Enriques, Federigo

Sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica

Comment. Math. Helv. **XV** (1943), pp. 227-237.

Sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica

Di Federigo Enriques, Roma

I. Introduzione.

In una Memoria recentemente pubblicata dalla R. Accademia d'Italia[1]), *F. Severi* offre il risultato di una revisione critica de "La teoria generale dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica". Disgraziatamente alcuni punti di questa Memoria riescono un po' oscuri o danno luogo a qualche dubbio, sicché occorre un nuovo esame dell'argomento, nell'interesse della scienza. Tanto più che da questa critica scaturisce una nuova posizione di problemi, che ci piace di segnalare all'attenzione degli studiosi.

1) Anzitutto è per noi oscura, e perciò non convincente, la deduzione del lemma del n. 17, che spiega, precisa o completa, il passaggio più delicato di un ragionamento di *B. Segre*, accennato nella Nota dei Comptes rendus dell'Accademia di Francia "Sur un théorème fondamental de géométrie sur les surfaces algébriques" (9 gennaio 1939) [2]). Io stesso ho provato qualche difficoltà a ricostruire codesto ragionamento, sulla base del cenno contenuto nella detta Nota e di spiegazioni verbali datemi dal Segre stesso. Ma ho fatto poi un'osservazione risolutiva, che vale a sciogliere la questione senza bisogno di ricorrere a delicate considerazioni infinitesimali. Così viene colmata, nel modo più semplice, la lacuna che — in seguito ad una critica del Severi del 1921 — era apparsa sussistere nella dimostrazione del teorema fondamentale sulle superficie irregolari, da me data nel 1904, ed egualmente nelle altre dimostrazioni algebrico-geometriche del teorema, costruite sullo stesso modello[3]). Nel § II espongo

---

[1]) Vol. XII, 1941.

[2]) Non mi consta se a questa Nota sia seguita una più estesa pubblicazione dell'Autore sull'argomento.

[3]) *F. Enriques*, Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari, Rendic. R. Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 1904.

F. Severi, Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare, Rendic. Circolo Mat. di Palermo, 1905. — Nuovi contributi alla teoria dei sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica, Rendic. Acc. Lincei, 2 e 16 Aprile 1916 (Cfr. n. 1). — Una dimostrazione trascendente del teorema fu data da *H. Poincaré* (1910) e riesposta più tardi, con semplificazioni, da *Severi* e da *Lefschetz*. La dimostrazione di B. Segre, di cui si parla nel testo, è stata proposta nella Memoria "Un teorema fondamentale della geometria sulle superficie algebriche e il principio.

questa dimostrazione semplificata del teorema, secondo il concetto di B. Segre, mostrando dunque che "sopra una superficie di generi p_a e p_g ($p_a < p_g$), ogni sistema lineare irriducibile, senza punti base, che sia non speciale e regolare, è contenuto in un sistema continuo ∞^q ($q = p_g - p_a$) di sistemi lineari disequivalenti".

2) Dall'estensione del teorema fondamentale al caso dei sistemi continui che contengono un sistema lineare $|C|$ comunque sovrabbondante, mediante considerazioni svolte nei nn. 16 e 26 della sua Memoria, il Severi trae la conseguenza che "un qualsiasi sistema lineare sovrabbondante $|C|$, che abbia la serie caratteristica deficiente, è contenuto in un sistema continuo di curve formato di sistemi lineari egualmente sovrabbondanti„.

