Enriques, Federigo

Memorie scelte di geometria, I: 1893-1898

Zanichelli, Bologna, 1956. (pubblicate a cura dell'Accademia Nazionale dei Lincei)

FEDERIGO ENRIQUES

MEMORIE SCELTE DI GEOMETRIA

PUBBLICATE A CURA
DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Volume primo
1893 - 1898

LABORAVI FIDENTER

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA 1956

Federigo Enriques

№ 187

Bologna - Monograf - XI-1956

PREFAZIONE

L'Accademia dei Lincei, nella sua seduta dell'8 gennaio 1955, approvò la proposta, formulata dal Prof. Francesco Giordani, presidente della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, di pubblicare un'ampia selezione delle Note e Memorie di Geometria *di* Federigo Enriques. *L'attuazione di questa iniziativa fu affidata ad un comitato costituito dallo stesso Prof. Giordani, suo presidente, dai soci Ugo Amaldi, Enrico Bompiani, Oscar Chisini, Beniamino Segre, Francesco Severi e dal Prof. Luigi Campedelli. Questo comitato, in varie sedute, scelse le Note e le Memorie, e fissò le norme per la pubblicazione.*

In particolare, a mettere in luce la naturale evoluzione del pensiero dell'illustre Geometra e ad evitare inconvenienti di altre soluzioni, fu deciso di seguire l'ordine cronologico.

L'attuale pubblicazione riproduce fedelmente i singoli lavori nella loro forma originale; si è tuttavia apportato qualche variante grafica e si è tenuto conto di alcune postille autografe o autorizzate dall'Autore.

Il presente volume comprende Memorie e Note pubblicate dal 1893 al 1898; queste sono precedute da una commemorazione di Federigo Enriques, quella letta ai Lincei da Guido Castelnuovo l'undici gennaio 1947.

FEDERIGO ENRIQUES (*)

Nel novembre del 1892 venne a Roma per seguire il corso di LUIGI CREMONA, come studente di perfezionamento, un giovane non ancora ventiduenne, che si era laureato a Pisa l'anno precedente. Allievo di maestri quali il BETTI, il DINI, il BIANCHI, il VOLTERRA, quel giovane possedeva larghe vedute sulla nostra scienza, ma non aveva ancora fissato la meta delle sue ricerche. Desiderava familiarizzarsi col nuovo indirizzo di geometria algebrica che per iniziativa di CORRADO SEGRE si era cominciato a coltivare in Italia. Venne perciò da me a chiedere consigli. Stavo per suggerirgli la lettura di libri e memorie, ma mi accorsi subito che non sarebbe stata questa la via più conveniente. FEDERIGO ENRIQUES era un mediocre lettore. Nella pagina che aveva sotto gli occhi egli non vedeva ciò che era scritto, ma quel che la sua mente vi proiettava. Adottai quindi un altro metodo: la conversazione. Non già la conversazione davanti a un tavolo col foglio e la penna, ma la conversazione peripatetica.

Cominciarono allora quelle interminabili passeggiate per le vie di Roma, durante le quali la geometria algebrica fu il tema preferito dei nostri discorsi. Assimilate in breve tempo le conquiste della scuola italiana nel campo delle curve algebriche, l'ENRIQUES si accinse arditamente a trattare la geometria sopra una superficie algebrica. Egli mi teneva quotidianamente al corrente dei progressi delle sue ricerche, che io sottoponevo ad una critica severa. Non è esagerato affermare che in quelle conversazioni fu costruita la teoria delle superficie algebriche secondo l'indirizzo italiano.

Vi era, a dir vero, una Memoria fondamentale di MAX NOETHER

(*) Dai « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », serie VIII, vol. II (1947), Commemorazione letta da GUIDO CASTELNUOVO nella seduta dell'11 gennaio 1947.

**

sull'argomento, nella quale il geometra tedesco, con grande acume, aveva gettato le basi ed eretto qualche pilastro dell'edifizio. Ma era una Memoria oscura, dove alcune proprietà erano stabilite con dimostrazioni faticose che non gettavano luce sulla questione, altre erano intuite più che dimostrate. Al contrario l'edifizio di cui l'ENRIQUES tracciò in pochi mesi il disegno, ha i pregi dell'armonia e della spontaneità.

La Memoria che contiene i risultati sull'argomento fu compiuta nei pochi mesi di quell'anno scolastico. Cominciata in gennaio, nel giugno 1893 fu presentata all'Accademia delle Scienze di Torino e subito pubblicata.

Era naturale che un lavoro meditato e scritto rapidamente in un campo quasi inesplorato, dove l'analogia con la teoria delle curve trae spesso in inganno, presentasse qualche imperfezione. L'ENRIQUES se ne accorse, e preparò una nuova esposizione dell'argomento, che apparve nel 1896 tra le Memorie della Società dei XL. Salvo lievi aggiunte fatte più tardi, la teoria generale delle superficie algebriche ha in quest'ultimo lavoro un aspetto che è rimasto ormai nella scienza.

Senza entrare in particolari troppo tecnici, dirò che in quella Memoria si trovano studiate a fondo le proprietà dei sistemi lineari di curve algebriche sopra una superficie, e vien definita, mediante una relazione funzionale, una operazione con la quale si passa da un sistema lineare ad un altro, detto il sistema aggiunto. Quella relazione funzionale lascia subito apparire che il residuo di un sistema lineare rispetto al proprio aggiunto non dipende dal sistema da cui si parte. Il detto residuo ha carattere invariante di fronte alle trasformazioni birazionali della superficie in un'altra e vien chiamato sistema canonico.

Dall'esame di questo sistema e dalle relazioni tra un sistema lineare e il proprio aggiunto si ricavano vari caratteri invarianti per trasformazioni birazionali: i generi. Anche nel lavoro citato di NOETHER comparivano tre di questi caratteri, due dei quali si credeva a quel tempo dovessero coincidere salvo in un caso molto particolare. Risulta invece che le cose non stanno così e che i caratteri invarianti di una superficie sono più numerosi e tutti essenziali.

Stabiliti questi risultati fondamentali nelle due Memorie già citate, l'ENRIQUES può formulare un piano sistematico di ricerche

che egli svolgerà poi fino agli ultimi anni. Il piano consiste nel caratterizzare le proprietà delle superficie in relazione ai valori dei generi, cominciando dalle superficie che hanno i generi più bassi. L'analogia porterebbe a pensare alla classificazione che fanno i naturalisti degli animali e delle piante, partendo dagli organismi più semplici. Ma perchè l'analogia tornasse, bisognerebbe immaginare un naturalista che, chiuso nel suo studio, indagasse, dal punto di vista teorico, quali tipi di organismi siano compatibili con le leggi della morfologia e della fisiologia, e poi ricercasse quali tra questi si incontrino effettivamente in natura.

Le dette ricerche dell'ENRIQUES, contenute in una quindicina di lavori ed ora raccolte in buona parte in un volume pubblicato con la collaborazione del CAMPEDELLI, hanno condotto alla scoperta di un gran numero di superficie con proprietà singolari e impreviste.

A questo gruppo di lavori va pure aggiunta la fondamentale e voluminosa Memoria sulle superficie iperellittiche, con la quale ENRIQUES e SEVERI hanno concorso al premio BORDIN dell'Accademia delle Scienze di Parigi: il premio fu loro conferito nel 1907.

L'ENRIQUES ha inoltre compiuto molte altre importanti ricerche nella teoria generale delle superficie, delle quali solo qualcuna può essere qui nominata, per ragioni di brevità.

Di una tra esse conviene parlare per mettere in luce una delle doti più spiccate del suo ingegno, la dote della intuizione che piú volte lo ha portato a stabilire un risultato molto prima di averne una dimostrazione soddisfacente. La intuizione interviene specialmente quando egli ricorre, come fa spesso, al principio di continuità, il quale conduce a trasportare le proprietà di un ente ad enti prossimi al primo e poi a tutti gli enti che stanno col primo in un medesimo sistema continuo.

Di questo metodo egli si è valso per stabilire una proprietà caratteristica delle superficie irregolari, cioè di quelle superficie nelle quali il genere geometrico differisce dal genere numerico. Ho accennato poc'anzi che all'epoca del NOETHER: verso il 1880, si riteneva che i due generi fossero uguali (o, come oggi si dice, la superficie fosse regolare), salvo nel caso delle superficie rigate. Ma più tardi in Italia e in Francia si scoprirono molti altri esempi di superficie irregolari. L'ENRIQUES osservò che sopra tutte queste superficie esistono sistemi continui di curve algebriche non contenuti in sistemi lineari, mentre lo stesso fatto non si presenta sulle superficie regolari, e fu condotto quindi a considerare l'esistenza di tali sistemi continui come proprietà caratteristica delle superficie irregolari, e ad assegnare la dimensione dei detti sistemi in relazione alla differenza tra i due generi sopra nominati. Non era però facile giustificare queste intuizioni. La ingegnosa e delicata dimostrazione che l'ENRIQUES diede nel 1904, fondandosi sul principio di continuità, fu accolta inizialmente senza riserve, e la proprietà fu assunta come base di altre importanti ricerche. Ma più tardi, nel 1921, il SEVERI si accorse che nella dimostrazione si insinuava una tacita ipotesi che aveva bisogno di esser giustificata. Nonostante però gli sforzi dell'ENRIQUES, del SEVERI stesso e di altri, non oserei ancora affermare che quel dubbio sia stato chiarito. Eppure il teorema è vero, sia pure con qualche restrizione, e l'ha potuto stabilire nel 1910 ENRICO POINCARÉ per via trascendente. Ciò non toglie interesse alla ricerca di una dimostrazione algebrica, che appare necessaria per la sistemazione armonica di tutta la teoria.

Un altro risultato fornito dall'ENRIQUES nel 1924, che ha dato e dà luogo tuttora a importanti ricerche, riguarda il modo di caratterizzare la curva di diramazione dei piani multipli. Anche qui si presenta una differenza essenziale tra la teoria delle curve e quella delle superficie. Se una curva algebrica piana è segata in un certo numero n di punti variabili da una retta che ruota intorno ad un punto, la curva proiettata da questo punto sopra una retta dà luogo ad una retta n-upla, i cui punti di diramazione sono le tracce delle tangenti condotte dal punto alla curva. Inversamente, fissato ad arbitrio un certo gruppo di punti sopra una retta, si può costruire una curva rappresentabile su quella retta n-upla con quei dati punti di diramazione. Ma la proprietà analoga non vale per le superficie. La curva di diramazione di un piano n-uplo non può prendersi ad arbitrio, ma è soggetta a certe condizioni. L'ENRIQUES si propone di stabilirle in una Memoria del 1924, e vi riesce: ma la forma del risultato non è tale da consentire la costruzione di tutte le curve che vi soddisfano. La questione è ancora aperta, nonostante le ricerche posteriori che vi sono state dedicate.

Molti altri argomenti sono trattati con varietà di mezzi e ricchezza di risultati nella cinquantina di lavori ove l'ENRIQUES esamina fondamentali problemi di geometria algebrica. Ma il parlarne qui con sufficiente chiarezza esigerebbe un tempo assai lungo e mi costringerebbe a sorvolare sulle altre benemerenze di FEDERIGO ENRIQUES nel campo della cultura. Ricorderò soltanto che egli ha cercato di diffondere la conoscenza della geometria algebrica, a cui ha dedicato tanta parte della sua attività, mediante due trattati. Il primo, in quattro volumi, redatto insieme ad uno dei suoi primi allievi, il CHISINI, studia sotto molteplici aspetti le curve algebriche. È ricco di notizie storiche e di vedute originali; nuova ed esauriente è, ad esempio, la teoria dei punti singolari delle curve. Il secondo trattato in due volumi contiene lezioni sulla teoria delle superficie algebriche raccolte dal CAMPEDELLI (1). In questi ultimi anni l'ENRIQUES si accinse ad esporre con maggiore ampiezza la detta teoria per tener conto dei risultati più recenti. Il manoscritto fortunatamente era compiuto quando la morte lo colse, e la stampa ne è oggi curata dai suoi ultimi discepoli, il POMPILJ ed il FRANCHETTA.

Le ricerche di geometria algebrica delle quali abbiamo discorso sinora non rappresentano che una parte della attività dell'ENRIQUES nel campo stesso della matematica. Indagini di natura diversa gli furono suggerite dalla sua professione di insegnante. Qui giova ricordare che i lavori pubblicati durante l'anno di perfezionamento a Roma richiamarono su di lui l'attenzione dei cultori della nostra scienza, tanto che nel gennaio dell'anno successivo (1894) gli fu offerto l'incarico dell'insegnamento di geometria proiettiva a Bologna. Appena iniziato il corso egli si avvide che nei fondamenti di quel ramo di geometria, che pure sotto l'aspetto logico è il più perfetto, sussisteva ancora una lacuna. La dimostrazione che si dava del così detto teorema fondamentale di STAUDT non aveva il rigore che oggi si richiede. Egli riesce subito a superare la difficoltà, e la dimostrazione da lui fornita è così perfetta e così semplice da trovar posto nell'insegnamento del primo anno universitario. La dimostrazione è riportata nel trattato di geometria proiettiva sintetico dell'ENRIQUES, nel quole questo ramo di matematica assume una forma classica che oserei dire definitiva.

La sua attenzione viene così attratta verso l'esame dei principî

(1) Vanno ricordate inoltre le lezioni sopra *Le superficie razionali* redatte dal CONFORTO.

della geometria. In un corso di conferenze tenute a Bologna nell'anno scolostico 1894-95 egli osserva che, accanto al criterio logico di indipendenza e compatibilità dei postulati, conviene tener conto del criterio psicologico, il quale porta ad indagare le sensazioni ed esperienze che hanno condotto a formulare quei postulati. Donde viene un duplice indirizzo che si realizza nelle ricerche successive dell'ENRIQUES.

Al primo indirizzo appartiene uno scritto del 1898 in cui si stabilisce un gruppo di condizioni atte a permettere la introduzione di coordinate sopra una superficie o varietà a più dimensioni assegnata geometricamente. Vien così colmata una lacuna che si riscontra nella celebre Memoria di RIEMANN sui principî dello geometria, ove l'esistenza delle coordinate è supposta *a priori*.

