Enriques, Federigo

Sur le théorème de Riemann-Roch concernant les surfaces algébriques et sur les systèmes de courbes canoniques et pluricanoniques

Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Madr. (I) **XL** (1946), pp. 149-159. ([Datato: enero 1942])

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XL

CUADERNO SEGUNDO

MADRID
Domicilio de la Academia: VALVERDE, 22
TELÉFONO 12529
1946

Artículo 39 de los Estatutos de la Academia:

«La Academia no se hace solidaria de las opiniones cuestionables, en materia científica, de sus individuos. Cada autor es responsable de las proposiciones y asertos que contengan los escritos del mismo que aquella publique.»

C. BERMEJO, IMPRESOR.—J. GARCIA MORATO, 118. TELEF. 31199.—MADRID

Sur le théorème de Riemann-Roch concernant les surfaces algébriques et sur les systèmes des courbes canoniques et pluricanoniques

Note du correspondant

Federigo Enriques

à Rome

J'ai l'honneur de communiquer à l'Académie quelques résultats que j'ai obtenus depuis le printemps 1941, en attendant qu'il me soit possible de publier une exposition plus étendue de ces questions.

Bien que plusieurs des remarques qui suivent s'étendent aisément aux surfaces irrégulières, je me bornerai ici au cas le plus simple des *surfaces régulières* F de genre $p_a = p_g = p > 0$.

1. *Demande de préciser le théorème de Riemann-Roch.*

On sait que tout système linéaire irréductible et non spécial de courbes C, appartenant à F, a la dimension

$$r \geq p + n - \pi + 1,$$

n et π désignant le degré et le genre des C: c'est le cas le plus simple du théorème de Riemann-Roch étendu aux surfaces (*) par Enriques et Castelnuovo.

Il y a lieu de demander si l'inégalité qui figure dans l'énoncé du théorème ne pourrait être remplacés par une simple égalité. Il paraît, à première vue, que cela devrait être vrai pour les systèmes $|C|$ dont les caractères satisfont à certaines conditions, de façon à être *plus amples* que le système canonique, c. à. d. pour les systèmes $|C|$ renfermant le système canonique $|K|$; car, étant

$$|C| = |K + L|$$

(*) Même pour les systémes réductibles.

| C | sera le système adjoint à | L |:

$$| C | = | L' |.$$

En effet on sait que le système adjoint à un système linéaire, ou même à une courbe, irréductible L, découpant sur L la série canonique complète, est toujours *régulier*, c. à. d. que sa dimension satisfait précisément à l'égalité

$$r = p + n - \pi + 1.$$

Mais pour avoir des systèmes *surabondants* ($r > p + n - \pi + 1$) il suffit de considérer les systèmes | C | possédant une courbe fondamentale de genre $\rho > o$: ce sont là des exemples que j'ai indiqués depuis mes premières recherches sur les surfaces algébriques de 1893; et il convient de remarquer que, en ce cas, non seulement | C | mais aussi tous ces multiples seront aussi surabondants.

Si l'on veut des systèmes surabondants sans courbes fondamentales, il suffira d'envisager une surface F_n d'ordre n, aussi grand que l'on veut, possédant un point quadruple O, et le système des courbes C découpées sur F_n par les surfaces d'un certain ordre $m > n - 4$ passant simplement par O.

Ces exemples ne sont pas en contradiction à ce que j'ai dit plus haut, car les systèmes surabondasts | C | que nous venons de construire, s'ils sont plus amples du système canonique de façon que

$$| C | = | L + K |$$

$$| C | = | L' |,$$

figureront comme les adjoints à une courbe L, qui sera réductible. *La régularité du système adjoint à L suppose que L soit irréductible et tombe notam ment si L est composée de parties non connexes entr'elles.*

2. *Irrégularité du système adjoint à une courbe réductible non connexe.*

Pour approfondir la question il convient de distinguer le cas des courbes L, composées de parties simples, et celui des L possédant des composantes multiples. Dans le premier cas il n'y a pas difficulté à établir: 1) que le système adjoint | L' | est encore régulier si L est connexe; 2) que si L est formée par ω composantes simples non connexes entr'elles, le système adjoint | L' | aura la surabondance ω

$$(r = p + n - \pi + 1 + \omega).$$

Lorsque L renferme une composante multiple θ et une composante irréductible n'ayant pas de points communs avec θ, on peut évaluer la surabondance de | L' | par une analyse appropriée que je ne m'arrêterai pas à developper.