Riferiamoci al caso più semplice in cui $|C|$, sistema non speciale i cui caratteri indichiamo con n e π, abbia la sovrabbondanza d, con $0 < d < q$ ($q = p_g - p_a$), e quindi la dimensione

$$p_a + n - \pi + 1 + d \,,$$

e possegga una serie caratteristica di deficienza eguale a $q - d$, coll'indice di specialità p_g. L'estensione del teorema fondamentale cui si è accennato porta che $|C|$ sia contenuto in un sistema continuo di curve di dimensione

$$p_g + n - \pi + 1 \,,$$

ma, a priori, si può supporre che talvolta, e forse di regola, tale sistema sia formato con ∞^q sistemi lineari generalmente regolari (la cui dimensione si ecceda soltanto da $|C|$), piuttosto che da ∞^{q-d} sistemi lineari sovrabbondanti, colla stessa sovrabbondanza costante d. Così accade di fatto nell'esempio che il Severi stesso adduce (osservazione I del n. 28), senza approfondirne l'esame. Si tratta della superficie F del 5° ordine possedente una retta tripla e una retta doppia, nello spazio ordinario S_3. Questa F è una rigata di genere due ($p_g = 0$, $p_a = -2$, $q = 2$); e le sue sezioni piane C formano un sistema lineare completo, sovrabbondante, colla sovrabbondanza $d = 1$, la cui serie caratteristica ha la deficienza $q - d = 1$. Orbene $|C|$ non appartiene ad un sistema continuo formato di ∞^1 sistemi lineari analoghi, bensì ad un sistema $\{C\}$ formato di ∞^2 sistemi lineari regolari, di dimensione 2, fra i quali figura il sistema ∞^3 $|C|$.

di spezzamento„ (Annali di Mat. 1938) e completata dall'Autore stesso nella citata Nota dei Comptes rendus (9/1/1939) in seguito ad un'obiezione mossa da *Enriques* nella Nota "Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari„ (Lincei, 3 Giugno 1938). Cfr. *F. Enriques*, Sur la propriété caractéristique des surfaces algébriques irrégulières (Comptes rendus, 3/1/1939).

Il motivo dell'eccezione, in rapporto al n. 26 della Memoria Severi, viene spiegato nel § III di questo scritto.

3) L'osservazione 2) porterebbe che si dovesse modificare l'enunciato della proposizione esposta nel n. 28 della citata Memoria, ritornando alla forma in cui il Severi la enunciava per la prima volta nella Nota "Nuovi contributi alla teoria dei sistemi continui di curve ..." (R. Accademia dei Lincei, 2 e 16 Aprile 1916): "ogni sistema continuo completo costituito di ∞^d sistemi lineari distinti, con $0 < d < q$ $(q = p_g - p_a)$, sopra una superficie coi generi p_a e p_g $(p_a < p_g)$, è una varietà abeliana", sicché la sua esistenza imporrebbe che *fra le combinazioni lineari dei q integrali di prima specie di Picard con $2q$ periodi, annessi alla superficie, ve ne sieno d riducibili con $2d$ periodi.*

Ma la dimostrazione di questo teorema offerta nel n. 7 della Nota 1916 (a pag. 560 dei Rendic. Lincei), e che il Severi richiama nella recente Memoria, si appoggia ad una proposizione illusoria: da ciò che una varietà abeliana V_q, ∞^q, contenga una serie ∞^{q-d} d'indice 1 di varietà V_d $(0 < d < q)$ non segue che queste V_d costituiscano un sistema d'imprimitività per il gruppo ∞^q delle trasformazioni di V_q, e perciò siano, esse stesse, abeliane. La cosa è già chiarita dal primo esempio che si presenta per $d = 1$. Invero le superficie F che contengono un fascio di genere $q (> 1)$ di curve C posseggono q integrali semplici di prima specie, ma non — in generale — integrali riducibili.

4) Infine anche la precisazione del teorema di Riemann-Roch, che il Severi espone nella sua Memoria (n. 34), va incontro a qualche eccezione, come appare da esempi che ebbi già a recare nelle mie prime "Ricerche di geometria sulle superficie algebriche" del 1893. Si possono avere, sopra una superficie, sistemi lineari comunque grandi, non regolari: tali sono, per esempio, i sistemi che posseggono curve fondamentali di genere $\varrho > 0$. La deduzione dell'Autore non ha tenuto conto di una circostanza che già si presenta per le superficie regolari: "il sistema $|C'|$ aggiunto ad una curva C non è regolare, ma sovrabbondante, quando la C è una curva riducibile, composta di parti sconnesse fra loro".