In seguito a questo e ad altri lavori sui principî della geometria, FELICE KLEIN, che all'inizio di questo secolo stava organizzando la pubblicazione di una grande Enciclopedia tedesca delle matematiche, volle affidare all'ENRIQUES la redazione dell'articolo sui principî della geometria. Ne è risultata una Monografia ricchissima e altamente pregevole, ove son prese in esame tutte le vedute dei matematici e dei logici sull'argomento, da EUCLIDE fino ai giorni nostri. Questa Monografia sarà sempre consultata con profitto da chiunque voglia formarsi un'idea chiara su tale vastissimo soggetto.

Le questioni inerenti ai principî della geometria hanno destato nell'ENRIQUES l'interesse per i problemi dell'insegnamento matematico, e in particolare dell'insegnamento secondario. Egli comprese subito l'importanza di una iniziativa dovuta al KLEIN, il quale fin dal 1894 aveva organizzato a Gottinga dei corsi estivi destinati agli insegnanti secondari, con lo scopo di far vedere a questi quale luce portassero alcune teorie di matematiche superiori sui problemi che erano chiamati a trattare nel loro insegnamento. Ispirandosi ad analoghi motivi l'ENRIQUES ebbe l'idea, già nei primi anni del suo insegnamento bolognese, di pubblicare una serie di monografie nelle quali vari problemi di geometria elementare venissero illuminati da un punto di vista più alto. Egli che aveva l'attitudine rara di saper trarre dalla collaborazione tutti i vantaggi, evitando gli inconvenienti a cui può dar luogo, scelse tra i suoi primi discepoli e tra i suoi giovani amici un gruppo di studiosi ai quali affidò temi determinati di geometria elementare, e tracciò loro il programma che dovevano svolgere per collegare l'argomento con le ricerche più recenti.

Frutto di questa collaborazione fu un volume intitolato *Questioni riguardanti la geometria elementare*, comparso nel 1900, volume che ebbe una grande e meritata fortuna, cosicchè si rese necessario ben presto di pubblicare una seconda e poi una terza edizione dell'opera. Quest'ultima consta di quattro volumi e comprende una revisione dei principî e dei più importanti problemi della geometria e dell'algebra elementare, esaminati col sussidio di teorie elevate. Alcuni articoli sono scritti dallo stesso ENRIQUES, tra gli altri quelli sulla evoluzione delle idee geometriche, sui numeri reali, sullo spazio e tempo davanti alla critica moderna. Si può dire non esservi oggi in Italia professore di scuola secondaria o candidato agli esami di concorso che non abbia meditato su quest'opera, la quale ha esercitato una benefica influenza sull'insegnamento dei nostri licei.

Con lo stesso proposito l'ENRIQUES curò, col concorso di vari collaboratori, la pubblicazione in veste italiana degli Elementi di EUCLIDE, arricchiti di note storiche e critiche. E tra le sue benemerenze a favore dell'insegnamento e della cultura matematica vanno ricordati gli articoli che egli stesso scrisse o promosse intorno a questioni storiche o didattiche, articoli inseriti nel « Periodico di Matematiche », di cui tenne la direzione per quasi vent'anni.

Abbiamo già osservato che nell'esame dei principî della geometria l'ENRIQUES associa il problema logico al problema psicologico. Direi anzi che sotto l'aspetto affettivo l'interesse per quest'ultimo problema sia prevalente. Conservo una sua lettera del maggio 1896 in cui Egli parla della passione con la quale si dedica agli studi di psicologia fisiologica. « Per parte mia » riferisco le sue parole « porto nella ricerca un entusiasmo che tu stimerai degno di miglior causa, ma che è certo maggiore di quanto ne abbia mai provato per qualsiasi altra questione ».

Frutto di questi studi proseguiti per alcuni anni è un articolo pubblicato nella « Rivista filosofica » del 1901 e poi sviluppato nel volume *Problemi della scienza.* Nel detto articolo, vari indirizzi geometrici sono messi in rapporto con le sensazioni provenienti dalla vista e dal tatto, dalle quali essi hanno avuto origine. Per comprendere tale legame, debbo ricordare che l'indirizzo geometrico di maggiore generalità è l'*Analysis situs* o *Topologia*, nel quale non sono ancora formati i concetti di retta, di piano, di lunghezza, di angolo, ma si considerano soltanto linee, superficie, corpi a tre dimensioni e si riguardano come equivalenti due enti che possano esser ricondotti l'uno all'altro mediante una trasformazione continua. Dalla topologia vanno poi staccandosi, mediante due diverse particolarizzazioni, la geometria metrica ove sono fondamentali i concetti di distanza e di angolo, e la geometria proiettiva dove non intervengono nozioni metriche ma solo relazioni di posizioni fra punti, rette e piani. Ora la tesi dell'ENRIQUES è che i tre rami suddetti e precisamente la topologia, la geometria metrica e la proiettiva, avuto riguardo all'acquisto psicologico dei loro concetti fondamentali, sono legati a tre diversi ordini di sensazioni, rispettivamente alle sensazioni generali tattili muscolari, a quelle del tatto speciale, e a quelle della vista.

Le vedute psicologiche sui principî della geometria rappresentano soltanto un parziale risultato di profonde meditazioni filosofiche, le quali, iniziate durante gli studi all'Università pisana, si sono alternate lungo tutta la vita con le indagini matematiche e storiche. Dopo quindici anni di lavoro Egli ci dà il primo frutto di quelle meditazioni nel poderoso volume *Problemi della scienza* pubblicato nel 1906. L'autore vuol richiamare l'attenzione del pubblico colto sul problema filosofico della conoscenza, e si propone di dare una veduta unitaria della scienza atta a combattere l'eccessiva specializzazione. Mentre in una prima parte dell'opera si esaminano i procedimenti psicologici e logici con i quali le impressioni dei sensi vengono raccolte, coordinate e trasformate per dar luogo alle teorie scientifiche, nella seconda parte i principî delle varie scienze matematiche, fisiche e biologiche sono sottoposti ad una critica esauriente.

Abbiamo già accennato ad alcune sue idee sui principî della geometria. Aggiungiamo ora che nell'esame dei principî della meccanica, a proposito delle nozioni di tempo, di spazio, di moto, di forza, Egli espone delle vedute che contengono in germe le concezioni sulle quali ALBERTO EINSTEIN, proprio in quegli anni, stava costruendo la sua prima teoria della relatività.

Il pensiero filosofico dell'ENRIQUES si chiarisce e precisa nei saggi che egli va via via pubblicando. Alcuni di questi sono raccolti nel volume intitolato *Scienza e razionalismo* apparso nel 1912, nel quale le vedute odierne son messe a raffronto con le concezioni filosofiche dei secoli scorsi.

In epoca recente egli ha voluto assoggettare ad un esame critico e storico il problema del determinismo, sul quale lo sviluppo attuale della fisica ha attirato l'attenzione di tutti i pensatori. È nato così un volumetto *Causalité et déterminisme*, pubblicato a Parigi nel 1941, dal quale tolgo e traduco alcuni brani che valgono a chiarire le vedute dell'autore sulla costruzione della scienza.

« Il contenuto delle teorie scientifiche » scrive l'ENRIQUES « consiste nell'insieme delle previsioni sperimentali che esse rendono possibili; ma la scienza considerata nel suo divenire è qualche cosa di più di questo contenuto. Le ipotesi e le teorie hanno un valore euristico che corrisponde alla soddisfazione di certe esigenze razionali.

« Perciò, in contrasto con la tendenza di MACH e della sua scuola, affermo » prosegue l'ENRIQUES « che le ipotesi e le rappresentazioni immaginative ci conducono più in là che la scienza positiva. Vista sotto tale aspetto la spiegazione causale implica qualche cosa di più che la semplice risposta a questa domanda: come si presenta il fenomeno che noi osserviamo? La scienza va oltre tale spiegazione quando essa tenta di render conto del perchè. Quest'ultima domanda acquista un senso rispetto ad una rappresentazione immaginativa che lega l'effetto alla causa col mezzo di una continuità di immagini ».

Fin qui l'ENRIQUES. E qualche pagina più in là, a proposito della tendenza dei fisici contemporanei a rinunziare al determinismo che fu la guida dei loro maestri, egli scrive:

« Quel che ci ripugna è di accettare il non-intelligibile; e questa ripugnanza non è che la nostra fede nella intelligibilità delle cose. Eccoci in presenza di un *criterio metodologico* del tutto generale, che è il presupposto della scienza che si tratta di creare, cioè della ricerca scientifica.

« Una scienza perfetta dovrebbe spiegare tutti i fenomeni possibili. È questo evidentemente un ideale irraggiungibile, anzi privo di senso. Ma, sia pure per via di astrazione, noi possiamo sforzarci di spiegare certi ordini particolari di fenomeni costituenti un frammento della realtà e di comprenderli in qualche modo col mezzo di una rappresentazione concettuale che costituisca una teoria scientifica adeguata a quella realtà. E prima di verificare la teoria con l'esperienza... noi richiediamo che la teoria sia in se stessa *plausibile*, che essa soddisfi al *principio di ragion sufficiente* che è l'aspetto mentale della causalità ».

Ho voluto riportare questi brani del suo ultimo libro perchè venisse posta in luce la posizione filosofica dell'ENRIQUES. Risulta chiaro che egli appartiene a quella scuola del razionalismo sperimentale che ha avuto in GALILEO e NEWTON i fondatori e massimi rappresentanti, che ha guidato il pensiero di molti scienziati dei secoli scorsi, e che oggi stesso si vanta dei grandi nomi di MAX PLANCK e di ALBERTO EINSTEIN.

Per l'ENRIQUES il determinismo non è una questione che possa risolversi con opportune esperienze; il determinismo è un presupposto alla ricerca scientifica e alla costruzione di una scienza che dia una interpretazione intelligibile della natura.

Ho già osservato che gli scritti filosofici dell'ENRIQUES dimostrano, col progredire del tempo, un interesse crescente per la storia del pensiero scientifico. Durante gli anni giovanili, nel fervore della ricerca matematica, il suo sguardo era rivolto all'avvenire e le questioni storiche non fermavano in modo particolare la sua attenzione. Ma a mano a mano che cresce la sua cultura, egli sente la necessità di illuminare ogni veduta scientifica o filosofica alla luce portata dai grandi pensatori dei secoli passati, e di presentare le conquiste attuali come prodotti di una evoluzione di idee maturate attraverso il tempo.

Questa tendenza, già manifesta in alcuni saggi del libro citato *Scienza e razionalismo* del 1912, informa tutto il contenuto del volume *Per la storia della logica* pubblicato nel 1922, nel quale si espone come le vedute delle scuole greche e in particolare di ARISTOTELE si siano, nel corso del tempo, trasformate per dar luogo alle concezioni attuali.

Un progetto più grandioso sorge intanto nella sua mente: esporre la storia del pensiero scientifico in un'opera in tre volumi, dei quali il primo destinato al mondo antico e in particolare alla Grecia, il secondo al medioevo, il terzo al rinascimento e all'epoca contemporanea. Il primo volume è uscito nel 1932 in collaborazione col prof. DE SANTILLANA. Ricco di notizie, profondo nella critica e nel tempo stesso lucido e di gradevole lettura, questo volume ha avuto subito un largo successo. Gli autori, come essi stessi dichiarano, non compiono opera di paziente erudizione, nè si dilungano in discussioni di carattere filologico. Di fronte ad un frammento oscuro di qualche filosofo della Grecia, l'ENRIQUES parte dal preconcetto che il pensiero originale doveva esser chiaro e intelligibile, formula una ipotesi sul significato del testo e l'accoglie soltanto quando la tesi proposta si accorda con le conseguenze che i commentatori greci di epoca più recente hanno tratto da quel passo del loro predecessore.

Il successo di quel primo volume ha reso più acerbo il rammarico di non averlo veduto seguire dagli altri due in progetto. Da un lato la difficoltà di interpretare tanti oscuri pensatori del medioevo, d'altro lato gli avvenimenti politici e bellici dell'ultimo decennio, distolsero gli autori dalla prosecuzione dell'opera. Parziale compenso a tale mancanza è il *Compendio di storia del pensiero scientifico*, pubblicato dagli autori stessi nel 1937 e destinato principalmente a colmare con una veduta d'insieme le lacune che l'insegnamento della filosofia e della storia lascia negli allievi delle nostre scuole secondarie.

Un fine analogo, limitato però allo sviluppo delle matematiche e ai suoi rapporti con le altre discipline, si propone un volume dal titolo *Le matematiche nella storia e nella cultura*, pubblicato nel 1938, nel quale sono raccolte dal prof. FRAJESE lezioni e conferenze tenute dall'ENRIQUES agli studenti della Facoltà di scienze.

Aggiungo che negli ultimi anni egli aveva compiuto uno studio profondo sul filosofo DEMOCRITO, tentando di ricostruirne l'opera in base agli scarsi frammenti che ci son rimasti. Il manoscritto è fortunatamente compiuto ed il volume verrà presto pubblicato per cura del dott. MAZZIOTTI che lo aveva aiutato nella redazione (*).

Con questo volume, e con l'altro in corso di stampa sulla teoria delle superficie (**), si chiude la prodigiosa attività di FEDERIGO ENRIQUES. Egli ha coltivato con pari profondità tre indirizzi, la matematica, la filosofia, la storia della scienza, ed ha scritto in cia-

---

(*) F. ENRIQUES e M. MAZZIOTTI: *Le dottrine di Democrito d'Abdera* – Testi e commenti – Prefazione del Prof. G. CASTELNUOVO (Bologna, N. Zanichelli, 1948) [n. d. r.].

(**) F. ENRIQUES: *Le superficie algebriche* – Introduzione di G. CASTELNUOVO (Bologna, N. Zanichelli, 1949) [n. d. r.].

Al rifiorire delle pubbliche libertà nel 1944 riprese l'insegnamento, ma l'organismo era ormai stanco ed Egli non sentiva più la forza di assumere posti di combattimento. Una affezione cardiaca, che lo affliggeva da qualche tempo e lo costringeva a saltuari periodi di riposo, non gli aveva tolto la passione della ricerca e dello studio, ma aveva fiaccato lo spirito battagliero e l'interesse per ciò che era estraneo alla vita intellettuale.

Morì improvvisamente nelle prime ore del 14 giugno 1946 e ci lasciò un vuoto incolmabile. Ne furono addolorati i colleghi, gli amici, gli ammiratori che Egli si era conquistato in Italia e all'estero. Ma più amaramente, insieme alla moglie, ai figli, a tutti noi che formavamo parte della sua famiglia, lo piansero gli allievi che lo amavano come un padre. E padre fu veramente per loro. Li accoglieva a tutte le ore nel suo studio, da loro si faceva accompagnare nelle passeggiate mattutine, li incitava e guidava nella ricerca, li educava al senso del dovere nella scienza e nella vita.

