il punto B' essere successivo ad un punto prossimo ad $O^{(s)}$ e di molteplicità virtuale $\leq n^{(s)} - h^{(s)}$, giacchè (cfr. n. 25, pag. 404) le molteplicità virtuali dei punti successivi su di un ramo qualsiasi costituiscono una successione mai crescente. Eseguiamo allora la trasformazione quadratica T'', che ha i punti fondamentali $O^{(s)}$, A', B'. Essa muta la $C_{2n^{(s)}}$ in una $C_{2n^{(s+1)}}$ che ha un punto $O^{(s+1)}$ di molteplicità virtuale massima $2h^{(s+1)}$, con $n^{(s+1)} - h^{(s+1)} = n - h$. Nell'intorno di primo ordine di $O^{(s+1)}$ cadono ora solamente $s - 1$ punti di molteplicità virtuale $2(n - h)$, tutti distinti: i trasformati di $A'', A''', \ldots, A^{(s)}$. Occorre però osservare che la trasformazione T' genera un nuovo punto, C', della $C_{2n^{(s+1)}}$ il quale è prossimo ad $O^{(s+1)}$ e proviene dalla trasformazione della retta $O^{(s)}B'$. Un

esame un po' minuto, che non presenta tuttavia alcuna difficoltà concettuale, mostra che la molteplicità virtuale del punto C' è sempre $\leq n - h$, escluso un *caso d'eccezione,* che si presenta quando si verifichino le circostanze seguenti:

a) il punto $O^{(s)}$ abbia la molteplicità effettiva $2h^{(s)}$ per la $C_{2n}{}^{(s)}$;

b) $n^{(s)} - h^{(s)}$ sia un numero pari;

c) il punto B' abbia la molteplicità effettiva $n^{(s)} - h^{(s)} + 1$ ed, infinitamente vicino ad esso, sulla retta $O^{(s)}B'$, vi sia un punto della stessa molteplicità.

Come è immediato, il verificarsi delle tre circostanze *a*), *b*), *c*) porta che la retta $O^{(s)}B'$ faccia parte della $C_{2n}{}^{(s)}$: la $C_{2n}{}^{(s)}$ è dunque spezzata nella retta $O^{(s)}B'$ ed in una curva, K, d'ordine $2n^{(s)} - 1$, la quale ha la molteplicità effettiva $2h^{(s)} - 1$ in $O^{(s)}$, e le molteplicità effettive $n^{(s)} - h^{(s)}$ nei punti B', B''. La $C_{2n}{}^{(s+1)}$ trasformata della $C_{2n}{}^{(s)}$ per la T', consta della trasformata della K, alla quale si aggiunge la retta $O^{(s+1)}C'$, quale trasformata dell'intorno di B'; e risulta così che per la $C_{2n}{}^{(s+1)}$ esistono sulla retta $O^{(s+1)}C'$ due punti successivi, cioè C' e C'' (trasformato di B'') che hanno molteplicità virtuale ed effettiva $n^{(s)} - h^{(s)} + 1 = n - h + 1$. Importa però osservare che nessun punto multiplo della $C_{2n}{}^{(s+1)}$ di molteplicità virtuale $n - h + 1$ può essere successivo a C'': invero un tale punto dovrebbe provenire da un punto successivo a B'' e di molteplicità effettiva $n - h + 1$ per la K; e ciò è impossibile, essendo il punto B'' di molteplicità $n - h$ per la K.

Inoltre nessun punto multiplo della $C_{2n}{}^{(s+1)}$ può cadere sulla retta $O^{(s+1)}C'$, all'infuori dei punti $O^{(s+1)}$, C', C'': infatti la K non possiede punti multipli nell'intorno di B', all'infuori di B''.

Riepilogando possiamo quindi dire: *la* $C_{2n}{}^{(s+1)}$ *possiede nell'intorno di* $O^{(s+1)}$ *gli* $s - 1$ *punti di molteplicità virtuale* $2(n-h)$, *tutti distinti ed a parabole osculatrici distinte, trasformati di* A'', A''', ..., $A^{(s)}$; *ed inoltre altri punti, distinti dai precedenti, e che sono tutti di molteplicità virtuale* $\leq (n - h)$, *tranne al più uno,* C', *che può essere di molteplicità virtuale dispari* $n - h + 1$; *se il punto* C' *esiste, ad esso è infinitamente vicino, sulla retta*

$O^{(s+1)}C'$, *un altro punto* C'', *parimenti di molteplicità virtuale* $n-h+1$: *ma non vi è alcun punto multiplo della* $C_{2n}{}^{(s+1)}$ *che succeda a* C'' *e sia di molteplicità virtuale* $> n-h$.

L'ordine $2n^{(s+1)}$ della $C_{2n}{}^{(s+1)}$, indicando con $n-h+l'$ $(l' \geq 1)$ la molteplicità virtuale di B', e tenuto conto che l'intorno di B' può entrare a far parte della $C_{2n}{}^{(s+1)}$, soddisfa alla disuguaglianza:

$$2n^{(s+1)} \leq 4n^{(s)} - 2h^{(s)} - 2(n^{(s)} - h^{(s)}) - n + h - l' + 1 =$$
$$= 2n^{(s)} - (n-h) - l' + 1,$$

ossia, poichè $l' \geq 1$,

$$2n^{(s+1)} \leq 2n^{(s)} - (n-h).$$

Se ora $2n^{(s+1)} < 2n$, siamo riusciti ad abbassare l'ordine della C_{2n}, da cui abbiamo preso le mosse. Se invece $2n^{(s+1)} \geq 2n$, la $C_{2n}{}^{(s+1)}$ come la $C_{2n}{}^{(s)}$, manca delle ultime aggiunte d'indice $\left[\frac{2n^{(s+1)}}{3}\right]$ e delle aggiunte d'indice $n^{(s+1)} - h^{(s+1)} = n-h$. Pertanto essa deve avere qualche punto di molteplicità virtuale maggiore di $n-h$, non prossimo ad $O^{(s+1)}$. Sia B'' uno di tali punti. I tre punti $O^{(s+1)}$, A'', B'' possono certo essere fondamentali per una trasformazione quadratica T''': invero il punto B'' può esser preso in modo che esso non giaccia su alcuna retta congiungente $O^{(s+1)}$ con i punti ad esso prossimi e di molteplicità $> n-h$; nè potrebbe B'' essere successivo al punto C''', di cui abbiamo parlato a proposito della trasformazione T'; nè infine potrebbe B'' essere successivo ad un punto, prossimo ad $O^{(s+1)}$, e di molteplicità virtuale $\leq n-h$. Ne viene che B'' è un punto proprio e che non è degenere la trasformazione T'', che ha i punti fondamentali $O^{(s+1)}$, A'', B''.

La trasformazione quadratica T'' muta la $C_{2n}{}^{(s+1)}$ in una $C_{2n}{}^{(s+2)}$ con un punto $O^{(s+2)}$ di molteplicità virtuale massima $2h^{(s+2)}$, ove $n^{(s+2)} - h^{(s+2)} = n-h$; e l'ordine della $C_{2n}{}^{(s+2)}$ soddisfa alla disuguaglianza:

$$2n^{(s+2)} \leq 2n^{(s+1)} - (n-h) \leq 2n^{(s)} - 2(n-h).$$

È chiaro oramai come si prosegua, eseguendo le successive trasformazioni quadratiche T'''', ..., $T^{(s)}$, analoghe alla T'' ed alla

T''. Se con queste trasformazioni quadratiche non si perviene mai ad una curva d'ordine $< 2n$, dopo le $2s$ trasformazioni T_1, T_2, ..., T_s, T', T'', ..., $T^{(s)}$, si perviene ad una $C_{2n}{}^{(2s)}$ con un punto $O^{(2s)}$ di molteplicità virtuale massima $2h^{(2s)}$, ove $n^{(2s)} - h^{(2s)} = n - h$, prossimo al quale non vi è *alcun* punto di molteplicità virtuale $> n - h + 1$. L'ordine della $C_{2n}{}^{(2s)}$ soddisfa alla disuguaglianza:

$$2n^{(2s)} \leq 2n^{(s)} - s(n - h).$$

Ma è:

$$2n^{(s)} \leq 2n + s(n - h),$$

e quindi

$$2n^{(2s)} \leq 2n + s(n - h) - s(n - h) = 2n.$$

Se dunque la $C_{2n}{}^{(2s)}$ non è d'ordine minore di $2n$, essa è una C_{2n}, come la curva di partenza; per conseguenza sarà anche $h^{(2s)} = h$. Ma, come si è già detto, questa nuova curva $C_{2n}(O^{2h})$, non possiede alcun punto di molteplicità virtuale $> n - h + 1$, prossimo ad O. Tuttavia la $C_{2n}(O^{2h})$, mancando delle ultime aggiunte e delle aggiunte d'indice $n - h$, deve possedere dei punti di molteplicità virtuale $> n - h$, *non prossimi ad* O. Ora, se prossimo ad O non cade alcun punto di molteplicità $> n - h$, esisteranno dei punti di molteplicità virtuale $> n - h$, che cadranno *a distanza finita da* O; e in questo caso la C_{2n} si abbassa d'ordine, come è stato indicato precedentemente.

Se invece nella prossimità di O cadono dei punti di molteplicità virtuale $n - h + 1$, come C', D', ..., la trasformazione quadratica riduttrice potrebbe a priori riuscire degenere, quando i punti di molteplicità virtuale $> n - h$ e non prossimi ad O stessero su rami cuspidali ovvero su rami di seconda classe (di flesso) uscenti dai punti C', D', ... Ma l'una e l'altra eventualità si possono escludere. Invero, da quanto precede, risulta che i punti C', D' ... sono prossimi ad O in direzioni distinte. Inoltre se esiste un punto come C', si è visto che la retta $O\,C'$ fa parte della C_{2n} e che su tale retta ed infinitamente vicino a C' si trova un punto C'', pure esso di molteplicità virtuale $n - h + 1$ ma ulteriori punti di molteplicità virtuale $> n - h$ non possono cadere nè sulla retta $O\,C'$, nè essere successivi a C''; ed analoga-

mente si argomenta per i punti analoghi a C', come D', ... Ora noi sappamo che, oltre ai punti C', D', ..., che sono di molteplicità virtuale $n - h + 1$ e sono prossimi ad O, vi sono certamente dei punti di molteplicità $> n - h$ e *non giacenti su alcuna delle rette* $O\,C'$, $O\,D'$ .... Questi nuovi punti sono dunque distinti dai punti C'', D'', ... e non possono nemmeno essere successivi a C'', D'', ...: essi cadono dunque a distanza finita da O. Esiste allora certamente una trasformazione quadratica, che ha il punto O (ed eventualmente uno dei punti C', D', ...) come fondamentale, la quale permette di abbassare l'ordine della C_{2n}.

Concludendo, possiamo enunciare: *se una curva piana d'ordine* $2n$ $(n \geq 3)$, *che si assume come curva di diramazione di un piano doppio, ha un punto,* O, *di molteplicità virtuale massima* $2h (h \leq n - 2)$, *e manca, per* $i > 1$, *di aggiunte d'ordine* $2n - 3i$ *e d'indice* i, *essa si può sempre abbassare d'ordine con una successione di trasformazioni quadratiche, che si compongono in una trasformazione di* De Jonquières, *di vertice* O.

Tenuto conto dei risultati già ottenuti, possiamo dunque concludere la nostra discussione, enunciando:

Una curva C_{2n} *che si assuma come curva di diramazione di un piano doppio e per* $i > 1$ *sia priva di aggiunte d'ordine* $2n-3i$ *e d'indice* i, *può sempre venir trasformata cremonianamente*:

a) *in una curva d'ordine* $2n$ *con un punto di molteplicità virtuale* $2n - 2$ (in particolare in $2n$ rette uscenti da un punto) ovvero

b) *in una quartica,* ovvero

c) *in una sestica con due punti tripli infinitamente vicini.*

Nota. - Nel Lib. I, cap. VIII abbiamo presentato tre tipi di superficie razionali del quart'ordine con punto doppio, O, a sezioni piane di genere tre: cioè la superficie $F_4^{(1)}$ con tacnodo e le superficie $F_4^{(2)}$ ed $F_4^{(3)}$ di M. Noether. Ed abbiamo ivi preannunciato come l'esame dei tipi di piani doppi che si ottengono proiettando una F_4 da un suo punto doppio, O, porti ad esclu-

dere altri tipi di superficie razionali, oltre i tre nominati. Mostriamo qui rapidamente come si pervenga a questa conclusione.

Sia F_4 una superficie del quart'ordine, dotata di un punto doppio O. Possiamo escludere che le sezioni piane per il punto doppio siano di genere zero [1]. Escluso questo caso, le sezioni piane per O possono essere di genere $p = 1$ o 2. Se $p = 1$, la proiezione della F_4 da O porta ad un *piano doppio con quartica di diramazione,* che è generalmente razionale. Se invece $p = 2$, la proiezione della F_4 da O porta ad un piano doppio con sestica di diramazione, che in generale non è razionale. Ma se la F_4 è razionale, la sestica di diramazione, per il criterio sopra stabilito, non dovrà possedere aggiunte d'ordine zero e d'indice due. Ne viene che la C_6 di diramazione deve possedere un punto di molteplicità virtuale massima, ≥ 3. Se la massima molteplicità virtuale per la C_6 è 3, la C_6 di diramazione è una *sestica con due punti tripli infinitamente vicini.* Se invece la massima molteplicità virtuale è 4, la C_6 di diramazione è una *sestica con un punto quadruplo* (o in particolare quintuplo). E non vi sono altri casi possibili, perchè l'ipotesi che la massima molteplicità virtuale sia 5 porterebbe ad una sestica con due punti quintupli infinitamente vicini, dalla quale la retta congiungente i due punti quintupli si staccherebbe quattro volte, mentre l'ipotesi di un punto sestuplo condurrebbe ad un piano doppio con sestica di diramazione spezzata in sei rette per un punto, che non è razionale.

Dunque vediamo che *i tipi di superficie del quart'ordine razionali, dotate di punto doppio O possono essere a priori solo tre; cioè le superficie F_4 che proiettate da O danno origine ad un piano doppio, la cui curva di diramazione sia:*

a) una quartica,

b) una sestica con punto quadruplo,

c) una sestica con due punti tripli infinitamente vicini.

---

[1] Ciò porterebbe al caso del punto triplo, escludendosi il caso dell'osculo (cfr. Lib. I, cap. VIII, n. 42).

Ora i tre tipi *a*), *b*), *c*) si realizzano tutti e corrispondono ordinatamente ai tipi da noi trovati in modo diretto. Invero, abbiamo già veduto (cfr. Lib. I, cap. VIII, n. 43) che proiettando una F_4 da un suo tacnodo O, si ottiene un piano doppio con quartica di diramazione. Invece la $F_4^{(2)}$, proiettata dal suo punto doppio O, dà un piano doppio con sestica di diramazione, dotata di un punto quadruplo: infatti il fascio di sezioni piane (razionali) della $F_4^{(2)}$, passanti per O (cfr. Lib. I, cap. VIII, n. 44), si muta sul piano doppio in un fascio di rette, che intersecano la C_6 di diramazione in due punti variabili. Infine la proiezione della $F_4^{(3)}$ dal suo punto doppio O, dà il piano doppio dotato di sestica di diramazione con due punti tripli infinitamente vicini. Infatti (cfr. Lib. I, cap. VIII, n. 45) sulla $F_4^{(3)}$ esiste un fascio di sezioni piane, spezzate in una retta p ed in una cubica, che ha in O un flesso e come tangente di flesso la p; da O escono tre tangenti ad ognuna delle nominate cubiche (esclusa la p): corrispondentemente la p sega il piano doppio in un punto P per cui passa un fascio di rette che intersecano la C_6 di diramazione in tre punti variabili. La C_6 possiede dunque un primo punto triplo P. Per dimostrare che la C_6 possiede un secondo punto triplo, P', infinitamente vicino a P, rammentiamo che gli ∞^3 coni del second'ordine, che hanno il loro vertice in O e toccano la $F_4^{(3)}$ lungo la p, segano la $F_4^{(3)}$ secondo sestiche gobbe K_6 di genere due che hanno due punti doppi successivi: il punto O ed il punto O' infinitamente vicino ad O sulla p; inoltre esiste un piano α per p, che contiene gli elementi del second'ordine, uscenti da O, di tutte le $\infty^3 K_6$ nominate. Le sestiche gobbe K_6 vengono proiettate tutte da O in coniche doppie, passanti per P e per un punto infinitamente vicino a P, sulla retta, traccia del piano α. Ma le K_6 sono di genere due, e le coniche doppie, che corrispondono ad esse sul piano doppio devono perciò intersecare la C_6 di diramazione in sei punti variabili. Ne deriva che il punto P' è triplo per la C_6 di diramazione.

Dunque, *proiettando la* $F_4^{(3)}$ *di* NOETHER *dal suo punto doppio si ottiene un piano doppio, dotato di una sestica di diramazione con due punti tripli infinitamente vicini.*

NOTIZIA STORICA. - Il criterio della mancanza delle successive aggiunte alla curva di diramazione è stato riconosciuto come condizione necessaria e sufficiente perchè il piano doppio sia razionale da G. CASTELNUOVO e F. ENRIQUES (1). La mancanza di codeste aggiunte viene ivi dedotta dalla non esistenza di curve pluricanoniche sopra la superficie, che si traduce nell'annullamento dei plurigeneri (2). Così i detti autori sono riusciti a dimostrare che la classificazione dei piani doppi razionali data da M. NOETHER (3) era completa: ciò che, fino allora, poteva solo induttivamente ritenersi dalla non sicuramente completa classificazione delle involuzioni piane del second'ordine di E. BERTINI (cfr. Lib. II, cap. V, n. 23), adoperando le trasformazioni [1, 2] di R. DE PAOLIS (4). La riduzione delle curve di diramazione dei piani doppi ai tipi di CLEBSCH-NOETHER viene qui esposta accuratamente, completandola in un punto (5), che si riferisce ad un caso d'eccezione segnalato in una nota critica, da noi più volte citata, di C. SEGRE.

---

(1) Cfr. G. CASTELNUOVO e F. ENRIQUES: *Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi*; « Rend. Circ. Mat. di Palermo », T. XIV, 1900.

(2) Cfr. F. ENRIQUES: *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, raccolte da L. CAMPEDELLI, Cedam (Padova), 1932, pag. 438.

(3) Cfr. M. NOETHER: *Über die ein-zweideutigen Ebenentransformationen*; « Sitzungsberichoe der physik., medicin. Soc. zu Erlangen », 1878.

(4) Cfr. R. DE PAOLIS: *Le trasformazioni piane doppie*, « Atti R. Acc. Lincei » s. 3ª, Vol. I, 1877; *La trasformazione piana doppia di secondo ordine e la sua applicazione alla geometria non euclidea*, « Atti R. Acc. Lincei », s. 3ª, Vol. II, 1878; *La trasformazione piana doppia di terzo ordine primo genere e la sua applicazione alle curve di quarto ordine*, « Atti R. Acc. Lincei », s. 3ª, Vol. II, 1878.

(5) Cfr. F. CONFORTO: *Sui piani doppi razionali*; « Rend. Sem. Mat. della R. Univ. di Roma », 1938.

Capitolo VI

ALTRE CLASSI NOTEVOLI DI SUPERFICIE RAZIONALI. COMPLEMENTI

28. Le superficie a sezioni iperellittiche.

Il teorema sulle superficie a sezioni piane ellittiche (cfr. Lib. II, cap. III, n. 11), si estende alle superficie a sezioni iperellittiche (di genere $p \geq 2$):

Le superficie a sezioni piane iperellittiche (di genere $p \geq 2$) sono razionali o riferibili a rigate.

Di questo teorema che, come diremo, F. Enriques dedusse dalla razionalità delle involuzioni piane nel 1893, si può dare ora (con G. Pompilj) una dimostrazione più elementare, che dipende dal criterio di razionalità dei piani doppi, stabilito nel precedente capitolo. Accenniamo rapidamente allo sviluppo di essa.

Sia F una superficie dello spazio ordinario, d'ordine n, a sezioni piane iperellittiche di genere $p \geq 2$; rappresentiamola su di un piano doppio π.

All'uopo consideriamo la superficie Φ, immagine delle ∞^2 coppie di punti coniugati nelle g_2^1 di un fascio $|C|$ di sezioni piane di F. Ad ognuna delle nominate g_2^1 corrisponde su Φ una curva razionale $\overline{C}$; pertanto la superficie Φ possiede un fascio lineare $|\overline{C}|$ di curve razionali; ne segue, per il teorema di Noether (cfr. Lib. II, cap. I, nn. 1-3), che la Φ è razionale e si può rappresentare birazionalmente sopra un piano in modo che le $\overline{C}$ abbiano per immagini le rette per un punto O. Ora la Φ è in corrispondenza [1, 2] con la superficie F e quindi quest'ultima è rappresentabile su di un piano doppio π con curva di diramazione D_{2h}, d'ordine $2h$, passante per il punto O con la moltepli-

cità $2h - 2p - 2$; e la curva D_{2h} possiederà inoltre altri punti multipli Q_i, la cui molteplicità (che possiamo supporre pari) indichiamo con r_i.

Alle sezioni piane di F corrispondono curve C_k d'ordine k e genere p, passanti per O con molteplicità $k - n$ e per i punti Q_i con molteplicità s_i; in particolare le sezioni piane del fascio $|C|$ con cui si è rappresentata la F sul piano doppio hanno per immagine le C_k spezzate in una retta per O contata due volte ed in una residua C_{k-2}, spezzata nelle n curve irriducibili e distinte $L_1, L_2, \ldots, L_n$, immagini dei punti base di $|C|$.

La curva C_{k-2} individua un sistema lineare, $|C_{k-2}|$, di curve passanti $k - n - 2$ volte per O e s_i volte per i punti Q_i. Ora è facile mostrare che la generica C_{k-2}, di $|C_{k-2}|$ incontra le successive aggiunte d'ordine $2h - 3t$ $(t > 1)$ della D_{2h} di diramazione in un numero virtuale di punti, che è negativo. Invero un semplice computo aritmetico stabilisce che il numero delle intersezioni di una C_{k-2} con una aggiunta alla D_{2h}, d'ordine $2h - 3t$ e d'indice t, è non superiore ad:

$$r_t = (2 - t)(2k - 4 - \Sigma s_i) - tn - 2(k + 2p + pn + \\ + n - 2 - pk - hn + \Sigma \frac{1}{2} s_i r_i - \Sigma s_i).$$

Ma è $k + 2p + pn + n - 2 - pk - hn + \Sigma \frac{1}{2} s_i r_i - \Sigma s_i = 0$ [1]; e quindi:

$$r_t = (2 - t)(2k - 4 - \Sigma s_i) - tn.$$

Questa relazione, per $t = 0$, dà il numero delle intersezioni di una curva di $|C_{k-2}|$ con la curva di diramazione D_{2h}. Ora

---

[1] Questa relazione si dimostra così. Le C_k, immagini delle sezioni piane della F, sono tangenti ovunque la incontrano alla D_{2h} e possiedono un certo numero di punti doppi variabili, che si calcola subito; esse formano un sistema continuo ∞^3 tale che una curva di questo sistema sia segata dalla sua infinitamente vicina in n punti, tolte le intersezioni che cadono nei punti base, nei punti di contatto con la curva di diramazione e, a coppie, infinitamente vicine ai punti doppi variabili. Questa proprietà conduce immediatamente a dimostrare la relazione che ci interessa

nessuna delle curve L_i che costituiscono la $\overline{C}_{k-2}$ fa parte della D_{2h}. Pertanto si avrà:

$$r_0 = 2(2k - 4 - \Sigma s_i) \geq 0$$

e quindi per $t > 1$

$$r_t < 0.$$

Dunque: le successive aggiunte alla D_{2h}, d'ordine $2h-3t\,(t>1)$, intersecano la curva generica di $|C_{k-2}|$ in un numero virtuale negativo di punti; quindi, se il sistema $|C_{k-2}|$ ha dimensione $r > 0$, sono possibili due casi: o le successive aggiunte alla curva di diramazione non esistono, o, se esistono, sono componenti fisse del sistema $|C_{k-2}|$.

A questo punto supponiamo che *la superficie F*, da cui abbiamo preso le mosse, *non sia rigata*. È allora facile dimostrare che:

a) la dimensione r del sistema $|C_{k-2}|$ *è maggiore di zero;*

b) e perciò ogni eventuale componente fissa del sistema $|C_{k-2}|$ *incontra la generica curva* C_{k-2} *in un numero (virtuale) non negativo di punti.*

Immaginiamo per un momento di aver dimostrato i due lemmi *a*) e *b*). Per quanto precede troviamo allora che non esistono le aggiunte d'ordine $2h - 3t$ e d'indice $t > 1$ alla curva di diramazione D_{2h} del piano doppio π. In conseguenza del criterio di CASTELNUOVO-ENRIQUES il piano doppio π sarà razionale ovvero rappresenterà una rigata irrazionale. Si può dunque concludere: *una superficie F a sezioni piane iperellittiche di genere* $p \geq 2$, *che non sia rigata è razionale ovvero trasformabile birazionalmente in una rigata irrazionale.* Il teorema cui noi vogliamo pervenire afferma però che *una superficie F a sezioni piane iperellittiche di genere* $p \geq 2$ *è rigata o razionale*; resta quindi da dimostrare che la seconda eventualità, cioè che la F, non rigata, sia riferibile a rigata irrazionale, è da escludere. A ciò arriveremo dimostrando un terzo lemma, che è il seguente:

c) se una superficie F a sezioni piane iperellittiche di genere $p \geq 2$ *è riferibile a una rigata irrazionale è essa stessa rigata.*

Per persuadersi della verità del teorema enunciato in princi-

pio, basta ormai dimostrare i tre lemmi *a*), *b*) e *c*). Accenniamo come si pervenga a ciò.

Incominciamo col presentare la seguente osservazione: *se la superficie F non è rigata, le curve L_i*, immagini dei punti base del fascio col quale si è rappresentata la F sul piano doppio, *incontrano le C_k*, immagini delle sezioni piane della F, *fuori dei punti base, almeno in due punti.*

Invero una L_i è immagine dell'intorno di un punto di F ed anche della curva coniugata a tale intorno. La curva nominata, non essendo la F rigata, non può essere una retta; e quindi sarà intersecata dalle sezioni piane della F in $m \geq 2$ punti. Anche la L_i incontrerà perciò le C_k in $m \geq 2$ punti.

Esprimendo questo fatto si ricava la disuguaglianza:

$$\Sigma \frac{1}{2} s_i^2 \leq kn - \frac{1}{2} n^2 - 2n .$$

Indichiamo ora con μ la dimensione del sistema $|C_{k-2}|$. Si avrà, con facili calcoli:

$$\mu \geq \left(nk - \frac{1}{2} n^2 - 2n - \Sigma \frac{1}{2} s_i^2 \right) + \left(k - 2 - \Sigma \frac{1}{2} s_i \right) + \frac{1}{2} n .$$

Tenuto conto dell'ultima disuguaglianza ottenuta, e di un'altra precedentemente indicata, si trova:

$$\mu \geq \frac{1}{2} n > 0 .$$

Rimane così dimostrato il lemma *a*).

Per dimostrare il lemma *b*) ritorniamo a considerare la curva $\overline{C}_{k-2}$, somma di tutte e *sole* le curve irriducibili L_i. Poichè la $\overline{C}_{k-2}$ fa parte del sistema $|C_{k-2}|$, le eventuali componenti fisse di questo sistema vanno ricercate tra le L_i. Ma un semplice calcolo mostra che le curve L_i intersecano le curve del sistema $|C_{k-2}|$ in un numero *non negativo* di punti. Resta così dimostrato il lemma *b*).

Per dimostrare il lemma *c*) ragioniamo così.

Se F è riferibile ad una rigata irrazionale, le generatrici di questa rigata formano, su F, un fascio irrazionale $\{\Gamma\}$ di curve

razionali. Un fascio $|C|$ di sezioni piane di F determina una trasformazione birazionale in sè, Ω, della superficie, considerando come corrispondente di un punto P quel punto Q, che è coniugato di P, nella g_2^1 della sezione piana del fascio $|C|$, che passa per P.