Se la C è connessa, $|C'|$ è regolare, almeno per $p_a = p_g = p$; questo teorema, che è in nostro possesso fino dalla primavera del 1941, esige delicate considerazioni sulla connessione delle curve comunque formate di componenti semplici e multiple, che abbiamo richiamate ed esposte in una Nota di prossima pubblicazione. In essa dimostriamo che le curve canoniche pure sono connesse, e quindi i sistemi pluricanonici sono regolari per $p > 0$ e $p^{(1)} > 1$.

II. Dimostrazione del teorema fondamentale sulle superficie irregolari.

Sia $|C|$ un sistema lineare irriducibile, privo di punti base, sopra la superficie F di generi p_a e p_g $(p_a < p_g)$, e, per semplicità di discorso, supponiamo che esso sia non speciale e regolare, sicché, designando i suoi caratteri con n e π, la sua dimensione sarà

$$p_a + n - \pi + 1\ .$$

A $|C|$ associamo un altro sistema, egualmente irriducibile, senza punti base e regolare, $|D|$, che si supporrà abbastanza grande in guisa che anche il sistema $|C+D|$ sia regolare.

Designeremo con ν e ϱ i caratteri, grado e genere, di $|D|$ e con m il numero delle intersezioni di una C con una D. Fissiamo appunto una C e una D irriducibili, senza punti multipli, particolari, e nel gruppo degli m punti $G = CD$ distinguiamo un gruppo G' di $m - p_g$ punti e un residuo gruppo G'' di p_g punti; quest'ultimo potrà supporsi non appartenere ad una curva canonica di F. Secondo le nostre ipotesi le curve di $|C+D|$ segheranno sulla C una serie non speciale completa, mentre le curve dello stesso sistema per $G = CD$ segheranno su C una serie completa speciale di indice di specialità p_g, sicché occorre che le curve di $|C+D|$ che passano per G' passino in conseguenza per G'', e quindi seghino sulla C una serie completa non speciale che ha come fissi i p_g punti di G''.

Ora, nel sistema lineare $|C+D|$, che contiene la particolare curva spezzata $C+D$, consideriamo le curve E variabili, aventi come limite codesta curva, e possedenti $m - p_g$ punti doppi (assegnati) prossimi agli $m - p_g$ punti di G'. Vogliamo dimostrare che le dette curve E posseggono, in conseguenza dei punti doppi assegnati, altri p_g punti doppi, tendenti ai punti del gruppo G'', e perciò (in forza del principio di degenerazione o di spezzamento) per $E \to C + D$ codeste E si spezzano in due componenti, che tendono rispettivamente a C e D.

Se non si avvera la detta tesi, vorrà dire che le curve E (prima di passare al limite) sono irriducibili; e non importa domandarsi se per conseguenza degli $m - p_g$ punti doppi loro imposti esse posseggano qualche altro punto doppio tendente ad un punto di G'', che riterremo — in ogni caso — virtualmente inesistente[4]). Il discorso procede a ridurre all'assurdo l'ipotesi delle E irriducibili, nel modo che segue.

[4]) *B. Segre* (nella Memoria degli Annali di Mat. del 1938) s'indugia a scartare questa ipotesi, richiamando all'uopo la dimostrazione che io ebbi a dare di un teorema di Kneser sul gruppo di una g_n^1 contenuta in una g_n^2. Ma nella mia Nota "Sulla proprietà caratteristica...„ ho già rilevato che questa dimostrazione non è essenziale, e perciò deve esser lasciata da parte se non si vuole complicare inutilmente le cose.

Se le E sono irriducibili, si costruisca sopra una E variabile la serie caratteristica resa completa, g, del sistema continuo $\{E\}$, che verrà segnata, fuori di punti fissi, da un conveniente sistema lineare $|L|$; questa g avrà una certa dimensione R, che calcoliamo qui appresso. Ora, per $E \to C + D$, la serie g si riduce, al limite, ad una serie composta di gruppi su C e di gruppi su D, ma la dimensione della serie complessiva, come vedremo, diventa $R - 1$. Questa conclusione è assurda, perché la continuità esige che la dimensione di una serie lineare si conservi, o almeno non diminuisca, in un qualsiasi passaggio al limite!