Con FEDERIGO ENRIQUES una grande luce si è spenta. Come avviene per i maggiori beni concessi all'uomo, dei quali si apprezza più intensamente il valore quando ci vengon tolti, così la scomparsa dell'ENRIQUES ci fa sentire qual fulgore irradiasse dalla sua persona e qual fermento di vita intellettuale, qual tesoro di sapienza abbiamo oggi perduto con Lui.

GUIDO CASTELNUOVO

MEMORIE SCELTE
DI GEOMETRIA

I.

SUI GRUPPI CONTINUI DI TRASFORMAZIONI CREMONIANE NEL PIANO

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. II (1º sem., 1893),

pp. 468-473 (*)

1. – Secondo il sig. LIE [1] dicesi *gruppo continuo* di trasformazioni sopra n variabili (o in un S_n) un insieme continuo di trasformazioni, dipendenti da un numero finito di parametri, tale che il *prodotto* $T\pi$ di due trasformazioni del gruppo sia ancora una trasformazione di esso, ed insieme ad una trasformazione π comparisca nel gruppo anche l'inversa π^{-1}.

Io prendo in esame i gruppi continui di trasformazioni birazionali (o cremoniane) del piano e dimostro che essi possono trasformarsi birazionalmente in uno dei seguenti *tipi*:

1) *Gruppo* ∞^8 *delle omografie e suoi sottogruppi.*

2) *Gruppo* ∞^6 *delle trasformazioni quadratiche che mutano in sè il sistema lineare delle coniche con due punti base distinti e quindi i due fasci di raggi coi centri in quei punti base, e suoi sottogruppi* (o, se si vuole, *gruppo delle inversioni rispetto ai circoli del piano e suoi sottogruppi*).

3) *Gruppo* ∞^{n+5} *delle trasformazioni di* JONQUIÈRES (*d'ordine* n) *che mutano in sè il sistema lineare* ∞^{n+1} *delle curve d'ordine* n *con un punto* $(n-1)$*-plo ed in esso le* $n-1$ *tangenti fisse, e suoi sottogruppi.*

2. – Si abbia nel piano un gruppo continuo ∞^n di trasformazioni cremoniane, di cui π, T sieno due trasformazioni generiche. Un sistema lineare ∞^k ($k \geqslant 1$) di curve algebriche viene trasformato da π in un altro sistema ∞^k di curve d'un certo ordine n; la T trasforma il nuovo sistema in un altro pure di curve d'ordine n che è il trasformato del primitivo

(*) Nota presentata dal Socio L. CREMONA nella seduta del 21 maggio 1893.

[1] *Theorie der Transformationsgruppen* Bd. 1, Kap. I (Leipzig, Teubner, 1888).

nella trasformazione del gruppo $T\pi$; l'insieme di tutti i trasformati del primitivo sistema nelle trasformazioni del gruppo costituisce un sistema continuo (in generale non lineare) trasformato in se stesso da tutte le trasformazioni del gruppo, ossia costituisce ciò che discesi un *corpo* del gruppo stesso. Questo sistema di curve d'ordine n è immerso nel sistema lineare di tutte le curve d'ordine n, e quindi appartiene ad un sistema lineare di dimensione minima di curve del detto ordine, che resulta da esso individuato; un tal sistema lineare deve pure esser trasformato in se stesso dalle trasformazioni del gruppo, giacchè altrimenti il corpo di curve prima costruito risulterebbe comune ad esso e ad un suo trasformato e quindi appartenente ad un sistema lineare (comune ai due) di dimensione minore. In questo modo partendo da un sistema ∞^k ($k \geqslant 1$) di curve algebriche, si può ottenere un sistema lineare di curve (di genere maggiore od uguale del primitivo) trasformato in se stesso dalle trasformazioni cremoniane di un gruppo continuo ∞^r. Un tal sistema appartiene ad un sistema determinato dai suoi punti base (colle date molteplicità) che è pure trasformato in se stesso; infatti soltanto dalle molteplicità della curva generica di un sistema lineare nei punti fondamentali di questo e dal suo ordine, dipendono l'ordine e la molteplicità della curva corrispondente in una trasformazione cremoniana.

3. – Il sistema lineare delle curve d'ordine $n - 3$ *aggiunte* alla curva generica d'ordine n d'un sistema lineare C, dicesi *sistema aggiunto* di C; dal sistema aggiunto si possono forse staccare delle curve fisse (fondamentali pel dato sistema) ed il sistema residuo dicesi aggiunto *puro* di quello dato: il sig. CASTELNUOVO (²) ha stabilito che quando un sistema lineare viene birazionalmente trasformato in un altro, l'aggiunto puro del primo si trasforma nell'aggiunto puro del secondo.

Dato un gruppo continuo di trasformazioni cremoniane si costruisca nel piano (come ho indicato) un sistema lineare, di genere p arbitrariamente grande, trasformato in se stesso; anche il sistema aggiunto puro di esso (che è ∞^{p-1}) dovrà essere un corpo per il gruppo. Si consideri poi l'aggiunto puro di questo sistema aggiunto e così via; gli ordini dei successivi sistemi vanno decrescendo e quindi il procedimento deve avere

(²) *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* (« Acc. Torino M. », 1891). Il procedimento (qui brevemente esposto) con cui dato un sistema lineare trasformato in sè da una trasformazione birazionale si deduce un sistema di genere 0,1 pure trasformato in se stesso, è stato usato dal sig. CASTELNUOVO (Acc. Lincei, 1892). Lo enunciò nel 1885 il sig. S. KANTOR (« Comptes rendus ») chiamandolo: *Principio della diminuzione delle funzioni* φ, senza però dimostrare il teorema citato sulla invariantività del sistema aggiunto che non è affatto incluso nel noto teorema del sig. NOETHER sull'invariantività (rispetto a trasformazioni biunivoche della curva e non del piano) della serie g_{2p-2}^{p-1} segata sopra una curva d'ordine n e genere p dalle sue aggiunte d'ordine $n - 3$ (cfr. anche CASTELNUOVO, « Acc. Torino M. », l. c., pag. 6).

un termine; d'altra parte ciò non può avvenire, finchè non si giunga ad un sistema di curve razionali od ellittiche, poichè una curva di genere > 1 ha almeno un fascio di curve aggiunte. Si perviene così a trovare un sistema lineare (∞^1 almeno) di curve razionali o ellittiche trasformato in sè da tutte le trasformazioni del gruppo.

4. – Un sistema lineare di curve ellittiche può sempre trasformarsi birazionalmente in uno dei seguenti d'ordine minimo (³):

a) sistema lineare di quartiche con due punti base doppi;

b) sistema lineare di cubiche;

c) fascio di curve d'ordine $3r$ con 9 punti base r-pli.

Se un sistema *a*) viene trasformato in sè dalle trasformazioni cremoniane d'un gruppo continuo, anche il sistema delle coniche per i due punti base (che è l'unico la cui curva generica incontra in 4 punti mobili la curva generica del sistema) deve essere trasformato in se stesso; le trasformazioni che mutano in sè questo sistema di coniche (contenente la rete delle rette del piano) sono quadratiche e corrispondono alle trasformazioni proiettive in sè d'una quadrica o d'un cono quadrico; perciò sono ∞^6 o ∞^7 secondochè i punti base del sistema sono distinti o infinitamente vicini; nel loro gruppo è contenuto un sottogruppo di ∞^4 omografie aventi i due punti base uniti (⁴).

Se un sistema *b*) senza punti base o con un punto base è trasformato in sè dalle trasformazioni cremoniane d'un gruppo continuo, queste trasformazioni sono omografie poichè ogni altra trasformazione eleva l'ordine della curva generica del sistema.

Dico che accade egualmente per ogni altro sistema *b*) o per un sistema *c*).

Si possono trattare insieme i due casi dicendo che il sistema trasformato in sè è un sistema lineare di curve d'ordine $3r$ ($r \geqslant 1$) con punti base r-pli in numero di due almeno. Consideriamo le coniche per due punti base (r-pli) del sistema e le curve trasformate nella trasformazione generica π del gruppo: sia n l'ordine di queste curve ed $h_1 h_2 \ldots$ le molteplicità che esse hanno nei punti base del sistema, $\varrho_1 \varrho_2 \ldots$ quelle che eventualmente esse possono avere in altri punti fissi fuori dei detti punti base. Le curve d'ordine n d'un tal sistema segano (come le coniche di cui sono le trasformate) in $4r$ punti mobili le curve d'ordine $3r$ del sistema primitivo; avremo dunque:

$$3rn = r \sum h_i + 4r$$

(³) Cfr. GUCCIA (« Circ. di Palermo », t. 1887). Il caso del fascio era stato anteriormente trattato dal sig. BERTINI (« Ann. di Mat. », 3, 9).

(⁴) Per la letteratura relativa alle trasformazioni proiettive d'una quadrica in sè, cfr. CLEBSCH-LINDEMANN, 2° Bd., s. 356 e segg.

cioè:

$$3n = \sum h_i + 4 .$$

Siccome poi le curve del sistema sono razionali deve aversi:

$$n(n-3) - \sum h_i(h_i - 1) - \sum \varrho_h(\varrho_h - 1) = -2 ,$$

ossia (tenendo conto della relazione precedente):

$$n^2 - \sum h_i^2 - \sum \varrho_h(\varrho_h - 1) = 2 .$$

D'altra parte le curve del sistema s'incontrano (due a due) in due punti variabili, quindi:

$$n^2 - \sum h_i^2 - \sum \varrho_h^2 = 2 ;$$

si deduce dunque:

$$\sum \varrho_h = 0 ,$$

e perciò tutte le quantità ϱ_h sono nulle, cioè il sistema ∞^3 trasformato di quello delle coniche per due punti base r-pli del primitivo sistema C, non ha punti base fuori di quelli di C. Ora un tal sistema ∞^3 (come quello di cui è il trasformato) è determinato dai punti base, e poichè le quantità intere h_i non mutano variando la trasformazione scelta nel gruppo continuo, si conclude che il sistema ∞^3 è fisso; siccome poi al gruppo appartiene la trasformazione identica (per la definizione di gruppo), così si deduce che il sistema delle coniche per due punti base di C è trasformato in sè da tutte le trasformazioni del gruppo. Queste trasformazioni sono dunque (come abbiam notato) quadratiche ed in particolare omografiche; ma le trasformazioni quadratiche che mutano in sè il sistema delle coniche elevano il grado delle curve d'ordine $3r$ aventi solo due punti r-pli in due punti fondamentali, perciò il gruppo non può esser composto che delle omografie contenute nel detto gruppo di trasformazioni.

Così dall'esistenza d'un sistema lineare di curve ellittiche mutato in sè dalle trasformazioni d'un gruppo continuo, si trae che le trasformazioni sono omografie (casi b), c)), o trasformazioni quadratiche mutanti in sè il sistema delle coniche per due punti (caso a)).

5. – Dobbiamo ora esaminare il caso d'un gruppo continuo di trasformazioni cremoniane che mutino in sè un sistema lineare di curve razionali, il quale sistema può sempre supporsi determinato dai punti base colle date molteplicità (per un'osservazione del § 2).

Cominciamo dal mostrare che se il sistema è un fascio può sempre costruirsi un altro sistema più ampio di curve razionali pure trasformato in se stesso. Basta per ciò trasformare birazionalmente il fascio in quello delle rette per un punto O (5) ed allora il gruppo si muta in un gruppo di trasformazioni di JONQUIÈRES d'un certo ordine n in cui alle rette corrispondono le curve (d'ordine n) d'una rete omaloidica col punto base O $(n-1)$-plo, quindi le curve d'ordine n con O $(n-1)$-plo aventi come punti semplici i punti base (fuori di O) comuni alle dette reti omaloidiche, formano un corpo per il gruppo.

Ciò posto, un sistema lineare di curve razionali (di dimensione > 1) determinato dai punti base può sempre trasformarsi in uno dei seguenti d'ordine minimo (6):

a) rete delle rette del piano;

b) sistema ∞^5 delle coniche del piano;

c) sistema lineare ∞^{m+1} delle curve d'ordine $(m+2)/2$ con un punto base $(m/2)$-plo ed un punto base semplice a distanza finita;

d) sistema lineare ∞^{m+1} delle curve d'ordine $(m+n)/2$ $(0 \leqslant n \leqslant m)$ con un punto base $((m+n)/2-1)$-plo con $n-1$ tangenti fisse comuni a tutte le curve.

Un sistema *a*) o *b*) non può ammettere altre trasformazioni cremoniane in sè, che trasformazioni omografiche.

Se un sistema *c*) o *d*) è trasformato in se stesso dalle trasformazioni cremoniane d'un gruppo continuo, anche il fascio delle rette per un punto base è trasformato in se stesso, giacchè è immerso nel dato sistema e con un semplice calcolo si vede che non vi sono nel sistema altri fasci di curve seganti quella generica in egual numero di punti mobili. Dunque nel caso *c*) si hanno due fasci uniti di raggi, ossia il gruppo è costituito da trasformazioni quadratiche che mutano in sè il sistema delle coniche pei due punti base (distinti) (cfr. § 3).

Resta che esaminiamo il caso d'un sistema *d*) trasformato in sè dalle trasformazioni cremoniane d'un gruppo continuo.

Il fascio delle rette per il punto multiplo O (trasformato in sè) presenta due condizioni ad una curva generica del sistema che debba contenerlo, giacchè basta per ciò costringere una curva del sistema ad avere due punti sopra una retta generica del fascio: il sistema residuo ∞^{m-1} (ottenuto staccando dal sistema *d*) il detto fascio) deve essere pure

---

(5) Cfr. NOETHER (« Math. Ann. », Bd. 3).

(6) Cfr. GUCCIA (« Circ. di Palermo », t. I, 1886). La riduzione con trasformazioni quadratiche della rete era stata anteriormente trattata dal sig. NOETHER (« Math. Ann. », Bd. 5).

mutato in sè dalle trasformazioni del gruppo. Staccando successivamente il medesimo fascio da questo sistema residuo ∞^{m-1} e così via, perveniamo ad un sistema di curve d'ordine n col punto O $(n-1)$-plo e le $n-1$ tangenti fisse per O, il quale è pure mutato in sè dalle trasformazioni del gruppo. Qui l'operazione ha un termine poichè il sistema residuo del fascio rispetto al detto sistema di curve d'ordine n, è riduttibile.