La trasformazione Ω muterà in sè il fascio $\{\Gamma\}$, poichè esso è unico; cioè se nella g_2^1 della sezione piana generica $\overline{C}$ di $|C|$ un punto di Γ ha come coniugato un punto di Γ', anche ogni altro punto P di Γ ha come coniugato un punto di Γ', nella g_2^1 della sezione piana del fascio $|C|$ la quale passa per P. Ma si può passare da un fascio $|C|$ ad un altro $|C'|$ con successivi fasci che abbiano, a due a due, una sezione piana in comune; possiamo quindi affermare che la trasformazione in sè di $\{\Gamma\}$ è indipendente dal fascio $|C|$ che si considera, cioè i coniugati di un generico punto P della superficie F nelle g_2^1 delle ∞^2 sezioni piane per esso stanno tutte su di una curva Γ' di $\{\Gamma\}$. La curva Γ' incontra dunque, fuori di P, le sezioni piane per P in un solo punto. Quindi o Γ' non passa per P, e allora è una *retta*, o passa per P ed allora è una conica, perchè P, essendo un generico punto di Γ, è semplice.

Quest'ultima eventualità è da escludersi perchè, se si avverasse, le curve di $\{\Gamma\}$ incontrerebbero una sezione piana generica $\overline{C}$ della superficie F, secondo coppie di punti coniugati, cioè segherebbero su $\overline{C}$ proprio la g_2^1, che è una serie razionale! La Γ' è quindi una retta e dunque la F è rigata.

29. I sistemi lineari di curve piane rappresentativi di superficie razionali, a sezioni iperellittiche.

Sia F una superficie a sezioni piane o iperpiane iperellittiche di genere $p \geq 2$. Se la F non è rigata, essa è razionale e si presenta la questione di determinare il suo sistema rappresentativo. Tale questione si trova risoluta già dal 1890 con lo studio che CASTELNUOVO ha fatto delle superficie F, nell'ipotesi che esse posseggano un sistema di curve aggiunte alle sezioni piane, che seghino su queste la serie canonica completa.

Sia $|C|$ il sistema lineare rappresentativo di una superficie F non rigata a sezioni piane (o iperpiane) iperellittiche di genere $p \geq 2$. Il sistema lineare $|C|$ sarà *semplice* e costituito da curve iperellittiche di genere $p \geq 2$. Il sistema aggiunto a $|C|$, $|C'|$, è certamente *riducibile*. Invero il sistema $|C'|$ sega su ogni curva irriducibile di $|C|$ la serie canonica, i cui gruppi di punti sono costituiti da $p-1$ coppie di punti, coniugati nella g_2^1 esistente su tale curva; perciò di una C' passante per un punto P del piano fa parte il luogo dei punti coniugati di P sulle curve C passanti per P; e questo luogo è certamente una curva effettiva e non un gruppo di punti, giacchè in questa ultima ipotesi le C passanti per un punto (generico) P del piano, passerebbero di conseguenza per altri punti, variabili con P, ed il sistema $|C|$ non sarebbe semplice. Il sistema $|C'|$, a prescindere eventualmente da qualche parte fissa che da esso si stacchi, risulta quindi composto con le curve di un fascio; ed anzi ogni aggiunta pura è costituita da $p-1$ curve d'un fascio, ciascuna delle quali sega in *due* punti coniugati le C. Poichè le C sono le immagini delle sezioni piane della F, ne segue che *sulla superficie F esiste un fascio lineare di coniche*, rappresentato dal fascio delle curve, con le quali è composto l'aggiunto puro di $|C|$.

Il fascio con il quale è composto l'aggiunto puro di $|C|$, essendo rappresentativo di un fascio di coniche della F, è costituito da curve razionali; e quindi (cfr. Lib. II, cap. II, n. 9) è trasformabile cremonianamente in un fascio di rette per un punto O. Dunque possiamo supporre a priori che la serie canonica su ogni curva di $|C|$ sia segata da gruppi di $p-1$ rette uscenti da un punto O. Ma allora le curve di C sono curve d'un certo ordine ν, passanti per O con la molteplicità $\nu-2$; e poichè una curva irriducibile d'ordine ν e dotata di un punto $(\nu-2)$-*plo* può avere al più altri punti doppi, possiamo enunciare:

Una superficie non rigata a sezioni iperellittiche di genere $p \geq 2$ può rappresentarsi sul piano in guisa che al sistema lineare delle sue sezioni piane (o iperpiane) risponda un sistema lineare semplice di curve d'un certo ordine ν, dotato di un punto base $(\nu-2)$-plo ed eventualmente di altri punti base doppi o semplici.

Inversamente è ovvio che un sistema del tipo indicato rappresenta una superficie a sezioni iperellittiche.

Dalla proposizione trovata derivano varie conseguenze. Consideriamo il sistema lineare completo delle curve piane d'ordine ν, dotate di un punto $(\nu-2)$-*plo* e di d punti doppi. Per il grado n ed il genere p di tale sistema si trova subito:

$$n = 4(\nu - 1 - d), \tag{1}$$

$$p = \nu - 2 - d; \tag{2}$$

ne segue: $d < \nu - 3$ e quindi, con semplice calcolo, $n > 2p - 2$. Il sistema è dunque, regolare e per la sua dimensione r otteniamo:

$$r = n - p + 1 = 3(\nu - d) - 1. \tag{3}$$

Ora dalle (1), (2), (3) si ricava:

$$n = 4p + 4, \quad r = 3p + 5.$$

Ne viene: *Una superficie non rigata a sezioni iperellittiche di genere* $p(\geq 2)$ *ha al massimo l'ordine* $4p + 4$. Inoltre: *Ogni superficie non rigata a sezioni iperellittiche di genere* $p(\geq 2)$ *e d'ordine* $n < 4p + 4$ *può ottenersi da una superficie d'ordine* $4p + 4$ *dello spazio* S_{3p+5} *a* $3p + 5$ *dimensioni, mediante proiezione da* $4p + 4 - n$ *suoi punti, e forse da altri punti esterni*; infatti la rappresentazione piana della nominata superficie si ottiene imponendo alle $C_\nu(O^{\nu-2}A_1^2A_2^2 \dots A_d^2)$ il passaggio per $4p + 4 - n$ punti base semplici.

I sistemi lineari di curve piane d'ordine ν, dotati di un punto $(\nu-2)$-*plo* e di d punti doppi possono facilmente ridursi all'ordine minimo con una successione di trasformazioni quadratiche. Invero se è possibile eseguire una trasformazione quadratica, i cui punti fondamentali siano il punto $(\nu-2)$-*plo* e due dei punti doppi, il sistema delle $C_\nu(O^{\nu-2}A_1^2A_2^2 \dots A_d^2)$ si muta nel sistema delle $C_{\nu-2}(O^{\nu-4}A_3^2A_4^2 \dots A_d^2)$ che è dello stesso tipo del precedente, ma con l'ordine di due unità inferiore. Ripetendo sul sistema delle $C_{\nu-2}$ lo stesso procedimento si abbassa ancora l'ordine di

due unità e così di seguito. Il procedimento si può arrestare solamente in due casi:

a) quando l'ultimo sistema ottenuto, supposto d'ordine ν, ha solamente un punto O $(\nu-2)$-*plo* ed un altro punto doppio A, distinto od infinitamente vicino ad O;

b) quando i punti doppi $A_1, A_2, \ldots, A_d$ sono tutti infinitamente vicini ad O in direzioni distinte o succedendosi sopra uno o più rami cuspidali.

Nel caso *a*) l'ordine del sistema non può più essere abbassato con trasformazioni quadratiche. Altrettanto dicasi del caso *b*) se tutti i punti doppi risultano prossimi ad O. Se invece, nel caso *b*), esistono dei punti doppi infinitamente vicini ad O, ma non prossimi ad esso, si può sciogliere il ramo cuspidale su cui giacciono questi punti doppi con una successione di trasformazioni quadratiche, che non alzano l'ordine del sistema; basta all'uopo operare la successione di trasformazioni quadratiche, che hanno i punti fondamentali: nel punto O, nei successivi punti doppi del ramo prossimi ad O ed in un punto generico del piano. Dopo l'ultima trasformazione quadratica di questa successione, il sistema possiederà un punto doppio *distinto* O e quindi l'ordine del sistema si potrà abbassare.

Dunque possiamo dire: Un sistema lineare di curve d'ordine ν con un punto $(\nu-2)$-*plo* e d punti doppi può ricondursi cremonianamente ad un sistema d'ordine minimo del tipo seguente:

α) sistema delle curve d'ordine ν con un punto $(\nu-2)$-*plo* ed un punto doppio; ovvero

β) sistema delle curve d'ordine ν con un punto $(\nu-2)$-*plo* O e con $d\,(\geq 0)$ punti doppi prossimi ad O [1].

Nel caso α) il genere del sistema vale $p=\nu-3$. È dunque $\nu=p+3$; ed i sistemi del tipo α) di genere p sono quindi costituiti da $C_{p+3}(O^{p+1}A^2)$.

---

[1] Un sistema lineare di curve del tipo α) o β) è certo d'ordine minimo. Invero se un sistema del tipo $C_\nu(O^{\nu-2}A^2)$ potesse essere trasformato in un sistema d'ordine minore da una trasformazione cremoniana che risponda ad una rete omaloidica d'ordine n con le molteplicità r ed s in O ed A rispetti-

Nel caso 3) il genere del sistema vale $p = \nu - 2 - d$; e quindi si ha $\nu = p + 2 + d$. Ma i d punti doppi sono tutti prossimi ad O. Perchè le curve del sistema non degenerino occorre dunque che il numero d soddisfaccia alla disuguaglianza $\nu - 2 = p + d \geq 2d$, ossia $d \leq p$. Introduciamo allora la quantità $\mu = p - d$. Poichè d varia da 0 a p, μ varia da p a 0. E le curve del sistema sono delle

$$C_{2p+2-\mu}(O^{2p-\mu}A_1^2A_2^2..,A_{p-\mu}^2) \text{ ove } \mu = 0, 1, ..., p.$$

Riepilogando le cose dette possiamo ora concludere:

Le superficie non rigate, a sezioni iperellittiche (piane o iperpiane) di genere $p(\geq 2)$ possono essere rappresentate punto per punto su di un piano; ed il sistema rappresentativo delle sezioni (piane o iperpiane) è uno dei seguenti sistemi d'ordine minimo, o uno dei sistemi che ne derivano con l'aggiunta di punti base semplici:

1) *curve d'ordine $p + 3$ con un punto multiplo ordinario di molteplicità $p + 1$ ed un punto doppio;*

2) *curve d'ordine $2p + 2 - \mu$ con un punto multiplo ordinario di molteplicità $2p - \mu$ e $p - \mu$ punti doppi prossimi a questo* (potendo essere $\mu = 0, 1, ..., p$).

Si può osservare che nei sistemi lineari del tipo 2) i $p - \mu$ punti

---

vamente, dovrebbe essere:

$$n\nu - r(\nu - 2) - 2s < \nu,$$

ossia:

$$(\nu - 2)(n - r - 1) + 2(n - s - 1) < 0;$$

e ciò è assurdo perchè $r \leq n - 1$ ed $s \leq n - 1$.

Analogo ragionamento prova che sono d'ordine minimo i sistemi lineari del tipo $C_\nu(O^{\nu-2}A_1^2A_2^2...A_d^2)$, dove i punti doppi sono tutti prossimi ad O.

Invero, se esistesse una rete omaloidica d'ordine n, con la molteplicità r in O e le molteplicità $r_1, r_2, ..., r_d$ in $A_1, A_2, ..., A_d$ rispettivamente, abbassante l'ordine del detto sistema, dovrebbe essere:

$$n\nu - r(\nu - 2) - 2(r_1 + r_2 + ... + r_d) < \nu,$$

ossia:

$$\nu(n - r - 1) + 2r - 2(r_1 + r_2 + ... + r_d) < 0.$$

Ma è evidentemente $r \leq n - 1$ ed $r \geq r_1 + r_2 + ... + r_d$ per la relazione di prossimità. L'uguaglianza sopra scritta è perciò assurda.

doppi prossimi ad O *si possono supporre tutti distinti, sciogliendo altrimenti i rami cuspidali uscenti da* O *con opportune trasformazioni quadratiche* (1).

NOTA STORICA. - Lo studio delle superficie algebriche a sezioni iperellittiche fu iniziato nel 1890 da G. CASTELNUOVO (2) mettendosi a priori nell'ipotesi che esse posseggano un sistema ∞^{p-1} di curve (aggiunte o subaggiunte alle sezioni piane) che seghino sulle sezioni piane la serie canonica completa. Di queste superficie CASTELNUOVO dimostrò che, se non sono rigate, sono razionali dando anche la classificazione dei sistemi rappresentativi, che sono precisamente quelli da noi trovati al n. 29.

Il fatto che tutte le superficie non rigate a sezioni iperellittiche sono razionali fu dimostrato per la prima volta nel 1893 da F. ENRIQUES (3). Il ragionamento di ENRIQUES è schematicamente il seguente. Consideriamo un punto generico P della superficie F e le ∞^2 sezioni piane per P. I coniugati del punto P sulle sezioni piane per esso possono invadere tutta la superficie ovvero descrivere una linea; nella seconda ipotesi si ritrova il sistema aggiunto supposto da CASTELNUOVO, poichè la curva riempita dai coniugati di P non può essere che una retta o una conica di P.

Se invece i coniugati del punto P invadono tutta la superficie, per ogni piano generico per P vi è *un* coniugato sulla curva sezione di F, ed inversamente ogni punto di F è il coniugato di P sopra un certo numero finito m di sezioni piane per P: in tal guisa i punti della superficie F vengono a corrispondere ai gruppi d'una involuzione (di grado m) nella stella di centro P. Ora, secondo un

(1) Cfr. a pag. 297 l'analoga osservazione per i sistemi di curve d'ordine ν con O $(\nu-1)$-*plo* ed $i \leq \nu - 1$ punti base semplici, prossimi ad O.

(2) Cfr. G. CASTELNUOVO: *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche*; Rend. del Circ. Mat. di Palermo, T. IV, 1890.

(3) Cfr. F. ENRIQUES: *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche*; « Rendic. della R. Acc. Naz. dei Lincei », Vol. II, Sem. 2, fasc. 10, 1893, ed anche la memoria: *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche*; « Math. Annalen. », Bd. 46, 1893-94.

teorema, che il CASTELNUOVO stabilì appunto nel 1892 (e del quale diamo la dimostrazione al cap. VII) ogni involuzione sopra un ente algebrico razionale ∞^2 è razionale. Ne viene che la superficie F sarebbe razionale anche nel caso in cui i coniugati di P invadano tutta la superficie. Senonchè l'esame dei sistemi rappresentativi di curve iperellittiche mostra a posteriori che di fatto questo caso non può presentarsi.

La dimostrazione del teorema fondamentale sulle superficie a sezioni iperellittiche è stata semplificata da G. POMPILJ [1], il quale — senza ricorrere alla nozione più elevata della razionalità delle involuzioni piane — si è valso a questo scopo del criterio di razionalità dei piani doppi, stabilito da CASTELNUOVO-ENRIQUES nel 1900: come sopra abbiamo indicato.

30. Superficie del quint'ordine a sezioni razionali.

Nei numeri che seguono, tenuto conto dei risultati ottenuti nei capitoli precedenti, ci proponiamo di discutere rapidamente, *dal punto di vista della razionalità, le superficie del quint'ordine*, limitandoci principalmente a quelle che risultano razionali in virtù della loro linea doppia. Ritroveremo in tal guisa superficie razionali generalmente note, che si sono presentate negli studi di L. CREMONA, A. CLEBSCH, E. CAPORALI ed altri; ma avremo occasione di illustrare con tali esempi la portata dei metodi e dei risultati generali esposti innanzi. Incominciamo dalle *superficie del quint'ordine a sezioni razionali*. Risulta come caso particolare della teoria svolta nel Lib. II, cap. II che *ogni superficie del quint'ordine F_5, a sezioni razionali, è una rigata razionale*, proiezione di una rigata razionale normale Φ_5 dello spazio a sei dimensioni S_6.

La rigata razionale normale Φ_5 di S_6 è rappresentata sul piano dal sistema lineare completo ∞^6 delle $C_5(O^4A_1A_2A_3A_4)$, che vale a definirla. Un'altra costruzione della Φ_5 si ottiene

---

[1] Cfr. G. POMPILJ: *Sulle superficie algebriche a sezioni piane iperellittiche di genere $p \geq 2$*; Rend. della R. Acc. dei Lincei, Vol. XXI, s. 6°, 1935.

ponendo una proiettività fra una conica L_2 ed una cubica gobba L_3, giacenti in due spazi indipendenti di S_6, e considerando la rigata ottenuta congiungendo punti corrispondenti nella anzidetta proiettività. Nella rappresentazione piana la (unica) conica L_2 della Φ_5 è data dalla $C_2(OA_1A_2A_3A_4)$.

Le rigate razionali normali Φ_5 di S_6 sono proiettivamente identiche: possono tuttavia presentare una particolarizzazione, corrispondente all'annullarsi di un invariante relativo. Corrispondentemente la Φ_5 viene a perdere la conica che possiede in generale ed acquista una *direttrice rettilinea*: nel sistema rappresentativo i quattro punti A_1, A_2, A_3, A_4 si possono ritenere su di una retta r, che rappresenta appunto la direttrice rettilinea; e la Φ_5 non si può più costruire congiungendo punti corrispondenti di una conica e di una cubica gobba riferite proiettivamente, ma può costruirsi invece come luogo delle rette congiungenti punti corrispondenti in una proiettività intercedente fra la direttrice rettilinea e una quartica razionale normale L_4 (giacente in un S_4 che non incontra la direttrice rettilinea).

Un'ulteriore particolarizzazione della Φ_5 porta al caso del *cono razionale del quint'ordine di* S_6. Nel sistema rappresentativo i quattro punti cadono tutti nell'intorno di O, che rappresenta ora il vertice del cono. Nell'S_6 il cono si può costruire congiungendo un punto V (concepito come curva d'ordine zero) con i punti di una quartica razionale normale di un S_5 (non contenente V).

Nel caso della rigata *generale*, contenente cioè una conica *irriducibile* L_2, il sistema rappresentativo delle $C_5(O^4A_1A_2A_3A_4)$ può certo essere abbassato con la trasformazione quadratica, che ha i punti fondamentali O, A_1, A_2: infatti i punti O, A_1, A_2, A_3, A_4 individuano una conica irriducibile, immagine della L_2. Si arriva così al sistema delle $C_4(O^3A_3A_4)$, dove A_3 ed A_4 individuano una retta non passante per O, trasformata della $C_2(OA_1A_2A_3A_4)$. Con la trasformazione quadratica di punti fondamentali O, A_3, A_4, si arriva poi al sistema *d'ordine minimo costituito dalle* $C_3(O^2)$.

Per la Φ_5 dotata di *direttrice rettilinea*, la seconda trasformazione quadratica viene a mancare, perchè nel sistema delle

$C_4(O^3A_3A_4)$ i punti base A_3 ed A_4 cadono prossimi ad O. Il sistema d'ordine minimo è quindi costituito da *quartiche.*

Finalmente, nel caso del *cono,* il sistema rappresentativo d'ordine minimo è costituito direttamente dalle $C_5(O^4A_1A_2A_3A_4)$, dove i punti base A_1, A_2, A_3, A_4 sono prossimi ad O.

Per quanto riguarda le rigate razionali del quint'ordine F_5 dello spazio ordinario, esse si ottengono proiettando la rigata razionale normale Φ_5 di S_6 da un piano (che non abbia punti a comune con la Φ_5). Se la Φ_5 presenta il caso generale ed il piano proiettante è scelto in modo generico, si ottiene come proiezione la più generale rigata razionale del quint'ordine F_5. Le varie particolarizzazioni della F_5 nascono poi sia dal particolarizzare la posizione del piano proiettante, sia dal particolarizzare la rigata normale Φ_5, sia da entrambe queste cause insieme.

La F_5 generale possiede come curva doppia *una sestica ellittica K_6, dotata di un punto triplo, che è anche triplo per la superficie.* La intima ragione di questa circostanza dipende dai fatti seguenti, dei quali invitiamo il lettore a rendersi ragione.

La varietà delle corde della Φ_5 generale è una varietà cubica W a cinque dimensioni di S_6, di cui è facile scrivere l'equazione. Il piano proiettante la Φ_5 interseca la W in una cubica di genere uno, L_3; e le corde della Φ_5 che partono dai punti della L_3 danno luogo nello spazio ordinario ad una curva doppia ellittica del sesto ordine K_6. Quanto al punto triplo della K_6, esso dipende dall'esistenza di un piano trisecante la Φ_5 e incidente secondo una retta il piano da cui si proietta. L'esistenza di un piano siffatto può essere giustificata con un computo di costanti.

Riferendoci alla rappresentazione piana della Φ_5 generale, mediante le ∞^6 $C_3(O^2)$, il sistema rappresentativo della F_5 è un sistema lineare $\infty^3 \mid C_3 \mid$ di $C_3(O^2)$. L'immagine della curva doppia K_6 della F_5 è una $C_6(O^3)$, dotata di tre punti doppi T_1, T_2, T_3, i quali costituiscono una *terna neutra* per il $\mid C_3 \mid$ e rappresentano il punto triplo della superficie. Le curve di $\mid C_3 \mid$ segnano sulla $C_6(O^3T_1^2T_2^2T_3^2)$ una g^3_{12}, *composta con le coppie di una γ^1_2 ellittica;* le coppie della γ^1_2 corrispondono ai punti della curva doppia K_6.

Inversamente, se si prende ad arbitrio una $C_6(O^3)$ dotata di tre punti doppi, questa non può in generale essere assunta come immagine di una sestica doppia di una F_5. Ciò emerge già dal fatto che una $C_6(O^3T_1^2T_2^2T_3^2)$ è di genere quattro e che sopra una curva di genere quattro non vi è in generale una γ_2^1 ellittica. Si presenta qui una ricerca, per la quale rimandiamo il lettore ad una recente nota di F. CONFORTO [1].

I vari tipi particolari di rigate razionali del quint'ordine dello spazio ordinario sono stati determinati, in base ai vari aspetti che può assumere la linea doppia (o multipla), da H. A. SCHWARZ [2], al quale devesi altresì la determinazione di tutte le rigate (razionali o no) del quint'ordine.

Più precisamente, lo SCHWARZ (esclusi i coni) ha indicato i seguenti casi:

Rigata razionale del quint'ordine dotata

a) di retta quadrupla,

b) di sestica gobba doppia con punto triplo,

c) di direttrice rettilinea tripla e cubica gobba doppia,

d) di direttrice rettilinea tripla, di una conica doppia e di una generatrice doppia,

e) di una direttrice tripla, di una direttrice doppia e due generatrici doppie,

f) di una generatrice doppia ed una quintica gobba doppia, dotata di un punto triplo,

g) di una generatrice doppia, una quartica gobba doppia con un punto doppio ed una generatrice doppia,

h) di una conica doppia ed una quartica gobba doppia, dotata di un punto doppio,

i) di una sestica gobba doppia degenere in tre coniche doppie,

---

[1] Cfr. F. CONFORTO: *Sulle rigate razionali del quinto ordine*; Atti del 1° Congresso dell'Unione Matematica Italiana; Firenze, 1937.

[2] Cfr. H. A. SCHWARZ: *Über die geradlinigen Flächen fünften Grades*; Ges. Math. Abh., Berlin, 1890, Bd. II, pag. 25.

l) di una generatrice doppia ed una quintica gobba doppia con punto doppio.

Il lettore potrà utilmente mettere in relazione i tipi dello SCHWARZ con le rigate razionali normali di S_6, studiando come debba particolarizzarsi la rigata e la posizione del piano proiettante per ottenere i vari casi. Questo studio porterà anche a rispondere alla questione seguente: tenuto conto che *in generale* la linea doppia della rigata dello spazio ordinario è una sestica gobba K_6 irriducibile di genere uno con punto triplo, se la linea multipla presenta uno degli spezzamenti elencati in *c*), *d*), ..., *l*), come debbono connettersi le varie parti di essa perchè la curva doppia totale risulti *caso particolare* di una K_6 doppia? E quale è la immagine della curva doppia nei casi *a*), *b*), ..., *l*)?

31. Superficie del quint'ordine a sezioni ellittiche.

Le superficie del quint'ordine a sezioni ellittiche, in base ai risultati del Lib. II, cap. III, sono *rigate* ovvero *superficie razionali.*

Per le rigate del quint'ordine a sezioni ellittiche, rimandiamo alla già citata memoria di H. A. SCHWARZ, il quale, sempre escludendo i coni, ha elencato i quattro tipi seguenti:

Rigata del quinto ordine a sezioni ellittiche dotata

a) di una quintica gobba doppia,

b) di una direttrice tripla e di una conica doppia,

c) di una direttrice rettilinea tripla, di una direttrice doppia e di una generatrice doppia,

d) di una direttrice doppia e di una quartica gobba doppia.

Le superficie *razionali* del quint'ordine a sezioni di genere uno si ottengono tutte per proiezione da una superficie normale del quinto ordine Φ_5 dello spazio a cinque dimensioni S_5, rappresentata sul piano dal sistema lineare completo delle $C_3(A_1A_2A_3A_4)$.

Proiettando la Φ_5 da una retta r di S_5, non incidente ad essa, si ottiene una superficie del quint'ordine a sezioni ellittiche dello spazio ordinario. Supponiamo la Φ_5 generica e la retta r in

posizione generica rispetto alla Φ_5: la superficie F_5, proiezione della Φ_5 da r, possiede allora come curva doppia *una quintica razionale K_5, dotata di un punto triplo, che è triplo anche per la superficie.* Per rendersi ragione di ciò, si consideri la varietà delle corde della Φ_5: essa è una varietà a cinque dimensioni, che invade lo spazio S_5, per un punto generico di S_5 passando una ed una sola corda della Φ_5. Infatti, se per un punto generico di S_5 passassero due corde, appoggiantisi alla Φ_5 nelle coppie di punti P', P'' e Q', Q'', gli S_4 di S_5 passanti per P', P'', Q', Q'' segherebbero sulle sezioni iperpiane della Φ_5, passanti per questi quattro punti, una g_1^1 e ciò è impossibile, perchè le sezioni iperpiane della Φ_5 sono delle curve *ellittiche*. Dunque per un punto generico di S_5 non può passare più di una corda della Φ_5. Ne segue facilmente che la varietà delle corde di Φ_5 riempie lo S_5, per un punto generico di S_5 passando una sola corda della Φ_5.

Si considerino ora i piani di S_5, *trisecanti* la Φ_5. Essi sono ∞^6 e per una retta generica r di S_5 ne passa quindi a priori un numero finito. Il lettore, applicando correttamente il principio del computo di costanti, dimostri che per una retta generica di S_5 passa uno ed un solo piano trisecante la Φ_5.

Ciò premesso, si proietti la Φ_5 dalla retta r nello spazio ordinario. Da ogni punto della r esce una corda della Φ_5, che dà origine ad un punto della quintica K_5, doppia per la F_5 proiezione. I punti della K_5 sono in corrispondenza birazionale con i punti della retta r, e quindi la K_5 è razionale. Il piano trisecante la Φ_5 e passante per la r, contenendo *tre* corde della Φ_5, dà origine nella proiezione al punto triplo della superficie.