La dimostrazione di B. Segre così disegnata (e già espressa nella memoria degli Annali del 1938), per essere rigorosa, deve tener conto dell'intero limite di g, e così non soltanto della serie segnata su $C+D$ dalle curve irriducibili limiti delle L, ma — a priori — anche dei gruppi limiti dei gruppi di g che si ottengano in corrispondenza alle L che vengano a spezzarsi in guisa da contenere parzialmente C o D, dove le intersezioni CL e DL appariscano indeterminate. Questa esigenza è stata messa in luce da un paradosso in cui Enriques, polemizzando contro la prima dimostrazione offerta dal Segre, vedeva qualcosa che sembra contraddire al principio di essa[5]). Ma a posteriori faremo vedere che, nel caso che ci occupa, ogni gruppo di g segnato su una E da una L si può sempre immaginare segato da un'altra L che, nel passaggio al limite, per $E \to C + D$, tende ad una curva irriducibile le cui intersezioni con C e D restano determinate.

Realizziamo il disegno della dimostrazione indicata. Abbiamo detto che la serie g viene segnata sopra una E variabile (con $m-p_g$ punti doppi) dalle curve di un conveniente sistema $|L|$. Per avere la serie completa conviene considerare le curve di un sistema $|L| = |C+D+H|$,

[5]) Enriques, avendo tentato già prima per proprio conto la via ora indicata dal Segre (nel caso più semplice $p_g = 1$), si era fermato di fronte all'esempio del sistema delle curve piane C_8 d'ordine 8 dotate di 15 punti doppi: queste C_8 possono degenerare in due quartiche C_4 e $\overline{C}_4$, che avranno — oltre i 15 punti comuni limiti dei 15 punti doppi delle C_8 — un sedicesimo punto comune X; ora la serie canonica g_{10}^5 sopra una C_8 segata dal sistema lineare delle quintiche aggiunte, che passano per i 15 punti doppi di C_8, viene a ridursi alla serie composta di due g_4^2 appartenenti alle dette C_4, aumentata del punto fisso X; e così la sua dimensione 5 sembra abbassarsi a $2 + 2 = 4$!

Questo è il paradosso che Enriques ha presentato come obiezione alla dimostrazione di *B. Segre*, nella Nota "Sulla proprietà caratteristica...", ed è merito di B. Segre di averlo risolto, spiegando come esso non contraddica al principio di continuità, a priori inoppugnabile. Precisamente qui accade che la $g_{10}^5 = g_4^2 + \overline{g}_4^2 + 2X$ composta come si è detto non è l'*intero limite* della serie canonica di C_8: quando le quintiche aggiunte a C_8 tendano a confondersi con una delle quartiche C_4, in cui la C_8 viene a degenerare, la serie limite su questa C_4, che a prima vista appare indeterminata, risulta essere la g_6^3 completa somma della g_4^2 canonica e di X contato due volte (ai cui gruppi sono da associare i gruppi della serie canonica $\overline{g}_4^2$, sopra l'altra quartica $\overline{C}_4$).

più ampio di $|C+D|$, costruito sommando a $|C+D|$ una conveniente curva H, e considerare in ispecie le curve L passanti per le intersezioni delle E con H, alle quali curve si imponga inoltre di passare per gli $m-p_g$ punti doppi assegnati di E.