Il sistema stesso è ∞^{n+1}, rappresentativo del cono razionale normale d'ordine n dello spazio ad $n+1$ dimensioni (S_{n+1}): un tale cono ammette ∞^{n+5} trasformazioni proiettive in sè, giacchè per una di esse può scegliersi ad arbitrio un iperpiano (S_n) unito, una proiettività binaria a cui corrisponde un'omografia di S_n che muta in sè la sezione (curva razionale normale) del cono, ed infine il rimanente invariante assoluto dell'omografia. Corrispondentemente si hanno nel piano ∞^{n+5} trasformazioni di JONQUIÈRES (formanti gruppo) in ciascuna delle quali corrispondono alle rette le curve d'ordine n d'una rete omoloidica con O $(n-1)$-plo le tangenti fisse in O, ed altri $n-1$ punti base semplici.

Dunque se un sistema di curve razionali è mutato in sè dalle trasformazioni d'un gruppo continuo, queste sono omografie (casi *a*) o *b*)) oppure mutano in sè il sistema delle coniche per due punti (caso *c*)), o il sistema ∞^{n+1} delle curve d'ordine n con un punto $(n-1)$-plo e le tangenti fisse in esso (caso *d*)).

6. – Riassumendo le conclusioni dei §§ 4 e 5, e pensando a quella del § 3, otteniamo appunto il resultato enunciato nel § 1, cioè riconosciamo l'esistenza di 3 tipi di trasformazioni cremoniane:

1° gruppo ∞^8 delle omografie;

2° gruppo ∞^6 delle trasformazioni quadratiche che mutano in sè due fasci di raggi;

3° gruppo ∞^{n+5} delle trasformazioni di JONQUIÈRES (d'ordine n) che mutano in sè il sistema lineare ∞^{n+1} delle curve d'ordine n con un punto $(n-1)$-plo e le $n-1$ tangenti fisse.

Ogni gruppo di trasformazioni cremoniane appartiene come sottogruppo ad uno di questi 3 gruppi o ad un suo trasformato. I 3 gruppi 1°, 2° e 3° sono irreducibili fra loro (non si può dir lo stesso per i loro sottogruppi); ciò si riconosce facilmente rammentando che il solo gruppo ∞^6 d'omografie è quello delle omografie con un punto unito, e che non esistono gruppi ∞^7 d'omografie piane [7].

Il resultato stabilito può anche enunciarsi così:

---

[7] Cfr. LIE, op. cit., Bd. 1, s. 569.

La geometria nel piano ha come gruppo principale di trasformazioni [8] *un gruppo continuo di trasformazioni cremoniane* (*dipendente da un numero finito di parametri*), *coincide colla geometria proiettiva nel piano o sulla rigata quadrica* [9] *o sul cono razionale normale dello spazio ad* $n+1$ *dimensioni, o con un caso particolare di una di queste tre geometrie.*

---

(8) Per il concetto di gruppo principale di trasformazioni, cfr. il *Programma* del sig. KLEIN (Università di Erlangen, 1872) tradotto in italiano dal sig. FANO (« Ann. di Mat. », s. 2ª, t. XVII).

(9) Dicendo rigata quadrica intendo di escludere le trasformazioni proiettive di 2ª specie che mutano le generatrici d'un sistema della quadrica in quelle dell'altro, aggiungendo (come corpo) un sistema di generatrici al gruppo totale delle trasformazioni proiettive della quadrica in sè (che non è continuo).

II.

SOPRA UN GRUPPO CONTINUO DI TRASFORMAZIONI DI JONQUIÈRES NEL PIANO

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. II (1° sem., 1893), pp. 532-538 (*)

1. – In una precedente Nota ho stabilito che ogni gruppo continuo di trasformazioni cremoniane del piano (dipendente da un numero finito di parametri), può esser birazionalmente trasformato in un altro appartenente ad uno dei seguenti gruppi:

1) gruppo ∞^8 delle omografie;

2) gruppo ∞^6 delle trasformazioni quadratiche che mutano in sè due fasci di raggi (o gruppo delle inversioni rispetto ai circoli);

3) gruppo ∞^{n+5} (con n intero arbitrario) delle trasformazioni di JONQUIÈRES (d'ordine n) che mutano in sè il sistema lineare ∞^{n+1} delle curve d'ordine n con un punto base $(n-1)$-plo e le $n-1$ tangenti fisse.

Il 1° ed il 2° gruppo sono stati più volte studiati. Il sig. LIE (1) ha dimostrato che il gruppo delle omografie in S_n (in particolare il nostro gruppo 1°) è *semplice* (2). Il 2° gruppo, che può studiarsi come quello delle trasformazioni proiettive della quadrica in sè, opera sulle generatrici di ciascun sistema (sistema d'*imprimitività*) permutandole come il gruppo totale delle proiettività binarie: quindi esso contiene due (e due soli) sottogruppi eccezionali (∞^3) di omografie biassiali.

Invece il nostro 3° gruppo, per quanto io so, non è ancora stato studiato in generale, ed io mi propongo di assegnarne qui la composizione. Ciò darà luogo ad alcune osservazioni sulla geometria del piano che ha il detto gruppo principale di trasformazioni.

(*) Nota presentata dal Socio L. CREMONA.

(1) *Theorie der Trasformationsgruppen*, Bd. 1, S. 560 (« Math. Ann. », 25).

(2) Dicesi *composto* un gruppo che contiene qualche sottogruppo (diverso da se stesso e dall'identità) trasformato in sè dalle trasformazioni del gruppo (o, come si dice, un sottogruppo *eccezionale*), *semplice* nel caso opposto. Determinare la *composizione* d'un gruppo significa determinarne i sottogruppi eccezionali.

2. – Ho già notato (nella prec. Nota) che il gruppo 3° corrisponde al gruppo K delle trasformazioni proiettive in sè del cono razionale normale (d'ordine n) di S_{n+1} (quando il detto cono sia rappresentato sul piano), ed è sotto questo aspetto che prenderò a considerarlo.

Una trasformazione generica del gruppo K si ottiene assumendo ad arbitrio l'iperpiano unito opposto al vertice del cono, in esso una fra le ∞^3 proiettività che mutano in sè la curva sezione (ossia prendendo ad arbitrio una proiettività binaria che scambi fra loro le generatrici, come elementi d'un sistema d'imprimitività), ed infine fissando pure arbitrariamente il rimanente invariante assoluto dell'omografia: così appunto ho dedotto che il gruppo K è ∞^{n+5}.

Poichè esso opera sulle generatrici come il gruppo totale delle proiettività binarie, e questo è semplice, un sottogruppo eccezionale ∞^r di K opera sulle dette generatrici come il detto gruppo totale o come l'identità; nel 1° caso contiene ∞^{r-3} omologie, nel 2° è tutto costituito di omologie.

3. – Ora le ∞^{n+2} omologie col centro nel vertice O del cono formano effettivamente un sottogruppo eccezionale in K; questo per la considerazione prec. non può esser contenuto in alcun sottogruppo eccezionale di K, diverso da K, il quale avrebbe una dimensione minore di $n+5$ $(= n + 2 + 3)$.

4. – In questo gruppo ∞^{n+2} delle omologie di centro O è contenuto come sottogruppo eccezionale il sistema ∞^{n+1} delle omologie (*speciali*) il cui iperpiano di punti uniti passa per O: questo è anche un sottogruppo eccezionale in K, giacchè appunto (secondo la definizione) ogni omografia di K trasforma un'omologia speciale di centro O in un'altra analoga. Il gruppo ∞^{n+1} delle omologie speciali è costituito di omologie due a due *permutabili* (3), poichè sopra ogni retta per O (che è retta unita per tali omologie) sono permutabili le proiettività paraboliche subordinate da quelle omologie (avendo gli stessi punti uniti).

Si consideri un suo sottogruppo ∞^r $(r < n+1)$ che può ritenersi generato da r sue omologie indipendenti (e del resto arbitrarie) $\pi_1 \pi_2 \dots \pi_r$, nel senso che una trasformazione del gruppo ∞^r può rappresentarsi col simbolo $\pi_1^{s_1}\pi_2^{s_2}\dots\pi_r^{s_r}$ (4). Gli iperpiani delle r omologie generatrici hanno

(3) Cioè il prodotto gode la proprietà commutativa.

(4) Secondo Lie (op. cit., Bd. 1, S. 45) in un gruppo continuo ∞^r di trasformazioni vi sono r trasformazioni infinitesimali linearmente indipendenti, generatrici di r gruppi ∞^1 (che possono considerarsi come gruppi di potenze di una trasformazione in essi contenuta) i quali generano per moltiplicazione l'intiero gruppo. Essendo poi $\pi_1\ \pi_2 \dots \pi_r$ due a due permutabili, esse

comune un S_{n+1-r} per O, il quale appartiene agli ∞^{r-1} iperpiani (luogo di punti uniti) delle ∞^r omologie speciali del gruppo. Ora nessuno spazio lineare per O (di dimensione $< n+1$) gode della proprietà invariantiva rispetto a tutte le trasformazioni di K (sebbene goda di questa proprietà rispetto alle omologie contenute in K), giacchè ne seguirebbe l'esistenza di generatrici di contatto del cono con iperpiani osculatori appartenenti al detto spazio, le quali sarebbero unite per tutte le omografie di K, mentre abbiam notato che il gruppo K opera sulle generatrici del cono come il gruppo totale delle proiettività binarie. Si deduce che nessun sottogruppo di quello ∞^{n+1} delle omologie speciali di centro P è contenuto eccezionalmente in K.

5. – Il sig. LIE (5) ha dimostrato che se entro un gruppo continuo vi sono due sottogruppi eccezionali, essi hanno comune un sottogruppo eccezionale ∞^1 almeno, o sono costituiti di trasformazioni tali che ciascuna di quelle d'un sottogruppo è permutabile con ciascuna di quelle dell'altro. Di qua si trae anzitutto che un sottogruppo eccezionale di K diverso da quello ∞^{n+1} delle sue omologie speciali deve contenere quest'ultimo, giacchè non vi sono in esso sottogruppi eccezionali di K (§ 4), e d'altra parte non vi è nessuna omografia di S_{n+1}, diversa da una di quelle omologie, e permutabile con ciascuna di esse. Inoltre se il sottogruppo di cui si suppone l'esistenza non è quello ∞^{n+2} delle omologie considerato al § 3, per una osservazione del § 2, il sottogruppo stesso deve essere ∞^{n+4} (e non contenere altre omologie di K tranne quelle speciali). In K non possono esistere due siffatti sottogruppi eccezionali poichè avrebbero comune un sottogruppo eccezionale ∞^{n+3} (6).

6. – Dobbiamo ora riconoscere l'effettiva esistenza d'un sottogruppo eccezionale ∞^{n+4} in K formato dalle omografie (*speciali*) aventi un punto unito infinitamente vicino al vertice O del cono. Questo sistema ∞^{n+4} di omografie speciali rimane evidentemente invariato trasformandolo colle omografie di K; inoltre nel sistema comparisce insieme ad una omografia anche l'inversa; basta dunque mostrare che due omografie del sistema, cioè due omografie speciali di K, danno per prodotto un'omografia del sistema (cioè speciale). Dimostreremo questo fatto per induzione completa da $n-1$ ad n: la proprietà enunciata sussiste per il

---

appartengono sempre ad un gruppo ∞^r (o più ristretto), poichè

$$\pi_1^{s_1}\pi_2^{s_2}\ldots\pi_r^{s_r}\cdot\pi_1^{t_1}\pi_2^{t_2}\ldots\pi_r^{t_r}=\pi_1^{s_1+t_1}\pi_2^{s_2+t_2}\ldots\pi_r^{s_r+t_r}\,.$$

(5) Op. cit., Bd. 1, S. 264.
(6) LIE, op. cit., Bd. 1, S. 264.

cono quadrico ($n = 2$) giacchè le omografie con un punto unito infinitamente vicino al vertice entro il gruppo ∞^7 di tutte le trasformazioni proiettive del cono in sè, corrispondono per dualità ai movimenti entro il gruppo totale delle omografie che mutano in sè il cerchio all'infinito delle sfere (similitudini).

Ciò posto supponiamo dimostrata la proprietà per i coni di S_n. Proiettando da un suo punto il cono di S_{n+1} si ottiene quello di S_n, ed al gruppo delle omografie mutanti in sè il 1° cono che lasciano fermo il centro di proiezione, corrisponde il gruppo delle omografie che mutano in sè il 2° cono lasciando ferma una sua generatrice: fra queste ultime per ipotesi formano gruppo le omografie speciali, quindi sul cono di S_{n+1} due omografie speciali che hanno comune un punto unito sul cono (ed appartenenti al gruppo K del cono) danno per prodotto un'omografia speciale (di K).

Denotiamo col simbolo π (con accenti o apici) un'omografia speciale di K, con T una sua omologia speciale. Vi è una retta unita per π contenente O su cui la π subordina un'omografia parabolica, ed un'omografia parabolica (collo stesso punto unito O) subordina su di essa la T, quindi il prodotto πT (o $T\pi$ o πT^{-1}) è ancora una omografia speciale di K.

Le omografie speciali $\pi_1 \pi_2$ (di K) abbiano come unita una stessa generatrice del cono unito, e su di essa risp. i punti uniti $A_1 A_2$ (oltre ad O): si può fissare una omologia T (di cui l'iperpiano sia un qualunque iperpiano per O), tale che il prodotto $\pi_1 T$ abbia il punto unito A_2; allora abbiamo

$$\pi_2(\pi_1 T) = \pi$$

ossia

$$(\pi_2 \pi_1) T = \pi$$

e moltiplicando per T^{-1}

$$\pi_2 \pi_1 = \pi T^{-1} = \pi' .$$

Si vede così, intanto, che due omografie speciali di K con una stessa generatrice unita del cono, danno per prodotto un'omografia speciale di K.