Sul piano rappresentativo, il sistema lineare ∞^3 delle sezioni piane della F_5 diviene un sistema lineare ∞^3 di $C_3(A_1A_2A_3A_4)$. La curva doppia K_5 si rappresenta in una sestica $C_6(A_1^2A_2^2A_3^2A_4^2)$ dotata di tre punti doppi T_1, T_2, T_3, distinti da A_1, A_2, A_3, A_4. Ciò segue dal fatto che la K_5 appartiene certamente ad una quadrica: la sua immagine sarà dunque una $C_6(A_1^2A_2^2A_3^2A_4^2)$. I tre punti doppi T_1, T_2, T_3 provengono poi dal punto triplo della K_5: invero il sistema rappresentativo della F_5 deve possedere una *terna neutra*, la quale deve dar luogo a tre coppie di punti

coniugati sulla C_6; i punti T_1, T_2, T_3, costituenti la terna neutra, sono dunque doppi per la C_6, immagine della K_5. Sulla $C_6(A_1^2A_2^2A_3^2A_4^2T_1^2T_2^2T_3^2)$, il sistema rappresentativo delle sezioni piane della F_5 segna una g_{10}^3, composta con le coppie di una g_2^1; e fra le coppie di punti coniugati di questa g_2^1 vi sono, come già si è accennato, tre coppie costituite: da un punto dell'intorno di T_1 e da un punto dell'intorno di T_2, da un punto dell'intorno di T_2 e da un punto dell'intorno di T_3, da un punto dell'intorno di T_3 e da un punto dell'intorno di T_1. Le $C_3(A_1A_2A_3A_4T_1T_2T_3)$ rappresentano in particolare le sezioni piane della F_5, condotte per il punto triplo.

Inversamente, data a priori una $C_6(A_1^2A_2^2A_3^2A_4^2)$, dotata di altri tre punti doppi T_1, T_2, T_3, *non* vi è in generale un sistema lineare ∞^3 di $C_3(A_1A_2A_3A_4)$, il quale rappresenti una F_5, la cui curva doppia abbia come immagine la data C_6. Ciò si desume già dal fatto che la C_6 con 7 punti doppi è di genere 3 e non contiene quindi in generale una g_2^1. Dunque, la C_6 deve essere scelta *opportunamente*.

Per determinare le condizioni, a cui deve soddisfare la C_6, si assuma ad arbitrio la terna neutra T_1, T_2, T_3: tra le ∞^6 $C_6(A_1^2A_2^2A_3^2A_4^2T_1^2T_2^2T_3^2)$ ve n'è ∞^5 appartenenti alla involuzione di coppie di punti I_2, generata dalla serie caratteristica della rete di cubiche per A_1, A_2, A_3, A_4, T_1, T_2, T_3; e tra queste $\infty^5 C_6$ ve n'è ∞^2 per le quali la g_2^1, subordinata dalla I_2, associa i punti giacenti negli intorni di T_1, T_2, T_3, nel modo voluto. Dopo ciò sarà facile il dimostrare che, scelta ad arbitrio una delle ∞^2 C_6 così costruite, esiste uno ed un solo sistema lineare ∞^3 di $C_3(A_1A_2A_3A_4)$, il quale rappresenti una F_5, la cui linea doppia abbia come immagine la data C_6.

NOTA STORICA. - La razionalità della superficie del quint'ordine, dotata di una quintica gobba doppia con punto triplo, è stata accennata da A. CLEBSCH [1] e dimostrata esplicitamente da

[1] Cfr. la nota, con la quale si chiude la memoria: *Über den Zusammenhang einer Klasse von Flächenabbildungen mit der Zweitheilung der Abel-schen Functionen*; Math. Ann. Bd. I, 1871.

L. CREMONA (1), il quale mostrò come l'anzidetta superficie si possa ottenere come trasformata da una quadrica, e viceversa: si consideri all'uopo la trasformazione birazionale (3, 3), che si ottiene dal sistema omaloidico delle superficie cubiche, passanti per una cubica gobba C_3, per una retta r, e per una conica C_2, trisecante la C_3 e bisecante la r; una quadrica passante per la C_2 si trasforma in una F_5 con quintica gobba doppia, dotata di un punto triplo.

Pochi anni più tardi E. CAPORALI (2) dedicò alla nostra superficie una diffusa memoria, nella quale la razionalità risulta dal fatto che la F_5 appartiene ad un sistema omaloidico di F_5 analoghe, aventi in comune la quintica doppia ed una conica. La trasformazione birazionale che così si genera è l'inversa della trasformazione cubica che risponde al sistema omaloidico delle superficie cubiche, passanti per una quartica gobba di seconda specie e tangenti in un punto ad un piano fisso.

Altri studi sulla superficie del quint'ordine a sezioni ellittiche debbonsi a R. STURM (3), che ha studiato la configurazione delle 10 rette esistenti sulla superficie e ad A. DEL RE, il quale ha dato varie generazioni della superficie stessa.

32. Superficie del quint'ordine a sezioni di genere due.

La teoria di queste superficie rientra come caso particolare nella teoria delle superficie a sezioni iperellittiche. Possiamo quindi enunciare immediatamente (cfr. Lib. II, cap. VI, n. 29): *Le superficie del quint'ordine a sezioni di genere due sono rigate ovvero razionali.*

Le *rigate* del quint'ordine a sezioni di genere due, prescin-

(1) Cfr. L. CREMONA: *Über die Abbildung algebraischer Flächen*; Math. Ann. Bd. IV, 1871.

(2) Cfr. E. CAPORALI: *Sulla superficie del quinto ordine dotata di una curva doppia del quinto ordine*; Ann. di Mat. s. II, t. VII. 1875.

(3) Cfr. R. STURM: *Über die Flächen mit einer endlichen Zahl von (einfachen) Geraden, vorzugsweise die der vierten und fünften Ordnung*; Math. Ann. Bd. IV, 1871.

dendo dal caso dei coni, presentano un unico tipo, per il quale la linea multipla si riduce ad *una direttrice tripla e ad una direttrice doppia, sghemba con la prima* (cfr. la più volte citata memoria di H. A. SCHWARZ).

Invece le superficie *razionali* del quint'ordine a sezioni di genere $p = 2$ si ottengono tutte per proiezione da superficie razionali normali Φ_{12} d'ordine $4p + 4 = 12$ dello spazio $S_{3p+5} \equiv S_{11}$ ad undici dimensioni. Le superficie Φ_{12} possono essere rappresentate sul piano:

a) dal sistema completo delle $C_5(O^3A^2)$ con O ed A distinti, ovvero

b) dal sistema completo delle $C_6(O^4A_1^2A_2^2)$ con A_1 ed A_2 infinitamente vicini ad O in direzioni distinte, ovvero

c) dal sistema completo delle $C_5(O^3A^2)$ con O ed A infinitamente vicini, ovvero

d) dal sistema completo delle $C_4(O^2)$.

Per ridurre questi sistemi al grado 5, occorre aggiungere altri 7 punti base semplici B_1, B_2, ..., B_7, rappresentativi di altrettanti punti semplici della Φ_{12}.

Dopo l'aggiunta dei punti base B_1, B_2, ..., B_7 i sistemi lineari dei tipi *a*), *b*), *c*), *d*) possono tutti ridursi cremonianamente a sistemi di dimensione quattro e grado cinque di $C_5(O^3A^2B_1B_2...B_7)$ con punti base distinti od infinitamente vicini. Invero un sistema di $C_4(O^2B_1B_2...B_7)$ si può ridurre, con una trasformazione quadratica che abbia i punti fondamentali in O ed in due punti generici del piano A_1 ed A_2, ad un sistema di $C_6(O^4A_1^2A_2^2B_1B_2...B_7)$; ed un sistema di $C_6(O^4A_1^2A_2^2B_1B_2...B_7)$, per cui A_1 ed A_2 siano entrambi distinti da O ovvero entrambi infinitamente vicini ad O, in direzioni distinte, si può sempre trasformare con una trasformazione quadratica, che ha i punti fondamentali in O, A_1 ed uno dei punti semplici: questa trasformazione muta il sistema delle C_6 in una sistema di $C_5(O^3A^2B_1B_2...B_7)$.

Possiamo pertanto enunciare:

Le superficie non rigate del quint'ordine a sezioni di genere due sono razionali e normali in uno spazio a quattro dimensioni: esse costituiscono un'unica famiglia, dipendente da parametri

variabili con continuità, e possono venir rappresentate su di un piano da un sistema lineare di $C_5(O^3A^2B_1B_2...B_7)$.

Giova osservare che il sistema lineare delle $C_5(O^3A^2B_1B_2...B_7)$ può venir trasformato (con una o *più* trasformazioni quadratiche) nel sistema delle $C_4(O^2T_1T_2...T_7)$; si ha tuttavia un caso di eccezione quando A ed i punti B_1, B_2, ..., B_7 siano infinitamente vicini ad O, i punti semplici succedendosi sopra un ramo lineare uscente da O, che sia d'inflessione (di classe due).

È facile arrivare ai medesimi risultati, studiando direttamente le superficie del quint' ordine dello spazio ordinario a sezioni di genere due.

Incominciamo a supporre che la linea doppia di una F_5 di S_3, a sezioni di genere due, sia una quartica gobba, K_4, irriducibile o riducibile. Si può escludere che la K_4 sia di seconda specie, appartenga cioè ad una sola quadrica: in questa ipotesi invero, uno dei sistemi di generatrici della quadrica risulterebbe trisecante la K_4 e quindi apparterrebbe alla F_5, che sarebbe così *riducibile. La* K_4 *doppia della* F_5 è quindi *la curva base d'un fascio di quadriche.*

Fuori della K_4 le quadriche di questo fascio segano la F_5 in una linea del secondo ordine. Se questa linea è una conica (generalmente) irriducibile, la F_5 contiene un fascio di curve razionali, e risulta così razionale per il teorema di NOETHER (cfr. Lib. II, cap. I); se invece la nominata linea è composta sempre di due rette, la F_5 è rigata (1). Dunque: *una superficie* F_5 *di* S_3 *dotata di una* K_4 *doppia è razionale o rigata.*

Dopo ciò, lasciamo al lettore di dimostrare che la linea multipla di una F_5 di S_3, non rigata, a sezioni di genere due, è *sempre* una quartica gobba doppia di prima specie, irriducibile o riducibile. Si tratta in sostanza di verificare che la linea doppia della F_5 (supposta *non* rigata) può bensì spezzarsi in varie parti, ma sempre in modo che essa possa pensarsi come *limite* di una K_4

(1) Ed anzi la F_5 è in questo caso un *cono*, con quattro generatrici doppie.

di prima specie irriducibile. Ad es. la linea doppia di F_5 non può spezzarsi in una cubica gobba doppia ed in una retta doppia, sghemba con essa; ma invece può spezzarsi in una cubica gobba doppia ed in una retta doppia che sia corda di essa, ovvero in quattro rette doppie formanti un quadrilatero gobbo, ovvero in quattro rette doppie passanti per un punto, e così via. Giova insistere solamente su un caso particolare alquanto riposto, che è il seguente: se la K_4 doppia della F_5 è ridotta a quattro rette doppie per un punto, può avvenire che due di queste rette si avvicinino ad una terza secondo direzioni distinte; la K_4 doppia degenera allora in una *retta tripla ed in una retta doppia ad essa incidente*. Il lettore si persuaderà facilmente che questo è l'unico caso in cui, nella curva multipla di una F_5 a sezioni di genere due non rigata, si possa presentare una componente più che doppia.

Riassumendo possiamo dire: *la curva multipla di una F_5 di S_3, non rigata, a sezioni di genere due, è sempre una quartica gobba di prima specie K_4, od un suo caso particolare.*

Ne viene: *una F_5 di S_3, a sezioni di genere due, è razionale o rigata.*

Ora, il sistema delle sezioni piane di una F_5 razionale con K_4 doppia si può ampliare in un sistema completo ∞^4. Si consideri infatti una quadrica F_2 per la K_4: la F_2 interseca la F_5 in una residua conica K_2, che ha quattro punti a comune con la K_4 (1). Le superficie cubiche F_3, contenenti la K_4 e la K_2 sono ∞^4, e segano sulla F_5 un sistema lineare di quintiche gobbe, che contengono in particolare le sezioni piane della F_5, in corrispondenza a quelle F_3, che sono spezzate nella F_2 ed in un piano. Il sistema lineare di quintiche così costruito è di genere due, grado cinque e dimensione quattro. La F_5 si può dunque trasformare in una Φ_5 di S_4, a sezioni iperpiane di genere due. Proiettando la Φ_5 da un suo punto in S_3, si ottiene una F_4 a sezioni di genere due, cioè una F_4 con retta doppia; e poichè la F_4 con retta doppia è

(1) Ciò si giustifica immediatamente mediante la rappresentazione piana della quadrica.

normale in S_3, la Φ_5 è normale in S_4. Ne concludiamo: *una* F_5 *razionale con* K_4 *doppia è proiezione da un punto di una* Φ_5, *normale in* S_4.

Ora, per arrivare alla rappresentazione piana della Φ_5, a sezioni di genere due, razionali e normali in S_4, basta tener conto che su di essa esiste un fascio di coniche, che si può a priori ritenere rappresentato da un fascio di rette. Il sistema rappresentativo sarà quindi costituito da curve d'ordine n dotate di un punto $(n-2)$-*plo*, di $n-4$ punti doppi e di 7 punti semplici e, ripetendo un ragionamento già più volte esposto, si proverà che con successive trasformazioni quadratiche un sistema di questo tipo può sempre venir ridotto ad un sistema di $C_5(O^3A^2T_1...T_7)$.

Si ritrova così che *le* Φ_5, *a sezioni di genere due, razionali e normali in* S_4, *formano un'unica famiglia.*

NOTA STORICA. - La teoria della superficie del quint'ordine con quartica gobba doppia fu iniziata da A. CLEBSCH nel 1870, con una nota della Società delle Scienze di Gottinga (1). Il CLEBSCH osserva anzitutto che, se una superficie del quint'ordine, non rigata, contiene una quartica gobba doppia, questa deve essere di prima specie. In questa ipotesi la F_5 contiene un punto particolare, V, che il CLEBSCH chiama *vertice* della superficie, il quale gode della seguente proprietà: ogni retta, uscente da V, interseca ulteriormente la superficie in quattro punti, costituenti due coppie: e queste coppie appartengono a due coniche di un fascio, che giace sopra la F_5 e la genera. I piani delle coniche inviluppano un cono, il cui vertice è il punto V; essi sono piani bitangenti la F_5. Se ora su ogni retta per V si costruisce la coppia di punti P', P'', che separa armonicamente le due coppie di punti in cui la retta interseca la F_5 fuori di V, i due punti P', P'' al variare della retta per V descrivono una rigata cubica, che è in

(1) Cfr. la memoria: *Über den Zusammenhang einer classe von Flächenabbildungen mit der Zweitheilung der Abel'schen Functionen*; « Math. Ann. », Bd. III, 1871.

corrispondenza [1, 2] con la F_5. Rappresentando la rigata cubica su di un piano, si ha dunque una rappresentazione della F_5 su di un piano doppio, la cui curva di diramazione si trova essere una sestica con punto quadruplo ed un punto doppio. Si arriva dunque ad un piano doppio razionale.

Poco dopo, nel 1871, il NOETHER [1] deduceva la razionalità della superficie ed il suo sistema rappresentativo, come caso particolare della sua teoria delle superficie con un fascio lineare di curve razionali, sfruttando il fascio di coniche segato sulla F_5 dalle quadriche, contenenti la quartica doppia.

Giova infine ricordare il metodo di L. CREMONA [2], il quale in due modi diversi riuscì a dimostrare la razionalità della F_5 non rigata con C_4 doppia, deducendola dalla razionalità già nota di altre superficie.

Il primo metodo consiste nel considerare la trasformazione cubica, che risulta dal sistema omaloidico delle superficie cubiche che passano per una quintica gobba di genere uno e per una sua trisecante: una quadrica, passante per la trisecante, viene trasformata in una F_5 con quartica gobba doppia.

Si consideri invece il sistema omaloidico delle superficie cubiche che passano per una quartica ellittica e per due corde di essa: si ottiene una F_5 non rigata con C_4 doppia trasformando una superficie cubica, passante per le due corde, con la trasformazione birazionale che così ha origine.

Con entrambi i due metodi si può generare la più generale superficie del quint'ordine dotata di quartica gobba doppia.

La superficie del quint'ordine con quartica gobba doppia possiede 14 rette, le cui proprietà di configurazione furono studiate da A. CLEBSCH, da L. CREMONA e da R. STURM in memorie già più volte citate.

---

(1) Cfr. M. NOETHER: *Über Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen*; «Math. Ann.», Bd. III, 1871.

(2) Cfr. L. CREMONA: *Über die Abbildung algebraischer Flächen*; Math. Ann. Bd. IV, 1871.

33. Superficie del quint'ordine a sezioni di genere tre.

Una superficie irriducibile F_5 dello spazio ordinario S_3, a sezioni di genere tre, possiede una linea doppia del terzo ordine, ovvero una retta tripla.

Se F_5 possiede una linea doppia del terzo ordine, questa deve necessariamente essere una *cubica gobba*, irriducibile o riducibile. Invero le linee del terz'ordine, essenzialmente spaziali, che non siano cubiche gobbe irriducibili o limite di queste si riducono:

a) ad una conica e ad una retta non incidenti,

b) a tre rette sghembe a due a due.

L'ipotesi *a*) non può verificarsi, giacchè il piano α della conica intersecherebbe ulteriormente la F_5 in una retta, la quale dovrebbe avere un punto doppio nel punto comune ad α ed alla retta doppia e nella ipotesi *b*), si staccherebbe dalla F_5 la quadrica individuata dalle tre rette sghembe.

Dunque la linea doppia K_3 di F_5 è una cubica gobba doppia, irriducibile o riducibile.

Dobbiamo ora distinguere due casi:

a) Da ogni punto P dello spazio parte una corda della K_3, che incontri la K_3 in (due) punti variabili con P, ovvero

b) la K_3 si riduce a tre rette non complanari per un punto O.

Nel primo caso la F_5 è manifestamente razionale, potendosi rappresentare punto per punto su di un piano π, mediante la congruenza del primo ordine delle corde alla K_3.

Nel secondo caso il punto O può essere triplo, quadruplo o quintuplo.

Se O è triplo, la F_5 si può rappresentare sul piano doppio, π, per proiezione da O. Il piano che così si ottiene possiede una curva di diramazione dell'ottavo ordine con tre punti quadrupli nei punti A_1, A_2, A_3, in cui π interseca le tre rette doppie. La trasformazione quadratica, che ha i punti fondamentali A_1, A_2, A_3, (e che è sempre possibile, a meno che le tre rette doppie non si riducano ad una retta tripla) trasforma il piano doppio π in un

piano doppio con quartica di diramazione e poichè quest'ultimo piano doppio è generalmente razionale, ne concludiamo:

La superficie del quint'ordine, dotata di tre rette doppie, concorrenti in un punto triplo O, è generalmente razionale.

Se invece il punto O fosse quadruplo, la F_5 sarebbe un monoide, e quindi certamente razionale.

Se infine O fosse quintuplo, la F_5 si ridurrebbe ad un cono non razionale.

Passiamo ad esaminare il caso di una F_5 con retta tripla. I piani per la retta tripla possono segare la F_5 secondo coniche, generalmente irriducibili: in questo caso la F_5 è razionale per il teorema di NOETHER (Lib. II, cap. I).

Nell'ipotesi opposta, si vede facilmente che la F_5 non può essere che un cono con retta tripla.

Riassumendo possiamo dire:

Una superficie del quint'ordine a sezioni di genere tre è:

a) una F_5 dotata di cubica gobba doppia, irriducibile o riducibile, le cui corde costituiscono una congruenza del primo ordine, che non è una stella di rette, ovvero

b) un monoide, dal cui vertice escono tre rette doppie, ovvero

c) una F_5 con retta tripla, non cono, ovvero

d) una F_5 con tre rette doppie uscenti da un punto triplo, ovvero

e) un cono con tre generatrici doppie o una tripla.

La superficie è razionale nei casi a), b), c), generalmente razionale nel caso d), non razionale nel caso e).

Discutiamo brevemente le rappresentazioni piane, che si ottengono nei vari casi.

Nel caso *a*), *la F_5 possiede una cubica gobba doppia, K_3;* le ∞^2 quadriche, passanti per la K_3, non si riducono tutte a coni e segano sulla F_5 una rete di quartiche gobbe razionali (1),

(1) Il lettore si persuaderà facilmente che le nominate quartiche sono razionali, facendo uso della rappresentazione piana di una quadrica

che è una rete *omaloidica*: invero due quadriche generiche per la K_3 si intersecano ulteriormente secondo una retta, che è corda della K_3 ed interseca la F_5, fuori della K_3, in *un* punto, che è il solo che sia comune alle due quartiche corrispondenti alle due quadriche scelte. Ne viene che la rete di quartiche sulla F_5 si può ritenere a priori rappresentata dalla rete delle rette. Le immagini delle sezioni piane della F_5 sono di conseguenza delle quartiche, passanti semplicemente per 11 punti $A_1, \ldots, A_{11}$; e la cubica gobba doppia è rappresentata da una curva iperellittica del settimo ordine, passante doppiamente per $A_1, \ldots, A_{11}$, sulla quale le $C_4(A_1 \ldots A_{11})$ segano una g_6^3 composta con le coppie della g_2^1.

Come verifica il lettore potrà studiare direttamente la rappresentazione piana, che si ottiene mediante la congruenza delle corde della K_3; e dimostrare che il sistema rappresentativo, che così si ottiene, è sempre riducibile al sistema delle quartiche per 11 punti semplici.

Passiamo a studiare il caso *b*), cioè il monoide del quint'ordine, dal cui punto quadruplo escono tre rette doppie.

Proiettando dal punto quadruplo, si ottiene un sistema rappresentativo di quintiche, passanti doppiamente per i punti A, B, C, traccie sul piano rappresentativo delle rette doppie a, b, c. Le tre rette doppie si rappresentano negli intorni di A, B, C, mentre il punto quadruplo ha come immagine una quartica C_4, passante doppiamente per A, B, C. La quartica C_4 deve essere fondamentale per le quintiche, rappresentative di sezioni piane; sulla C_4 esistono pertanto 8 punti base semplici, immagini di altrettante rette semplici del monoide, uscenti dal suo vertice.

Il sistema rappresentativo del monoide si può costruire a priori, combinando linearmente la rete delle rette, aumentata di una quartica fissa, dotata di tre punti doppi A, B, C, con una generica quintica *irriducibile* passante doppiamente per A, B, C.

La trasformazione quadratica che ha i punti fondamentali A, B, C muta il sistema di quintiche in un sistema di quartiche dotato di 11 punti base semplici, dei quali 8 stanno su di una

conica. La conica rappresenta qui il punto quadruplo, mentre le tre rette, che congiungono a due a due in tutti i modi possibili i tre punti base che non stanno sulla conica fondamentale, rappresentano le tre rette doppie.

Da quanto abbiamo detto, risulta che *il monoide del quint'ordine, dal cui vertice escono tre rette doppie, è un caso particolare della superficie del quint'ordine dotata di cubica gobba doppia.*

Nel caso *c*), la F_5 possiede una retta tripla, e non è un cono. La F_5 è qui una superficie razionale a sezioni *iperellittiche* di genere tre. Dalla teoria delle superficie razionali a sezioni iperellittiche (cfr. Lib. II, cap. VI, n. 29) si ricava pertanto che il sistema rappresentativo della F_5 sarà:

1) un sistema lineare completo di $C_6(O^4A^2B_1B_2...B_{11})$, con i punti base O ed A distinti, ovvero

2) un sistema lineare completo di $C_8(O^6A_1^2A_2^2A_3^2B_1B_2 \dots B_{11})$ con A_1, A_2, A_3 prossimi ad O, ovvero

3) un sistema lineare completo di $C_7(O^5A_1^2A_2^2B_1B_2 \dots B_{11})$ con A_1 ed A_2 infinitamente vicini ad O in direzioni distinte (o succedentisi sopra un ramo cuspidale del second' ordine), ovvero

4) un sistema lineare completo di $C_6(O^4A^2B_1B_2 \dots B_{11})$ con A infinitamente vicino ad O, ovvero

5) un sistema lineare completo di $C_5(O^3B_1B_2...B_{11})$.

Il lettore dimostrerà facilmente che questi cinque tipi di sistemi lineari si possono ridurre cremonianamente all'unico tipo delle $C_7(O^5A_1^2A_2^2B_1B_2 \dots B_{11})$. Dunque: *Le superficie del quint'ordine non rigate dotate di una retta tripla costituiscono un'unica famiglia.* Se poi i punti O, A_1, A_2, B_1, ..., B_{11} sono disposti in modo generico, il sistema delle $C_7(O^5A_1^2A_2^2B_1B_2 \dots B_{11})$ si può abbassare al sistema delle $C_6(O^4A^2B_1B_2...B_{11})$ od anche delle $C_5(O^3B_1B_2...B_{11})$.

Dunque, mentre, come abbiamo veduto, la superficie del quinto ordine con cubica gobba doppia si rappresenta mediante un sistema di $C_5(A_1^2A_2^2A_3^2B_1B_2 \dots B_8)$ (riducibile ad un sistema di $C_4(A_1A_2...A_{11})$, la superfice razionale del quint' ordine dotata

di retta tripla, si rappresenta mediante un sistema di $C_5(O^3B_1B_2...B_{11})$. Da questo risultato, potrebbe apparire a prima vista che la F_5 con retta tripla fosse un caso particolare della F_5 con cubica gobba doppia: se invero, nel sistema delle $C_5(A_1^2A_2^2A_3^2B_1B_2...B_8)$, si fa tendere ad un punto il triangolo formato dai tre punti doppi A_1, A_2, A_3, si ottiene al limite un sistema di quintiche dotato di un punto triplo, cui sono infinitamente vicini tre punti base semplici, e di altri otto punti semplici; e questo sistema rappresenta effettivamente una F_5 con retta tripla. Senonchè è facile persuadersi che in tal modo non si ottiene la più generale F_5 con retta tripla. Invero il sistema delle $C_5(A_1^2A_2^2A_3^2B_1B_2...B_8)$ è completamente determinato dai suoi punti base ed è mutato in un sistema dello stesso tipo da un gruppo (misto) di trasformazioni, dipendente da otto parametri: esso dipende pertanto da $22 - 8 = 14$ moduli. In modo analogo si vede che un sistema di $C_5(O^3B_1B_2...B_{11})$ dipende da 16 moduli. La classe dei sistemi di $C_5(O^3B_1B_2...B_{11})$ è quindi più ampia della classe dei sistemi di $C_5(A_1^2A_2^2A_3^2B_1B_2...B_8)$ e non può quindi essere contenuta in questa. Ne viene:

La superficie del quint'ordine, dotata di retta tripla, non è in generale caso particolare della superficie del quint'ordine dotata di cubica gobba doppia (1).

ESERCIZIO. - Si dimostri che sulla F_5 non rigata, dotata di retta tripla r, esistono in generale 22 rette, distribuite a coppie in 11 piani, passanti per la r. Si trasformi la F_5 mediante il sistema omaloidico delle rigate cubiche, che hanno la retta tripla r come direttrice doppia e tre rette sghembe della F_5, appoggiantisi alla r, come generatrici fisse. Si otterrà una F_4 con retta doppia; e poichè questa superficie si rappresenta mediante il sistema delle $C_4(O^2B_1B_2...B_8)$, si viene così a tovare, in modo diretto, anche una rappresentazione piana della F_5 con retta

(1) Invece, come si è veduto precedentemente, la superficie del *quart'ordine* con retta tripla è sempre caso particolare della superficie del quarto ordine con cubica gobba doppia (cfr. Lib. I, cap. V, n. 24).

tripla. Quali sono le immagini delle sezioni piane e della retta tripla della F_6?

Consideriamo finalmente il caso di una *superficie del quinto ordine, dotata di tre rette doppie, uscenti da un punto triplo.*

Dimostriamo che questa F_5 può essere trasformata birazionalmente in una superficie cubica.

Anzitutto sulla F_5 esistono in generale 56 coniche distinte, incidenti alle tre rette doppie della superficie. Invero la F_5 viene proiettata dal suo punto triplo su di un piano doppio con curva di diramazione, C_8, dell'ottavo ordine, che ha tre punti quadrupli nei punti A, B, C, in cui le rette doppie della superficie intersecano il piano doppio; ed esistono 28 coniche, passanti per A, B, C e bitangenti alla C_8 (1). I coni, che dal punto triplo della superficie proiettano queste coniche, intersecano la F_5, fuori delle rette doppie, in una parte residua del quart'ordine, che a sua volta si spezza in due coniche, appoggiantisi alle tre rette doppie. Sulla F_5 esistono pertanto 56 coniche distinte, incidenti alle tre rette doppie.