La dimensione R della serie g, che è la serie caratteristica del sistema E (con $m-p_g$ punti doppi variabili) resa completa, si calcola così. Il sistema $|C+D|$ ha il grado

$$N = n + \nu + 2m$$

e il genere

$$\Pi = \pi + \varrho + m - 1 ,$$

e quindi la dimensione

$$p_a + N - \Pi + 1 = p_a + n + \nu - (\pi + \varrho) + m + 2 .$$

Esso sega sopra una curva di $|C+D|$ una serie lineare di dimensione

$$p_a + n + \nu - (\pi + \varrho) + m + 1$$

e di deficienza $p_g - p_a$. La serie completa viene segata dalle curve L passanti per un gruppo di punti Γ, intersezione di due curve di $|H|$ e di $|C+D|$, sicché la dimensione di questo sistema, diminuita della dimensione r di $|L-(C+D)| = |H|$, vale

$$p_g + n + \nu - (\pi + \varrho) + m + 2 .$$

Pertanto la dimensione del sistema delle L per Γ, cui s'imponga di passare semplicemente per gli $m-p_g$ punti doppi assegnati di una E (entro $|C+D|$), sarà

$$2p_g + n + \nu - (\pi + \varrho) + 2 + r ,$$

e la dimensione della serie g segnata da codeste L sulla stessa E varrà

$$R \geqslant n + \nu - (\pi + \varrho) + 2p_g + 1 .$$

Ora, quando E tende a $C+D$, si ottiene come limite della serie g, segnata dal corrispondente $|L|$, una serie che si compone dei gruppi di una serie lineare g_c su C, da prendere insieme ai gruppi di una serie lineare g_d su D. E precisamente vogliamo dimostrare che: ogni gruppo di g_c, limite parziale su C di un gruppo di g su E, possiede come fissi i p_g punti del nostro G'', e quindi la g_c è una serie non speciale di dimensione

$$p_g + n - \pi ;$$

similmente ogni gruppo della g_d su D possiede come fissi i p_g punti di G'' e perciò la g_d ha la dimensione

$$p_g + \nu - \varrho \,.$$

Per conseguenza la serie limite di g sulla $C+D$, che è la $g_c + g_d$, ha la dimensione

$$n + \nu - (\pi + \varrho) + 2p_g \;:$$

una unità di meno in confronto alla dimensione R della g che appartiene ad una E variabile ($E \to C+D$) !

L'asserto ($\lim g = g_c + g_d$ per $E \to C+D$) si prova in base all'osservazione seguente:

1) se una L (segnante su E un gruppo della g) si riduce, nel passaggio al limite, ad una curva $\overline{L}$, che non comprenda la C come parte, è senz'altro evidente che il limite del gruppo EL su C è un gruppo segnato da una curva $\overline{L}$ che passa per i punti di $HC\,(H = L - |C+D|)$ e per quelli del G', ed in conseguenza anche per i punti fissi del gruppo G'' ;

2) se, invece, la L tenda ad una curva limite $\overline{L}$ contenente come parte la C, si può sempre sostituirla con una curva del fascio definito da $E+H$ e da L, che al limite dia una curva $\overline{L}$ (corrispondente ad $E=C+D$) irriducibile.

Questa osservazione 2) sostituisce il lemma di Segre-Severi. In sostanza il lemma, per quel che concerne il nostro caso, viene giustificato dall'osservare che ogni gruppo di g fa parte del gruppo base di un fascio, definito da $E+H$ e da L, che al limite viene ad avere due punti base infinitamente vicini, nei punti del G''.

Infine dunque l'ipotesi che le E sieno irriducibili è stata ridotta all'assurdo: vuol dire che il sistema continuo delle curve spezzate con m punti doppi cui appartiene $|C+D|$ si definisce imponendo alle curve di $|C+D|$ di possedere $m - p_g$ punti doppi, i rimanenti p_g punti doppi resultandone per conseguenza. E pertanto $|C|$ *dovrà appartenere ad un sistema continuo di curve* $\{C\}$ *di dimensione* $p_g + n - \pi + 1$, *formato di* $\infty^{p_g - p_a}$ *sistemi lineari distinti.*

È il *teorema fondamentale* sulle superficie irregolari, che importa *l'integrità della serie caratteristica del sistema completo* $\{C\}$, cui appartiene il sistema regolare $|C|$. E che, in questa forma, si lascia estendere anche a sistemi $|C|$, speciali o no, regolari o sovrabbondanti.