3. *Sur la connexión des courbes formées de parties multiples.*

Mais le cas où L soit composée de parties simples et multiples, d'une façon quelconque, amène quelques difficultés d'une ordre nouveau: il s'agit d'abord d'étendre à ces courbes le concept ordinaire de la connexion. Cette question a été rencontrée par M. A. Franchetta à l'occasion de ses études sur les courbes exceptionnelles, et donne lieu à des considérations d'ordre délicat.

On dira qu'une courbe L, formée de parties simples ou multiples, est *connexe* si en divisant la courbe en deux parties L_1 et L_2 ($L = L_1 + L_2$), d'une façon quelconque, le nombre virtuel des intersections $(L_1\ L_2) > O$.

C'est là un *critérium arithmétique de la connexion* qui remplace la définition ayant un sens géometrique que l'on peut donner des courbes connexes formées de parties simples. Pour ces dernières on avait que

1) « en ajoutant à une courbe connexe une composante ayant quelques points en commun avec elle on obtient toujours une courbe connexe» et ainsi

2) «on peut construire une courbe connexe formée des composantes irréductibles en ajoutant une de ces composantes à la courbe résiduelle connexe formée de s-1 composantes». Mais cette *composition géométrique* n'est pas possible en général pour les courbes connexes composées de parties multiples, ayant degrés négatifs, et même n'est plus vraie pour celles-ci la prop 1).

A cause de ces remarques la démonstration de la régularité du système adjoint | L' |, que l'on donne sans difficulté dans le cas où L soit une courbe connexe formée de parties simples, ne s'étend pas aisément au cas où L renferme des parties multiples.

4. *Régularité du système adjoint à une courbe connexe quelconque.*

Cependant le théorème subsiste sans exception: le *système adjoint à une courbe connexe L, composée de parties simples ou multiples, est toujours régulier.*

J'indiquerai brièvement les lignes de la démonstration qui a comme point de départ quelques notions que j'ai développées dans ma Note récente «Sur l'extension du théorème de Riemann-Roch...», publiée par le Bulletin des Sciences Mathématiques (1940).

Je considère, à côté de $|L|$, un système linéaire irréductible régulier $|C|$, multiple d'un système de dimension $\geqslant 2$, tel que $|D| = |C + L|$ soit également un système irréductible et régulier; on peut aussi supposer que, $|C|$ étant assez grand par rapport à $|L|$ et à $|L'|$, les systèmes complets $|L|$ et $|L'|$ découpent sur une courbe générique D deux séries complètes. Or, en faisant jouer l'hypothèse que les L soient connexes, on peut établir que $|C|$ découpera aussi sur D una série complète. Ainsi, en connaissant la dimension de cette série (CD), on évaluera celle de la série résiduelle (L'D), qui est la dimension de (L'): et on trouvera que (L') est régulier.

5. *Système canonique réductible.*

Avant d'appliquer les résultats obtenus au cas du système bicanonique, qui est l'adjoint, et en même temps le double, du système canonique $|K|$, il convient de se demander d'abord si $|K|$ peut être réductible.

Nöther a signalé qu'il en est ainsi en général lorsque le genre linéaire $p^{(1)}$ de F est égal à l'unité: $p^{(1)} = 1$; il a même crû de pouvoir établir que en faisant abstraction des composantes exceptionnelles, c'est là le seul cas de réductibilité de $|K|$. Mais il s'est trompé, et on peut donner quelques exemples de surfaces F, ayant $p > o$ et $p \quad > 1$, qui possèdent des courbes canoniques pures réductibles.

D'abord il suffit d'envisager le plan double dont la courbe de diramation est une C_{10} d'ordre 10, ayant trois points [3, 3] (1): A, B, D, sur une droite a

$$(p = 3, \quad p^{(1)} = 6);$$

les images des courbes canoniques K sont ici des coniques réductibles dont fait partie la droite fixe a; et à celle-ci correspond une partie fixe θ de (K) de genre $\rho = 1$ et de degré $\nu = -1$: on évalue ν en tenant compte que θ privée de ses points A, B et D (qui figurent comme de points base assignés de $|K|$ est représentée sur le plan double par la droite a de degré -2, et partant a — elle même — le degré -4.