Si consideri ora una conica K_2 della F_5 che si appoggi alle tre rette doppie. Le superficie di STEINER, che hanno lo stesso punto triplo e le stesse rette doppie della F_5 e passano per la K_2, costituiscono un sistema omaloidico; e danno quindi luogo ad una trasformazione birazionale dello spazio, T, che è l'inversa della trasformazione quadratica di terza specie (cfr. Lib. I, cap. I, n. 9).

La trasformazione birazionale T muta la F_5 in una superficie cubica, F'_3, sulla quale le sezioni piane della F_5 si rappresentano nelle curve intersezioni della F'_3 con le quadriche, passanti per tre punti T'_1, T'_2, T'_3 e tangenti alla F'_3 in un punto P'.

Riferendoci alla rappresentazione piana della F'_3, mediante cubiche per sei punti A_1, A_2, ..., A_6, troviamo dunque che la F_5 può

(1) Per convincersi di ciò basta eseguire la trasformazione quadratica T, che ha i punti fondamentali A, B, C. La T muta la C_8 di diramazione in una quartica dotata di 28 bitangenti, le quali sono appunto le trasformate di 28 coniche $C_2(A, B, C)$, bitangenti alla C_8.

essere rappresentata dal sistema ∞^3 delle $C_6(A_1^2A_2^2\ldots A_6^2P^2T_1T_2T_3)$, dove P è il punto immagine di P' e T_1, T_2, T_3 corrispondono ai punti T'_1, T'_2, T'_3.

Inversamente, *un sistema lineare del tipo* $C_6(A_1^2A_2^2\ldots A_7^2T_1T_2T_3)$ *rappresenta una superficie del quint'ordine dotata di tre rette doppie, uscenti da un punto triplo.* Si considerino infatti le tre cubiche $C_3(A_1A_2\ldots A_7T_2T_3)$, $C_3(A_1A_2\ldots A_7T_3T_1)$, $C_3(A_1A_2\ldots A_7T_3T_2)$. Staccandole dal nominato sistema di sestiche si ottengono rispettivamente i tre fasci delle $C_3(A_1A_2\ldots A_7T_1)$, $C_3(A_1A_2\ldots A_7T_2)$, $C_3(A_1A_2\ldots A_7T_3)$. Ne viene che il sistema delle $C_6(A_1^2A_2^2\ldots A_7^2T_1T_2T_3)$ sega su di una $C_3(A_1A_2\ldots A_7T_iT_k)$ una g_2^1: la $C_3(A_1A_2\ldots A_7T_iT_k)$ rappresenta pertanto una retta doppia. Il punto triplo della F_5 è rappresentato dalla terna di punti S_1, S_2, S_3, coniugati a T_1, T_2, T_3, nell'involuzione, generata dalla rete delle cubiche per A_1, A_2, ..., A_7.

Giova osservare che la F'_3 può risultare un cono cubico ellittico, cioè non razionale. In questo caso, nemmeno la F_5 è razionale, possedendo un *tacnodo*; e questo è l'unico caso d'eccezione possibile.

NOTA STORICA. - La razionalità della superficie del quint'ordine con cubica gobba doppia fu dimostrata nel 1869 dal CLEBSCH [1], il quale rappresentò la superficie punto per punto su di un piano, appunto mediante la congruenza del primo ordine delle corde alla cubica gobba. Poco dopo, nel 1871, il CREMONA [2] indicava una trasformazione birazionale dello spazio, la quale muta una superficie cubica in una superficie del quint'ordine con cubica gobba doppia e viceversa; tale è la trasformazione (3, 3), che si ottiene dal sistema omaloidico delle superficie cubiche, aventi a comune due cubiche gobbe con quattro punti comuni; la F_5 con cubica

---

[1] Cfr. A. CLEBSCH: *Über die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung;* « Math. Ann. », Bd. I, 1869.

[2] Cfr. L. CREMONA: *Über die Abbildung algebraischer Flächen;* « Math. Ann. », Bd. IV. 1871.

gobba doppia si ottiene come trasformata di una superficie cubica passante per una delle cubiche gobbe fondamentali.

Invece la superficie del quint'ordine con retta tripla è un caso particolare della superficie d'ordine n con retta $(n-2)$-pla, alla quale si applica immediatamente, come osserva il NOETHER, il teorema sulla razionalità di una superficie contenente un fascio lineare di curve razionali. Anche questa superficie si può ottenere, secondo il CREMONA, come trasformata birazionale di una superficie di nota razionalità. Si consideri all'uopo la trasformazione che risulta dal sistema omaloidico delle superficie cubiche che hanno a comune una quintica gobba generale di genere due ed una sua corda r; la trasformata di una rigata cubica, che abbia la r come direttrice doppia, è una F_6 con retta tripla.

Un poco posteriore è la scoperta di una superficie non rigata del quint'ordine, dotata di tre rette doppie concorrenti in un punto triplo e della sua razionalità. Di tale superficie trovasi un cenno solamente nel 1881, in una memoria più volte citata di E. CAPORALI [1], dove è assegnato anche il sistema rappresentativo della superficie.

34. Nota sulle superficie a sezioni di genere tre.

La classificazione delle superficie razionali del quint'ordine a sezioni di genere tre, da noi esposta, è in accordo con la teoria generale delle superficie a sezioni di genere tre, che fu iniziata da G. CASTELNUOVO [2] nel 1890 ed è stata completata da G. SCORZA [3] nel 1909-10.

Nella memoria di CASTELNUOVO si parte dall'*ipotesi che sulla superficie F a sezioni piane (o iperpiane) di genere tre esista un*

---

[1] Cfr. E. CAPORALI: *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane*; Coll. Math. in memoriam D. CHELINI Milano, 1881.

[2] Cfr. G. CASTELNUOVO: *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere 3*; « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », vol. XXV, 1890.

[3] Cfr. G. SCORZA: *Le superficie a curve sezioni di genere 3*; « Ann. di Mat. », T. XVI, s. III, 1909 e T. XVII, s. III, 1910.

sistema lineare, almeno ∞^2, *di linee del quarto ordine, il quale seghi su ogni sezione piana di* F *la serie canonica* g_4^2. La discussione dei vari casi che può presentare il nominato sistema lineare di linee del quart'ordine, conduce a classificare le superficie a sezioni di genere tre che lo contengono al modo seguente:

a) superficie razionale normale del sedicesimo ordine, F_{16}, *dello spazio a quattordici dimensioni,* S_{14}, *rappresentata sul piano dal sistema lineare di tutte le quartiche, e sue proiezioni* (da punti esterni o no);

b) superficie normale dell'ottavo ordine, F_8, *dello spazio a sei dimensioni,* S_6, *rappresentabile su di un piano doppio con quartica di diramazione, e sue proiezioni* (da punti esterni o no). *La* F_8 *è generalmente razionale e rappresentabile sul piano dal sistema completo delle sestiche dotate di sette punti base doppi;*

c) le superficie del quart'ordine razionali, prive di linea multipla e dotate di punto doppio (cioè la superficie con tacnodo e le superficie $F_4^{(2)}$ ed $F_4^{(3)}$ di NOETHER);

d) superficie generale del quart'ordine dello spazio ordinario;

e) superficie non rigate a sezioni iperellittiche, che (cfr. Lib. II, cap. VI, n. 29) *sono proiezioni* (da punti esterni o no) *di una* F_{16}, *normale in* S_{14}, *la quale può essere di due tipi a seconda che sia rappresentata dal sistema completo delle* $C_6(O^4A^2)$ *ovvero dal sistema completo delle* $C_{8-\mu}(O^{6-\mu}A_1^2 \ldots A_{3-\mu}^2)(\mu = 0, 1, 2, 3)$ *ove i* $3 - \mu$ *punti doppi sono prossimi ad* O;

f) superficie rigate.

Dall'esame di questi tipi risulta che superficie razionali del quint'ordine si possono trovare solamente nelle categorie *a*), *b*), *e*). Precisamente: tra le superficie *a*) è del quint'ordine quella rappresentata dal sistema completo delle quartiche per 11 punti base semplici; essa è *la superficie del quint'ordine con cubica gobba doppia* (in particolare il monoide con tre rette doppie uscenti da un punto). Tra le superficie *b*) è del quint'ordine quella rappresentata dal sistema completo delle sestiche con sette punti doppi e tre punti semplici; essa è *la superficie del quint'ordine con tre rette doppie uscenti da un punto triplo.* Infine tra le superficie del quint'ordine del tipo *e*) si è già dimostrato come vi

sia solamente la superficie con *retta tripla*, che è sempre rappresentabile da un sistema di $C_7(O^5A_1^2A_2^2B_1B_2 \dots B_{11})$. Ritroviamo così i tre tipi di superficie razionali del quint'ordine a sezioni di genere tre, cui siamo pervenuti con discussione diretta.

Nè si potrebbe dubitare che altri tipi di superficie razionali del quint'ordine a sezioni di genere tre si trovassero tra le superficie che non soddisfano alla condizione restrittiva, posta dal CASTELNUOVO, di contenere un sistema lineare almeno ∞^2 di linee del quart'ordine, che seghi su ogni sezione piana la serie canonica completa. Invero, per una superficie razionale, il sistema che si rappresenta nel sistema *aggiunto* del sistema rappresentativo, è del tipo richiesto. Inoltre le sopracitate ricerche di G. SCORZA, che esauriscono la discussione nell'ipotesi contraria a quella ammessa dal CASTELNUOVO dimostrano che queste superficie sono tutte riferibili a rigate e si presentano solamente per gli ordini $n = 6, 7, 8$.

Ma del resto, a prescindere da ogni ipotesi, è facile dimostrare che *per una superficie del quint'ordine dello spazio ordinario a sezioni di genere tre è sempre possibile costruire una rete di quadriche* (subaggiunte) *che la taglia* (fuori delle linee multiple) *in una rete di linee del quart'ordine, seganti sopra ogni sezione piana la serie canonica* g_4^2.

Ciò si dimostra con un ragionamento, dovuto in una forma molto più generale al CASTELNUOVO (cfr. più avanti cap. VIII, n. 44). Sia F_5 la nostra superficie, s una retta generica dello spazio ed A e B due punti generici di s. Un piano generico per s sega la F_5 in una quintica di genere tre, che è normale e sulla quale le rette del piano segano una serie g_5^2 non speciale. La nominata quintica possiede una rete di coniche aggiunte; e vi sarà quindi *una* conica aggiunta passante per A e B. Facciamo ora variare il piano per s: si ottengono così ∞^1 coniche aggiunte passanti tutte per A e B; e di esse nessuna può spezzarsi nella retta s ed in una retta residua, chè altrimenti sarebbe speciale la serie segata dalle rette di un piano per s sulla curva sezione di F_5 con detto piano. Le ∞^1 coniche stanno dunque su di una quadrica. Ora, facendo variare sulla retta s i due punti A e B si ottiene una rete di quadriche, le quali passano semplicemente per

le linee doppie di F_5 (sono subaggiunte). Queste quadriche segano la F_5, fuori delle sue linee doppie (o multiple) in linee del quart'ordine seganti sulle sezioni piane di F_5 la g_4^2 canonica.

Le superficie del quint'ordine a sezioni di genere tre soddisfano dunque tutte all'ipotesi del CASTELNUOVO.

OSSERVAZIONE. - I risultati ora esposti, relativi alla classificazione delle superficie a sezioni di genere tre si possono enunciare al modo seguente: *Per $n > 4$, le superficie d'ordine n a sezioni di genere 3 sono razionali o riferibili ad una rigata.* Quest'ultimo enunciato si può accostare ad altri analoghi già ottenuti per le superficie a sezioni di genere 0, 1, 2 (cfr. Lib. II, capp. II, III, e per $p = 2$, la teoria delle superficie a sezioni iperellittiche, svolta ai nn. 28, 29, di questo capitolo). Giova ora osservare, sia pure a titolo di notizia, che tutti i teoremi conseguiti, in ordine alla razionalità o riferibilità a rigate delle superficie a sezioni piane dei primi generi, sono compendiati nel seguente teorema generale di CASTELNUOVO-ENRIQUES [1]:

Ogni superficie, che contenga un sistema lineare ∞^1 almeno di genere p e di grado $n > 2p - 2$, è razionale ovvero è riferibile ad una rigata irrazionale.

35. Superficie del quint'ordine a sezioni di genere quattro.

Una F_5 di S_3, che sia a sezioni di genere quattro, può avere come linea doppia:

a) una conica irriducibile, che eventualmente si può ridurre ad una coppia di rette *incidenti*, distinte od infinitamente vicine, ovvero

b) due rette sghembe.

Nel primo caso si può vedere che la F_5 non è razionale [2]. Pongasi invero che la F_5 sia razionale. Il suo sistema rappresen-

---

[1] Cfr. G. CASTELNUOVO ed F. ENRIQUES: *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*; « Ann. di Mat. », T. VI, s. III, 1901.

[2] Ciò risulta evidente nella teoria invariantiva delle superficie. Invero si dimostra in tale teoria che condizione necessaria perchè una superficie sia

tativo sarà un sistema lineare semplice, $|C_n|$, d'un certo ordine n e di dimensione tre. Il sistema lineare ∞^3 e d'ordine $m \leq 3n-3$, $|C_m|$, costituito dalla parte variabile delle jacobiane delle ∞^3 reti che si possono estrarre da $|C_n|$, sarà rappresentativo del sistema segato sulla F_5, fuori della conica doppia, dalle superficie polari del quart'ordine. Ora si consideri il sistema lineare completo d'ordine m determinato da una generica curva di $|C_m|$ presa con le sue molteplicità nei punti base di $|C_n|$. In tale sistema completo è contenuta l'immagine della curva segata sulla F_5, fuori della conica doppia, da una qualunque superficie del quart'ordine, passante per la conica doppia. Ma tra le nominate F_4 vi sono quelle spezzate nel piano della conica doppia ed in una generica superficie cubica. Pertanto le curve segate sulla F_5 dalle superficie cubiche dello spazio sarebbero rappresentate da curve piane d'ordine $\leq 3n-3$; e ciò è assurdo. Non può dunque esistere un sistema lineare di curve piane, rappresentativo della nostra F_5.

Esercizio. - Si dimostri che la F_5 con conica doppia è proiezione da un suo punto della superficie del sesto ordine, a sezioni canoniche di genere quattro, dello spazio a quattro dimensioni, che si ottiene intersecando una quadrica con un'ipersuperficie cubica.

La superficie del quint'ordine, dotata di conica doppia, può diventar razionale, per l'acquisto di qualche punto singolare. Se invero la F_5 con K_2 doppia possiede un punto doppio (o triplo) O, la trasformazione quadratica di prima specie, cui dà luogo il sistema omaloidico delle quadriche passanti per la K_2 e per O,

---

razionale è che il suo genere geometrico p_g sia nullo: cioè, se la F possiede solamente una linea doppia K, non devono esistere delle superficie d'ordine $n-4$ passanti semplicemente per K (superficie aggiunte).

Ma nel caso di una F_5 con K_2 doppia, il piano della K_2 è precisamente una superficie aggiunta d'ordine $n-4$, sicchè questa superficie risulta di genere geometrico $p_g = 1$.

Cfr. F. Enriques: *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, raccolte da L. Campedelli, Cedam, Padova, 1932.

trasforma la F_5 in una superficie del quart'ordine priva di linee multiple (o in una superficie cubica). Si ha così un mezzo per determinare i tipi di singolarità che rendono la F_5 con K_2 doppia razionale. La discussione completa è contenuta in tre memorie di D. MONTESANO [1], alle quali rimandiamo il lettore, che volesse approfondire quest'argomento.

Passiamo a studiare rapidamente la superficie del quint'ordine, dotata di due rette doppie, sghembe fra loro.

Seguendo il CLEBSCH [2], si ottiene immediatamente la rappresentazione piana di questa superficie, eseguendo la proiezione sghemba di essa, mediante le rette, che si appoggiano alle due rette doppie a e b. In questa rappresentazione, le immagini delle sezioni piane sono date da sestiche, che passano triplamente per i due punti A e B, in cui le rette doppie a e b di F_5 segano il piano rappresentativo, e semplicemente per 13 punti T_1, T_2, ..., T_{13}, immagini di altrettante rette di F_5, che si appoggiano alle rette doppie a e b. Le immagini delle rette doppie a e b sono date rispettivamente da una $C_5(A^3B^2T_1T_2...T_{13})$ e da una $C_5(A^2B^3T_1T_2...T_{13})$. Con la trasformazione quadratica che ha i punti fondamentali A, B, T_1, il sistema rappresentativo si può ridurre all'ordine minimo diventando del tipo $C_5(A^2B^2T_1T_2...T_{12})$: in questa rappresentazione le rette doppie sono date da una $C_4(A^2BT_1T_2...T_{12})$ e da una $C_4(AB^2T_1T_2...T_{12})$.

Il sistema rappresentativo della F_5 con due rette sghembe è *sovrabbondante*, giacchè la sua serie caratteristica è *speciale*, essendo una g_5^2 sopra un ente di genere quattro. Ne consegue che i punti base del sistema delle $C_5(A^2B^2T_1T_2...T_{12})$ *non* possono venir dati tutti ad arbitrio: se, del resto, i punti A, B, T_1, T_2, ..., T_{12}

---

[1] Cfr. D. MONTESANO: *Su alcune superficie omaloidiche di 4° e 5° ordine prive di linee multiple* (Rend. della R. Acc. di Napoli, 1900); *Le superficie omaloidiche di 5° ordine* (Ivi, 1901); *Su nuovi tipi di superficie razionali di 5° ordine* (Ivi, 1907).

[2] Cfr. A. CLEBSCH: *Über die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung*, « Math. Ann. », Bd. I, 1869.

fossero dati ad arbitrio, esisterebbero solamente ∞^2 $C_5(A^2B^2T_1T_2 ...T_{12})$, e non ∞^3 come è necessario.

Ma è facile vedere come debbano essere scelti i punti base A, B, T_1, T_2, ..., T_{12}, perchè esista il sistema lineare ∞^3 delle $C_5(A^2B^2T_1T_2...T_{12})$. Infatti abbiamo già detto che le due rette doppie della superficie sono rappresentate da una $C_4(A^2BT_1T_2...T_{12})$ e da una $C_4(AB^2T_1T_2...T_{12})$. Prese dunque ad arbitrio una $C_4(A^2B)$ ed una $C_4(AB^2)$, si indichino con T_1, T_2, ..., T_{12} gli ulteriori 12 punti d'intersezione di queste due quartiche. È facile vedere che, scelti a questo modo i punti A, B, T_1, T_2, ..., T_{12}, esiste *un* sistema lineare ∞^3 di $C_5(A^2B^2T_1T_2...T_{12})$: per costruirlo basta combinare linearmente il fascio delle $C_5(A^2B^2T_1T_2...T_{12})$ spezzate nella $C_4(A^2BT_1T_2...T_{12})$ ed in una retta per B, con il fascio delle $C_5(A^2B^2T_1T_2...T_{12})$ spezzate nella $C_4(AB^2T_1T_2...T_{12})$ ed in una retta per A.

ESERCIZIO. - Si provi — con L. CREMONA [1] — che la F_5 con due rette doppie sghembe è trasformabile birazionalmente in una superficie cubica, mediante una trasformazione birazionale dello spazio.

All'uopo si trasformi una superficie cubica generica F_3 mediante il sistema omaloidico delle superficie cubiche, che passano per una quartica gobba di prima specie K_4 e per due rette della F_3, che sono corde della K_4. Si otterrà una F_5 con due rette doppie sghembe. Inversamente, come si può passare da una F_5 con due rette doppie sghembe, ad una superficie cubica?

36. Superficie del quint'ordine a sezioni di genere cinque e sei.

Le superficie del quint'ordine a sezioni di genere cinque possiedono una retta doppia e, come già le F_5 con conica doppia, *non sono in generale razionali*; altrettanto dicasi delle F_5 a sezioni di genere sei, che sono prive di linea multipla.

---

[1] Cfr. L. CREMONA: *Über die Abbildung algebraischer Flächen*, «Math. Ann.», Bd. IV, 1871.

Relativamente alle superficie del quint'ordine dotate di conica doppia o di retta doppia, ovvero prive affatto di linea doppia, si può porre il problema di determinare le singolarità *puntuali*, che le rendono razionali. Questo problema è stato affrontato per due vie diverse, che si completano e controllano a vicenda, da D. MONTESANO [1] e da A. PENSA [2]:

a) D. MONTESANO cerca di ottenere delle superficie razionali del quint'ordine a sezioni di genere 4, 5 o 6, trasformando cremonianamente delle superficie di già riconosciuta razionalità:

b) A. PENSA cerca di determinare a priori i tipi di singolarità che rendono una F_5 razionale. Il punto di partenza è offerto da un teorema di G. CASTELNUOVO, il quale, nell'annullarsi di due caratteri invarianti della superficie (il genere numerico ed il bigenere), dà le condizioni necessarie e sufficienti per la razionalità della superficie. Si tratta dunque di valutare l'influenza dei vari tipi possibili di singolarità sul genere numerico e sul bigenere e di esigere poi che la F_5 abbia tali singolarità da rendere nulli questi due caratteri.

Come risultato di queste ricerche si possiede oggidì circa una trentina di tipi di superficie del quint'ordine, che sono razionali in virtù di singolarità puntuali, aggiunte alla linea doppia; e probabilmente non ve ne sono altri. Per la descrizione dei tipi conosciuti, rimandiamo il lettore alle memorie citate.

37. Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in sè.

Una classe notevole di superficie algebriche generalmente razionali è costituita dalle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in sè. Si ha invero il seguente

Teorema di ENRIQUES-FANO: *Le superficie algebriche di uno*

---

[1] Cfr. le tre memorie citate a pag. 494.

[2] Cfr. A. PENSA: *Sull'influenza di alcune singolarità di superficie sul genere numerico e sul bigenere P, con applicazione alla determinazione di F_n razionali.* Mondovì. 1900 e *Sulle superficie razionali del 5° ordine.* « Ann. di Mat. », Serie III, T. VI, 1901.

spazio ad un numero qualunque di dimensioni, che ammettono infinite trasformazioni proiettive in sè, sono razionali o riferibili a rigate.

Incominciamo ad osservare — con E. PICARD — che le trasformazioni proiettive di una superficie algebrica in se stessa formano un gruppo *algebrico* (cioè le operazioni del gruppo, pensate astrattamente come punti, costituiscono una varietà algebrica, irriducibile o riducibile): invero, per una omografia, le condizioni di lasciare invariata una superficie algebrica, sono algebriche.

Ciò posto, se esistono infinite trasformazioni proiettive che mutano in sè una superficie algebrica, esse costituiranno un gruppo algebrico e quindi una o più infinità *continue*. In altre parole il gruppo più ampio di omografie, che lascia invariata una superficie algebrica, è certamente un gruppo continuo o un gruppo misto. Ma in quest'ultimo caso esso contiene sempre un gruppo continuo. Riassumendo possiamo quindi dire: *se una superficie algebrica F è mutata in sè da infinite omografie, vi è certamente un gruppo continuo algebrico, che lascia invariata la F.*

Ciò premesso, per arrivare alla dimostrazione del teorema che abbiamo in vista, stabiliamo successivamente le seguenti proposizioni:

1) Le superficie algebriche con un gruppo continuo algebrico ∞^1 di trasformazioni proiettive sono razionali o riferibili a rigate.

2) Se una superficie algebrica F possiede un gruppo continuo algebrico ∞^2 di trasformazioni proiettive, Γ, essa ammette altresì un sottogruppo continuo algebrico ∞^1 di Γ.

3) Se una superficie algebrica F ammette un gruppo continuo algebrico Γ di trasformazioni proiettive, di dimensione $r > 2$, essa ammette altresì un sottogruppo algebrico continuo ∞^1 o ∞^2 di Γ.

La proposizione 1) resta dimostrata dall'osservare che le traiettorie di un gruppo continuo algebrico ∞^1 di omografie costituiscono un fascio di curve di KLEIN e LIE, algebriche e perciò *ra-*

zionali (1). *Infatti la superficie F, possedendo un fascio (razionale o irrazionale) di curve razionali è razionale o riferibile a rigata (cfr. Lib. II, cap. I).*

Come corollario si deduce: se una superficie algebrica F ammette un gruppo continuo algebrico ∞^s ($s \geq 1$) di trasformazioni proiettive in sè, dotate di un punto unito O sopra F, la F stessa è certo razionale o riferibile a rigata. Infatti, se la proposizione vale per un certo valore di s, vale anche per $s+1$: giacchè le trasformazioni del gruppo ∞^{s+1}, che lasciano fermo un punto O' di F, infinitamente vicino ad O, formano un gruppo continuo algebrico ∞^s; in generale basterà prendere O' nell'intorno del primo ordine di O, ma se tutti i punti dell'intorno del primo ordine fossero già uniti, si dovrebbe prendere un punto dell'intorno del secondo ordine, ecc.

Passiamo a dimostrare la proposizione 2). All'uopo osserviamo che una generica omografia γ del gruppo Γ, costituito dalle ∞^2 trasformazioni proiettive di F, avrà un iperpiano unito α, che resterà unito per le ∞^1 omografie formanti il gruppo delle potenze di γ. Ora, se le omografie che lasciano fermo l'iperpiano α non sono tutte le omografie di Γ, ma soltanto ∞^1, la superficie F risulta razionale o riferibile a rigata per la proposizione 1). Pongasi invece che α resti fermo per tutte le ∞^2 omografie di Γ; allora resta mutata in sè da queste anche la curva C, sezione di α con F, e possono darsi due casi:

a) la C è costituita da punti uniti e si ricade quindi nelle condizioni del corollario precedente, ovvero

b) la C non è costituita da punti uniti, e quindi le trasformazioni di Γ, che lasciano fermo un punto di C, formano un sottogruppo algebrico ∞^1.

In ogni caso si conclude che la superficie F è mutata in sè da un gruppo continuo algebrico ∞^1 di omografie ed è quindi razionale o riferibile a rigata.

Finalmente la proposizione 3) si dimostra come segue. Se la

---

(1) Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. III, pag. 239.

F possiede un gruppo continuo algebrico ∞^r di trasformazioni proiettive, di dimensione $r > 2$, fissando un punto di F, e poi — eventualmente — una tangente od anche una curva osculatrice ecc. per esso, si otterrà sempre un sottogruppo continuo algebrico di dimensione 1 o 2.

Rimane così dimostrato il teorema di ENRIQUES-FANO.

NOTIZIA STORICA. - Lo studio delle superficie con infinite trasformazioni proiettive in sè s'inizia con una memoria di F. ENRIQUES del 1893 (1). Il teorema concernente la razionalità e la riferibilità a rigata delle nostre superficie viene ivi stabilito nell'ipotesi che le superficie siano immerse nello spazio ordinario e che l'omografia generica del gruppo continuo trasformante in sè la superficie sia generale. Nel 1895 il teorema fu esteso da G. FANO (2) al caso di superficie immerse in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni e senza escludere l'ipotesi di gruppi costituiti da omografie con punti multipli.

Fra i risultati dell'analisi di G. FANO giova osservare il seguente: se una superficie algebrica appartenente ad uno spazio qualsiasi ammette un gruppo ∞^2 (e non più) di trasformazioni proiettive a punti uniti variabili, un'omografia generale di questo gruppo dovrà sempre avere i punti doppi tutti distinti (o, più generalmente, il gruppo costituito da questi punti doppi, in numero finito o infinito, dovrà sempre appartenere allo spazio della

---

(1) Cfr. F. ENRIQUES: *Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse;* Atti del R. Istituto Veneto, T. IV, s. VII, 1892-93; vedi anche l'aggiunta contenuta nella nota: *Intorno alla memoria «Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse»*, ivi, 1893-94.