III. Sistemi continui ∞^d, con $0 < d < q$, sopra una superficie di irregolarità q.

Nell'introduzione 2) abbiamo affermato che "possono esistere, sopra una superficie di irregolarità $q = p_g - p_a$, sistemi continui di curve costituiti da ∞^q sistemi lineari completi generalmente regolari, contenenti un particolare sistema sovrabbondante". E abbiamo addotto l'esempio della superficie F del 5° ordine con una retta tripla ed una doppia, che — nello spazio ordinario S_3 — è una rigata di genere 2 ($p_g = 0$, $p_a = -2$, $q = 2$) su cui le sezioni piane C formano un sistema sovrabbondante, di dimensione 3. Questo sistema $|C|$ — si è detto — dà luogo ad una serie caratteristica di deficienza 1, ed è contenuto in un sistema continuo $\{C\}$, formato non da ∞^1 sistemi lineari sovrabbondanti, ma da ∞^2 sistemi lineari generalmente regolari, fra i quali si trova il solo sistema sovrabbondante $|C|$. Per dimostrare l'asserto si sommi al sistema $|C|$ delle sezioni piane di F una coppia di generatrici a e b sghembe fra loro, e perciò non appartenenti alla g_2^1 costituita dalle coppie di rette che escono dai punti della retta doppia. Si avrà così un sistema lineare completo $|L|$, di genere 2 e di grado 9, di dimensione $r \geqslant 9 - 2 - 2 + 1 = 6$, che condurrà a costruire, in uno spazio S_6 o S_7, una rigata normale Φ che dà la F per proiezione da due generatrici a' e b', omologhe ad a e b. Ora si vede facilmente che la dimensione di $|L| = |C + a + b|$ non può superare 6, cioè che la nostra F non può essere proiezione di una Φ normale in S_7. L'asserto risulta dall'osservare:

1) che la Φ non può ammettere una retta direttrice doppia, poiché altrimenti la sua proiezione da una generatrice sarebbe un cono;

2) che, così essendo, la rigata Φ, supposta appartenere ad S_7, sarebbe segata dagli iperpiani per una coppia di generatrici secondo una residua curva d'ordine 7, normale in un S_5, per la quale passerebbero ∞^1 iperpiani, e quindi la coppia delle generatrici suddette apparterrebbe sempre ad una g_2^1 (ossia sarebbe speciale).

Ciò posto, è chiaro che quando si considerano gli iperpiani di S_6 per due generatrici di Φ si ottiene in generale un sistema lineare regolare ∞^2; affinché si abbia fra questi sistemi il sistema $\infty^3|C|$, bisogna che le due generatrici a e b, da cui Φ viene proiettata su F, sieno incidenti, cioè passino per un punto O, doppio per Φ.

Si avrà dunque su F una serie $\infty^2\{C\}$ di sistemi lineari generalmente regolari, che contiene il sistema sovrabbondante $|C|$. E si può aggiungere che il sistema lineare $\infty^3|C|$ contenuto in $\{C\}$ è un sistema isolato. Altrimenti la rigata Φ dello S_6 dovrebbe possedere una curva direttrice doppia per O, che — avuto riguardo alla sua proiezione F — non potrebbe essere che una retta; ed in tal caso la proiezione di Φ da una sua generatrice sarebbe un cono.

Concludendo, l'esempio citato non appare conforme alla proposizione di Severi. Ma è interessante osservare che, in altro modo, si ottiene sulla nostra superficie una serie ∞^1 di sistemi lineari di genere 2 e grado 5, tutti sovrabbondanti, di dimensione 3. Infatti sono tali i sistemi lineari segati su Φ dagli iperpiani passanti per il punto doppio O e per una generatrice. E fra questi sistemi ve ne sono due, tangenti ad una delle due falde della rigata in O, che contengono parzialmente ciascuno una rete di $|C|$. Per vedere come la detta serie continua di ∞^1 sistemi lineari sovrabbondanti venga data su F, conviene partire da tale superficie, e costruire su di essa il sistema lineare $|L| = |C+a+b|$, che diventa il sistema delle sezioni iperpiane della superficie Φ, mediante superficie aggiunte ad F. Le aggiunte del 3° ordine φ_3 sono ∞^5, e segano sulla rigata F i gruppi di una g_7^5. Le φ_4 aggiunte formano un sistema lineare ∞^{16} e segano F secondo curve unisecanti le generatrici, d'ordine 12. Il sistema ∞^{16} di queste curve ha il grado 19 ed è regolare.