Un second exemple de système canonique réductible est fourni par le plan double ayant une courbe de diramation C_{12} d'ordre 12, douée de 4 points [3, 3] appartenant à une droite a: les images des courbes canoniques, sont ici des cubiques réductibles dont fait partie la a, et à cette droite correspond une composante fixe des K qui est de genre $\rho = 1$ et de degré $\nu = -2$ ($p = 6$, $p^{(1)} = 15$).

Citons encore l'exemple de la surface irrégulière, ayant $p_a = 2$, $p_g = 3$,

(1) Par singularité [3, 3] j'entends deux points triples infiniment voisins.

$p^{(1)} = 11$, qui est représentée sur un plan double dont la courbe de diramation C_{12} est formée de trois C_4 d'un même faisceau, se touchant en 8 points d'une même conique C_2: à celle-ci correspond une partie fixe des K, de genre $\rho = 3$ et de degré $\nu = 0$.

Dans tous ces exemples il s'agit d'une courbe fixe qui fait partie des courbes canoniques; je ne connais pas des exemples de surfaces de genre linéaire $p^{(1)} > 1$, sur lesquelles les parties variables des K seraient composées des courbes d'un faisceau; mais je suis réussi à exclure cette possibilité seulement pour les plus petites valeurs de $p^{(1)}$.

Or je veux donner un dernier exemple où l'on voit un système canonique renfermant une partie fixe multiple. A cet effet il convient d'envisager un plan double défini par une courbe de diramation C_{2n} d'ordre $2n$ (assez grand) douée d'un point $(2n - 6)$ — ple O et de deux couples de points [3, 3], A, B et A_1, B_1, alignées avec O. Les images des courbes canoniques sont ici des courbes d'ordre $n - 3$ ayant un point $(n-4)$ — ple en O et passant par A B A_1 B_1; partant, de ces courbes font partie les deux droites fixes AB et $A_1 B_1$, qui représentent deux courbes (non exceptionnelles) de genre $\rho = 0$ et de degré $\nu = -2$. Or on peut faire approcher A_1 de A et B_1 de B, de façon que la C_{2n} acquière 4 points triples successifs sur une branche lineaire par A, et également 4 points triples successifs sur une branche par B; alors les courbes canoniques K renfermeront une partie fixe θ double, représentée par la droite $AB = A_1 B_1$.

6. *Irréductibilité des parties variables des courbes bicanoniques.*

La question se pose maintenant de savoir si le système canonique $|K|$ de F, même étant réductible, sera toujours connexe. Dans les exemples cités ci-dessus, il en est ainsi à priori car la F se présente comme cas-limite d'une surface dont les courbes canoniques sont irréductibles. Mais il s'agit de démontrer que la propriété subsiste sans exception pour tous les cas ($p > O$, $p^{(1)} > 1$) où $|K|$ soit réductible d'une façon quelconque.

Pour prouver que $|K|$ est connexe il suffit de prouver la connexion du système bicanonique $|2K|$. A cet effet je démontrerai d'abord que, même si $|2K|$ est réductible, «*les parties variables des courbes bicanoniques sont irréductibles*». Pour justifier cette remarque, on réduira à l'absurde l'hypothèse que les parties variables de $|2K|$ sont composées de s (> 1) courbes d'un faisceau $|C|$. En désignant par θ les parties fixes de $|2K|$ nous écrirons

$$|2K| = \Sigma\,\theta + |sC|.$$

Désignant par π et n le genre et le degré de $|C|$, par ρ et ν ceux d'une θ, évaluons le caractère additif des 2 K qui indique le nombre de leurs intersections avec les K; on aura

$$2\,K.K = 2\,p^{(1)} - 2 = \Sigma\,(2\,\rho - 2 - r) + s\,(2\,\pi - 2 - n)$$

Or, en se rapportant, comme il est permis, à une surface F privée de courbes exceptionnelles

$$2\,\rho - 2 - r \geq 0$$

et partant

$$s\,(2\,\pi - 2 - n) \qquad \leq 2\,p^{(1)} - 2.$$

Mais le faisceau | C | doit être complet, c. à. d. qu'il ne saurait être contenu en un système linéaire de dimension $\varepsilon \geqslant 2$; en conséquence, si les C ne font pas partie du système canonique | K |, on aura

$$p + n - \pi + 1 \leq r \leq 1$$

et

$$n \leq \pi - 1;$$

cette inégalité subsiste à fortiori si | C | est contenu en | K |, car, en ce cas | 2 C |, fait partie du système adjoint

$$|\,C'\,| = (C + K).$$

Ceci posé, en supposant $\pi > 2$, on aura

$$s\,(\pi - 1) \leq 2\,p^{(1)} - 2$$
$$\pi - 1 \geq 2$$
$$p^{(1)} - 1 \geq s,$$

et par conséquent la dimension de | 2 K | sera

$$\geq p + p^{(1)} - 1 > s,$$

ce qui est en contradiction à l'hypothèse que | 2 K | soit formé par des groupes de s courbes C, et ainsi ait la dimension s.