(2) Cfr. G. FANO: *Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni projettive in se stesse*; «Rend. Acc. Lincei», s. 5ª, vol. IV, 1895; da consultare anche le memorie seguenti: *Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni projettive in sè*; «Rend. Circ. Mat. di Palermo», T. X, 1896; *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane del piano e sopra certi gruppi di trasformazioni projettive*; ivi; *Un teorema sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni projettive in sè*; ivi, T. XI, 1897.

superficie proposta). Questo teorema permetterebbe di trovare facilmente i tipi distinti di gruppi proiettivi ∞^2, la cui omografia generica sia un'omografia generale, di un S_r qualsiasi; e quindi le superficie algebriche mutate in sè dai tipi nominati. È precisamente ciò che ha fatto l'ENRIQUES nella memoria citata, per il caso dello spazio ordinario. In base al teorema di FANO ora enunciato la discussione dell'ENRIQUES è sostanzialmente esauriente, nonostante si limiti ai gruppi la cui omografia generica sia generale. Si trova così che *le superficie dello spazio ordinario con* ∞^2 *(e non più) trasformazioni proiettive in sè sono razionali ed appartengono ad uno dei seguenti tipi*:

a) *Le superficie algebriche di* KLEIN-LIE, cioè le superficie d'equazione $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4} = 1$ dove α_1, α_2, α_3, α_4 sono quattro interi legati dalla relazione $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$;

b) *Rigate* (*di ordine* ≥ 4) *con due direttrici rettilinee infinitamente vicine*;

c) *Superficie contenenti un fascio di coniche,* segate dai piani per una retta;

d) *Superficie di sest'ordine a sezioni ellittiche* [1].

Per quanto riguarda le superficie con un gruppo più che ∞^2 di trasformazioni proiettive in sè si hanno soltanto i seguenti tipi:

a) *la sviluppabile del quart' ordine circoscritta ad una cubica gobba;*

b) *la rigata cubica di* CAYLEY;

entrambe con ∞^3 trasformazioni proiettive in sè,

c) *i coni* (che ammettono tutti almeno ∞^4 trasformazioni proiettive in sè);

---

[1] Il sistema rappresentativo della superficie di questo tipo è dato da un sistema lineare ∞^3 di cubiche per tre punti base A, B, C in linea retta. Le singolarità della superficie sono state studiate, in relazione al sistema rappresentativo, da E. CASTELNUOVO (cfr.: *Di una classe di superficie razionali che ammettano* ∞^2 *trasformazioni proiettive in sè*; « Rend. Acc. Lincei », vol. XXIX, s. 6°, 1936); esse consistono in una cubica gobba cuspidale sulla quale giace un punto quadruplo uniplanare O; la tangente alla cubica cuspidale in O e la tangente successiva sono triple.

d) *le quadriche* con ∞^6 trasformazioni proiettive in sè;

e) *i piani* con ∞^{12} trasformazoni proiettive in sè.

Questi ultimi risultati concordano con quelli trovati, indipendentemente dall'ENRIQUES, da S. LIE (1).

38. Sulle irrazionalità numeriche, che intervengono nella rappresentazione di una superficie razionale su di un piano.

Se si ripensa agli esempi di superficie razionali da noi incontrati si vede che per alcuni tipi di queste superficie la rappresentazione piana si ottiene in un modo solo, cioè riesce univocamente determinata dalla superficie stessa.

Ciò succede ad esempio pei monoidi d'ordine $n \geq 3$, per i quali basta proiettare la superficie dal suo punto $(n-1)$-*plo*, ovvero per le superficie del quint'ordine dotate di cubica gobba doppia o di due rette doppie sghembe tra loro che si rappresentano mediante la congruenza delle rette che sono corde della cubica gobba doppia ovvero si appoggiano alle due rette doppie. In questi casi la rappresentazone piana della superficie si può dare *razionalmente* rispetto ad essa, cioè mediante funzioni razionali di due parametri che dipendono razionalmente dai coefficienti della sua equazione.

Ma in generale la rappresentazione piana di una superficie razionale $F(x, y, z) = 0$, cioè la risoluzione dell'equazione con x, y, z funzioni razionali invertibili di due parametri u e v, supposta possibile, esigerà l'introduzione di *irrazionalità numeriche* relative al corpo definito dai coefficienti di F: cioè le dette funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ dipenderanno dai coefficienti di F (che si suppongono numericamente dati) non già razionalmente, bensì in forza di equazioni che definiscono appunto le irrazionalità sopra nominate. Così ad esempio per rappresentare su di un piano una quadrica per proiezione da un suo punto O, occorre conoscere le coordinate di O, le quali non si costruiscono in gene-

(1) Cfr. S. LIE: *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, pagg. 190-8, Leipzig, Teubner, 1896.

rale razionalmente a partire dalla quadrica, ma esigono la risoluzione di un'equazione di secondo grado (intersezione della quadrica con una retta), di cui una delle radici fornirà una coordinata di O. La rappresentazione piana della quadrica esige dunque l'introduzione di un radicale quadratico (cfr. l'esercizio II a pag. 16). Analogamente, per rappresentare su di un piano una superficie cubica generale, mediante la proiezione sghemba (cfr. Lib. I, cap. II, n. 13), è necessario individuare sulla superficie una coppia di rette sghembe, il che importa la conoscenza di due soluzioni di un'equazione di 27° grado, ecc. Queste osservazioni suggeriscono la seguente questione:

Da quali irrazionalità numeriche (da aggiungersi al campo di razionalità dei coefficienti) *si può far dipendere la risoluzione di un'equazione*

$$F(x, y, z) = 0$$

con funzioni invertibili di due parametri (*supposta possibile*); ovvero *da quali irrazionalità numeriche dipende la rappresentazione piana di una superficie razionale* F *d'equazione*

$$F(x, y, z) = 0?$$

Per il caso delle curve la questione analoga è stata posta e risoluta da M. NOETHER (cfr. Lib. II, cap. I, n. 2). Abbiamo veduto che: Le curve razionali si possono dividere in due classi che si possano trasformare senza l'aggiunta di irrazionalità:

a) in una conica, ovvero

b) in una cubica con punto doppio.

E si trova quindi: le curve della classe *a*) si rappresentano su di una retta aggiungendo al campo di razionalità dei coefficienti un radicale quadratico; quelle della classe *b*) senza l'aggiunta di alcuna irrazionalità.

La ricerca delle irrazionalità numeriche che intervengono nella rappresentazione su di un piano delle superficie razionali, è stata compiuta da F. ENRIQUES [1]. Egli ha stabilito che:

---

[1]) Cfr. F. ENRIQUES: *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la*

Le superficie razionali si possono dividere in quattro famig a seconda che si possono trasformare con trasformazioni bi zionali a coefficienti razionali (cioè senza l'aggiunta d'irrazion lità numeriche):

1) *in una superficie a sezioni razionali,* ovvero

2) *in una superficie a sezioni ellittiche,* (*d'ordine* $n \geq 2$ ([1] ovvero

3) *in una superficie a sezioni iperellittiche,* ovvero infi

4) *in un cono quadrico doppio con sestica di diramazion*

La ricerca delle irrazionalità da aggiungersi per ottene la rappresentazione piana si può dunque limitare ai quattro ti sopranominati. Si perviene così a riconoscere che *la rappresentazione su di un piano di una superficie razionale richiede, seconda della famiglia cui essa appartiene*:

a) operazioni razionali ed estrazioni di radicali quadratici cubici,

b) risoluzione delle equazioni per la bisezione degli argomen delle funzioni abeliane di genere 3 *o* 4 *ovvero delle funzioni ipe ellittiche di genere* p ($p = 1, 2, \ldots$): queste ultime equazioni co ducono a irrazionalità generali del grado p.

In quanto segue miriamo a far comprendere il procedimen col quale si perviene ai risultati enunciati, pur senza entrare minuti particolari.

Sia F una superficie razionale, d'un certo ordine n, in S_3, o uno spazio elevato S_r ($r \geq 3$). Anzitutto si può trasformare F in un'altra superficie che sia priva di punti multipli *prop* o *isolati* (cioè abbassanti il genere delle sezioni piane o iperpia passanti per essi); e questa trasformazione si effettua senza a giunta d'irrazionalità numeriche ([2]).

([1]) Per $n = 2$, la superficie a sezioni ellittiche è il piano doppio con qua tica di diramazione.

([2]) Il procedimento della trasformazione viene descritto nelle prime p

Ora, in una rappresentazione piana della F, un punto multiplo proprio è rappresentato da una curva (1) fondamentale propria, cioè da una curva che offre una sola condizione alle immagini delle sezioni piane di F e che, staccata, dà luogo ad un sistema residuo di genere inferiore al genere del sistema rappresentativo di F. Per quanto precede possiamo quindi concludere: ogni superficie razionale F può essere trasformata birazionalmente senza aggiunta di irrazionalità numeriche, in una superficie razionale F', il cui sistema rappresentativo, $|C|$, sia privo di curve fondamentali proprie.

Ciò premesso, sia F una superficie razionale, priva di punti multipli propri, a sezioni piane di genere maggiore di uno; è $|C|$ il suo sistema rappresentativo, che supponiamo d'ordine m, e che risulterà privo di curve fondamentali proprie. Consideriamo il sistema lineare, $|C'|$, aggiunto puro di $|C|$, costituito cioè dalla parte variabile delle curve d'ordine $m-3$, aggiunte alle curve di $|C|$. Il sistema lineare $|C''|$ è unico e quindi *razionalmente* determinato, data la superficie F.

A *priori* l'operazione razionale, che fa passare dal sistema li-

---

nare successivamente i punti multipli propri (senza crearne altri), trasformando la F mediante il sistema lineare delle superficie (e ipersuperficie) d'un ordine abbastanza alto, passanti per uno o più punti multipli propri, in modo da sciogliere gli intorni dei punti nominati. Occorre soltanto osservare che se si vuole che in una simile trasformazione non si introducano delle irrazionalità numeriche occorre che le superficie trasformanti passino per *tutti* i punti multipli propri che hanno la stessa molteplicità. Dopo ciò il punto più delicato consiste nel giustificare che il procedimento ha termine dopo un numero finito di volte. Nell'ultima memoria citata, F. ENRIQUES, facendo intervenire l'ipotesi della razionalità di F, dà una semplice dimostrazione di questo fatto. Ma ricerche posteriori, collegantisi al problema di trasformare birazionalmente una superficie in una affatto priva di singolarità, hanno messo fuori di dubbio il fatto per ogni superficie algebrica. Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. II, Lib. IV, Cap. IV.

(1) Si può supporre che un punto multiplo proprio non sia rappresentato dall'intorno di un punto. Invero per un noto teorema di M. NOETHER il sistema rappresentativo di F si può trasformare in un sistema, per il quale i punti base siano tutti distinti.

neare $|C|$ a $|C'|$ riesce definita sopra una qualunque superficie trasformata del piano e quindi sulla data F (d'ordine n). Nella teoria generale delle superficie si apprende ad effettuare tale operazione, sia nel supposto che le sezioni piane di F appartengano a $|C|$ (nel qual caso le C' sono segate da superficie *aggiunte* d'ordine $n-3$, passanti $i-1$ volte per le curve *i-ple* di F), sia in senso invariantivo: il sistema $|C'|$ si lascia definire costruendo le curve *jacobiane* delle reti contenute in C (luogo dei punti doppi delle curve di tali reti) e staccando 2 curve C' dal sistema jacobiano determinato in tal guisa (1).

Comunque sia, a partire da un sistema lineare $|C|$ privo di curve fondamentali proprie, che sia di un certo genere p, si costruirà (razionalmente) sopra F il sistema lineare aggiunto $|C'|$, che sarà ∞^{p-1}; e questo sarà in generale, come $|C|$, privo di curve fondamentali proprie, e rappresentativo di una superficie F' (priva di punti multipli propri) birazionalmente equivalente ad F, dello spazio a $p-1$ dimensioni: per costruire la F' basta porre una proiettività tra il sistema degli iperpiani di S_{p-1} ed il sistema delle curve che, su F, corrispondono alle curve di $|C'|$. Passando ora da $|C'|$ al secondo aggiunto puro $|C''|$, si passerà analogamente dalla superficie F' ad una nuova superficie F'', razionale e rappresentata sul piano del sistema delle curve di $|C''|$. Le superficie della serie $F, F', F'', \ldots$ sono tutte trasformate birazionali della F, prive di punti multipli propri e si costruiscono l'una dall'altra, senza l'aggiunta di alcuna irrazionalità numerica. D'altronde la serie si arresta certamente, perchè gli ordini dei sistemi rappresentativi $|C|, |C'|, |C''|, \ldots$ calano di almeno tre unità per volta; e la superficie con la quale termina la serie risponde all'ultimo aggiunto del sistema di partenza $|C|$, il quale rappresenta effettivamente una superficie priva di punti multipli propri. Si vede in sostanza, che la determinazione dei tipi di superficie razionali, cui si perviene alla fine del procedimento descritto, dipende dalla determinazione dei tipi di si-

(1) Cfr. le *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* di F. ENRIQUES, raccolte da L. CAMPEDELLI (Cedam, Padova, 1932).

stemi lineari rappresentativi di superficie) che si ottengono come ultimi aggiunti (puri) a partire da un sistema $|C|$ dato; e questo problema, in forma leggermente diversa, è stato da noi già trattato al n. 18 del cap. IV del Lib. II.

Per quanto riguarda il problema presente, occorre indagare quando, procedendo per successive aggiunzioni a partire da un sistema lineare irriducibile, semplice e privo di curve fondamentali proprie, si presenti per la prima volta un aggiunto che non goda di tutte le anzidette proprietà. Invero il procedimento descritto si può arrestare o perchè non esiste più un sistema aggiunto ∞^1 almeno, ovvero perchè il prossimo aggiunto non è rappresentativo di una superficie priva di punti multipli propri. Nella prima ipotesi, tenuto conto dei risultati del n. 17 del Lib. II, cap. IV, si può pervenire solamente ad un sistema ∞^2 almeno di curve razionali o ∞^3 almeno di curve ellittiche; invero una rete di curve ellittiche ed il sistema ∞^3 delle sestiche per otto punti base doppi non sono sistemi semplici. Per discutere la seconda ipotesi occorre anzitutto stabilire quando l'aggiunto puro di un sistema lineare possa essere riducibile ovvero non semplice. Se l'aggiunto di un sistema lineare $|C|$ è riducibile, il sistema $|C|$ è necessariamente costituito da curve iperellittiche ed anzi se $|C|$ è semplice, l'aggiunto è necessariamente composto con le curve razionali di un fascio [1]. Se invece l'aggiunto di un sistema $|C|$ non sia semplice, seguendo il CASTELNUOVO [2], si può dimostrare che $|C|$, supposto ∞^r, contiene un sistema ∞^{r-1} di curve iperellittiche: se inoltre p indica il genere di $|C|$, il sistema $|C'|$ consta di ∞^{p-1} curve iperellittiche di genere $p-2$ secantisi a due a due in $p-2$ coppie della g^1_2 che ciascuna $|C'|$ contiene. Infine se $|C|$ è irriducibile, semplice e privo di curve fondamentali, il sistema $|C'|$ può essere non semplice solamente quando esso sia riducibile ad una rete di cubiche per sette punti base ovvero al sistema ∞^3 delle sestiche per otto punti base doppi.

---

[1] Cfr. il n. 29 di questo capitolo.

[2] Cfr. G. CASTELNUOVO: *Sulle superficie di genere zero*; Memorie della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL, s. III, t. X, 1894-6.

In conseguenza si può dire che:

L'operazione di aggiunzione successivamente applicata nel piano a partire da un sistema lineare irriducibile semplice e privo di curve fondamentali, porta sempre a sistemi dello stesso tipo e termina con un sistema lineare:

1) ∞^2 *almeno di curve razionali,* ovvero

2) ∞^3 *almeno di curve ellittiche,* ovvero

3) *di curve iperellittiche,* ovvero

4) *con un sistema che ha come aggiunto una rete di cubiche per 7 punti base o un sistema lineare* ∞^3 *di sestiche per 8 punti base doppi.*

Ma il sistema delle cubiche per 7 punti base ed il sistema delle sestiche per 8 punti base doppi, benchè non semplici, si possono ancora ritenere come rappresentativi di una superficie razionale: cioè rispettivamente del piano doppio con quartica di diramazione e del cono quadrico doppio con sestica di diramazione di genere 4. Teniamo inoltre conto del fatto che il piano doppio con quartica di diramazione si può considerare come una superficie a sezioni ellittiche d'ordine due.

Per quanto precede perveniamo così all'enunciato:

Ogni superficie razionale può essere trasformata birazionalmente, con una trasformazione a coefficienti razionali, in una superficie:

a) a sezioni razionali, ovvero

b) a sezioni ellittiche d'ordine $n \geq 2$, ovvero

c) a sezioni iperellittiche, ovvero

d) in un cono quadrico doppio con sestica di diramazione.

Per esaurire la ricerca, che ci siamo proposti, rimangono ora da classificare le irrazionalità che si richiedono per rappresentare sopra un piano le superficie dei tipi *a*), *b*), *c*), *d*).

Incominciamo dalle superficie della prima famiglia, ossia dalle superficie a sezioni razionali. Dai risultati del cap. II del Lib. II sappiamo che le nominate superficie sono rigate o proiezioni della superficie di VERONESE. Proiettando nello spazio ordinario abbia-

mo dunque *il piano, la quadrica, le rigate razionali di grado maggiore di due e la superficie di* STEINER.

La quadrica si rappresenta sul piano per proiezione da un suo punto; e la determinazione di tale punto esige l'estrazione di un radicale quadratico.

Una rigata razionale di grado maggiore di due si può rappresentare sul piano, riferendo proiettivamente il sistema ∞^1 delle sue generatrici al sistema delle rette d'un fascio nel piano, e proiettando da un asse qualsiasi ciascuna generatrice sulla retta corrispondente del detto piano. La seconda operazione si effettua in modo *razionale*. La prima esige in sostanza la rappresentazione punto per punto d'una sezione piana della rigata sopra una retta, ossia la rappresentazione su di una retta d'una curva razionale; essa si effettua razionalmente se il grado della rigata è dispari o estraendo al più un radicale quadratico se il grado è pari (cfr. Lib. II, cap. I, n. 2).

Infine la superficie di STEINER si rappresenta senza alcuna irrazionalità per proiezione dal suo punto triplo.

In conclusione:

Le superficie razionali della classe a) si possono rappresentare sul piano estraendo (al più) un radicale quadratico.

La famiglia *b*) è costituita dalle superficie a sezioni ellittiche, ossia dalle superficie normali d'ordine n di S_n e dalle loro proiezioni. Il valore di n è comparso tra 2 e 9. Le superficie si rappresentano con le ∞^n cubiche per $9-n$ punti base e per $n=8$ anche con le ∞^8 quartiche per due punti doppi (cfr. Lib. II, cap. II, n. 12).

Analizziamo i vari casi:

1) Per $n=2$ si ha la superficie rappresentata dalle ∞^2 cubiche per 7 punti base, ossia il piano doppio con quartica di diramazione di genere 3. La sua rappresentazione sul piano semplice esige la risoluzione di un problema di bisezione degli argomenti delle funzioni abeliane relative alla quartica di diramazione: invero (cfr. Lib. II, cap. V, n. 26), nota una bitangente alla quartica, si può costruire razionalmente una superficie cubica

F_3, che per proiezione da un punto si rappresenta sul nominato piano doppio; e la rappresentazione piana della F_3 esige la conoscenza di due rette non incidenti, cioè di altre due bitangenti alla quartica di diramazione.

2) Per $n = 3$ si ha la superficie cubica di S_3, che si rappresenta sul piano mediante la proiezione sghemba da due delle sue rette, non incidenti. Le irrazionalità numeriche che qui intervengono sono definite dall'equazione delle 27 rette, che rientra — come è noto — nell'equazione per la bisezione degli argomenti delle funzioni abeliane di genere 3, cioè nell'equazione delle 28 bitangenti ad una quartica. Con la proiezione della superficie da un suo punto (irrazionalità quadratiche e cubiche) si ha invero un piano doppio con quartica di diramazione, di cui vien data una bitangente.

3) Per $n = 4$ si ha la superficie di SEGRE, intersezione di due quadriche di S_4, la quale si rappresenta sul piano per proiezione da una delle 16 rette. Anche qui si ha da fare con un caso particolare della stessa equazione che si è incontrata nel caso $n = 2$. Del resto la superficie proiezione della data in S_3 possiede una conica doppia; e da un punto di questa (irrazionalità quadratica) viene proiettata su di un piano doppio con quartica di diramazione, di cui 16 bitangenti ci danno le rette della superficie.

4) Per $n = 5$ troviamo una Φ_5 normale in S_5. Essa si può rappresentare sul piano senza introdurre irrazionalità. Invero proiettando la Φ_5 da punti generici di S_5 in S_3, si ottiene una superficie del quint'ordine in S_3, dotata di una quintica doppia con punto triplo, al quale risponde sulla Φ_5 una terna di punti, che è così determinata razionalmente. Si seghi ora la Φ_5 con un S_3 generico passante per la terna nominata. L'ulteriore intersezione è costituita da una coppia di punti P_1 e P_2, razionalmente determinata. Proiettando la Φ_5 dalla retta P_1P_2, si ottiene in S_3 una superficie cubica, sulla quale vi è una coppia di rette sghembe razionalmente individuata (ogni retta essendo l'immagine dell'intorno di uno dei punti P_1 o P_2); sicchè si è condotti a rappresentare la superficie cubica sul piano con la consueta proiezione sghemba.

5) Per $n = 6$ si ha una Φ_6 normale in S_6, la quale viene proiettata in una rigata cubica normale di S_4 da una sua retta. Siccome questa si rappresenta sul piano senza introdurre irrazionalità numeriche, così le irrazionalità da cui dipende la rappresentazione della Φ_6 saranno definite dall'equazione che vale a separare le sue 6 rette. Invero risulta subito dalla rappresentazione piana della Φ_6 mediante le ∞^6 cubiche per tre punti base non allineati, che la Φ_6 possiede sei rette, le quali si distribuiscono in due terne: quelle di una terna sono a due a due sghembe tra loro; (una terna è rappresentata dagli intorni dei tre punti base, e l'altra dalle tre rette, che congiungono i tre punti base a due a due in tutti i modi possibili). Perciò l'equazione di sesto grado da cui dipende la separazione delle sei rette si spezza in due equazioni di terzo grado separabili con l'estrazione di un radicale quadratico. Per determinare *una* retta basta risolvere un'equazione di terzo grado. In definitiva la rappresentazione della Φ_6 sul piano esige solamente l'introduzione di radicali quadratici e cubici.

6) Per $n = 7$ si trova una Φ_7 normale in S_7, rappresentata sul piano da cubiche per due punti. La Φ_7 contiene tre rette: due sghembe tra loro e l'altra incidente ad esse. Da quest'ultima retta, che è razionalmente determinata, la Φ_7 viene proiettata in una superficie di VERONESE, che a sua volta si rappresenta sul piano senza irrazionalità. Così la Φ_7 si rappresenta sul piano razionalmente.

7) Per $n = 8$ si hanno due tipi di Φ_8 normali in S_8: il primo tipo rappresentato da cubiche per un punto ed il secondo da quartiche per due punti doppi A e B.

La Φ_8 del primo tipo si rappresenta razionalmente sul piano. Invero essa possiede *una* retta e proiettando da questa si ottiene una rigata del quint'ordine che (cfr. precedentemente) si rappresenta razionalmente.

Per il secondo tipo [1] la rappresentazione piana si può far

[1] Per le irrazionalità, che intervengono nella rappresentazione piana di questa superficie cfr. la nota di F. ENRIQUES: *Sulle irrazionalità aritmetiche che occorrono per la rappresentazione piana della superficie razionale a se-*

dipendere da tre radicali quadratici. Invero la Φ_8 possiede due fasci di coniche (rappresentati dai fasci delle rette per A e B); le coniche di essi stanno in piani formanti due serie razionali α e β, che generano due varietà a tre dimensioni secanti uno S_6 secondo due curve razionali C_α e C_β. Mediante un radicale quadratico (risoluzione di un'equazione di secondo grado) si possono separare le due curve C_α e C_β; e (al più) l'introduzione di altri due radicali quadratici serve a determinare due punti di esse, uno sopra ciascuna delle due curve. Dopo ciò sono determinati due piani, che segano la Φ_8 secondo due coniche (una di ciascun fascio) e quindi anche il punto comune alle due coniche. Proiettando la Φ_8 dal piano tangente a questo punto si cade nella superficie di VERONESE, che si rappresenta senza ulteriori irrazionalità.

8) Finalmente per $n = 9$ si ha una Φ_9 di S_9, rappresentata sul piano dal sistema lineare di tutte le cubiche.

Si può determinare razionalmente un punto della Φ_9 risolvendo una equazione di quarto ed una di terzo grado. Invero, la relazione tra una cubica e la sua hessiana nel piano rappresentativo di Φ_9, si rispecchia in una relazione per la quale ad ogni sezione iperpiana di Φ_9 corrisponde un'altra sezione iperpiana, razionalmente determinata, che si può chiamare hessiana della prima.

Ora fra le sezioni iperpiane di Φ_9, che sono curve ellittiche, si distinguono quelle equianarmoniche: la sezione hessiana corrispondente ad una sezione equianarmonica di Φ_9 si spezza in tre cubiche secantisi a due a due in *un* punto. In un fascio di sezioni iperpiane di Φ_9 ve ne sono quattro equianarmoniche: se ne può determinare *una* risolvendo un'equazione del quarto grado; dopo ciò si potranno separare i tre punti doppi della sua hessiana su Φ_9 (spezzata in tre cubiche) risolvendo un'equazione di terzo grado. In definitiva, introducendo solo radicali quadratici e cubici si può determinare un punto di Φ_9. Proiettando da questo punto si ottiene una Φ_8 di S_8, che si rappresenta senza ulteriori irrazionalità.

---

zioni ellittiche dell'ottavo ordine; « Rend. della R. Acc. dei Lincei », Vol. XVI, s. 6°, 1932.

Riassumendo i risultati ottenuti possiamo dire:

Le superficie razionali della famiglia b) si possono rappresentare sul piano al più estraendo radicali quadratici e cubici e risolvendo un'equazione per la bisezione delle funzioni abeliane di genere tre.

Passiamo allo studio delle irrazionalità numeriche, che si presentano nella rappresentazione piana delle superficie della famiglia *c)*, ossia delle superficie razionali a sezioni iperellittiche.

Come sappiamo (cfr. Lib. II, cap. VI, n. 29) le superficie razionali a sezioni iperellittiche possiedono un fascio razionale di coniche. Se si riesce ad individuare sulla superficie una curva unisecante le coniche del fascio, la superficie si rappresenta su una rigata razionale senza ulteriori irrazionalità: basta all'uopo proiettare ogni conica del fascio dal punto comune ad essa ed alla unisecante.

Per individuare la unisecante procediamo così. Consideriamo una curva, L, unisecante i piani delle coniche e proiettiamo ciascuna conica dal punto comune al suo piano ed alla curva L. Ciò si può fare razionalmente. Dopo la proiezione si ottiene una rigata razionale doppia, con una curva di diramazione bisecante le generatrici. La nominata rigata, estraendo al più un radicale quadratico, può rappresentarsi su di un piano, in guisa che le sue generatrici divengano le rette d'un fascio. Ne viene che una superficie razionale a sezioni iperellittiche può essere rappresentata, al più estraendo un radicale quadratico, su di un piano doppio con curva di diramazione d'ordine $2n$ dotata di punto O $(2n-2)$-*plo*; e le coniche della superficie si rappresentano nelle rette uscenti dal punto O.

Ora una unisecante le coniche del fascio è rappresentata da una curva d'ordine h con punto $(h-1)$-*plo*, tangente ovunque incontra alla curva di diramazione. E si è visto (cfr. Lib. II, cap. I, n. 3) che per $h = n-1$ questo problema dà luogo ad un numero finito di soluzioni, che si distinguono una dall'altra risolvendo un'equazione di bisezione relativa alle funzioni abeliane

è di genere $p \leqq 2n - 2$, così le irrazionalità numeriche che s'in contrano diventano di grado sempre più elevato, crescendo con p com'è noto dalla teoria delle equazioni predette.