Sieno ora π_1, π_2 due arbitrarie omografie speciali di K; sia r_1 una generatrice del cono unita per la 1ª, r_2 una generatrice unita della 2ª; sia r_3 una generatrice unita dell'omografia $\pi_2 \pi_1$. Le omografie speciali di K operano sulle generatrici del cono come le ∞^3 proiettività binarie; possiamo dunque costruire una omografia speciale (ausiliaria) π' coi raggi uniti r_1, r_3, la quale muti in r_2 l'ulteriore raggio unito della π_1. Allora (tenendo presente la legge di moltiplicazione dimostrata per le omografie speciali di K con una generatrice unita comune) si ha

$$\pi_1\pi' = \pi'' \qquad \text{(raggio unito comune } r_1)$$

$$\pi_2(\pi_1\pi') = \pi''' \qquad \text{(raggio unito comune } r_2)$$

$$(\pi_2\pi_1\pi')\pi'^{-1} = \pi \qquad \text{(raggio unito comune } r_3)$$

quindi

$$\pi_2\pi_1 = \pi \qquad \text{c.d.d.}$$

Così è dimostrato per induzione completa che le omografie speciali di K formano un gruppo, e precisamente un sottogruppo eccezionale ∞^{n+4} di K.

7. – Riassumendo i resultati dei precedenti §§ possiamo dire che il gruppo ∞^{n+5} delle omografie mutanti in sè un cono d'ordine n di S_{n+1} contiene tre, e tre soli, sottogruppi eccezionali; cioè quello ∞^{n+4} delle omografie speciali (con un punto unito infinitamente vicino al vertice O) quello ∞^{n+2} delle omologie di centro O, e quello ∞^{n+1} delle omologie speciali di centro O (e iperpiano per O) a due a due permutabili.

Intepretiamo questi risultati nel piano relativamente al gruppo (3°) delle trasformazioni di JONQUIÈRES che mutano in sè il sistema di curve rappresentative del cono.

Un'omografia generale trasformante in sè il cono di S_{n+1} (cioè appartenente a K) ha $n+1$ iperpiani uniti di cui uno (non passante per O) sega il cono secondo una curva non spezzata, e gli altri segano il cono secondo le due generatrici unite (dove lo toccano più volte): per un'omografia speciale di K l'iperpiano unito opposto ad O viene a passare per O, e quindi anche la sua sezione si compone delle due generatrici unite. Questa proprietà si può interpretare nel piano come caratteristica pel sottogruppo eccezionale ∞^{n+4} del gruppo 3°. Diamo senz'altro l'enunciato, includendovi l'interpretazione degli altri sottogruppi eccezionali di K (che è immediata).

Il gruppo (3°) ∞^{n+5} *delle trasformazioni di* JONQUIÈRES *d'ordine n (nel piano), che mutano in sè il sistema ∞^{n+1} μ delle curve d'ordine n con un punto base $(n-1)$-plo e le $n-1$ tangenti fisse, contiene tre e tre soli sottogruppi eccezionali α, β, γ risp. ∞^{n+4}, ∞^{n+2} ed ∞^{n+1}.*

Mentre per una trasformazione generale del gruppo totale vi è nel sistema μ una curva unita che non si compone delle due rette unite per il punto $(n-1)$-plo, in una trasformazione generica del sottogruppo ∞^{n+4} α, non vi è alcuna curva unita del sistema μ che non si componga delle due rette unite nominate.

Il sottogruppo ∞^{n+2} β *si compone delle trasformazioni di* Jonquières *prospettive coi raggi uniti pel punto base* $(n-1)$-plo *del sistema* μ.

Il sottogruppo ∞^{n+1} γ (*comune ad* α *e* β) *si compone delle trasformazioni di* Jonquières *prospettive che subordinano omografie paraboliche sui raggi uniti pel punto base* $(n-1)$-plo *del sistema* μ, *e sono due a due permutabili.*

8. – Possiamo illuminare i risultati ottenuti ponendo in relazione il nostro gruppo (3°) con un altro gruppo ben noto; ne seguirà una notevole interpretazione della geometria del piano che ha il detto gruppo come gruppo principale di trasformazioni.

L'inviluppo del cono d'ordine n di S_{n+1} può trasformarsi per dualità in una linea razionale normale d'ordine n, C, dell'iperpiano all'infinito di S_{n+1}: il gruppo K si muta in quello delle omografie trasformanti in sè la detta linea e quindi l'iperpiano a cui appartiene; ciascuna di queste omografie altera i volumi in un rapporto costante (è un'*affinità*) (7); il sottogruppo eccezionale α è dato dalle *affinità equivalenti* (conservanti i volumi) che trasformano in sè la data linea all'infinito; i gruppi β e γ risp. del gruppo delle *omotetie* e delle *traslazioni* in S_{n+1}. Così l'esistenza di 3 sottogruppi eccezionali in K poteva dedursi a priori: occorreva mostrare che non vi erano in K altri sottogruppi eccezionali, e vedere come questi vengano rappresentati; effettivamente al gruppo generale delle affinità equivalenti non compete la proprietà peculiare di avere un iperpiano unito infinitamente vicino a quello all'infinito, proprietà che spetta al sottogruppo ottenuto aggiungendo come corpo la linea C. Ma nel caso in cui n è pari questa proprietà poteva riconoscersi notando che la quadrica (dell'iperpiano all'infinito) definita dalla polarità in cui un punto della C corrisponde allo S_{n-1} osculatore (8), è mutata in sè dalle omografie del gruppo, il quale può quindi considerarsi come sottogruppo del gruppo delle similitudini. Una considerazione analoga potrebbe istituirsi quando n è dispari sostituendo, come assoluto, un sistema nullo ad una quadrica; i due casi potrebbero considerarsi analiticamente sotto un aspetto comune (9).

D'altra parte la geometria del piano che ha come gruppo princi-

(7) Per il gruppo delle affinità negli iperspazi cfr. Lie, op. cit., Bd. 1, S. 574.

(8) Secondo un teorema di Clifford, *On the classification of Loci* (« Philosophical Transaction », 1878).

(9) Il gruppo delle similitudini di S_3 (come duale del gruppo del cono quadrico) è considerato in Clebsch-Lindemann, Bd. 2, S. 373; per la letteratura relativa ad esso e al sottogruppo dei movimenti oltre alla op. cit. cfr. Lindemann, « Math. Ann. » 7, S. 56: per il gruppo delle similitudini negli iperspazi cfr. Lie, op. cit. Il gruppo delle trasformazioni lineari del sistema nullo in sè è considerato in Clebsch-Lindemann, op. cit., S. 373 e 389.

pale quello delle trasformazioni del gruppo 3°, è suscettibile della seguente interpretazione.

Si fissi nell'iperpiano all'infinito di S_{n+1} un assoluto costituito dalla linea C. Per una retta r di S_{n+1} (non all'infinito) si hanno così n iperpiani $L_1 L_2 \dots L_n$ seganti lo S_{n-1} all'infinito negli S_{n-2} osculatori alla C per il punto all'infinito della r. Due arbitrari iperpiani per la r, considerati come corrispondenti, determinano una proiettività (e l'inversa) nella forma $\mathbf{\Phi}_{n-1}$, degli iperpiani per r, dove $L_1 L_2 \dots L_n$ sono elementi uniti; possiamo considerare gli $n-1$ invarianti assoluti di questa proiettività (o i loro logaritmi) come gli *angoli* dei due iperpiani nella forma $\mathbf{\Phi}_{n-1}$, nel senso che essi servono a fissare la reciproca posizione dei due iperpiani nella forma, come l'angolo di due piani nel fascio (di S_3); due iperpiani non determinano i loro angoli (per $n > 2$) finchè non è fissata la r, ma invece n iperpiani indipendenti definiscono il gruppo degli angoli formati due a due.

In questo senso la geometria del piano che ha come gruppo principale il nostro gruppo 3°, *può interpretarsi come una nuova estensione della ordinaria geometria metrica euclidea (di S_3) in S_{n+1}.*

III.

UNA QUESTIONE SULLA LINEARITÀ DEI SISTEMI DI CURVE APPARTENENTI AD UNA SUPERFICIE ALGEBRICA

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. II (1° sem., 1893),

pp. 3-8 (*)

1. – Dicesi *sistema lineare* ∞^n di curve algebriche sopra una superficie algebrica F, un sistema di curve che può essere segato sulla F dalle superficie d'un sistema lineare con n parametri

$$\sum_1^{n+1} \lambda_i f_i(xyz) = 0 .$$

Questa definizione analitica è equivalente alla seguente definizione geometrica: dicesi sistema lineare ∞^n sopra F un sistema di curve tale che

a) per n punti generici della F passi *una* curva del sistema,

b) gli elementi (curve) del sistema sieno riferibili *proiettivamente* ai punti d'uno spazio lineare S_n.

S'intende che il sistema ∞^n di curve è riferito proiettivamente ad S_n, quando fra gli elementi (curve) del sistema ed i punti di S_n è stabilita una corrispondenza biunivoca siffatta che alle curve del sistema per un punto della F, corrispondano i punti d'un iperpiano (S_{n-1}) in S_n; da questa proprietà che definisce la rappresentazione proiettiva del sistema su S_n segue l'altra che ad un iperpiano di S_n corrisponde un sistema lineare ∞^{n-1} di curve sulla F, immerso nel dato.

Per brevità chiamo *sistema* un insieme ∞^n di curve algebriche appartenenti alla superficie F, il quale soddisfi alla condizione *a*); chiamo *rete* e *fascio* rispettivamente un *sistema* ∞^2 e ∞^1. Sorge la questione:

(*) Nota presentata dal Socio L. CREMONA. Comunicazione pervenuta all'Accademia prima del 2 luglio 1893.

Esistono *sistemi* non lineari?

In altre parole: La condizione *b*) è indipendente dalla *a*) o invece è una conseguenza di essa?

Posta così la questione si risponde subito assegnando effettivi esempi di *sistemi* non lineari: è notissima la esistenza di superficie contenenti un fascio *irrazionale* (il che equivale a non lineare) di curve, e basta considerare sopra una tale superficie i gruppi di n curve del fascio per ottenere un *sistema* ∞^n di curve certo non lineare. Ma questi esempi si riferiscono a *sistemi* di curve o ∞^1 (fasci), o ∞^n di cui la curva generica si spezza (nelle n curve d'un fascio). È interessante di stabilire che questi sono gli unici casi di *sistemi* non lineari, cioè che sussiste il teorema:

Un sistema algebrico ∞^n (con $n > 1$) di curve algebriche irreduttibili appartenenti ad una superficie F, tale che n punti generici di F individuino una curva del sistema che li contiene, è un sistema lineare, segabile quindi mediante un sistema lineare ∞^n di superficie.

2. – Consideriamo sulla superficie F un *sistema* algebrico ∞^n (con $n > 1$) di curve algebriche irreduttibili C; dico che due curve C generiche si segano in un numero finito m di punti variabili coi parametri delle curve C. Infatti, essendo $n > 1$, per un punto arbitrario della F passano due curve C (tra le ∞^{n-1}), e quindi due curve C hanno almeno una intersezione variabile; esse hanno quindi (per la algebricità) un numero finito di punti comuni (variabili) o un numero infinito; ma nel 2° caso esse hanno comune una curva componente e però si spezzano contro l'ipotesi fatta: dunque due curve C hanno comune un numero finito m di punti (variabili). Questo numero m che rimane costante al variare delle due curve C (per la continuità), si dirà il *grado* del sistema delle curve C.

3. – Sopra la superficie F si abbia una rete di curve irreduttibili C di grado m. Per definizione due punti generici della F individuano una curva C che li contiene, quindi tutte le curve C per un punto formano un fascio (§ 1): due curve di un fascio hanno comuni gli m punti comuni a due di esse, giacchè per due punti della F passa in generale una sola curva C e se ve ne passano due ve ne passano infinite ed inoltre un fascio non può spezzarsi in più sistemi. Dunque tutte le curve C della rete che passano per un punto di un gruppo di m punti comuni a due curve C, passano per gli altri $m-1$; questi gruppi di m punti in numero di ∞^2 formano così una *involuzione*, cioè un tale insieme che un punto appartiene ad *un* gruppo della involuzione. Due curve C hanno comune un gruppo della involuzione; due gruppi della involuzione individuano una curva C che li contiene, cioè la curva C individuata da un punto d'un gruppo insieme ad un punto dell'altro gruppo.

Allora si consideri una varietà ∞^2 di punti corrispondenti biunivocamente ed algebricamente agli elementi (gruppi) della involuzione: il luogo di questi punti è una superficie algebrica F' riferita in corrispondenza $[1. m]$ alla F: alle curve C della rete appartenente alla F corrispondono sulla F' le curve K d'una rete; infatti per due punti della F' passa la curva K corrispondente alla curva C di F individuata dai gruppi dell'involuzione che corrispondono ai due punti. Sulla F due curve C hanno comune un gruppo dell'involuzione, quindi sulla F' due curve K si segano in un punto. La corrispondenza fra le curve C e le K è proiettiva, cioè ad un fascio di curve C corrisponde un fascio di curve K e viceversa.

Dunque è sempre possibile di riferire proiettivamente gli elementi (curve) d'una rete appartenente alla superficie F, agli elementi (curve) d'una rete di grado 1 sopra una superficie F'.

4. – Sieno α, β, due arbitrarie curve K della rete stabilita su F': sieno A, A' due arbitrari punti della curva α, B, B' due arbitrari punti della β. Vi è una curva K della rete che passa per A, A' ed analogamente una per B, B'; queste s'incontrano in un punto O: vi è un fascio di curve K passanti per O. Le curve di questo fascio segano ciascuna in un punto le curve α, β, rispettivamente; le curve α, β, vengono così riferite punto per punto (in modo prospettivo) in tal modo che ai punti A, A' di α corrispondono i punti B, B' di β. Dunque tra le curve (algebriche) α e β, vi sono ∞^2 corrispondenze algebriche biunivoche ed anzi vi è una tale corrispondenza in cui a due punti (arbitrari) AA' di α corrispondono risp. due punti (arbitrari) BB' di β.

Si deduce (facendo il prodotto d'una corrispondenza per l'inversa di un'altra) che ciascuna delle due curve α, β, ossia ciascuna curva K, ammette ∞^2 trasformazioni biunivoche in sè stessa: tanto basta per affermare (¹) che le curve K sono razionali. Parimente ogni fascio di curve K (di cui le curve vengono riferite biunivocamente ai punti di intersezione con un'altra curva K) è un fascio razionale (ossia lineare).

Allora si fissino sulla F' due fasci di curve K i cui centri sieno risp. due punti A', B', e si riferiscano proiettivamente a due fasci di rette coi centri A, B nel piano, in modo che alla curva K che passa per A', B' considerata come appartenente all'uno o all'altro fascio corrisponda sempre la retta AB. Così nasce una rappresentazione biunivoca della superficie F' sul piano; il punto sezione d'una curva K per A' e d'una

(¹) Cfr. SCHWARTZ, «Crelle's J.», 87, p. 140; e NOETHER, «Mathem. Ann.», Bd. 20.

per B' su F' corrisponde al punto sezione delle due rette del piano omologhe a quelle curve, passanti risp. per A, B.