Notre proposition est établie pour $\pi > 2$, et comme, étant $p^{(1)} > 1$, on ne peut pas avoir $\pi = 1$, il reste seulement à examiner le cas $\pi = 2$.

D'abord si $\pi = 2$ et p > 1 les courbes du faisceau | C | font partie des K canoniques et le système adjoint | C' | = | C + K |, contenu en | 2 K |, découpe sur une courbe C la série g_2^1 complète: d'où il suit que les courbes bicanoniques ne sauraient être composées par les C.

Maintenant il suffira de montrer que, les courbes bicanoniques étant supposées composées des courbes C de genre $\pi = 2$, on doit avoir $p > 1$.

Le faisceau des courbes C, de genre $\pi = 2$, nous permet de representer la surface donnée sur un plan double ayant une courbe de diramation f_{2m} douée d'un point multiple O, d'ordre $2m - 6$ ou $2m - 5$, et d'autres singularités élémentaires: points 4-ples et points [3, 3]. Sur ce plan les courbes bicanoniques auront comme images les courbes α, $2m - 6$ sécondes adjointes à f_{2m}, qui seront composées d'une α, $2m - 6 - s$ fixe et de s droites mobiles par O. Comme parmi les courbes bicanoniques il y a au moins une courbe canonique comptée deux fois, la α, $2m - 6 - s$ devra être le double d'une courbe $tm - 3 - h$ ($s = 2h$) faisant partie des courbes canoniques, et qui, ajoutée à h droites par O, donnera l'image d'une courbe canonique entière. Étant $h \geqslant 1$, il s'ensuit:

$$p > 1\,!$$

7. *Connexion des courbes canoniques.*

Nous venons d'établir que les courbes bicanoniques d'une surface F ($p \geqslant o$, $p^{(1)} > 1$) ont des parties variables C irréductibles qui formeront un système linéaire de dimension $r \geqslant 2$. Or si | 2 K | est un système réductible non connexe, on pourra partager une de ses courbes en deux parties ayant $x \geqslant o$ intersections entr'elles, et l'une de celles-ci ne renfermera pas une C, et sera donc une partie θ de la courbe fixe de | 2 K |. Il est aisé de reconnaître que si θ n'est pas connexe on pourra la remplacer par une courbe connexe ayant également un nombre non positif d'intersections avec la courbe résiduelle par rapport à | 2 K |, de sorte qu'il est permis de supposer que la θ elle-même soit connexe. En désignant par ρ et ν le genre et le degré de θ, le nombre des intersections de θ, avec la courbe résiduelle sera

$$\theta\,(2\,K - \theta) = 4\,\rho - 4 - 3\,r \leq 0,$$

d'où il suit

$$r \geq \frac{4}{3}\,(\rho - 1).$$

Mais puisque θ est connexe, on aura

$$\rho \geq 0$$

et partant

$$\rho = 0 \qquad \text{ou} \qquad \rho = 1 \qquad \text{ou} \qquad r > \rho - 1.$$

Le dernier cas amène à un absurde, car la courbe fixe θ devrait appartenir à un système linéaire de dimension

$$\geq p + r - (\rho - 1) - p > 0.$$

Il reste donc à examiner les deux cas : $\rho = o$ et $\rho = 1$. D'abord si $\rho = o$ on devrait avoir $\nu = -1$ et cela signifie que θ devrait être une courbe exceptionnelle de genre $\rho_i = o$ et de degré $\nu_i = -1$, tandis qu'on peut se rapporter à une surface (transformée de) F ne contenant pas de telles courbes. En effet sur une surface sans courbes exceptionnelles, la θ serait composée d'un certain nombre de parties irréductibles de genre $\rho_i = o$ et de degré $\nu_i \neq -1$ et l'on ne pourrait avoir la relation

$$2\rho - 2 - r = -1 = \Sigma\,(2\,\rho_i - 2 - r_i).$$

Car, ne pouvant être $\nu_i = -1$, on aura pour toutes les valeurs de i:

$$2\,\rho_i - 2 - r_i \qquad \geq o \qquad (p > o),$$

et ainsi la somme Σ ne saurait donner la valeur négative -1.