Riassumendo:

Le superficie razionali della famiglia c) si possono rappresen tare sul piano coll'estrazione di radicali quadratici e la risoluzion di un'equazione per la bisezione degli argomenti delle funzion iperellittiche di genere (qualsiasi) *p, dove si ha in corrispondenz delle diverse classi di superficie*: $p = 1, 2 \ldots$

Finalmente il cono quadrico doppio con sestica di dirama zione si riduce, per proiezione da un suo punto e quindi con l'ag giunta di un radicale quadratico, al piano doppio con sestica d diramazione, dotata di due punti tripli infinitamente vicini. E que sto piano doppio si può rappresentare sul piano semplice o, pe lo meno, su superficie razionali dei tipi precedenti, risolvend sostanzialmente un problema di bisezione degli argomenti delle funzioni abeliane di genere quattro, inerenti alla curva di dira mazione (cfr. Lib. II, cap. V, n. 26).

Infine potremo enunciare il teorema:

La rappresentazione piana delle superficie razionali si può far dipendere da irrazionalità che vengono definite per le diverse fa miglie e classi di superficie distinte in rapporto alle trasformazioni a coefficienti razionali: queste irrazionalità sono quadratiche e cubiche ovvero irrazionalità provenienti dalla risoluzione di equazioni per la bisezione degli argomenti delle funzioni abeliane di genere 3 *e* 4, *o di funzioni iperellittiche di genere* $p = 1, 2, \ldots$

39. Superficie razionali reali.

Lo studio delle superficie razionali dal punto di vista della loro *realità*, e quindi della forma che le superficie reali possono avere entro lo spazio proiettivo, si inizia colla considerazione delle superficie dei primi ordini.

La nozione che le *quadriche* sono superficie *bilatere* costituite

vamente di *genere* 0 o 1), secondochè siano a punti ellittici o iperbolici (rigate), viene acquisita colle prime conoscenze relative alla connessione dello spazio proiettivo (MÖBIUS): si riconosce invero che la distinzione dell'iperboloide ellittico a due falde, dall'ellissoide o dal paraboloide ellittico, ha soltanto un significato metrico; proiettivamente si tratta di superficie fra loro identiche.

Dopo le quadriche hanno formato oggetto di uno studio approfondito, dal punto di vista della realità e della forma, le superficie cubiche: l'analisi che vi si riferisce è dovuta ad H. G. ZEUTHEN [1] e, mercè la rappresentazione sul piano doppio con quartica di diramazione, viene a dipendere dalla forma di questa quartica.

Altri studi in quest'ordine di idee si riferiscono alle rigate: si è riconosciuto p. es. che le rigate razionali sono sempre costituite da una sola falda, che è *bilatera* per le superficie d'ordine pari, e *unilatera* per quelle d'ordine dispari. In particolare si è studiata la forma delle rigate del terzo grado [2].

Questi esempi mettono già in luce il fatto significativo che « mentre il numero delle falde (proiettivamente distinte) di una superficie costituisce un carattere (assolutamente) invariante per trasformazioni birazionali reali, invece l'ordine di connessione d'una falda, e la sua bilateralità o unilateralità, sono suscettibili di variare per effetto di quelle trasformazioni che mutano un punto (*fondamentale*) in una *curva eccezionale*, cioè costituiscono soltanto degli *invarianti relativi* (per riguardo a trasformazioni prive di punti fondamentali)».

Osservazioni generali di questo tipo si trovano in una nota di F. ENRIQUES [3] relativa alle superficie che si suppongono definite

---

[1] Cfr. H. G. ZEUTHEN: *Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre*; « Math. Ann. », Bd. VII, 1874 e *Etudes des propriétés de situation des surfaces cubiques*; « Math. Ann. », Bd. VIII, 1875.

[2] Cfr. F. SEVERI: *Sulla forma delle rigate cubiche*; « Atti del R. Istituto Veneto », T. LXII, p. II, 1903.

[3] Cfr. F. ENRIQUES: *Alcune osservazioni intorno alle superficie razionali reali*; R. Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna (1912).

mediante funzioni razionali reali di due parametri, cioè dedotte dal piano mediante trasformazioni birazionali reali.

Ma lo studio delle superficie razionali reali dà luogo a più alti problemi quando si parta dalla definizione delle superficie *reali*, come quelle che sono rappresentate da una o più equazioni a coefficienti reali, nello spazio ordinario o in uno spazio a più dimensioni. Le superficie reali che sono razionali non risultano per ciò costituite da una sola falda, cioè trasformabili nel piano, bensì in generale da più falde, o anche da nessuna falda, come accade per la quadrica $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$, che è reale ai sensi della definizione, ma non possiede punti reali.

Si affaccia la domanda di descrivere e determinare i vari casi possibili. Questo problema ha formato oggetto di una ricerca approfondita di A. COMESSATTI [1], di cui vogliamo brevemente riassumere i risultati.

Anzitutto è facile riconoscere che la definizione data delle superficie reali si lascia tradurre nel seguente criterio geometrico.

Una superficie F immersa nello spazio proiettivo complesso $S_r(x_0, x_1, \ldots, x_r)$ è *reale* se accada che per ogni punto di F anche il suo complesso coniugato (cioè a coordinate complesse coniugate) sia su F. La trasformazione involutoria K, che si ottiene su F associando ad ogni punto il suo complesso coniugato, si dirà *trasformazione di coniugio*. Se una superficie reale possiede punti reali, questi sono mutati in sè dalla trasformazione di coniugio. Più in generale, si dirà *reale* ogni elemento (punto, linea, sistema lineare, ecc.) di F che sia trasformato in sè dalla trasformazione di coniugio.

---

[1] I lavori del COMESSATTI, che trattano dell'argomento, sono i seguenti: *Sulle superficie razionali reali*, « Rend. della R. Acc. dei Lincei », Vol. XX, s. 5, 1911; *Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale*, « Math. Ann. », Bd. LXXIII, 1913; *Sulla connessione delle superficie razionali reali*, « Ann. di Mat. », Vol. 23, 1914. Cfr. anche il rapporto *Reelle Fragen in der algebraischen Geometrie* (« Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung », Bd. 41, 1932), che si estende anche ad altre questioni di geometria algebrica, che sono state trattate dal punto di vista della realità.

Precisiamo ancora, sotto l'aspetto geometrico, il concetto delle *trasformazioni birazionali reali*. Una superficie reale F sia in corrispondenza birazionale con una superficie reale F'. La trasformazione birazionale che fa passare da F ad F' sarà *reale* se muta le coppie di punti complessi coniugati di F nelle coppie di punti complessi coniugati di F', ossia se trasforma l'una nell'altra le trasformazioni di coniugio di F ed F'.

Ciò posto, si pone il problema di *classificare le superficie razionali reali di fronte alle trasformazioni birazionali reali*. Se F è una superficie razionale reale e si pongono in una stessa *classe* tutte le superficie razionali reali che si deducono da F con trasformazioni birazionali reali, il nominato problema consiste nel *determinare tutte le classi di superficie razionali reali, distinte rispetto alle trasformazioni birazionali reali*.

A tale scopo il COMESSATTI prende le mosse dall'osservazione che *le trasformazioni birazionali a coefficienti razionali sono certo reali*; quindi la classificazione delle superficie razionali di fronte alle trasformazioni a coefficienti razionali, che — nel numero precedente — abbiamo veduto essere stabilita da ENRIQUES, si traduce nel seguente teorema:

Una superficie razionale reale si può ridurre con trasformazioni birazionali reali ad una superficie razionale reale

a) *a sezioni razionali*, ovvero

b) *a sezioni ellittiche d'ordine* $n \geq 2$, ovvero

c) *a sezioni iperellittiche*, ovvero

d) *ad un cono quadrico doppio con sestica di diramazione*.

A questa proposizione il COMESSATTI ha dato una forma leggermente diversa, enunciando che:

Sopra una superficie razionale reale esiste sempre qualche sistema lineare reale appartenente all'uno o all'altro dei seguenti tipi:

α) *fascio di curve razionali* (riferibile birazionalmente al fascio delle rette uscenti da un punto),

β) *rete di grado due di curve ellittiche* (riferibile birazionalmente alla rete delle cubiche piane per 7 punti base),

γ) *sistema* ∞^3 *di grado* 4 *e genere* 2 (riferibile birazionalmente al sistema delle sestiche piane per 8 punti base doppi).

Ciò posto, sia F una superficie razionale reale. Quando si passa dalla superficie alla sua rappresentazione piana, la trasformazione di coniugio su F si muta in una trasformazione involutoria del piano rappresentativo, le cui equazioni si scrivono ponendo le coordinate di punto eguali a funzioni razionali invertibili dei valori complessi coniugati di quelli delle coordinate del punto corrispondente. In altre parole la trasformazione involutoria che corrisponde al coniugio su F è il prodotto di una trasformazione birazionale per il coniugio nel piano: una tale trasformazione si dirà una trasformazione *antibirazionale*.

Ora una superficie razionale reale è rappresentabile su di un piano reale π in infiniti modi, che si deducono uno dall'altro eseguendo nel piano π una qualsivoglia trasformazione birazionale (complessa). Una superficie razionale reale F dà quindi luogo su π ad una trasformazione antibirazionale involutoria che è determinata a meno di trasformazioni birazionali; e la medesima trasformazione antibirazionale involutoria risulta evidentemente collegata ad ogni superficie razionale F', che appartenga alla stessa classe della F, sia cioè trasformabile nella F con una trasformazione birazionale reale. Reciprocamente è facile persuadersi che trasformazioni antibirazionali involutorie birazionalmente *distinte* possono essere collegate solamente a classi *distinte* di superficie razionali reali. Giova infine osservare che data ad arbitrio una trasformazione antibirazionale involutoria T si può sempre costruire una F di cui la T rappresenti il coniugio.

Queste osservazioni mostrano che *il problema di classificare le superficie razionali reali in relazione alle trasformazioni birazionali reali, equivale a quello di trovare i tipi birazionalmente distinti di trasformazioni antibirazionali involutorie, in un piano* π.

Il Comessatti ha risolto quest'ultimo problema e, tenuto conto che le trasformazioni antibirazionali involutorie devono

mutare in sè uno dei sistemi lineari α), β), γ) precedentemente indicati, è pervenuto al seguente risultato:

Le trasformazioni antibirazionali involutorie del piano sono riducibili, per trasformazioni quadratiche, ai seguenti tipi, irriducibili e dotati del minimo numero di punti fondamentali:

a) coniugio;

b) trasformazioni antiquadratiche prive di elementi uniti;

c) trasformazioni d'ordine $m+1 (m>1)$ *con un punto fondamentale m-plo* O *e* $2m$ *punti fondamentali semplici* P_i $(i = 1, 2, ..., 2m)$, *distinti fra loro o infinitamente vicini ad* O *in direzioni distinte, che mutano in sè il fascio delle rette per* O;

d) trasformazioni d'ordine 8 *con* 7 *punti tripli* P_i $(i = 1, 2, ..., 7)$, *che mutano in sè la rete delle cubiche per* $P_1, P_2, ..., P_7$;

e) trasformazioni d'ordine 17 *con* 8 *punti sestupli* P_i $(i = 1, 2, ..., 8)$, *che mutano in sè il sistema lineare* ∞^3 *delle sestiche che passano doppiamente per* $P_1, P_2, ..., P_8$.

Il lettore riconoscerà facilmente nei tre tipi *c*), *d*), *e*) gli analoghi dei tre tipi di involuzioni piane del secondo ordine, trovati da E. Bertini. Il tipo *a*) corrisponde alla omologia armonica. Nuovo è invece il tipo *b*). Un esempio di trasformazione antiquadratica involutoria si ha considerando la rappresentazione piana di una quadrica reale senza punti reali, fatta per proiezione da un suo punto su di un piano π. Invero alla trasformazione di coniugio sulla quadrica corrisponde nel piano π una trasformazione, che si vede subito essere quadratica e che non può avere punti uniti perchè la quadrica, non possedendo punti reali, non ha punti uniti per la trasformazione di coniugio. Vedremo tra un momento che questo esempio ha valore generale.

L'ultima proposizione enunciata contiene in sè la classificazione delle superficie razionali reali di fronte alle trasformazioni birazionali reali. Precisamente: *Le superficie razionali reali si dividono in cinque famiglie a seconda che la trasformazione di coniugio sulla superficie si muti nel piano rappresentativo, in una trasformazione antibirazionale involutoria riducibile ad uno dei cinque tipi a), b), c), d), e).*

Per precisare meglio, secondo la visione reale, il significato di

questa distinzione in famiglie, conviene parlare delle *falde reali* della superficie F, che supponiamo superficie algebrica irriducibile reale, *priva di singolarità reali* (o tutt'al più dotata di singolarità reali isolate). La parte reale di F risulterà composta di un certo numero, eventualmente nullo, di varietà a due dimensioni chiuse e connesse (1); ciascuna delle quali costituisce una *falda reale* di F (2).

Sia F una superficie razionale della famiglia *a*), la quale cioè si possa rappresentare sul piano in guisa che la trasformazione di coniugio su F si muti nel coniugio del piano. Ciò equivale a dire che *la F è trasformabile nel piano reale con una trasformazione birazionale reale*. Ne viene che la F possiede certo punti reali ed anzi è, come il piano, una superficie con *una falda*. Inversamente risulta che *ogni superficie con una falda può essere trasformata realmente in un piano* ed appartiene così alla famiglia *a*): invero vedremo che nessuna delle superficie razionali reali delle famiglie *b*), *c*), *d*), *e*) possiedono una sola falda. Poichè inoltre la trasformazione di coniugio del piano è unica, ne viene anche: *tutte le superficie razionali reali con una sola falda reale costituiscono un'unica classe di fronte alle trasformazioni birazionali reali; a rappresentante della classe si può assumere il piano reale.*

Passiamo allo studio delle superficie razionali reali della famiglia *b*), per le quali il coniugio si rappresenta in una trasformazione antiquadratica involutoria, priva di punti uniti. Queste superficie *non possiedono punti reali* e sono quindi *prive di falde reali*. Inversamente *ogni superficie razionale reale priva di falde reali appartiene alla famiglia b*): invero, è facile constatare che tutte le trasformazioni antibirazionali involutorie dei tipi *a*), *c*),

(1) Si può facilmente dimostrare che una superficie algebrica non può possedere nè linee reali isolate, che non siano multiple, nè contorni.

(2) Le falde reali si intendono chiuse e connesse in senso *proiettivo* e non metrico; cioè la curva all'infinito di F non deve essere considerata come frontiera. Per precisare con un esempio, l'ordinario iperboloide a due falde è tale solamente in senso metrico. Dal nostro punto di vista esso appare costituito da una falda sola, così come l'ellissoide.

d), *e*) hanno dei punti uniti, che rispondono a punti *reali* della superficie. Inoltre è immediato che le trasformazioni antiquadratiche involutorie prive di punti uniti sono in generale birazionalmente identiche. Ne viene: *Le superficie razionali reali prive di falde reali costituiscono un'unica classe, di fronte alle trasformazioni birazionali reali; a rappresentante dell'ente generico della classe si può assumere una quadrica priva di punti reali, ad es. la sfera* $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ (1).

Consideriamo ora le superficie razionali reali, che appartengono alla famiglia *c*), *d*) od *e*). Su queste superficie esiste un sistema lineare reale riconducibile birazionalmente al tipo α), β) o γ). L'esistenza di questi particolari sistemi lineari conduce a rappresentare le nostre superficie:

nel caso *c*) sopra un piano doppio reale con curva di diramazione reale d'ordine $2n$ con punto $(2n-2)$-*plo*, irriducibile e priva di punti doppi;

nel caso *d*) sopra un piano doppio reale con quartica di diramazione reale di genere tre;

nel caso *e*) sopra un cono quadrico doppio reale con sestica di diramazione reale di genere quattro.

Ciò posto, l'indicata rappresentazione sul piano doppio permette subito di dedurre, dal numero delle regioni in cui resta diviso il piano (o il cono) dai rami reali della curva di diramazione, il numero delle falde della superficie: si trova così che nei casi *c*), *d*), *e*) esso è rispettivamente eguale ad m, 4, 5.

Dunque, iniziando la discussione dalle superficie della famiglia *c*), possiamo dire: *Le superficie razionali reali della famiglia c*) *si distinguono a secondo del valore dell'intero m, che corrisponde al numero delle falde reali della superficie.* A valori diversi di m corrispondono certo superficie razionali reali, distinte

(1) Di fatto gli unici enti della classe che non si riducono alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ si riducono al cono isotropo $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; per essi il coniugio è rappresentato da una trasformazione antiquadratica involutoria con due punti fondamentali *infinitamente vicini*.

di fronte alle trasformazioni birazionali reali. Ma, fissato m, esistono ancora infinite classi diverse; per fissarne una occorre caratterizzare di fronte al gruppo delle trasformazioni birazionali del piano una trasformazioni antibirazionale involutoria d'ordine $m+1$ con un punto fondamentale *m-plo* O e $2m$ punti fondamentali semplici P_i $(i = 1, 2, ..., 2m)$. Ciò si può fare assumendo come *moduli* i $2m-3$ birapporti determinati, in un ordine prefissato, da ciascuna delle rette OP_4, OP_5, ..., OP_{2m} prese insieme con le rette OP_1, OP_2, OP_3. Una discussione più approfondita mostra che i $2m-3$ birapporti nominati si possono assumere *reali* e che in realtà essi individuano non una ma *due* trasformazioni antibirazionali involutorie. Comunque possiamo enunciare:

Le superficie razionali reali della classe c) con un dato numero $m\,(>1)$ *di falde dipendono da* $2m-3$ *moduli reali.*

Consideriamo invece *le superficie razionali reali della famiglia d): esse posseggono quattro falde reali.* Quali moduli si possono assumere gli invarianti birazionali (e quindi proiettivi) della quartica di diramazione del piano doppio, sul quale le superficie si possono rappresentare. Anche questi invarianti si possono assumere reali. Ne viene:

Le superficie razionali reali della famiglia d) dipendono da 6 *moduli reali.*

Infine: *Le superficie razionali reali della famiglia e) possiedono cinque falde reali e dipendono da* 8 *moduli reali.*

Tanti sono invero gli invarianti birazionali (e quindi proiettivi) da cui dipende la sestica gobba reale, curva di diramazione del cono quadrico doppio, su cui le superficie della famiglia si possono rappresentare.

Riepilogando quanto precede in un unico enunciato, possiamo dire:

Di fronte alle trasformazioni birazionali reali, le superficie razionali reali si classificano nel modo seguente:

Le superficie, con un dato numero m di falde reali, costituiscono in generale un'unica famiglia dipendente da $2m-3$ *mo-*

duli reali se $m > 1$, *da nessun modulo se* $m = 0, 1$; *fanno eccezione i valori di* $m = 4, 5$, *per ognuno dei quali esiste un'altra famiglia distinta dalla precedente, che dipende rispettivamente da* 6 *e* 8 *moduli reali.*

Per ulteriori ricerche sulle superficie razionali reali, rimandiamo il lettore alle memorie citate di A. COMESSATTI, ed in ispecie alla terza di esse. In questi lavori si troveranno importanti complementi ed estensioni a quanto abbiamo qui esposto: proprietà di connessione delle falde reali e — in genere — rapporti delle proprietà reali cogli invarianti delle superficie rispetto alle trasformazioni birazionali (come l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE ecc.).

NOTIZIA. - Alle notizie contenute in questo capitolo aggiungeremo qui qualche indicazione bibliografica.

Le superficie razionali del sest'ordine non sono mai state classificate compiutamente. Oltre a qualche risultato parziale si ha tuttavia in questo campo un'ampia ed esauriente memoria di E. G. TOGLIATTI (« Memorie del R. Ist. Lomb. », 1916), nella quale si dà la classificazione completa di tutte le superficie del sest'ordine, razionali o no, che possiedono infinite coniche.

Le involuzioni piane del terzo e quart'ordine e la loro classificazione hanno formato oggetto di studi rispettivamente da parte di A. M. HOWE e di T. R. HOLLCROFT (« Amer. Journal of Math. », 1919 e 1922).

Gli studi sulle superficie a sezioni piane dei primi generi sono stati proseguiti da L. ROTH, che ha esaurito la trattazione dei casi $p = 4, 5, 6$ (Cfr. i « Proceedings » della Cambridge Philos. Soc. degli anni 1933, 1934, 1936).

Infine citeremo i nn. 63 e 96 (1928 e 1934) del « Bulletin of the National Research Council » americano, in cui vi è un'estesa bibliografia di geometria algebrica: in particolare nel n. 63 una bibliografia sulle superficie razionali (pag. 275) dovuta a F. R. SHARPE. Cfr. inoltre il recente articolo di L. BERZOLARI *Algebraische Transformationen und Korrespondenzen* nell'Enciclopedia tedesca.

Capitolo VII.

RAZIONALITA' DELLE INVOLUZIONI PIANE

40. **Introduzione.**

Una superficie si dice *razionale*, quando le coordinate x, y, z di un punto variabile su di essa si possono esprimere come funzioni razionali *univocamente invertibili* di due parametri u e v. Se ora si considerano tre funzioni *razionali* di due parametri u e v:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v), \end{cases}$$

avverrà in generale che queste si possano considerare come le formule di rappresentazione punto per punto di una superficie F su di un piano π: cioè le (1) risulteranno univocamente invertibili, fornendo i due parametri u e v come funzioni razionali di x, y, z (legati tra loro dall'equazione della superficie F). Ma può anche avvenire che dall'inversione delle (1) risulti per ogni punto di F un *numero finito* di punti del piano rappresentativo π, cioè di coppie u, v. In tal caso la superficie F si dirà *unirazionale*. Gli ∞^2 gruppi di punti del piano π, che corrispondono agli ∞^2 punti della superficie F, formano una serie algebrica di gruppi di punti, a cui spetta la proprietà che un punto generico del piano appartiene ad *un* gruppo e ad uno solo, e in questo senso costituisce una *involuzione I del piano. La superficie unirazionale F rappresenta l'involuzione I*, i cui gruppi vengono così considerati come elementi (punti) di una varietà algebrica ∞^2.

Nel caso in cui l'involuzione I sia del second'ordine, cioè ogni gruppo di I sia costituito da una *coppia* di punti coniugati, ab-

biamo veduto (cfr. Lib. II, cap. V, n. 23) che l'insieme dei gruppi di I si può porre in corrispondenza biunivoca con i punti d'un piano: cosicchè una superficie che rappresenti un'involuzione del second'ordine ossia l'involuzione stessa è *razionale*.

Ora si presenta naturale la questione se ogni superficie unirazionale, rappresentante un'involuzione di ordine qualsivoglia n, sia anche razionale. Ossia se, comunque siano scelte le (1), si possano introdurre due nuovi parametri u', v', funzioni razionali di u, v, in guisa che le x, y, z, come funzioni di u', v', risultino univocamente invertibili.

La questione analoga si pone già per le curve, dove viene risolta in senso affermativo da un noto teorema di LÜROTH [1]. Se invero una curva C d'equazione:

$$f(x, y) = 0$$

è unirazionale, ammette cioè una risoluzione per mezzo di funzioni razionali di un parametro,

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

tali che, invertendo le (2) si ottengano *più* valori di t, in corrispondenza ad ogni punto di C, allora C *è razionale*, cioè si può sempre sostituire al parametro t un parametro τ, funzione razionale di t, in guisa che x e y risultino dalle (2) funzioni razionali ed invertibili di τ.

Per il caso delle superficie, la questione è stata studiata nel 1893 da G. CASTELNUOVO [2], il quale ha dimostrato *la razionalità delle involuzioni piane*, cioè che *le superficie unirazionali sono sempre razionali*.

La dimostrazione di questo importante teorema viene svolta dal CASTELNUOVO in tre parti:

1) Anzitutto si fa vedere che le superficie unirazionali sono

---

[1] Cfr. J. LÜROTH: *Beweis eines Satzes über rationale Curven*; « Math. Ann. », Bd. IX, 1875.

[2] Cfr. G. CASTELNUOVO: *Sulla razionalità delle involuzioni piane*; « Math. Ann. », Bd XLIV, 1894.

regolari nel senso che per ogni sistema lineare completo di curve $|C|$ tracciato sopra di esse, la serie caratteristica segnata sopra una $|C|$ dalle altre curve del sistema riesce *completa*.

2) Si verifica facilmente che sopra una superficie unirazionale esistono sistemi lineari di curve di genere p, la cui dimensione r supera il genere.

3) Si dimostra che sopra una superficie regolare, la quale contenga un siffatto sistema di curve $|C|$ per cui $r > p$, si può costruire successivamente una serie di sistemi lineari (aggiunti) che godono della medesima proprietà, pervenendo infine a sistemi di genere minimo, da cui appare la razionalità della superficie, secondo i criteri noetheriani che abbiamo sviluppato precedentemente.

La prima parte della dimostrazione, a cui l'autore arriva con un ragionamento interessante ma un po' laborioso, viene da noi sostituita con considerazioni semplicissime, che fanno appello al principio di continuità.

Per le altre parti seguiamo sostanzialmente la dimostrazione del CASTELNUOVO.

41. Regolarità delle superficie unirazionali.

In relazione ad un sistema lineare irriducibile, $|C|$, di curve piane, che sia ∞^r $(r > 1)$ e di grado n, abbiamo definito (cfr. Lib. I, cap. VIII, n. 41) *la serie caratteristica del sistema*: cioè la serie lineare g_n^{r-1} segnata sopra una curva irriducibile C di $|C|$ dalle altre curve di $|C|$. Questa nozione si può evidentemente trasportare ad una qualsivoglia superficie irriducibile F, in relazione ad un sistema lineare irriducibile di curve, d'una certa dimensione e di un certo grado, tracciato sulla F.

Ciò premesso, chiamiamo *regolare* una superficie F, la quale goda della proprietà seguente: se $|C|$ è un qualsivoglia sistema lineare, irriducibile e completo (cioè non ulteriormente ampliabile) di curve ∞^2 almeno, tracciato sulla F, la serie caratteristica di $|C|$ risulta completa. Secondo la definizione data il piano è certo una superficie regolare (cfr. Lib. II, cap. II, n. 9). Invece

le rigate di genere $p > 0$ offrono un esempio di superficie non regolari, giacchè si dimostra che la serie caratteristica di un sistema lineare completo ha ivi generalmente la deficienza p. Per esempio sulla F_4 con due rette doppie, che è di genere uno, il sistema (completo) [1] delle sue sezioni piane dà luogo ad una serie caratteristica, che è una g_4^2 e non una g_4^3.

Dopo ciò, dimostriamo il seguente

LEMMA: *Una superficie unirazionale è regolare.*

Sia I un'involuzione di gruppi di n punti di un piano π; ed F una superficie unirazionale, i cui punti siano in corrispondenza birazionale con i gruppi di I.

Tra la superficie F ed il piano π vi è una corrispondenza $[1, n]$ nella quale ad un punto di F corrisponde una n-*pla* di punti di π, costituenti un gruppo della I, mentre ad un punto di π corrisponde un solo punto di F. Ne viene che ad una curva C, tracciata sulla F, corrisponde una curva di π, la quale *appartiene* all'involuzione I, nel senso che la I subordina sopra di essa un'involuzione γ_n^1, i cui gruppi di punti sono in corrispondenza biunivoca con i punti di C.

Sia ora $|L|$ un sistema lineare completo, di grado (effettivo) m e di dimensione $r > 1$, tracciato sulla F.

Su di una curva irriducibile, L, di $|L|$ possiamo considerare due serie lineari:

a) la serie caratteristica g_m^{r-1}, segata sulla L dalle curve di $|L|$, che chiameremo la serie λ, e

b) la serie completa g_m, determinata dalla g_m^{r-1}, indicata in *a*), che chiameremo la serie λ'.

Il nostro lemma afferma che la serie λ, contenuta in λ', coincide con essa.