Costringendo le sue curve a contenere un gruppo di generatrici della nominata g_7^5, le curve si spezzano nelle dette generatrici e nelle ∞^3 sezioni piane C, perché le corrispondenti φ_4 si spezzano in una φ_3 e in un piano. Così si ottiene intanto il sistema $|C|$, ∞^3, delle sezioni piane di F: la circostanza che esso sia sovrabbondante si rispecchia in ciò che i gruppi della g_7^5 impongono 13 anziché 14 condizioni alle φ_4.

Per ottenere il sistema $\infty^6|L|$ che rappresenta la Φ d'ordine 9 di S_6, occorre imporre alle φ_4 di passare per 5 generatrici di F, che insieme alle due a e b da sommare a $|C|$ formino un gruppo della detta g_7^5. Dunque il sistema $|L| = |C+a+b|$ verrà segnato su F dalle φ_4 per le 5 generatrici indicate, e sarà costituito da curve L d'ordine 7; al punto doppio O di Φ corrisponderà su F una coppia di punti A e B, appartenenti rispettivamente alle a e b, coppia neutra per cui passano ∞^5 curve L (anziché ∞^4).

Quindi ai sistemi ∞^3 delle sezioni iperpiane di Φ passanti per O e per una generatrice, corrisponderanno su F sistemi lineari ∞^3 (sovrabbondanti) di sestiche per A e B. Due di tali sistemi contengono parzialmente due reti di curve con un punto base, risp. in A e B: reti che vanno completate aggiungendovi rispettivamente le generatrici b ed a.

Aggiungasi che il nominato sistema ∞^3 di sestiche è *esorbitante*, cioè — completo come sistema di curve — va ampliato in una varietà ∞^2 avente per elementi dei sistemi lineari (in generale di dimensione 2).

L'esempio delle curve di 5° ordine esistenti su F che abbiamo qui approfondito sembra contraddire al ragionamento di Severi nei n. 16 e 26 della sua Memoria. Sicché occorre chiarire la cosa.

Ad un sistema lineare irriducibile $|C|$, senza punti base, non speciale, che abbia la sovrabbondanza d e la serie caratteristica di deficienza $q-d$ ($q = p_g - p_a$), si associ il sistema regolare, ampio quanto si vuole, $|D|$, per modo che $|E| = |C+D|$ seghi su una C una serie completa e non speciale. Si vede tosto che, per essere $|C|$ sovrabbondante, $|E|$ segherà su una D una serie non completa, di deficienza d. Quindi si deduce, con Severi, che anche le curve E passanti per il gruppo di punti CD segano su D una serie colla stessa deficienza d. Da ciò, sostanzialmente, l'autore argomenta che non può esistere un sistema continuo $\{C\}$ formato di ∞^q sistemi lineari generalmente regolari, altrimenti le curve di questo infinitamente vicine alla data C dovrebbero dare come resti rispetto ad $|E|$ tutte le curve di $\{D\}$ infinitamente vicine alla data D, le quali apparterrebbero — egli opina — a curve E spezzate, vicine alla $C+D$, e *passanti per* CD: ciò contradice all'osservazione fatta innanzi che codeste E segano su D una serie deficiente (cioè *non tutta* la serie caratteristica di $\{D\}$).