In questa rappresentazione alle curve K di F' corrispondono nel piano le rette generate dai fasci di raggi prospettivi coi centri A, B. Così si ottiene una rappresentazione proiettiva della rete di curve K sulla rete delle rette del piano, e quindi anche la rete delle curve C sulla F (la quale, secondo il § 3, è riferita proiettivamente alla rete delle curve K su F') viene ad esser riferita proiettivamente alla rete delle rette del piano.

5. – Il teorema enunciato in principio è stato dimostrato per le reti: ogni rete di curve irreduttibili è una rete lineare. Non sarà difficile estendere questo resultato ai *sistemi* ∞^n (con $n > 2$). Supponiamo vero il teorema pei *sistemi* ∞^{n-1} e dimostriamo che esso è vero per quelli ∞^n.

Si consideri dunque sulla superficie F un *sistema* ∞^n di curve C irreduttibili. Due curve C del *sistema* individuano un fascio (cfr. § 3) composto di tutte le curve che hanno comuni gli stessi m punti comuni alle due (essendo m il grado del *sistema*); ma per n punti ad arbitrio sulla F passa una curva C del *sistema*, e per $n-1$ un fascio di curve C, quindi $m \geqslant n-1$: tra gli m punti comuni a due curve C $n-2$ indipendenti individuano una rete composta delle curve C che li contengono, quindi, (poichè la rete è riferibile proiettivamente al piano (§ 4)) ogni fascio di curve determinato da due curve C del *sistema* ∞^n è razionale (ossia è lineare).

Ciò posto si consideri una curva C_0 del *sistema* ∞^{n-1} costituito da tutte le curve C per un punto: ogni fascio di curve C contenente la C_0 ha *una* curva comune col *sistema* ∞^{n-1} cioè quella curva del fascio che passa pel punto scelto; ogni curva C del *sistema* ∞^{n-1} determina colla C_0 un fascio di curve C (razionale) contenente la C_0.

Il *sistema* ∞^{n-1} di curve C si riferisca proiettivamente (come è possibile per ipotesi) ad un S_{n-1} di S_n; la curva C_0 si faccia corrispondere ad un punto O di S_n (fuori dello S_{n-1}). Ad ogni fascio di curve C contenente la C_0 su F corrisponde in S_n una retta per O (quella che proietta il punto di S_{n-1} corrispondente alla curva C del *sistema* ∞^{n-1} appartenente al fascio) e viceversa. Un altro sistema ∞^{n-1} di curve C per un punto di F si faccia corrispondere ad un altro S'_{n-1} di S_n: ogni sua curva C determina un fascio colla C_0; a questo corrisponde in S_n una retta per O che incontra lo S'_{n-1} in un punto che diciamo corrispondente della C. Ora sopra ogni fascio di curve C su F, contenente la C_0, si hanno 3 curve C determinate, cioè la C_0, e le due curve C appartenenti ai due *sistemi* ∞^{n-1} scelti; sulla retta corrispondente per O in S_n si hanno tre punti che ordinatamente corrispondono alle tre curve, cioè il punto O e le intersezioni coi due S_{n-1}: tanto basta perchè sia fissata una corrispondenza proiettiva tra gli elementi (curve) del fascio (che è razionale) ed i punti della retta. Per tal modo nasce una corrispondenza biunivoca tra le curve C del dato *sistema* ∞^n su F ed i punti di S_n. Una curva C determina un fascio insieme con C_0, a cui corrisponde in S_n una retta per O; tra il fascio e la retta risulta individuata una proiettività che alla curva C fa corrispondere un punto di S_n; colla costruzione inversa ad un punto di S_n corrisponde una curva C su F.

Nella corrispondenza fissata al *sistema* ∞^{n-1} delle curve C su F, che passano per un punto, corrisponde una varietà: il *sistema* ∞^{n-1} ha comune un *sistema* ∞^{n-2} con quel *sistema* ∞^{n-1} di cui le curve furono *proiettivamente* riferite ai punti di un S_{n-1} in S_n; infatti sono comuni ai due *sistemi* le curve che passano per i due punti comuni risp. alle curve dell'uno e a quelle dell'altro: dunque al *sistema* ∞^{n-1} delle curve C di F per un punto, corrisponde una varietà che sega un S_{n-1} in un S_{n-2}. Una tale varietà deve comporsi di iperpiani (S_{n-1}); ma essa non può essere spezzata poichè il *sistema* ∞^{n-1} di curve C corrispondente su F non può esser spezzato, invero per $n-1$ punti passerebbero altrimenti più curve C di esso appartenenti alle varietà ∞^{n-1} costituenti il sistema; dunque al *sistema* ∞^{n-1} delle curve C di F per un punto, corrisponde un iperpiano in S_n.

Dunque la corrispondenza stabilita tra le curve C del dato *sistema* ∞^n su F ed i punti di S_n è proiettiva; ossia, come appunto abbiamo enunciato in principio, ogni *sistema* ∞^n $(n > 1)$ di curve irreduttibili su F è un sistema lineare.

6. – Il teorema dimostrato si estende senz'altro ai *sistemi* di varietà M_{K-1} a $K-1$ dimensioni contenuti in una varietà M_K a $K > 2$ dimensioni. Basta infatti considerare una superficie sezione della M_K con un'altra qualunque varietà (avente un numero di dimensioni opportuno), ed il *sistema* di curve che sulla superficie vien segato dalle M_{K-1}.

Così si ha il teorema generale:

Se sopra una varietà algebrica M_K si ha un sistema algebrico ∞^n (con $n > 1$) di varietà algebriche irreduttibili M_{K-1}, tale che per n punti generici della M_K passi una M_{K-1} del sistema, il sistema stesso è un sistema lineare (segabile quindi mediante un sistema lineare di varietà ad $r-1$ dimensioni dello spazio S_n cui la M_K appartiene).

7. – Mi sembrano opportune alcune considerazioni tendenti a mettere in luce la natura del risultato stabilito in questa Nota.

Come è noto nella geometria proiettiva del piano il teorema dei triangoli omologici viene dimostrato o usando dello spazio S_3 in cui il piano è contenuto, o usando della teoria delle similitudini, e sembra difficile che possa dimostrarsi facendo a meno di questi elementi o di altri equivalenti.

In altre parole sembra debba ritenersi che i postulati fondamentali del piano che ordinariamente vengono ammessi (cioè « la continuità », « due rette determinano un punto », « due punti determinano una retta ») non sieno sufficienti a fondare la comune geometria proiettiva del piano, mentre gli analoghi nello spazio bastano a fondare la geometria proiettiva ordinaria dello spazio. Se questa supposizione è giusta si potrebbe dire che in certo modo la geometria si completa nello spazio di tre dimensioni come l'analisi nel campo di due dimensioni (variabili complesse).

Ora, conservando la nomenclatura adottata, la questione posta può enunciarsi domandando se (prescindendo dalla algebricità ma ammettendo la continuità) esistono superficie contenenti una rete di curve di grado 1 non lineare, od anche se esistono superficie contenenti una rete non lineare di curve di cui due arbitrarie si segano nei gruppi di punti (in numero finito o infinito) d'una involuzione (cfr. § 3). Infatti se si chiamano *rette* le curve della rete e *punti* i gruppi della involuzione, la linearità della rete porta con sè la sussistenza del teorema analogo a quello dei triangoli omologici: viceversa se sussiste un tal teorema si può fondare sulla superficie la geometria analoga alla geometria proiettiva del piano ed ottenere quindi la rappresentazione proiettiva della rete sul piano (colla costruzione della proiettività tra due forme di 2ª specie). Il risultato stabilito consiste dunque essenzialmente in ciò che *la algebricità della rete e delle sue curve basta a provare la sussistenza del teorema dei triangoli omologici nella geometria fondata (come ho detto) sulla superficie* (la quale risulta algebrica).

Guardando le cose da questo punto di vista si riconosce che invece *l'algebricità non è necessaria per stabilire il teorema del* § 6 *relativamente ai sistemi* ∞^3 *di varietà* M_2 *su* M_3 *quando tre* M_2 *abbian comune un gruppo di punti variabile* (da cui segue la cosa per gli analoghi sistemi ∞^n, con $n > 3$, di M_{K-1} su M_K, con $K \geqslant 3$), poichè appunto denominando *piani* le varietà M_2 e *punti* i gruppi di punti (generanti un'involuzione) comuni a tre M_2 si può fondare sulla M_3 una geometria analoga alla proiettiva dello spazio e quindi riferire proiettivamente al sistema dei piani di S_3 il sistema delle M_2.

IV.

SUI SISTEMI LINEARI DI SUPERFICIE ALGEBRICHE LE CUI INTERSEZIONI VARIABILI SONO CURVE IPERELLITTICHE

« Rend. Acc. Lincei » s. 5ª, vol. II (2° sem., 1893), pp. 281-287 (*)

1. – Quando si studia la geometria sul piano ponendo a base il gruppo delle trasformazioni birazionali (o cremoniane) di esso, si presenta come una delle prime ricerche lo studio dei sistemi lineari di curve, ed in ispecie per quei sistemi distinti per la semplicità di alcuno dei loro caratteri, nasce il problema della riduzione a *tipi*, cioè la questione di classificarli distribuendoli in famiglie di sistemi trasformabili birazionalmente uno nell'altro e di cui i tipi sieno i rappresentanti più semplici (proiettivamente). A questo ordine d'idee (che apparisce importante sebbene non applicabile nello studio delle forme più elevate) si collegano molte notissime ricerche preliminari nella geometria sul piano: così si ha la riduzione a *tipi* dei sistemi di curve di genere 0, 1, 2, e di quelli *semplici* (cioè in cui il passaggio per un punto non trae il passaggio della curva generica per altri punti variabili con esso) del genere 3 (NOETHER, BERTINI, GUCCIA, IUNG, MARTINETTI, SEGRE, CASTELNUOVO) (1); parimente si ha la classificazione dei sistemi semplici di curve aventi 2, 3, 4 intersezioni variabili, cioè rappresentativi di superficie razionali del 2°, 3°, 4° ordine (CREMONA, CLEBSCH, KUMMER, NOETHER) (2); infine sono stati classificati e ricondotti a *tipi* i sistemi lineari di curve contenenti una data serie speciale, così i sistemi lineari semplici di curve iperellittiche, e quelli di cui la curva generica contiene una g_m^1 ed aventi una dimensione assai elevata (3).

(*) Nota presentata dal Socio L. CREMONA nella seduta del 3 dicembre 1893.

(1) Cfr. CASTELNUOVO, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane*. Prefazione. Acc. di Torino. Memorie, 1891.

(2) Cfr. CAPORALI, *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane*.

(3) Cfr. CASTELNUOVO (l. c.).

Ricerche simili non sono state fino ad ora intraprese riguardo ai sistemi lineari di superficie nello spazio; ho pensato perciò che valesse la pena di occuparsi di alcune classi di tali sistemi, ed in questa nota espongo i resultati a cui sono pervenuto relativamente ai sistemi semplici di superficie le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche di genere $p > 1$. Più in generale risolvo la questione dello studio delle varietà a 3 dimensioni a curve sezioni (degli S_{r-2} in S_r) iperellittiche di genere $p > 1$ (4). A fine di non imporre alla ricerca limiti non necessari, ho dovuto premettere lo studio completo delle superficie a sezioni (piane o iperpianali) iperellittiche, riguardo alle quali superficie è noto già un teorema del sig. CASTELNUOVO (« Circolo Mat. di Palermo », 1890) relativo solamente a quelle di genere numerico 0 (che riescono razionali). Così ho stabilito, e ciò mi sembra anche per sè stesso non privo d'interesse, che *ogni superficie a sezioni iperellittiche di genere p* (> 1) *o contiene un fascio di coniche* (*ed è razionale*), *o è una rigata del genere p* (§ 2).

---

(4) La condizione $p > 1$ sarà tacitamente supposta nel seguito del testo parlando di curve iperellittiche. Per completare i risultati qui ottenuti restano da considerare i casi particolari in cui $p = 1$ o $p = 0$. Ma il caso $p = 1$ presenta notevoli difficoltà non ancora superate (si pensi al dubbio circa la razionalità della varietà cubica di S_4). Nel caso in cui $p = 0$ si perviene invece senza difficoltà a ridurre a tipi i sistemi lineari semplici di superficie le cui intersezioni variabili sono curve razionali. Accenno ai resultati.

Una varietà di S_n a curve sezioni razionali si proietti da punti esterni in una V di S_4. Una superficie sezione iperpianale della V è una quadrica, o una rigata non quadrica, o una superficie di STEINER del 4° ordine.

Nel 1° caso la V è una quadrica, ed il sistema rappresentativo di essa su S_3 (rappresentandola con una proiezione) è quello delle quadriche per una conica.

Nel 2° caso si vede analogamente al § 3 di questa Nota che la V contiene un fascio razionale di piani (classe di varietà studiata dal sig. SEGRE nel lavoro: *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani*, Accad. di Torino, 1885); la V si può rappresentare su S_3 assumendo come immagini delle sezioni iperpianali un sistema di superficie d'un certo ordine n con retta base $(n-1)$-pla e (forse) altri elementi base (cfr. SEGRE, l. c.).

Nel 3° caso la varietà V è del 4° ordine con retta tripla e tre piani doppi: essa contiene quindi una congruenza di rette sezioni dei piani per la retta tripla: ma una superficie di STEINER (sezione iperpianale di V) non può contenere una retta (semplice) senza ridursi ad un cono del 4° ordine, onde si deduce che la V è un cono le cui generatrici proiettano dal vertice i punti d'una superficie di STEINER: un tale cono è proiezione d'un cono del 4° ordine (normale) di S_6 le cui sezioni iperpianali sono superficie di VERONESE (studiate dai sigg. VERONESE e SEGRE): siffatti coni di S_6 non hanno invarianti assoluti, essi possono dunque tutti rappresentarsi col sistema delle quadriche di S_3 tangenti in un punto ad un piano fisso (ciò che può vedersi anche direttamente). Così si può dimostrare il teorema:

Ogni sistema lineare semplice di superficie segantesi due a due secondo curve razionali può trasformarsi birazionalmente in uno dei seguenti:

1) *sistema delle quadriche per una conica*;

2) *sistema di quadriche tangenti in un punto ad un piano*;

3) *sistema di superficie d'ordine n con retta base* $(n-1)$*-pla e* (*forse*) *altri elementi base* (v. SEGRE, l. c.).