Per dimostrare ciò, introduciamo il sistema lineare $|C|$, cor-

---

[1] Se il sistema delle sezioni piane di una F_4 con due rette doppie non fosse completo, la F_4 proverrebbe per proiezione da una F_4 di S_4; e proiettando tale F_4 di S_4 da un suo punto generico si otterrebbe una superficie cubica non cono, e quindi razionale. Anche la F_4 di S_3 sarebbe così razionale, ciò che è assurdo.

rispondente su π al sistema $|L|$. Il sistema $|C|$ è costituito da curve appartenenti all'involuzione I; ed è di grado mn e di dimensione r. Alla curva L di $|L|$ corrisponderà una curva C di $|C|$, sulla quale il sistema $|C|$ segnerà una serie caratteristica g_{mn}^{r-1}, immagine della serie λ, il cui gruppo generico sarà composto con m gruppi della γ_n^1, che la I determina sopra la C. Indicheremo la serie g_{mn}^{r-1} con l. In generale il sistema $|C|$ non sarà completo. Sia $|C_1|$ il sistema completo, costituito da tutte le curve che hanno lo stesso ordine e gli stessi punti base, presi con le stesse molteplicità, della curva generica di $|C|$. Il sistema $|C_1|$ sarà di grado mn e di dimensione $r+\rho (\rho \geq 0)$: la sua serie caratteristica sarà una $g_{mn}^{r+\rho-1}$ completa, la quale conterrà sia la serie l, immagine della serie λ, sia la serie l', immagine della serie λ'.

Ragionando ora per assurdo supponiamo che la serie λ' non coincida con la serie λ. Sia G_m un gruppo di punti di L, giacente nella serie λ', ma non nella serie λ. Al gruppo G_m sopra L, corrisponde un gruppo G''_{mn} di mn punti sopra la C; ed il gruppo G'_{mn} sarà un gruppo della serie l', non contenuto nella serie l. Esisterà pertanto una curva irriducibile C_1 di $|C_1|$, non appartenente a $|C|$ e quindi non appartenente alla involuzione I, la quale segherà sulla C, fuori dei punti base, il gruppo G'_{mn}.

Al fascio determinato dalla C e dalla C_1 risponde sulla F un sistema razionale ∞^1 di curve, $\{K\}$, di cui la generica si può supporre irriducibile. Ed invero la curva generica di $\{K\}$ non può certo essere spezzata in parti distinte, giacchè essa proviene dalla curva generica del fascio (C, C_1), che è irriducibile. Ma la corrispondenza tra le curve del fascio (C, C_1) e le curve di $\{K\}$ potrebbe non essere birazionale; giacchè ogni punto della curva di $\{K\}$ potrebbe provenire da s $(1 < s < n)$ punti della curva (per ipotesi non appartenente all'involuzione) del fascio (C, C_1). Per semplicità di discorso escludiamo provvisoriamente questo caso. *La curva generica di* $\{K\}$ *si suppone quindi irriducibile* (semplice).

Le curve di $\{K\}$ hanno m punti *n-pli* nei punti di G_m e formano un *fascio lineare,* non avendo intersezioni variabili fra lo-

ro: invero fra le curve di $\{K\}$ vi è la curva L, contata n volte, che risponde alla C; ne viene che le curve di $\{K\}$ appartengono totalmente ad un sistema continuo, che contiene il sistema lineare $|nL|$, multiplo secondo n del sistema lineare $|L|$; ora il detto sistema è di grado mn^2 e per le curve di $\{K\}$ tutte queste mn^2 intersezioni sono assorbite dai punti del gruppo G_m. Da ora in poi denoteremo dunque il sistema $\{K\}$ con il simbolo $|K|$.

Dopo ciò consideriamo sulla F un punto *generico* P e gli n punti del piano dell'involuzione, che ad esso corrispondono. Le n curve del fascio (C, C_1), determinate dai nominati n punti, sono tutte *distinte,* giacchè altrimenti ad una di queste curve invece di una K irriducibile corrisponderebbe una curva contata un certo numero di volte; ciò che è contrario alla nostra ipotesi. Sulla F le n curve anzidette vengono rappresentate tutte dalla curva di $|K|$ passante per P; perciò nella involuzione del piano codeste n curve sono coniugate tra loro. I gruppi analoghi di n curve formeranno quindi, entro il fascio (C, C_1), una involuzione lineare g_n^1 : che, in senso astratto, può ritenersi come g_n^1 sopra una retta.

Arrivati a questo punto muoviamo con continuità sulla curva L di F il gruppo di punti G_m, finchè esso diventi un gruppo della serie λ, segata sulla L dal sistema $|L|$. Corrispondentemente il gruppo G'_{mn} si muove nel piano dell'involuzione, sulla curva C, fino a diventare un gruppo di mn punti, per cui passa un fascio di curve del sistema $|C|$, appartenenti all'involuzione. Durante questo movimento il fascio (C, C_1) si muove, e quindi varia la g_n^1 prima costruita. Ma, al limite, ottenendosi un fascio di curve appartenenti all'involuzione, la nominata g_n^1 deve ridursi alla serie delle curve di un fascio, contate n volte. *In base al principio di continuità* mostreremo che ciò *è assurdo.*

La questione si riduce a dimostrare che *una* g_n^1 *variabile sopra una retta non può ridursi per continuità alla serie dei punti di una retta, contati* n *volte.* È lecito supporre che il sostegno dell'involuzione g_n^1 sia una retta fissa r, perchè ogni altra retta potrebbe essere riferita proiettivamente alla r. Ciò posto si facciano corrispondere proiettivamente le *n-ple* di punti della r ai

punti di un S_n. La g_n^1 variabile sulla r, si muta nell'S_n in una retta variabile. Invece la serie dei punti di r, contati n volte, diviene in S_n una curva razionale normale d'ordine n, giacchè un S_{n-1} generico di S_n la taglia in n punti: invero ogni S_{n-1} di S_n proviene da una g_n^{n-1} sulla r; ed una g_n^{n-1} sulla retta possiede n punti *n-pli*. L'assurdo proviene da ciò che una retta dovrebbe ridursi per continuità ad una curva razionale normale d'ordine n (≥ 2).

Così risulta contraddittoria l'ipotesi da cui siamo partiti, in base alla quale sulla curva L di F esisteva un gruppo G_m non giacente nella serie caratteristica del sistema $|L|$. Questa serie è dunque completa e la F è una superficie regolare.

NOTA I. - Abbiamo detto che al fascio determinato dalla C e dalla C_1 risponde sulla F un sistema ∞^1 di curve, $\{K\}$; ed abbiamo esclusa l'ipotesi che ogni punto della curva generica di $\{K\}$ provenga da s $(1 < s < n)$ punti della curva corrispondente del fascio (C, C_1). Mostriamo ora che se questa ipotesi si verifica, la discussione si può sempre ricondurre al caso, in cui la curva generica di $\{K\}$ sia irriducibile e semplice.

Se ad ogni punto della curva generica di $\{K\}$ corrispondono s $(1 < s < n)$ punti sulla curva generica del fascio (C, C_1), ciò porta che l'involuzione I_n, d'ordine n, che stiamo esaminando, subordina su ogni curva del fascio (C, C_1) una involuzione γ_s^1. Poichè per un punto generico, A, del piano passa una sola curva del fascio (C, C_1), sulla quale è univocamente determinato il gruppo della γ_s^1 passante per A, i gruppi delle γ_s^1 analoghe, appartenenti alle curve di (C, C_1), formeranno un'involuzione piana, I_s, di ordine s. Ed ogni gruppo dell'involuzione I_n sarà costituito da un certo numero di gruppi dell'involuzione I_s, in guisa che s sarà un divisore di n. In questo caso si può dire che l'involuzione I_n è composta colla I_s.

È chiaro che per dimostrare la razionalità delle involuzioni composte, si può sempre ricondursi alla dimostrazione del teorema per le involuzioni *semplici*. Ciò equivale a supporre che la curva generica del sistema $\{K\}$ sia irriducibile e semplice.

NOTA II. - Il principio di continuità su cui abbiamo fondata la dimostrazione della regolarità della F si può applicare anche nella forma del principio di degenerazione (1), secondo il quale è impossibile passare per continuità da una curva irriducibile (connessa) K con m punti *n-pli* (appartenente al sistema lineare $|nL|$) ad una curva riducibile e sconnessa composta di n curve L con m punti comuni. È chiaro infatti che questo passaggio per continuità dovrebbe essere possibile facendo variare il G_m dei punti *m-pli* di K fino a ricadere nella serie caratteristica del sistema $|L|$: le equazioni che definiscono le curve K con m punti *n-pli* trascorrono così nelle equazioni che definiscono una curva L *n-pla* e più in generale n curve L di un fascio. Ma all'uso che qui vien fatto del principio di degenerazione si può obbiettare che il passaggio da una K irriducibile ad una curva riducibile (sconnessa) formato da n curve L avviene attraverso ad una curva multipla, cioè precisamente ad una L contata n volte. Nondimeno si può giustificare l'uso del principio di degenerazione anche in questo caso. Ci limiteremo su questo punto a brevi indicazioni, che speriamo possano avere un valore suggestivo per il lettore.

Anzitutto se si considera una curva irriducibile K, la quale, variando in modo continuo, si riduca ad una L contata n volte — diciamo, per esempio, senza punti di diramazione — questa L *n-pla* risulta determinata dalla serie K nel senso che resta definita *una* fra le classi di curve rappresentate sulla detta L *n-pla* senza punti di diramazione; o, se si vuole, vengono sostanzialmente fissate le sostituzioni fra i rami della L *n-pla*, in corrispondenza ai cicli di essa. Quest'asserzione si giustifica dal punto di vista topologico immaginando per esempio che la K sia una curva variabile dello spazio, la quale venga proiettata da un asse sopra una retta fissa. Perciò appare impossibile di passare con continuità da una curva irriducibile connessa e dalle equazioni che la definiscono ad una curva riducibile sconnessa, anche attraverso ad una curva multipla.

(1) Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. III, pag. 405.

Ma la stessa affermazione può anche giustificarsi da un punto di vista analitico. Limitiamoci all'esempio d'un fascio di curve K_{3n} d'HALPHEN [1] con 9 punti *n-pli*, entro il quale si trova una L_3 contata n volte. Sia $\psi(x, y) = 0$ l'equazione di una K_{3n} irriducibile del fascio e $\varphi(x, y) = 0$ l'equazione della cubica L_3. Il fascio d'HALPHEN, indicando con μ un parametro avrà l'equazione:

$$\mu\psi(x, y) = \varphi^n(x, y).$$

D'altra parte consideriamo il fascio di curve gobbe, definito dalle equazioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi(x, y) = \lambda z \\ \psi(x, y) = z^n \end{cases}$$

dove λ è un parametro. La curva generica del fascio (1), proiettata sul piano (x, y) dà una curva, la cui equazione è:

$$\lambda^n\psi(x, y) = \varphi^n(x, y),$$

cioè una curva del fascio d'HALPHEN. Ora, se nelle (1) facciamo tendere λ a zero, otteniamo la curva gobba d'equazioni:

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = 0 \\ \psi(x, y) = z^n, \end{cases}$$

la cui proiezione sul piano (x, y) è una curva del fascio d'HALPHEN e precisamente la $\varphi(x, y)$ contata n volte. Vediamo così che la cubica multipla del fascio d'HALPHEN si ottiene estraendo sulla curva $\varphi(x, y) = 0$ una radice *n-pla* portante sopra un polinomio irriducibile $\psi(x, y)$, dove $\psi(x, y) = 0$ designa una curva che ha con la $\varphi(x, y) = 0$ 9 contatti n-punti, che cadono nei punti base del fascio d'HALPHEN. Ne viene che la cubica multipla così costruita è *irriducibile* [2]: anzi la classe delle cubiche *n-ple* a cui essa appartiene resta definita dal gruppo dei punti *n-pli* di K_{3n}, cui può sostituirsi un altro gruppo equivalente di punti critici

---

[1] Cfr. Lib. II, cap. III, n. 14.

[2] Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. IV, pag. 445.

apparenti. Ed è impossibile passare attraverso a questa L_3 multipla irriducibile ad una curva riducibile quale resta definita entro il sistema delle curve composte di n cubiche di un fascio: la discontinuità che si presenta è in rapporto con la divisione per n della serie lineare g_{9n} segata sulla cubica L_3 dalle curve piane d'ordine $3n$.

Il ragionamento fatto per il caso particolare del fascio di HALPHEN si potrebbe estendere a serie di curve appartenenti ad una superficie. Ma stimiamo inutile indugiarci su questo punto che richiede soltanto qualche considerazione tecnica, senza dar luogo a nuove idee.

42. Un secondo lemma sulla superficie F.

In questo numero dimostriamo per una superficie unirazionale F, i cui punti corrispondano biunivocamente ai gruppi di un'involuzione I, d'ordine n, il seguente

LEMMA. - *Sopra una superficie unirazionale F esiste un sistema lineare completo irriducibile di curve la cui dimensione supera il genere.*

La dimostrazione si consegue costruendo effettivamente un sistema lineare, soddisfacente alle condizioni dell'enunciato.

Ad un punto generico P del piano π, corrispondono $n-1$ punti, che insieme a P costituiscono un gruppo dell'involuzione I. Quando il punto P si muove descrivendo una retta r, gli $n-1$ punti ad esso coniugati si muovono descrivendo una curva R, che diremo la *trasformata* della retta r per l'involuzione I. Al variare della r in π, otteniamo così ∞^2 curve R, d'un certo ordine ρ, le quali passano con certe molteplicità per i punti fondamentali dell'involuzione, che saranno i soli punti del piano comuni a tutte le R (1).

(1) Un punto del piano π si dice punto *fondamentale* per l'involuzione I, quando i suoi coniugati riempiono tutta una curva (fondamentale); e quando una retta passa per un punto fondamentale P intendiamo di *escludere* dalla sua trasformata la curva fondamentale, che corrisponde a P.

Le molteplicità delle curve R nei punti fondamentali sono evidentemente

Sopra la superficie F, la totalità ∞^2 delle curve spezzate in una retta r e nella sua trasformata R, diviene una totalità *razionale* doppiamente infinita di *curve irriducibili di genere zero*: infatti le ∞^2 curve di questa totalità sono in corrispondenza biunivoca con le rette del piano; ed i punti di una curva rispondono biunivocamente ai punti di una retta. Se ne conclude che la totalità anzidetta sarà contenuta in un sistema lineare completo, $|C|$, di curve del medesimo ordine, la cui dimensione sarà almeno tre (1). Ci proponiamo di dimostrare che il sistema $|C|$ così costruito soddisfa alle condizioni del lemma, cioè ha la dimensione maggiore del genere.

A questo scopo incominciamo col dimostrare che, indicando con N e p rispettivamente il grado ed il genere di $|C|$, si ha $N > 2p$.

---

gli ordini delle curve fondamentali della I. Non esistono poi altri punti comuni a tutte le R, perchè essi proverrebbero da punti comuni a tutte le rette del piano.

(1) Nella memoria citata di G. CASTELNUOVO questa proprietà viene dimostrata considerando sul piano dell'involuzione il sistema lineare d'ordine $\sigma + 1$, che ha la minima dimensione tra quelli che contengono le curve spezzate nelle rette e nelle loro trasformate per l'involuzione. Il nominato sistema lineare ha punti base solamente nei punti fondamentali dell'involuzione ed è pressocchè evidente che esso *appartiene tutto all'involuzione*; in guisa che sulla F esso dà luogo ad un sistema ancora lineare (eventualmente incompleto) che contiene la nostra totalità razionale ∞^2 di curve razionali.

Tuttavia, per provare che il nominato sistema appartiene all'involuzione, il CASTELNUOVO fa uso di alcune considerazioni, da lui già adoperate per dimostrare la regolarità della superficie F e che noi abbiamo potuto evitare, avendo basato la dimostrazione della regolarità della F sul principio di continuità (cfr. n. prec.).

Per noi, la verità dell'asserto deriva da una proposizione generale di F. ENRIQUES (cfr. *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche*; « Rend. Circ. Mat. di Palermo », T. X, 1896) in base alla quale *una serie razionale ∞^r di curve sopra una superficie è sempre contenuta in un sistema lineare*. La dimostrazione di questa proprietà (n. 4 della memoria citata) si fa estendendo facilmente la dimostrazione (data al n. 2) per le serie razionali di gruppi di punti sopra una curva, e, come per questa, si riduce al caso $r = 1$; cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI: *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. I, pag. 78.

Si prendano sul piano π due rette a e b e si indichino rispettivamente con R_a ed R_b le trasformate di esse per mezzo dell'involuzione I. Per valutare il grado N di $|C|$, basta ricercare gli N punti comuni alle due curve di F, che corrispondono alle rette a e b. Uno di essi nasce dal punto comune alle due rette a e b. I rimanenti provengono dalle coppie di punti costituite da un punto di a e da uno di b, coniugati nella I. Ora i punti di queste coppie, che appartengono p. es. alla retta b sono dati dalle intersezioni della b con la curva R_a. Ne segue che il numero N è l'ordine ρ della curva R_a aumentato di una unità.

L'ordine di R_a si può valutare così. Si considerino le intersezioni della R_a con la retta a: un certo numero D di esse è costituito dai punti comuni alla a ed alla curva delle coincidenze della I. Invece le intersezioni rimanenti si distribuiscono in coppie di punti distinti, coniugati nella I: ognuna di queste coppie dà luogo ad un punto doppio della curva C di $|C|$, che corrisponde su F alla retta a, e viceversa. Se pertanto queste coppie sono in numero di ν, tenuto conto che la C è di genere zero, si trova che la curva generica di $|C|$, che si è supposta di genere p, diventa razionale per l'acquisto di ν punti doppi. Ne viene $p = \nu$, e quindi $\rho = 2p + D$ $(D \geq 0)$. Ma si è visto che:

$$N = \rho + 1.$$

Ne segue:

$$N = 2p + D + 1$$

e quindi:

$$N > 2p.$$

Ciò posto, si rammenti che il sistema $|C|$ è per ipotesi *completo*. Per la regolarità della superficie F, la serie caratteristica di $|C|$ sarà completa. Ma essendo

$$N > 2p > 2p - 2,$$

la serie caratteristica sarà anche non speciale. Indicando quindi con r la dimensione di $|C|$ ed applicando il teorema di Riemann-Roch, si avrà:

$$r - 1 = N - p.$$

ossia:

$$r - 1 > p$$

cioè a fortiori:

$$r > p.$$

Dunque esiste sulla superficie unirazionale F un sistema lineare completo $| C |$, la cui dimensione r supera il genere p.

43. Caso in cui $p = 0, 1, 2$.

In virtù dei lemmi stabiliti nei due ultimi numeri, si riescirà a dimostrare la razionalità di una superficie F, i cui punti siano in corrispondenza biunivoca con i gruppi di un'involuzione piana, se si riescirà a provare la razionalità di una superficie F che non sia (birazionalmente identica ad) una rigata di genere maggiore di zero e che goda delle due proprietà:

a) sia regolare, cioè ogni sistema lineare completo irriducibile (∞^2 almeno) tracciato su di essa abbia serie caratteristica completa;

b) su F esista un sistema lineare completo, $| C' |$, di dimensione r maggiore del genere p.

La condizione che la F non sia (birazionalmente identica ad) una rigata di genere maggiore di zero è in realtà una conseguenza dell'ipotesi *a*). Invero, come abbiamo avvertito le rigate di genere maggiore di zero sono delle superficie non regolari. Ma a noi non interessa di dimostrare questa proprietà. Per noi la superficie F è rappresentativa di un'involuzione piana: e tanto basta per escludere che possa essere (o ridursi ad) una rigata di genere maggiore di zero. Invero se ciò fosse il sistema delle generatrici della F darebbe sul piano dell'involuzione un fascio irrazionale, il che non è possibile.

Volgiamoci dopo ciò alla nostra dimostrazione.

Il nostro procedimento consisterà nel mostrare che, se le due proprietà *a*), *b*) sono verificate, ed il sistema $| C |$ ha un certo genere p, si può costruire sulla F un sistema $| C' |$ che gode ancora della proprietà *b*), ma per il quale il genere $p' \leq p - 2$. Lo stesso procedimento si applicherà poi al sistema C'', deducendone

un sistema $|C''|$ e così via. Saremo condotti ai casi in cui il genere p assume i valori 0, 1, 2. Cominceremo dall'esame di questi casi, ai quali si riporteranno poi tutti gli altri.

Il genere del sistema lineare $|C|$ sia $p = 0$. Secondo l'ipotesi b) esiste allora sulla F almeno un fascio lineare di curve razionali. La superficie F è quindi razionale per il teorema di NOETHER (cfr. Lib. II, cap. I, nn. 1 e 3).

Passiamo al caso $p = 1$. La dimensione del sistema completo $|C|$ sarà $r \geq 2$. Ma tenuto conto della ipotesi a), la serie caratteristica di $|C|$ deve essere una g_N^{r-1} *completa* sopra un ente ellittico: per il grado di $|C|$ si ha dunque $N = r$. Sulla F esiste quindi un sistema lineare di dimensione r uguale al grado. Fissiamo allora $r - 2$ punti della superficie F. Le curve di $|C|$, passanti per i nominati $r - 2$ punti costituiscono una rete di grado due di curve ellittiche. Ponendo una proiettività tra la rete delle rette di un piano e la rete nominata, la F viene rappresentata sul piano doppio con *quartica di diramazione*: invero ogni retta doppia deve rappresentare una curva ellittica e deve quindi possedere quattro punti di diramazione. Ora il piano doppio con quartica di diramazione (cfr. Lib. II, cap. V, n. 26, pag. 415) è razionale o, eccezionalmente, riferibile ad un cono cubico ellittico. Ma l'ultimo caso è da escludere e la F è quindi razionale.

Veniamo finalmente al caso $p = 2$.

Sulla superficie F esiste per ipotesi un sistema lineare completo $|C|$ di genere $p = 2$, di dimensione $r \geq 3$ e di grado $N = p + r - 1 = r + 1$.

Supponiamo da prima che il sistema $|C|$ sia *semplice*. Allora la superficie F può riferirsi biunivocamente ad una superficie d'ordine $r + 1$ dello spazio ad r dimensioni S_r, a sezioni iperpiane di genere due. Proiettando eventualmente questa superficie da $r - 3$ suoi punti generici nello spazio ordinario si ottiene in S_3 una superficie del *quart'*ordine a sezioni di genere due, dotata cioè di una *retta* doppia; ed una F_4 con retta doppia (cfr. Lib. I, cap. VII, n. 37, pag. 166) è sempre razionale, escluso il caso di

un cono di genere due, che qui non può presentarsi giacchè la F non è una rigata di genere maggiore di zero.

Sia invece il sistema $|C|$ *composto* con un'involuzione, cioè tutte le ∞^{r-1} curve di $|C|$ passanti per un punto generico di F passino di conseguenza per altri $\mu - 1$ (≥ 1) punti determinati dal primo e con esso variabili. La serie caratteristica g_{r+1}^{r-1} segata sopra una curva irriducibile di C da $|C|$ stesso avrà ogni suo gruppo composto di $r-1$ (o più) gruppi di μ punti, appartenenti ad una involuzione razionale o irrazionale d'ordine μ. Sarà pertanto (il segno d'uguaglianza valendo nel caso in cui la nominata involuzione d'ordine μ sia *razionale*):

$$r + 1 \geq \mu(r - 1),$$

ossia:

$$\mu \leq \frac{r+1}{r-1}.$$

Da qui, tenuto conto che $\frac{r+1}{r-1}$ decresce al crescere di r e delle disuguaglianze $r \geq 3$, $\mu \geq 2$, si ricava $r = 3$, $\mu = 2$, $N = 4$.

Dunque sulla F esiste un sistema lineare ∞^3 di genere due e grado quattro, la cui serie caratteristica g_4^2 è composta con le coppie di una g_2^1. L'immagine proiettiva della F, ottenuta prendendo le curve di questo sistema come sezioni piane è una *quadrica doppia* F_2 *dotata di sestica di diramazione* K_6: invero una conica doppia della F_2 rappresenta una curva di genere due e deve pertanto possedere *sei* punti di diramazione.

Ora è facile dimostrare che una F_2 con K_6 di diramazione è razionale (se non sia equivalente ad una rigata di genere uno o due).

Sia da prima la quadrica F_2 *non* degenere. Si può escludere che la K_6 di diramazione sia composta da sei rette di uno stesso sistema, perchè allora la F_2 equivarrebbe ad un piano doppio con sestica di diramazione spezzata in 6 rette per un punto; e questo piano doppio (cfr. Lib. II, cap. V, n. 26, pag. 412) rappresenta una rigata di genere due. Escluso questo caso, la K_6 deve essere bisecata dalle generatrici del primo sistema e quadrisecata

da quelle del secondo: invero in qualsivoglia altra combinazione le generatrici intersecherebbero la K_6 in un numero *dispari* di punti, ciò che è assurdo.

Ma, se la K_6 è *bisecata* da un sistema di generatrici, la F_2 doppia è *razionale*: infatti le generatrici bisecanti la K_6 rappresentano un fascio razionale di curve razionali; e tanto basta, per il teorema di NOETHER (cfr. Lib. II, cap. I, nn. 1 e 3), ad assicurare la razionalità della F_2 doppia.

Supponiamo ora che la F_2 sia un *cono*.

Proiettiamo il cono da un suo punto sopra un piano π. Le sezioni piane del cono diventano coniche passanti per due punti infinitamente vicini A, A'. Il piano π apparisce come doppio e la K_6 di diramazione del cono si proietta nella curva di diramazione del piano doppio e precisamente in una $C_6(A^r A'^s)$, ove $r+s=6$ e $r \geq s$. Se $r=6$ ed $s=0$, si ottiene il piano doppio con sestica di diramazione spezzata in 6 rette uscenti da un punto. Esso rappresenta come si è detto prima, una rigata di genere due ed è quindi da escludere.

Sia invece $r=5$ ed $s=1$, ovvero $r=4$ ed $s=2$. In entrambi questi due casi il fascio delle rette per A rappresenta un fascio lineare di curve *razionali*: invero sulle rette per A esistono *due* punti di diramazione, uno dei quali cade infinitamente vicino ad A nel caso $r=5$, $s=1$. Il piano doppio è pertanto razionale.

L'ultima ipotesi che rimane da discutere è $r=s=3$. La curva di diramazione è una sestica di diramazione con due punti tripli infinitamente vicini. Sappiamo (cfr. Lib. II, cap. V, n. 26, pag. 437) che il piano doppio è razionale, a meno che la sestica non si riduca a tre coniche per A, A' (che si toccano altrove in un terzo punto A''). Ma ciò è impossibile, perchè il piano doppio rappresenterebbe una rigata ellittica.

Ricapitolando: *Una superficie F* (non riducibile ad una rigata di genere maggiore di zero), *la quale soddisfaccia alle ipotesi a), b), e per la quale il genere di $|C|$ sia $p \leq 2$ è razionale.*

44. Caso in cui $p > 2$.

Il nostro scopo è ora di dimostrare la razionalità di una superficie F (non riducibile ed una rigata di genere $p > 0$), la quale soddisfaccia alle ipotesi *a*), *b*), del n. 43 e per la quale il genere p del sistema completo $|C|$ sia qualsivoglia (> 2).

Per procedere nel modo più spedito, conviene dimostrare le tre proposizioni seguenti:

I. *Se una superficie F soddisfa alle due ipotesi a) e b) e contiene dunque un sistema lineare completo irriducibile, $|C|$, di dimensione r maggiore del genere p (> 2), esiste sulla F un sistema lineare $|C'|\ \infty^{p-1}$, le cui curve segano su ogni curva di $|C|$ la serie canonica g^{p-1}_{2p-2}*; il sistema $|C'|$ si dirà il sistema *aggiunto* a $|C|$ (1).

II. *Se la curva generica del sistema aggiunto $|C'|$ si spezza, lo spezzamento avviene in $p-1$ curve razionali appartenenti ad un fascio lineare.*

III. *Se invece la curva generica del sistema aggiunto $|C'|$ è irriducibile, il suo genere è $p' \leq p-2$; ed il sistema aggiunto ha quindi la dimensione r' superiore al genere p' ($r' = p-1 > p'$).*

La dimostrazione delle tre proprietà è diversa a seconda che il sistema $|C|$ sia semplice o composto con una involuzione. Discuteremo successivamente queste due ipotesi.