Ma conviene osservare che, per ipotesi, la dimensione di $|C|$ eccede quella degli altri sistemi lineari regolari che formano il sistema continuo $\{C\}$; perciò un sistema lineare variabile di $\{C\}$ che tenda a $|C|$, avrà curve infinitamente vicine a qualche C di $|C|$, ma non ad ogni C di questo sistema lineare. In conseguenza di ciò le curve di $\{D\}$ infinitamente vicine alla D, prese insieme colle corrispondenti curve vicine a C, apparterranno sì ad $|E|$, ma non sempre al sistema particolare delle E passanti per il gruppo CD.

IV. Serie continue di curve disequivalenti ed integrali di Picard appartenenti ad una superficie irregolare.

Pongasi che una superficie irregolare F, di irregolarità $q = p_g - p_a$, contenga un sistema continuo completo $\{C\}$ formato da ∞^d sistemi lineari distinti, o addirittura da ∞^d curve disequivalenti, dove $0 < d < q$. E sia $\{D\}$ un altro sistema continuo su F, formato da ∞^q sistemi lineari, o — se si vuole — da ∞^q curve disequivalenti. Designando con C_1 e C_2 due curve di $\{C\}$, le operazioni $+C_1 - C_2$, applicate agli elementi (sistemi lineari o curve) di $\{D\}$, danno luogo a trasformazioni birazionali T della varietà di Picard V_q, immagine di $\{D\}$. Ma si possono presentare due casi:

1) Le T formano un gruppo, cioè un sottogruppo ∞^d del gruppo ∞^q delle trasformazioni di V_q in se stessa. In questo caso, fra le combinazioni

lineari dei q integrali semplici di prima specie appartenenti ad F, vi sono d integrali riducibili con $2d$ periodi.

2) Le T generano un gruppo più ampio, che — in generale — sarà l'intero gruppo ∞^q della varietà di Picard V_q.

Questo secondo caso non si può escludere, come opina l'autore della Memoria in esame. Esso si presenta anzi per una *qualunque* superficie di irregolarità q, poiché basta imporre $d < q$ punti base alle curve disequivalenti di un sistema completo ∞^q : in ispecie se $d = q - 1$ si ottiene su F un sistema ∞^1 che, di regola, ha il genere $p > q$; ed i periodi degli integrali di Picard di F rispondono ad integrali riducibili fra i p integrali abeliani appartenenti alla detta serie.

Una famiglia particolare notevole di superficie irregolari su cui esistono sistemi $\{C\}$ rispondenti al nostro secondo caso, appare essere la famiglia delle superficie che contengono un sistema continuo completo ∞^1 d'indice $i \geqslant 1$ di curve disequivalenti, formanti un ente algebrico di genere $q (d = 1\,,\ 0 < 1 < q)$. In questo caso la varietà di Picard V_q, pur non ammettendo integrali di prima specie riducibili, non è una varietà abeliana generale: invero i periodi dei suoi integrali di Picard di prima specie (i cosidetti *moduli di irregolarità*) debbon soddisfare a quelle condizioni di Riemann che caratterizzano fra le varietà abeliane le varietà rappresentative dei gruppi di q punti d'una curva di genere q (funzioni abeliane particolari provenienti dall'inversione degli integrali abeliani di prima specie annessi alla curva).

Lo studio di questa particolare famiglia di superficie d'indice $i > 1$, anzi $i > 2$, conduce in generale a considerare le serie ∞^2 di gruppi di i punti disequivalenti sopra una curva K di genere q, priva di integrali di 1ª specie riducibili. Tali serie rispondono a superficie F, che — almeno in generale — sembrano possedere un sistema continuo completo ∞^1 del genere q di curve C disequivalenti: le C sarebbero le immagini delle serie ∞^1 dei gruppi della serie considerata su K, che hanno come fisso un punto della curva K.

Così può dirsi, all'ingrosso, che codesta famiglia notevole di superficie rispondente alla nostra ipotesi 2) sarebbe costituita da superficie la cui varietà di Picard è una varietà abeliana particolare, rappresentativa dei gruppi di q punti di una curva di genere q (> 1).

(Reçu le 20 mars 1942.)