Si può anche dimostrare che è semplice un sistema di superficie determinato dal gruppo base le cui intersezioni sono curve razionali, se ha la dimensione ≥ 3: questo è un corollario di un teorema più generale concernente la normalità del sistema di curve che le superficie d'un sistema determinato dal gruppo base segano sopra una superficie generica di esso.

Basandomi su questo resultato riesco ad estenderlo alle *varietà di 3 dimensioni* (e si potrebbe fare lo stesso per quelle di $r > 3$ dimensioni) *a curve sezioni iperellittiche,* dimostrando che *esse contengono un fascio di quadriche* (*e son razionali*) *oppure un fascio* (*serie semplice* ∞^1) *di piani.* Dalla rappresentazione che si ottiene nel 1° caso di quelle varietà su S_3 (nel 2° esse sono irrazionali) desumo che *ogni sistema lineare semplice di superficie le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche può con una trasformazione birazionale dello spazio trasformarsi in un sistema di superficie d'un certo ordine n, con una retta base* ($n-2$)-pla, *una curva base semplice incontrata in due punti variabili dai piani per la retta, e* (*forse*) *altri elementi base.*

2. – Si abbia in S_3 dove può supporsi proiettata (da punti esterni) una superficie F a sezioni piane iperellittiche di genere p (> 1). In primo luogo si osservi che se la F è razionale, sul piano rappresentativo di essa, il sistema delle immagini delle sue sezioni piane ha come *aggiunto puro* (cfr. Castelnuovo, « Accad. di Torino, Memorie, 1891 », cap. II) un sistema ∞^{p-1} di curve spezzate ciascuna in $p-1$ d'un fascio, ed alle curve del fascio corrispondono coniche sopra la F, dimodochè i punti coniugati d'un punto generico O della F sulle sezioni piane per O appartengono alla conica del detto fascio che passa per O.

Ora si supponga (se è possibile) che i coniugati d'un punto O della F sulle sezioni piane per O non stieno tutti sopra una medesima linea ma descrivano tutta la superficie; dico che se ne trae come conseguenza che la F è razionale ciò che per l'osservazione precedente dimostra l'assurdità della fatta ipotesi.

Invero nella detta ipotesi (supposta possibile) ogni punto A della F è coniugato del punto O sopra un certo numero finito m di sezioni piane per O, ed invece sopra ogni piano per O vi è *un* punto coniugato di O sulla curva sezione, dimodochè ad ogni piano per O corrisponde così un punto della F, e ad un punto della F un gruppo di m piani per O: per tal modo i punti della F vengono ad essere riferiti biunivocamente ai gruppi di una involuzione (di grado m) nella stella di piani col centro O (forma di 2ª specie); tanto basta per concludere, in base ad un recentissimo teorema del sig. Castelnuovo ([5]), che la F è una superficie razionale come appunto avevamo enunciato. E siccome abbiam visto che questo fatto contraddice all'ipotesi da cui siamo partiti, si deduce che i punti coniugati del punto O sulle sezioni piane della F per esso descrivono necessariamente una curva. Un punto A di questa curva è coniugato del punto O sopra tutte le sezioni piane della F per OA, quindi la

([5]) *Sulla razionalità delle involuzioni piane,* « Rend. Accad. dei Lincei », 1893.

come luogo delle coniche corrispondenti ad O sulle sezioni iperpianali d'un fascio per OO'; ma tali coniche (luogo dei coniugati di O sulle dette sezioni iperpianali) corrispondono anche (nel senso indicato) al punto O', onde colla medesima generazione si ottiene sulla V la quadrica corrispondente ad O', la quale coincide dunque con quella corrispondente ad O come appunto dovevasi dimostrare. Rimane così stabilito che se la V a sezioni piane iperellittiche ha per sezioni iperpianali superficie razionali (caso che stiamo trattando), essa contiene un fascio di quadriche, ciascuna luogo di ∞^4 coppie di punti coniugati sulla V; il fascio di quadriche così costruito sulla V è razionale come l'involuzione g_2^1 che esso determina sopra una sezione piana.

Ora, se accade che l'iperpiano contenente una quadrica del fascio sulla V contenga altre quadriche del fascio stesso, possiamo trasformare la V in un'altra varietà W contenente pure un fascio di quadriche di cui due non stieno in uno stesso iperpiano ed in modo che le quadriche del fascio sulla W e quelle sulla V si corrispondano una ad una proiettivamente. Infatti basta per ciò riferire proiettivamente gli elementi (quadriche) del fascio sulla V agli iperpiani per un piano π in S_4, e proiettare ciascuna quadrica sul corrispondente iperpiano da un punto O fuori di π; il luogo dei punti ottenuti è la varietà W riferita biunivocamente alla V nell'anzidetto modo.

Ciò posto una sezione iperpianale della W contiene un fascio razionale di coniche e però possiede (secondo NOETHER) delle curve direttrici K seganti in un punto ciascuna conica: vi sono dunque sulla varietà W delle curve K seganti in un sol punto ogni quadrica del fascio che essa possiede. Allora preso in S_4 un S_3 si può rappresentare la W punto per punto su S_3 proiettando i punti di ciascuna quadrica del fascio dal punto intersezione di essa colla curva K. Si ottiene in conseguenza la rappresentazione birazionale della V su S_3, ed anche in questa rappresentazione (come in quella della W) le quadriche del fascio appartenente alla varietà vengono rappresentate sui piani d'un fascio, e ciascuna ha come immagini delle sezioni piane sul piano corrispondente, le coniche d'un sistema ∞^3 con due punti base.

Siamo così pervenuti al teorema:

Una varietà a 3 dimensioni a curve sezioni (degli S_{r-2} in S_r) iperellittiche di genere p (> 1) è

1) *o una varietà ∞^1 semplice di piani (fascio), del genere p;*
2) *o una varietà razionale contenente un fascio di quadriche.*

4. – Un sistema lineare di superficie nello spazio S_3 in cui il passaggio d'una superficie per un punto non trae di conseguenza il passaggio di essa per altri punti variabili con esso (cioè un sistema *semplice*), si può considerare come il sistema delle immagini delle sezioni iperpianali d'una varietà a 3 dimensioni riferita punto per punto allo spazio S_3. Una varietà razionale a curve sezioni iperellittiche appartiene necessariamente al 2° dei tipi considerati e quindi può riferirsi ad S_3 in modo che alle sue quadriche corrispondano i piani d'un fascio ed ogni quadrica sia rappresentata sul corrispondente piano dal sistema delle coniche con due punti base: in conseguenza il sistema rappresentativo delle sezioni iperpianali della varietà sega ciascun piano del nominato fascio secondo il detto sistema di coniche con due punti base, e ad un siffatto sistema può ricondursi con una trasformazione birazionale dello spazio ogni altro sistema rappresentativo della varietà.

Così si deduce che:

Un sistema lineare semplice di superficie che ha come intersezioni variabili curve iperellittiche (*di genere* $p > 1$) *può trasformarsi con una trasformazione cremoniana dello spazio in un sistema lineare di superficie d'un certo ordine* n *con una retta base* ($n - 2$)-pla, *una curva base semplice segante in due punti variabili i piani per la retta, e* (*forse*) *altri elementi base.*

È chiaro che viceversa in un tal sistema di superficie le intersezioni variabili sono curve iperellittiche.

V.

RICERCHE DI GEOMETRIA SULLE SUPERFICIE ALGEBRICHE

« Memorie Acc. Torino », s. 2ª, to. XLIV (1893),

p. 171-232.

INTRODUZIONE

1. – La geometria che studia le proprietà degli enti algebrici (curve, superficie, varietà) invariabili per trasformazioni birazionali dell'ente dicesi *geometria sull'ente* (1).

Il concetto di questa geometria scaturisce per la prima volta dalla teoria delle funzioni algebriche di una variabile nella capitale memoria di RIEMANN sulla *Theorie der Abelschen Functionen* (2). Da un altro lato la geometria sul piano (e sulle superficie razionali) nasce dai classici lavori sulle corrispondenze algebriche di CREMONA e CLEBSCH (trasformazioni del piano, rappresentazione delle superficie omaloidi).

Nello sviluppo della geometria sull'ente sono da distinguersi due momenti caratterizzati da due diversi indirizzi (3).

a) In primo luogo si presenta la ricerca delle condizioni perchè due enti possano riferirsi in corrispondenza birazionale: questa ricerca è il naturale resultato della provata fecondità di quelle trasformazioni. Essa si presenta sotto due aspetti. Da un lato la determinazione di caratteri numerici invariantivi (legati alle singolarità dell'ente) come nei lavori del signor ZEUTHEN (4). Dall'altro lato lo studio delle funzioni collegate

---

(1) Le notizie storiche che seguono sono in parte tolte dalle lezioni litografate del sig. KLEIN sulle « Riemannsche Flächen » (1892) e dalle « Vorlesungen » di CLEBSCH-LINDEMANN (Bd. 1), che si possono consultare per maggiori dettagli.

(2) CRELLE, t. 64.

(3) Naturalmente la differenza tra i due indirizzi non è netta, ed alcune ricerche partecipano dell'uno e dell'altro, ma questa osservazione è soltanto un corollario della gran legge di continuità che governa le produzioni scientifiche (come ogni altra produzione organica).

(4) « Mathematische Annalen », Bd. 3 e 4. Appartengono a questa categoria varie dimostrazioni della conservazione del genere per le curve, tra le quali una del sig. BERTINI. Cfr. CLEBSCH-LINDEMANN, Bd. 1 (3ª parte).

all'ente algebrico (in modo invariantivo). Sotto questo secondo aspetto (che può anche considerarsi come collocato fra il primo momento della geometria sull'ente ed il secondo nel quale si ricercano le proprietà dell'ente stesso) la questione della possibilità di trasformare birazionalmente un nell'altro due enti algebrici, venne trattata nei lavori fondamentali di CLEBSCH ([5]), che stabilì così il concetto di genere per le curve e per le superficie; questi resultati generalizzati alle varietà comunque estese furono ritrovati algebricamente dal signor NOETHER (« Mathematische Annalen », II e VIII), dove insieme al genere di CLEBSCH (*Flächengeschlecht*) viene introdotto per le superficie il *Curvengeschlecht.*

La determinazione dei moduli per le curve ([6]) e per le superficie ([7]) rientra pure nel primo momento dello sviluppo della geometria sull'ente.

Accanto a queste ricerche sono ancora da porsi quelle che studiano la classificazione di certi enti mediante la riduzione a *tipi* (irreducibili per trasformazioni birazionali), così le ricerche sulla riduzione (all'ordine minimo) dei sistemi lineari di curve piane ([8]) mediante trasformazioni cremoniane, e sotto un punto di vista non molto dissimile possono riguardarsi le ricerche sulla razionalità delle superficie fra cui sono classiche quelle del signor NOETHER ([9]).

b) Nel secondo momento la geometria sull'ente diviene essenzialmente studio delle proprietà invariantive dell'ente ([10]). Nella geometria sopra una curva questo studio si riattacca all'applicazione delle funzioni abeliane di CLEBSCH (l. c.) e riceve stabile assetto geometrico nell'importante memoria dei signori BRILL e NOETHER ([11]).

In questo lavoro si trovano riuniti i principali teoremi di geometria sopra una curva che hanno più tardi numerose ed utili applicazioni nella teoria delle curve gobbe dello spazio ([12]).

([5]) *Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie* (CRELLE, t. 63). Cfr. anche CLEBSCH e GORDAN, *Theorie der Abel'schen Functionen* (Leipzig, 1866) e CLEBSCH (« Comptes rendus », 1868) dove è stabilito il concetto di genere per le superficie.

([6]) RIEMAN, l. c., § 12. *Weierstrass*, cfr. BRILL e NOETHER (« Math. Ann. », 7) o CLEBSCH-LINDEMANN, Bd. 1 (2ª parte).

([7]) NOETHER, *Anzahl der Moduln einer Classe algebraischer Flächen* (« Sitzungsberichte von Berlin », 1888).

([8]) NOETHER (« Math. Ann. », Bd. 5); BERTINI (« Annali di Mat. », serie 2ª, t. VIII); GUCCIA (« Circolo Mat. di Palermo », t. I); JUNG (« Istituto lombardo », 1887-888 e « Annali di Mat. », serie 2ª, t. XV e XVI); MARTINETTI (« Istituto lomb. », 1887 e « Circolo di Palermo », t. I); CASTELNUOVO (« Circolo Mat. di Palermo », 1890 e « Accademia di Torino », Atti, 1890).

([9]) « Mathem. Ann. », 3.

([10]) Un progresso analogo ha subito la geometria proiettiva nel passaggio da PONCELET a STAUDT.

([11]) *Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie* (« Mathem. Ann. », Bd. 7).

([12]) Cfr. NOETHER, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven* (« Journ. f. Mathem. », Bd. 93); HALPHEN, *Mémoire sur les courbes gauches algébriques* (« Comptes rendus », t. 70, 1870).

Ma una nuova idea caratterizza uno sviluppo nuovo della geometria sopra una curva rendendola indipendente (come si richiedeva per la sua perfezione) da una particolare varietà cui la curva può supporsi appartenere. Intendo parlare dell'uso degli iperspazi, i quali introdotti da GRASSMANN nel 1844 (come pure espressioni analitiche) e da RIEMANN, furono usati dal CAYLEY nel 1867 e 1869 (come varietà di elementi di arbitraria natura [13]) e con successo applicati allo studio delle curve dal CLIFFORD [14] (1878).

Il signor VERONESE raccogliendo questi vari materiali di geometria iperspaziale scrisse nel 1881 il suo classico lavoro [15] che fu il punto di partenza dello svolgimento di quella geometria avvenuto specialmente in Italia per opera del signor VERONESE stesso e del signor SEGRE [16].

Fu allora che si pensò di rendere indipendente la geometria sopra una curva dalla rappresentazione di essa nel piano e di sostituire così in quello studio i concetti di curve aggiunte, ecc., coi procedimenti più semplici e generali propri delle considerazioni iperspaziali. Il signor SEGRE ed il signor CASTELNUOVO [17] riuscirono ad elevare con questo concetto una nuova teoria della geometria sopra una curva che alla semplicità ed armonia delle basi congiunge una potenza per la quale si fecero in questo campo nuovi ed importanti acquisti.