Sia il sistema $|C|$ *semplice* e proponiamoci di dimostrare la proposizione I.

Poichè $|C|$ è semplice, si può costruire in uno spazio ad r dimensioni S_r una superficie F, birazionalmente equivalente alla data, sulla quale il sistema $|C|$ sia segato dagli iperpiani: l'ordine della F sarà il grado di $|C|$, ossia $N = p + r - 1$.

Per l'ipotesi *a*), le sezioni iperpiane della F segano su di una sezione iperpiana una serie *completa d'ordine* $> 2p-2$, in guisa

(1) Quando sarà dimostrata la razionalità della F, l'immagine del sistema $|C'|$ diventa precisamente l'aggiunto dell'immagine del sistema lineare $|C|$.

che le sezioni iperpiane della F sono *tutte* curve *normali* in S_{r-1} (1).

Sulla F noi vogliamo costruire un sistema lineare ∞^{p-1} di curve C', seganti la serie canonica g^{p-1}_{2p-2} sulla generica sezione iperpiana di F; l'ordine delle curve di $|C'|$ dovrà dunque essere $2p-2$.

All'uopo conviene riferirsi allo spazio ordinario S_3. Proiettiamo perciò la F da $r-3 (r>3)$ suoi punti generici, i quali siano linearmente indipendenti, cioè non appartengano ad alcun S_h con $h < n-4$, sopra S_3. Si può supporre, per la generalità dei centri di proiezione, che la superficie F_0, proiezione della F, non sia multipla. Le sezioni piane della F_0 sono d'ordine $N-(r-3) = p+r-1-(r-3) = p+2$ e di genere p; e (almeno se irriducibili) riescono *tutte normali*. Inoltre le rette di un piano di S_3 segano su *ogni* sezione piana della F_0 una serie completa g^2_{p+2}, che è *non speciale*. Potranno però esistere delle sezioni piane di F_0, che siano riducibili; ma si può escludere che per una retta *generica* di S_3 passi una di tali sezioni (2).

Incominciamo ora a costruire sulla F_0 un sistema lineare ∞^{p-1} di curve seganti sulla generica sezione piana, C_0, di F_0 la serie canonica g^{p-1}_{2p-2}.

Nel piano di C_0 la serie canonica è segata sulla C_0 dalle curve d'ordine $(p+2)-3 = p-1$, aggiunte a C_0. Per fissare una di tali aggiunte basta prendere $p-1$ punti del piano, che possono anche essere assunti sopra una retta generica s: se invero per $p-1$ punti scelti sulla s passassero infinite curve aggiunte, esisterebbe (almeno) un'aggiunta di cui la s fa parte e quindi il

---

(1) A rigore farebbero eccezione le sezioni con iperpiani tangenti che sono di genere effettivo $p-1$; ma ai fini del nostro ragionamento esse possono ritenersi di genere virtuale p, considerando dunque sopra di esse le serie incomplete che posseggono una coppia neutra, rappresentata dal punto doppio che cade nel punto di contatto.

(2) Invero se per una retta generica di S_3 passasse una sezione piana di F_0 riducibile, esisterebbero ∞^2 sezioni piane riducibili; e la F_0 per il teorema di KRONECKER-CASTELNUOVO (cfr. Lib. II, cap. II, n. 7, pag. 269) sarebbe la superficie di STEINER o una rigata.

gruppo segato dalla retta s sulla C_0 sarebbe speciale, ciò che non avviene, come abbiamo osservato di sopra. Ora facciamo ruotare il piano C_0 intorno alla retta s, e per ogni posizione del piano segnamo la curva aggiunta d'ordine $p-1$, passante per quei $p-1$ punti di s, che supponiamo fissi. Otteniamo così ∞^1 curve d'ordine $p-1$ sui piani del fascio s, le quali segano tutte la retta s negli *stessi* $p-1$ *punti*. Queste curve costituiscono una superficie Φ, la quale è d'ordine $p-1$. Se invero Φ fosse d'ordine superiore, essa dovrebbe contenere una o più volte la retta s e quindi dovrebbe esistere (almeno) un piano per s tangente a Φ (in uno e quindi) in tutti i punti di s, la cui sezione ulteriore con Φ costituirebbe una curva d'ordine $p-2$. Ma allora l'intersezione di tale piano con la superficie F_0 sarebbe una curva speciale (di genere virtuale p) ovvero riducibile; ciò che è impossibile.

Ad ogni gruppo di $p-1$ punti di s corrisponde una superficie Φ, la quale sega sopra ogni piano per s una curva d'ordine $p-1$, aggiunta alla sezione di quel piano con F_0; le ∞^{p-1} Φ che così si ottengono, formano un sistema lineare ∞^{p-1}. Ognuna di esse sega F_0 (oltre che lungo la curva multipla) in una curva C'_0 che, venendo incontrata da ogni piano per s in $2p-2$ punti, ha l'ordine $2p-2$. Si ottiene dunque su F_0 un sistema lineare ∞^{p-1} di curve d'ordine $2p-2$, le quali segnano sopra una *generica* sezione piana C_0 di F_0 (anche se il piano di C_0 non passa per s) una serie g^{p-1}_{2p-2}, cioè *la serie canonica* di C_0. Rimane pertanto dimostrata l'esistenza di un sistema lineare $|C'_0|$ ∞^{p-1}, secante la serie canonica sulle ∞^3 curve C_0, sezioni piane della F_0.

Torniamo ora alla superficie F di S_r, dalla quale abbiamo ottenuta la F_0 mediante proiezione da $r-3$ centri, e consideriamo su F quelle ∞^{p-1} curve C', che hanno per proiezione le curve C'_0. Se per ciascuno degli $r-3$ centri di proiezione la generica C' passa α (≥ 0) volte, l'ordine delle C' è $2p-2+\alpha(r-3)$; e le C'_0 segano in α punti ciascuna delle $r-3$ rette che stanno su F_0, e *rappresentano i centri di proiezione* (o *meglio i loro intorni*). Ora un piano condotto per una di tali rette sega la F_0 lungo una curva che ha il genere $p-1$ (perchè proiezione della sezione di F con un iperpiano tangente ad F nel corrispondente centro di

proiezione); e quella curva piana di genere $p-1$ viene incontrata dalle ∞^{p-1} C'_0 in una serie $g^{p-1}_{2p-2-\alpha}$. Questa serie è certo non speciale (perchè la sua dimensione uguaglia il genere della curva sostegno); quindi:

$$p-1 \leq 2p-2-\alpha-(p-1),$$

ossia $\alpha = 0$. Ne viene che le ∞^{p-1} curve C' esistenti su F hanno proprio l'ordine $2p-2$; e di conseguenza segano *la serie canonica* g^{p-1}_{2p-2} *sopra ogni sezione iperpiana di* F. Siamo pertanto riusciti a dimostrare su F l'esistenza di un sistema $|C'|$, aggiunto a $|C|$, così come è affermato dalla proposizione I.

Sempre nell'ipotesi che il sistema $|C|$ sia *semplice,* volgiamoci a dimostrare la proposizione II.

Si tratta di dimostrare che la curva generica del sistema $|C'|$, aggiunto a $|C|$, qualora sia riducibile, è spezzata in $p-1$ curve razionali, appartenenti ad un fascio lineare.

Ora la curva generica di un sistema lineare ∞^k, giacente sopra una superficie, non può spezzarsi che in una parte fissa (comune a tutte le curve del sistema) ed in una parte variabile irriducibile, ovvero in un certo numero $\geq k$ di curve appartenenti ad uno stesso fascio (sistema ∞^1, razionale o no, tale che per ogni punto della superficie passi una sola curva) più forse una parte fissa [1].

Anzitutto — essendo le C sezioni iperpiane — le ∞^{p-1} curve del sistema $|C'|$ non possono contenere tutte una stessa parte fissa, poichè la serie canonica, segata dalle C' sopra una sezione iperpiana della F, non può avere punti fissi. Se dunque il sistema $|C'|$ è riducibile, ogni sua curva deve spezzarsi in (almeno)

---

[1] Questo teorema, che generalizza un noto teorema di E. BERTINI sui sistemi lineari di curve *piane*, è stato stabilito da F. ENRIQUES. Non ci dilunghiamo qui ad esporne la facile dimostrazione. Il lettore potrà trovarla p. es. nella memoria di F. ENRIQUES: *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* (Memorie della Società Italiana delle Scienze, 1896), ovvero nelle prime pagine delle *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, raccolte da L. CAMPEDELLI (Cedam, Padova, 1932).

$p-1$ curve d'un fascio. Ma le curve del sistema $|C'|$ sono d'ordine $2p-2$ e la F non può essere rigata: ne segue che le curve del fascio sono *coniche*, le quali prese a $p-1$ per volta daranno le ∞^{p-1} curve C'. Dunque la serie ∞^1 delle coniche è lineare e la sezione iperpiana della F è iperellittica.

Possiamo enunciare: *se la curva generica del sistema* $|C'|$, *aggiunto a* $|C|$, *si spezza, lo spezzamento avviene in* $p-1$ *curve razionali, appartenenti ad un fascio lineare.*

È precisamente quanto afferma la proposizione II.

Ci rimane da dimostrare la proposizione III.

Supponiamo che la curva generica del sistema aggiunto $|C'|$ sia irriducibile, e cerchiamo un limite superiore al suo genere p'.

Sia S_ρ ($\rho \leq r$) lo spazio a cui appartiene la generica curva C' d'ordine $2p-2$, tracciata su F; poichè la C' determina su di una sezione iperpiana C di F un gruppo generico della serie canonica g^{p-1}_{2p-2}, ne viene che ogni gruppo di questa serie dovrà appartenere ad uno spazio $S_{\rho-1}$. *Ora* $p-1$ *punti del gruppo* canonico possono essere assunti ad arbitrio sulla C, e quindi appartengono ad uno spazio a $p-2$ dimensioni. Ne segue la limitazione $\rho - 1 \geq p-2$, ossia $\rho \geq p-1$.

Ma non può essere nemmeno $\rho = p-1$, ossia $\rho - 1 = p-2$: invero quest'ipotesi porterebbe che lo spazio determinato da $p-1$ punti *generici* di C segherebbe ulteriormente la C in altri punti; e ciò è impossibile, perchè, entro all'S_{r-1} della C, uno spazio determinato da $p-1 < r-1$ punti generici della C non incontra più questa curva.

Dunque si conclude: $\rho \geq p$. Da qui segue che la curva C' di S_ρ viene segata dagli $S_{\rho-1}$ di S_ρ in una serie di ordine $2p-2$ e di dimensione ρ, *non speciale*: invero da $\rho \geq p$ si deduce $2\rho > 2p-2$, mentre se la serie fosse speciale il teorema di CLIFFORD [1] fornirebbe $2\rho \leq 2p-2$.

Ma dal teorema di RIEMANN-ROCH, applicato alla serie non

---

[1] Cfr. F. ENRIQUES ed O. CHISINI, *Teoria...*, Vol. III, Lib. V, Cap. I, pag. 87.

speciale g^{ρ}_{2p-2} segata sulla C' dagli $S_{\rho-1}$ di S_ρ, segue, indicando con p' il genere della C':

$$\rho \leq 2p - 2 - p';$$

e, per essere $\rho \geq p$, si trova:

$$p \leq 2p - 2 - p',$$

ossia:

$$p' \leq p - 2.$$

Quindi *il genere di* $| C' |$ *è inferiore di almeno due unità al genere di* $| C |$.

Per la dimensione di $| C' |$ è poi:

$$r' = p - 1;$$

e, per essere $p' + 1 \leq p - 1$:

$$r' \geq p' + 1,$$

ossia:

$$r' > p'.$$

Il sistema $| C'' |$, e quindi anche il sistema che si otterrebbe da esso rendendolo completo, qualora già non lo fosse, soddisfa all'ipotesi b).

È così dimostrata la proposizione III.

In quanto precede abbiamo dimostrato l'esistenza del sistema aggiunto $| C' |$ nell'ipotesi che il sistema $| C |$ fosse semplice. Sia ora il sistema $| C |$ *composto,* in guisa che ogni gruppo della serie caratteristica sopra una sua curva generica sia costituito da $r - 1$ (o più) gruppi di μ punti di una involuzione razionale o irrazionale d'ordine μ. Per il grado N del sistema si avrà: $N \geq \mu(r - 1)$, valendo il segno d'uguaglianza se la nominata involuzione è *razionale*. Inoltre è per ipotesi $r > p$ ed $N = p + r - 1$, da cui si ricava: $N \leq 2(r - 1)$. Si ha dunque:

$$\mu(r - 1) \leq 2(r - 1);$$

ossia, poichè $r - 1 \geq 1$:

$$\mu \leq 2.$$

Ma non può essere $\mu = 1$. Ne viene $\mu = 2$, e quindi $N = 2(r - 1)$ e $p = r - 1$.

Per conseguenza: la curva generica di $|C|$ contiene una g_2^1 ed è così *iperellittica. Il sistema* $|C|$ *è un sistema lineare* ∞^{p+1} *di curve iperellittiche di genere p, che si segano a due a due in p coppie variabili.*

Le ∞^2 coppie di punti della superficie F, tali che le C passanti per un punto di una coppia passino pure per il secondo punto, possono rappresentarsi biunivocamente sopra una superficie Φ di ordine p, appartenente ad uno spazio S_{p+1}; e le sezioni iperpiane della Φ sono curve razionali, che contate due volte rappresentano le C. Sopra ogni sezione piana di Φ si trovano dunque $2p+2$ punti di diramazione, ed il luogo di questi è una curva Λ d'ordine $2p+2$. *La superficie F è rappresentabile sulla* Φ *doppia con la curva di diramazione* Λ.

La superficie Φ è d'ordine p ed appartiene ad uno spazio S_{p+1}. Essa è quindi (cfr. Lib. II, cap. II, n. 8) una rigata razionale normale, ovvero la superficie di VERONESE di S_5, rappresentabile sul piano mediante il sistema completo ∞^5 di tutte le coniche. Ma si può escludere questa seconda ipotesi: infatti la curva di diramazione Λ sarebbe d'ordine 10 e sul piano sarebbe rappresentata da una curva del quint'ordine (intersecata cioè in 10 punti da ogni conica, immagine di una sezione piana della Φ); ma allora le coniche della superficie di VERONESE, che si rappresentano nelle rette del piano, intersecherebbero la Λ in (un numero dispari) 5 punti, ciò che è assurdo.

Tolto il caso della superficie di VERONESE, rimane che la Φ doppia sia una rigata razionale normale, d'ordine p dello spazio S_{p+1} a $p+1$ dimensioni, dotata di una curva di diramazione d'ordine $2p+2$, intersecante in un numero pari $2h$ ($h \geq 1$) di punti le generatrici.

Se $h=1$, ogni generatrice di Φ, contata due volte, rappresenta una curva razionale della superficie F; le ∞^1 curve razionali, che si ottengono su questa, formano un fascio lineare; e prese a $p-1$ per volta danno su F curve (spezzate) di un sistema lineare ∞^{p-1}, le quali segano ogni C (corrispondente ad una sezione iperpiana di Φ) in $p-1$ coppie della serie g_2^1 esistente su C, cioè in un gruppo della serie canonica di C.

Il sistema ∞^{p-1} così costruito si può assumere come l'aggiunto, $|C'|$, a $|C|$ e soddisfa agli enunciati delle proposizioni I e II.

Lo stesso ragionamento e la stessa conclusione valgono pure se (essendo $h > 1$) dei $2h$ punti che ogni generatrice di Φ ha in comune con Λ, $2h-1$ o $2h-2$ sono riuniti in un punto di questa: infatti la generatrice rappresenta sempre una curva razionale della superficie F. Rimane dunque solamente il caso in cui almeno tre punti semplici di Λ si trovino sopra ogni generatrice, distinti dai rimanenti $2h-3$. In quest'ipotesi la Φ non può essere un cono, perchè altrimenti un iperpiano S_p, per il vertice, segherebbe la curva Λ di ordine $2p+2$ in almeno $3p$ punti. E poichè (avendo discusso direttamente il caso $p=2$) possiamo supporre $p > 2$, è $3p > 2p+2$: si trae così un assurdo. Poichè dunque la Φ non è un cono, gli ∞^{p-1} iperpiani condotti per una sua generatrice segano su Φ (che è d'ordine p) un sistema lineare ∞^{p-1} di curve irriducibili razionali d'ordine $p-1$, le quali incontrano la Λ in $2p+2-2h$ punti. A queste curve, contate due volte, corrispondono sulla superficie F ∞^{p-1} curve iperellittiche di genere $p-h \leq p-2$ formanti un sistema lineare; ed ognuna di esse sega una curva C (corrispondente ad una sezione iperpiana di Φ) in $p-1$ coppie della g^1_2 appartenente a C, cioè in un gruppo della serie canonica di C. Dunque il nominato sistema ∞^{p-1} può assumersi come sistema $|C'|$, aggiunto a $|C|$; ed esso soddisfa in modo evidente alle proposizioni I e III.

Con quanto precede rimangono dimostrate, in tutte le ipotesi possibili, le proposizioni I, II e III, enunciate al principio di questo numero.

Possiamo ora dimostrare facilmente la razionalità di una superficie F (non riducibile ad una rigata di genere maggiore di zero), la quale soddisfaccia alle proprietà *a*), *b*) del n. 43.

Sulla superficie F esiste per ipotesi *un sistema lineare completo «irriducibile», $|C|$, avente la serie caratteristica completa, e la dimensione r maggiore del genere p.* Se $p \leq 2$, abbiamo dimostrato direttamente che la F è razionale. Sia dunque $p > 2$ e

si costruisca, a partire dal sistema lineare $|C|$, il suo sistema aggiunto $|C'|$, che certamente esiste per la proposizione I. Analogamente dal sistema $|C'|$ si passi al suo aggiunto $|C''|$ (secondo aggiunto di $|C|$), che esiste in virtù delle proposizioni I e III, applicate al sistema $|C'|$. Così proseguendo si ha un procedimento di riduzione, il quale fa passare dal sistema $|C|$ agli aggiunti successivi $|C'|$, $|C''|$ ecc.. E poichè, per la proposizione III, ad ogni passaggio il genere diminuisce di almeno due unità, si perviene di regola ad un *i-esimo* aggiunto $|C^{(i)}|$ il cui genere è ≤ 2, a meno che il procedimento non si arresti prima, essendosi pervenuti ad un aggiunto costituito da curve riducibili. Il caso in cui il sistema $|C|$ abbia un genere alto si riporta così al caso in cui il genere $p \leq 2$; ed allora si è veduto direttamente che la F è razionale; se poi si pervenga ad un aggiunto riducibile, per la proposizione II, lo spezzamento avviene in curve razionali appartenenti ad un fascio lineare: e la F è ancora razionale per il teorema di NOETHER.

Si può dunque affermare:

È razionale ogni superficie F (che non sia birazionalmente equivalente ad una rigata di genere maggiore di zero), *la quale goda delle proprietà*:

a) ogni sistema lineare completo irriducibile, ∞^2 almeno, di curve tracciato sulla F ha la serie caratteristica completa;

b) sulla F esiste un sistema lineare completo irriducibile di curve avente la dimensione superiore al genere.

Ma una superficie F unirazionale, i cui punti corrispondano cioè biunivocamente ai gruppi di un'involuzione piana, gode delle proprietà anzidette. Pertanto:

Una superficie unirazionale è anche razionale.

Si suol anche enunciare quest'ultimo risultato nella forma seguente:

Le involuzioni piane sono razionali.



45. Le condizioni di razionalità nella teoria generale delle superficie.

Col teorema di CASTELNUOVO sulla razionalità delle involuzioni piane, si tocca agl'inizi di un nuovo periodo storico, in cui il problema delle superficie razionali viene studiato in relazione alla teoria generale delle superficie algebriche, concepite in ordine al gruppo delle trasformazioni birazionali. Si tratterà dunque di definire le superficie razionali mediante caratteri delle superficie, che siano invarianti rispetto alle trasformazioni suddette.

Tenendo presente la riduzione delle singolarità (B. LEVI, O. CHISINI, ecc.) è lecito riferirsi a superficie algebriche F d'ordine n dello spazio ordinario, le quali siano dotate soltanto di una curva doppia C, che possegga a sua volta dei punti tripli, tripli anche per la superficie. Allora i caratteri invarianti che occorre considerare si lasciano definire come segue:

1) *genere geometrico superficiale*, p_g, cioè numero delle superficie linearmente indipendenti Φ_{n-4}, d'ordine $n-4$, aggiunte alla data F (che vuol dire *passanti semplicemente per la sua curva doppia* C);

2) *genere numerico* (o *aritmetico*), p_a, cioè numero virtuale delle anzidette Φ_{n-4}, calcolato in base alle formule di postulazione di NOETHER (ossia assumendo che le superficie d'ordine $n-4$ che passano per i punti tripli di C seghino su questa curva una serie completa e non speciale);

3) *plurigeneri*, P_i, d'ordine $i = 2, 3, \ldots$; il P_i è il numero delle superficie linearmente indipendenti d'ordine $i(n-4)$ che si comportano lungo la curva doppia C di F come se fosse i-*pla* per esse.

Premesse queste nozioni, le condizioni di razionalità delle superficie vengono espresse da due teoremi fondamentali:

I) *La condizione necessaria e sufficiente, perchè una superficie algebrica sia razionale è data dall'annullamento del ge-*

nere numerico e del bigenere:

$$p_a = P_2 = 0$$

(CASTELNUOVO, 1896).

L'annullarsi del bigenere porta naturalmente anche l'annullarsi del genere p_g; ma non è vera la proposizione reciproca, potendosi dare esempio di superficie con $p_a = p_g = 0$, che hanno il bigenere $P_2 > 0$ e non sono razionali (primo esempio: la superficie del 6° ordine che passa doppiamente per gli spigoli d'un tetraedro, ENRIQUES).

II) *La condizione necessaria e sufficiente perchè una superficie algebrica appartenga alla famiglia delle rigate (razionali o no) è che si annullino insieme il suo quadrigenere ed il suo sestigenere*:

$$P_4 = P_6 = 0$$

(ENRIQUES, 1905).

Per la dimostrazione di questi teoremi, e la sistemazione della teoria generale delle superficie a cui appartengono, rimandiamo a:

F. ENRIQUES, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, raccolte da L. CAMPEDELLI, Cedam, Padova, 1932;

F. ENRIQUES, *Sulla classificazione delle superficie algebriche, particolarmente di genere zero*. Lezioni raccolte da L. CAMPEDELLI, « Rendic. del Seminario matematico della R. Università di Roma », 1934.

Le presenti « *Lezioni* » si possono ritenere come un'introduzione al trattato di geometria sopra le superficie che è costituito dai due volumi di ENRIQUES-CAMPEDELLI, innanzi citati.

INDICE DEI NOMI

Abel, 233.
Bertini, 17, 38, 88, 160, 301, 303, 328, 329, 351, 353, 355, 356, 359, 363, 364, 367, 377, 378, 379, 380, 383, 385, 388, 389, 391, 411, 418, 419, 429, 458, 518 542.
Berzolari, 378, 522.
Bompiani, 300.
Campedelli, 248 (Cfr. anche Enriques-Campedelli).
Caporali, 41, 158, 378, 469, 476, 489.
Cartesio, 157.
Cassini, 157.
Castelnuovo E., 500.
Castelnuovo G., 85, 180, 216, 269, 271, 300, 302, 303, 304, 305, 308, 329, 330, 348, 379, 380, 382, 458, 461, 463, 468, 469, 489, 491, 492, 496, 506, 524, 525, 533, 540, 548, 549.
Cayley, 3, 17, 27, 30, 43, 62, 65, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 75, 76, 88, 125, 126, 301, 500.
Chasles, 3, 17.
Chisini, 218, 289, 294, 302, 303, 304, 317, 329, 548 (Cfr. anche Enriques-Chisini).
Clebsch, 43, 46, 47, 50, 52, 84, 85, 127, 128, 158, 159, 169, 246, 252, 458, 469, 475, 480, 481, 488, 494.
Clifford, 301, 543.
Comessatti, 515, 516, 517, 522.
Conforto, 209, 237, 326, 328, 439, 458, 472.
Cremona, 17, 18, 19, 26, 27, 30, 31, 43, 44, 46, 66, 84, 126, 127, 128, 130, 159, 189, 193, 252, 469, 476, 481, 488, 489, 495.
Darboux, 157, 158, 159.
De Franchis, 225, 331, 332, 333, 364.
De Jonquières, 302, 303, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 364, 369, 379, 381, 382, 383, 385, 388, 443, 449, 455.
Del Pezzo, 275, 278, 299, 300, 301, 308, 313, 328, 329.
Del Re, 476.
De Paolis, 384, 458.
Diekmann, 60.
Dupin, 157, 158.
Enriques, 44, 49, 68, 72, 179, 183, 253, 270, 309, 310, 348, 380, 382, 458, 459, 461, 468, 469, 492, 493, 496, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 510, 514, 516, 533, 542, 549.
Enriques-Campedelli, 179, 458, 493, 503, 505, 542, 549.
Enriques-Chisini, 10, 17, 18, 38, 42, 47, 56, 69, 71, 73, 76, 83, 92, 100, 101, 134, 140, 149, 153, 155, 160, 172, 173, 180, 183, 209, 211, 212, 218, 221, 247, 250, 256, 258, 260.

265, 270, 273, 298, 305, 308, 322, 337, 366, 368, 389, 390, 397, 408, 417, 432, 436, 438, 498, 504, 530, 531, 533, 543.
Fano, 496, 499, 500.
Ferretti, 303, 332.
Galois, 422.
Geiser, 159, 378, 379.
Gherardelli, 130.
Grassmann, 41, 46.
Guccia, 303, 304, 329.
Halphen, 202, 237, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 338, 340, 341, 343, 344, 347, 348, 349, 380, 531, 532.
Hollcroft, 522.
Howe, 522.
Hurwitz, 265.
Ipparco, 3, 16.
Jung, 204, 334.
Kantor, 131, 348, 379, 380, 381.
Klein, 76, 497, 500.
Korndörfer, 159.
Kronecker, 85, 269, 271, 300, 305, 540.
Kummer, 84, 144, 147, 158, 159.
Lamè, 71.
Levi, 548.
Lie, 72, 497, 500, 501.
Lüroth, 71, 308, 524.
Magnus, 27.
Martinetti, 225, 329, 331.
Möbius, 514.
Mohrmann, 128.
Montesano, 200, 494, 496.
Moutard, 157.
Noether, 17, 27, 30, 41, 158, 178, 193, 197, 200, 202, 204, 208, 223, 224, 225, 241, 242, 243, 245, 246, 252, 253, 261, 269, 298, 301, 302 303, 304, 329, 330, 334, 352, 379, 384, 397, 411, 455, 457, 458, 459, 478, 481, 483, 489, 490, 502, 504, 536, 538, 547, 548.
Plücker, 3, 17, 47.
Pensa, 496.
Picard, 269, 271, 272, 278, 286, 299, 300, 497.
Pompilj, 459, 469.
Predella, 160.
Riemann, 265, 273, 534, 543.
Roch, 273, 534, 543.
Rohn, 187.
Rosanes, 301.
Roth, 522.
Salmon, 17, 43, 49, 92, 136.
Schiaparelli, 27.
Schläfli, 59.
Schottky, 438.
Schroeter, 84.
Schwarz, 472, 473, 477.
Scorza, 489, 491.
Segre, 46, 59, 88, 129, 130, 131, 144, 145, 147, 155, 157, 160, 180, 272, 280, 301, 302, 303, 309, 329, 332, 458, 509, 522.
Severi, 131, 514.
Sharpe, 522.
Simart, 300.
Steiner, 31, 32, 41, 77, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 90, 97, 177, 269, 271, 272, 275, 278, 300, 305, 306, 487, 508, 540.
Sturm, 46, 476, 481.
Togliatti, 522.
Tolomeo, 3, 16.
Veronese, 85, 86, 87, 88, 129, 130, 131, 272, 275, 277, 278, 299, 301, 507, 510, 545.
Weber, 438.
Weierstrass, 84, 160.
Wiman, 348, 381.
Zeuthen, 256, 258, 438, 514, 522.