Passons à examiner l'hypothèse $\rho = 1$ qui entraîne $\nu = o$ $(p > o)$. La courbe connexe θ sera formée par de composantes irréductibles de genre $\rho_i = o$ ou 1 et de degré ν_i, et l'on aura

$$2\,\rho - 2 - r = o = \Sigma\,(2\,\rho_i - 2 - r_i).$$

Or, si la surface est supposée ne pas renfermer de courbes exceptionnelles, on a pour toutes les valeurs de i:

$$2\,\rho_i - 2 - r_i = o$$

et par conséquent

$$2\,\rho_i - 2 - r_i = o,$$

d'ou il suit qu'étant $p > o$ il y a une composante irréductible θ_i faisant partie de θ, pour laquelle

$$\rho_i = 1, \qquad r_i = o \tag{1}$$

ou bien que, pour toutes les valeurs de i,

$$\rho_i = o \qquad r_i = -2. \tag{2}$$

Dans le premier cas il est aisé de démontrer que le genre linéaire de la surface : $p^{(1)} = 1$. Car les parties variables k_2 du système bicanonique (et également celles d'un de ses multiples) ont zéro intersections avec θ_i et une de ces parties, obligée à contenir un point de θ_i, se décompose en θ_i et en une courbe résiduelle qui a toujours zéro intersections avec elle : cela signifie que les k_2 (et les courbes d'un multiple quelconque de $|\,k_2\,|$ sont formées de courbes elliptiques non connexes entr'elles. On pourrait objecter que nous nous

fondons sur ce que θ_i constitue une courbe fondamentale de $|\,k_2\,|$, tandis que nous savons seulement que

$$\theta_i \cdot (2\,K - \theta_i) = o:$$

il est permis de douter que l'on ait

$$k_2 . \theta_i > o,$$

si la courbe $2\,K - \theta_i$ renferme une partie fixe ayant un nombre négatif d'intersections avec θ_i. Mais pour répondre à ce doute il suffit de remarquer que, la θ_i étant irréductible de degré o, il n'existe aucune courbe qui ait avec elle un nombre négatif d'intersections.

Dans l'hypothèse 2) on raisonnera d'une façon semblable. On a une courbe connexe θ de genre virtuel 1, composée de courbes irréductibles (simples ou multiples) de genre $\rho_i = o$ et de degré $\nu_i = -2$.
Commençons à retrancher de θ toute composante ayant un seul point commun avec la partie résiduelle ; on obtiendra enfin une courbe connexe de genre 1 (que nous allons appeler encore θ) formée de composantes de genre $\rho_i = O$ et de degré $\nu_i = -2$, dont chaque composante θ_i a (au moins) 2 intersections avec la courbe résiduelle $\theta - \theta_i$. Ainsi il n'existe aucune courbe ayant avec θ un nombre négatif d'intersections, car une composante irréductible de celle-ci devrait coincider avec une partie θ_i de θ, et, en tenant compte que θ_i de degré -2 a au moins 2 intersections avec $\theta - \theta_i$, on voit que $\theta_i . \theta \geqslant 0$. Il s'ensuit que θ est courbe fondamentale pour le système $|\,k_2\,|$ formé par les parties variables des courbes bicanoniques, et que, en imposant à une k_2 (ou à une courbe appartenant à un de ses multiples) de passer par un point de θ, il s'en détache l'entière courbe connexe θ, de genre 1, ayant zéro intersections avec les courbes résiduelles de $(k_2 - \theta)$. Cela signifie que les k_2 sont des courbes non connexes, formées de composantes elliptiques, et partant que $p \;\; = 1$.

Nous pouvons énoncer la conclusion suivante : *Le système canonique* $|\,K\,|$ *d'une surface* F *de genres* $p > o$ et $p^{(1)} > 1$, *est toujours formé de courbes connexes.* Il en est de même des systêmes pluricanoniques, qui sont des multiples de $|\,K\,|$.

8. *Régularité du système bicanonique.*

De ce que le système canonique $|\,K\,|$ de la surface F $(p > o,\ p^{(1)} > 1)$ est, en tous cas, connexe (§ 6), d'après le § 4 il s'ensuit que son adjoint $|\,2\,K\,|$ est régulier. Ainsi se trouve établi que *le système bicanonique et partant aussi tous les systèmes pluricanoniques d'une surface de genres* $p > o$ et

$p^{(1)} > 1$ *sont réguliers*. Cela signifie que le bigenre P est donné exactement par

$$P = p + p^{(1)},$$

et le i — genre par

$$P_i = p + \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)} - 1) + 1.$$

Il n'est pas exclu que $|\,2K\,|$ ou même $|\,iK\,|$ soient réductibles, renfermant une partie fixe. A la vérité je crois que cette réductibilité ne soit pas possible, mais je suis réussi à justifier ma conviction seulement dans l'hypothèse que les courbes canoniques ne renferment pas de parties multiples.

9. *Simplicité des systèmes pluricanoniques.*

Je viens d'établir que le système bicanonique et les systèmes pluricanoniques, sur une surface de genres $p > o$ et $p^{(1)} > 1$, sont de systèmes réguliers irréductibles, en faisant abstraction —tout au plus— de quelques composantes fixes. Partant en défaut de surface canonique (pour les plus petites valeurs de p ou dans l'hypothèse que les courbes canoniques soient composées au moyen des courbes d'un faisceau) on aura toujours une surface bicanonique ou pluricanonique transformée de F, sur laquelle les propriétés invariantes de F se traduiront par des propriétés projectives. Mais, à priori, on pourra tomber en de surfaces doubles ou multiples. Il importe de reconnaître que cet inconvénient ne se présente pas pour les surfaces tricanoniques en dehors de deux cas tout à fait exceptionnels. Précisément j'énoncerai ici le résultat auquel je suis parvenu: *La surface tricanonique d'une surface régulière de genres* $p > o$ et $p^{(1)} > 1$ *(d'ordre* $\leqslant 9\ (p^{(1)} - 1)$ *est toujours une surface simple, faisant exception deux types de surfaces qui répondent aux valeurs* $p = 3$ *et* $p^{(1)} = 3$, $p = 2$ *et* $p^{(1)} = 2$ *et qui sont représentés par* I) *le plan double ayant comme courbe de diramation une courbe* C_8 *d'ordre* 8, et II) *le plan double ayant comme courbe de diramation une* C_{10} *d'ordre* **10** *douée de deux points quintuples infiniment voisins* (en particulier une C_8 douée d'un point [3, 3]).

Il s'ensuit aisément que «le système i-canonique pour $i > 3$, est toujours simple ($p > o$, $p^{(1)} > 1$), sauf dans le cas du plan double II pour $i = 4$». En ce cas, et seulement en ce cas, les courbes tricanoniques sont hyperelliptiques, ayant pour images des cubiques douées d'un point double, et ainsi *la surface quadricanonique est une surface double* $F_8{}^2$, où F_8 est une surface d'ordre 8 de l'espace S douée d'un point double.

10. *Surfaces de genre linéaire* $p^{(1)} = 3$.

Des modèles bicanoniques et tricanoniques je me suis déjà servi en deux Notes de l'Academie *dei Lincei* de 1897, pour classifier les surfaces de genres $p > o$ et $p^{(1)} = 2, 3$. Je saisis l'occasion pour signaler une faute et ainsi combler une lacune que subsiste dans cette classification. J'avais crû que, pour $p = 2$ et $p^{(1)} = 3$, il n'y ait d'autres surfaces bicanoniques de S_4 qu'une F_4 de C. Segre double, qui se ramène à un plan double dont la courbe de diramation est une C_{10}, d'ordre 10, douée de deux points quadruples et de deux points [3, 3]. Mais il y a bien pour $p = 2$ et $p^{(1)} = 3$, une *surface bicanonique simple* F_8, qui peut être projetée en une $F_8{}^1$ *de* S_3, *douée de deux droites quadruples infiniment voisines a et a', incidentes, et d'une conique double en un plan par a différent de a a'.*

Un cas particulier remarquable de cette $F_8{}^1$ est une F_4 double, tangente à un plan suivant une conique, dont la courbe de diramation est une courbe du 4^me^ ordre section d'un plan β.

Roma, enero de 1942.