La geometria sopra una superficie non ha progredito in proporzione alla geometria sopra una curva, anzi si può dire che essa non è ancora entrata nel 2° momento del suo sviluppo, poichè la teoria generale dei sistemi lineari di curve sopra una superficie di arbitrario genere (fatta nel senso della geometria sopra una superficie) non è ancora avviata. Il lavoro fondamentale nell'argomento resta ancora quello (citato) del signor NOETHER del 1874-75 (« Mathem. Ann. », VIII) nel quale le funzioni invariantive appartenenti ad una superficie vengono studiate in modo profondo. Successivamente si ha un lavoro del signor PICARD [18] dove in particolare sono studiate le superficie con trasformazioni in sè stesse, e due note del signor CASTELNUOVO [19] contenenti notevoli esempi di particolari classi di superficie. Invece la geometria sul piano è entrata

[13] Questo modo di vedere fu introdotto da PLUECKER.

[14] *On the Classification of Loci* (« Phil. Transactions »).

[15] *Behandlung der proiectiwische Verhältnisse*, ecc. (« Math. Ann. », 19).

[16] Per maggiori dettagli cfr. la Monografia storica del sig. LORIA, *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche* (« Accad. di Torino, Memorie », serie 2ª, t. 38). Cfr. pure SEGRE, *Su alcuni indirizzi*, ecc. (« Rivista di Mat. », 1891).

[17] Cfr. specialmente: SEGRE, *Sulle curve normali di genere p dei varii spazii* (« Istituto lomb. », 1888 e *Courbes et surfaces réglées* (« Mathem. Ann. », t. 34 e 35); CASTELNUOVO, *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* (« Accad. di Torino, Atti », 1889).

[18] *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (« Journal de Liouville », 1889).

[19] « Istituto lombardo », (1891).

nel secondo periodo del suo sviluppo col noto lavoro del sig. CASTELNUOVO [20] il quale contiene concetti originali ed importanti a cui sembra possa darsi maggiore estensione coll'applicarli allo studio delle superficie di genere > 0 [21].

2. – Delineato rapidamente lo svolgimento che ebbe fino ad oggi la geometria sull'ente ed in particolare sopra una superficie, debbo esporre quali contributi porti questo lavoro alla nominata teoria e quali concetti mi abbiano guidato nella ricerca.

Lo scopo principale del lavoro è lo studio dei *sistemi lineari* ∞ di curve (algebriche) appartenenti ad una superficie (algebrica). Li definisco come sistemi tali che per r punti della superficie passi una curva di essi, e di cui gli elementi (curve) possono riferirsi proiettivamente ai punti di uno spazio lineare S_r [22].

Dopo avere premesso alcuni lemmi (noti) sui sistemi di curve riduttibili passo ad esporre il concetto di *sistema normale* e di *sistema completo*, cioè di sistema non contenuto rispettivamente in un altro dello stesso genere, e stabilisco che un sistema di dato grado D (cioè di cui due curve s'incontrano in D punti variabili) appartiene ad un determinato sistema normale dello stesso grado; e risulta poi che sopra una superficie di genere > 0 una curva appartiene ad un determinato sistema completo dello stesso genere. Ne deduco la 1ª parte del teorema del resto (*Restsatz*) [23] (cap. I).

Nel cap. II considero le curve le quali godono la proprietà di segare un gruppo residuo (nel senso di BRILL e NOETHER) della serie *caratteristica* [24] sulla curva generica d'un sistema lineare ∞^r (dotato di curve fondamentali distinte) ed un gruppo contenuto nel residuo della serie caratteristica sopra la curva generica di un sistema ∞^{r-1} contenuto nel primo: siffatte curve, sommate con curve fondamentali del dato sistema,

---

[20] *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* (« Accad. di Torino, Memorie », 1891). Tra i lavori precedenti si possono considerare come facenti parte di questo 2° momento della geometria sul piano, la nota del sig. SEGRE (« Circolo di Palermo », t. I) e quella del sig. CASTELNUOVO (« Ann. di Mat. », 1890).

[21] Per la geometria sulle superficie rigate cfr. il citato lavoro del sig. SEGRE (« Mathematische Annalen », 35).

[22] La 2ª proprietà è una conseguenza della 1ª per $r > 1$, se le curve del sistema non si spezzano. Cfr. la mia nota: *Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (« Accad. dei Lincei », giugno 1893) [questo volume, III] e la successiva del sig. CASTELNUOVO (« Accad. di Torino », giugno 1893) in cui quel teorema è dedotto da un altro più generale relativo alle involuzioni sopra una curva.

[23] NOETHER, « Mathem. Ann. », 8. Come ognun vede quest'ordine di idee è una conveniente estensione alle superficie dei concetti che, come ho detto, il sig. SEGRE ed il sig. CASTELNUOVO introdussero a fondamento d'una teoria della geometria sopra una curva.

[24] Con questo nome (introdotto dal sig. CASTELNUOVO pei sistemi di curve piane) indico la serie che tutte le curve di un sistema segano sopra la curva generica di esso.

godono le medesime proprietà rispetto ad ogni altro sistema della superficie (anche non dotato di curve fondamentali distinte) e sono segate sopra una superficie d'ordine n in S_3 da superficie aggiunte d'ordine $n-4$: perciò le dette curve formano un sistema lineare (se esistono) e le componenti variabili del sistema (che denomino curve *canoniche*) hanno un carattere invariantivo rispetto alla superficie il quale risulta fissato molto semplicemente dalla loro definizione ([25]). Nasce quindi una distinzione dei sistemi appartenenti ad una superficie in sistemi *puri* ed *impuri* secondochè le curve canoniche segano sulla loro curva generica un gruppo residuo della serie caratteristica o un gruppo contenuto in un tal gruppo residuo: sopra una superficie convenientemente trasformata (facendo segare dai piani le curve d'un sistema puro), i primi sistemi non hanno punti base, i secondi sì; la questione si riattacca alle curve eccezionali (*ausgezeichnete*) di NOETHER. Un sistema puro normale è necessariamente completo.

Nel cap. III introduco il concetto di *sistema aggiunto* ad un sistema lineare (C) di dimensione $r \geqslant 2$; se (C) ha curve fondamentali distinte, le curve del detto sistema aggiunto sono definite dal segare un gruppo canonico sulla curva generica di (C) e dal segare sopra la curva generica d'un sistema ∞^{r-1} contenuto in (C), un gruppo contenuto in uno appartenente alla serie somma della serie canonica e di quella differenza fra la serie segata sulla curva da (C) e la serie caratteristica del sistema ∞^{r-1} (o il gruppo dei punti base semplici se $r=2$).

La definizione data del sistema aggiunto esclude che (C) contenga in sè un sistema ∞^{r-1} di curve razionali (il che è impossibile se la superficie non è razionale); sotto tale restrizione il sistema aggiunto a (C) coincide coll'aggiunto puro definito dal signor CASTELNUOVO pei sistemi di curve piane, quando la superficie è razionale. Quando ∞^3 curve C sono sezioni piane d'ordine n d'una superficie F di S_3 il sistema aggiunto a (C) viene segato sulla F dalle superficie aggiunte d'ordine $n-3$.

Per le superficie di genere $p>0$ (a cui ci riferiamo) il sistema aggiunto è il *sistema normale somma* del sistema canonico di (C) e dei suoi punti base (se (C) è impuro) e questa proprietà serve a definirlo nel caso in cui (C) non abbia curve fondamentali distinte.

Stabilire la dimensione del sistema aggiunto ad un sistema (C) di genere π, è questione della massima importanza per le molteplici applicazioni cui conduce la considerazione del sistema aggiunto. Indicando con $\delta(C)$ il difetto di completezza ($\geqslant 0$) della serie (canonica) che il si-

([25]) L'invariantività è dimostrata analiticamente dal sig. NOETHER (« Mathem. Ann. », 8). Il numero delle curve canoniche linearmente indipendenti è il genere (geometrico) p della superficie.

stema aggiunto sega sulla curva generica C di (C), la dimensione del detto sistema aggiunto è $p+\pi-1-\delta(C)$.

Se (C) è un sistema puro *semplice* (cioè in cui il passaggio d'una curva per un punto non trae di conseguenza il passaggio per altri punti) si dimostra che la quantità $\delta(C_1)$ relativa ad un arbitrario sistema puro (C_1) è $\leqslant \delta(rC)$ (essendo (rC) il sistema r-plo di (C)) per r assai grande. Se dunque il $\delta(rC)$ invece di crescere indefinitamente con r ha un massimo K (come avviene certo se la superficie ha singolarità ordinarie), K è un *vero carattere invariantivo della superficie.* Importante è il caso in cui $K=0$; indipendentemente da qualsiasi restrizione relativa alle singolarità della superficie, si prova che è $K=0$ se $\delta(2C)=0$, e viceversa; quindi se (C) è un sistema puro semplice per cui $\delta(2C)=0$ per ogni altro sistema (anche impuro) di genere π, la dimensione del sistema aggiunto è $p+\pi-1$: se in particolare la superficie è così trasformata da avere soltanto singolarità ordinarie, il genere geometrico p di essa è uguale al suo genere numerico p_1 definito da ZEUTHEN e NOETHER, e viceversa è $K=0$ se $p=p_1$. La restrizione $K=0$ è ammessa nel seguito per le superficie che si considerano (fino all'ultimo cap. escl.); e nel § 7 del cap. III ho creduto opportuno (vista l'importanza della cosa) di richiamare altre circostanze che permettono di concludere la sussistenza di tale fatto.

Servendomi del sistema aggiunto dimostro quindi che ogni sistema impuro (con punti base distinti) può dedursi coll'aggiunta dei suoi punti base da un sistema puro o (forse) da un sistema con soli punti base semplici: dimostro poi la 2^a parte del Restsatz (§ 3), e nei §§ 5 e 6, do esempi relativi alle superficie di genere 0, 1 (cap. III).

Il maggiore interesse si concentra nello studio dei sistemi puri (C) (completi); il sistema aggiunto permette di dedurre che la loro serie caratteristica è completa se tale è quella del sistema canonico (o se il sistema canonico non ne ha alcuna) (cap. IV): in siffatta ipotesi per l'intersezione di due curve C di (C) passano $2p+\omega-i$ curve (linearmente indipendenti) del sistema aggiunto a (C), essendo p il genere della superficie, $i-1$ la dimensione del sistema residuo di (C) rispetto al canonico (l'*indice di specialità* $i=0$ se (C) è *non speciale* cioè non contenuto nel canonico) ed $\omega\geqslant 0$; designo ω col nome di *sovrabbondanza* di (C) perchè come risulta più tardi) se si suppone la superficie in S_3 e si fa segare (C) mediante aggiunte in modo arbitrario, la sua dimensione *virtuale* ϱ calcolata in base alle formole di postulazione di NOETHER è tale che (indicando con r la dimensione *effettiva* di (C)) si ha:

$$r-\varrho=\omega-i.$$

Se π è il genere di (C) ed n è il suo grado, si ha la relazione

$$\pi - 1 - n + r = p + \omega - i$$

(dove $i = 0$ se (C) è non speciale).

Questa relazione costituisce un'estensione del noto teorema di RIEMANN-ROCH della geometria sopra una curva: essa fu data sotto forma di disuguaglianza dal signor NOETHER ([26]), ma la relativa dimostrazione mi sembra presentare una lacuna.

Definendo ω mediante l'uguaglianza $r - \varrho = \omega - i$, la relazione precedente sussiste ancora se (C) è impuro (dedotto coll'aggiunta di punti base da un sistema puro) ed è ancora $\omega \geqslant 0$.

Infine la relazione stessa sussiste anche prescindendo dalla restrizione invariantiva per la superficie che la serie caratteristica del sistema canonico sia completa, ma allora non risulta dimostrato che sia sempre $\omega \geqslant 0$; si ha però certo $\omega \geqslant 0$ se $r \geqslant (p^{(1)}+1)/2$ essendo $p^{(1)}$ il 2° genere (*Curvengeschlecht*) della superficie.

L'utilità della precedente relazione si presenta nel cap. V trattando delle curve fondamentali. Poste alcune limitazioni per queste curve si dimostra una relazione fra i caratteri d'un sistema (C), il *genere* d'una curva fondamentale e i caratteri del sistema residuo (C'): se ne deducono alcune notevoli proprietà dei sistemi *regolari* ($\omega = 0$) e del sistema canonico; p. e. un sistema regolare di dimensione $> p$ non ha curve fondamentali di genere > 0. Così se di un sistema puro (C), senza curve fondamentali di genere > 0, si considera il multiplo secondo m, per m assai grande questo è regolare: si può in tal modo trattare un caso semplice delle formule di postulazione relative alle varietà che passano per una superficie negli iperspazi.

Infine le curve fondamentali di genere 0 dei sistemi lineari sono degne di attenzione perchè conducono ad un nuovo carattere invariantivo per le superficie ($p > 0$): in particolare si troverà dimostrato un teorema sui punti doppi che una superficie può acquistare (per trasformazione) in S_3.

Nel cap. VI do un rapido sguardo alle involuzioni. Estendo per quelle irrazionali un teorema fondamentale stabilito dal signor CASTELNUOVO ([27]) per le involuzioni appartenenti ad una curva.

Finalmente determino una espressione invariantiva per le involuzioni razionali sopra una superficie, formata coi caratteri di una rete di cui due curve si segano in un gruppo dell'involuzione.

([26]) « Comptes rendus », 1886.
([27]) « Accad. dei Lincei », 1891.

Questo in breve è il tessuto del mio lavoro, di cui i numerosi mancamenti spero mi si vorranno perdonare in vista degli ostacoli che ad ogni passo s'incontrano; io sarò lieto se queste ricerche varranno ad invogliare taluno allo studio di un così bello argomento di cui le difficoltà esercitano una meravigliosa attrattiva.

I.

GENERALITÀ SUI SISTEMI LINEARI DI CURVE APPARTENENTI AD UNA SUPERFICIE ALGEBRICA

1. - Definizioni. - Teoremi preliminari.

Si dirà *sistema lineare* ∞^k *di curve* (algebriche) sopra una superficie algebrica S, un sistema di curve tale che per k punti della superficie in posizione generica passi una ed una sola curva del sistema, e tale che gli elementi (curve) di esso possono riferirsi proiettivamente agli elementi generatori (punti o iperpiani S_{k-1}) di una forma lineare S_k (in modo che ad un S_{k-1} o ad un punto corrisponda un sistema lineare immerso in quello ∞^k e viceversa) ([28]).

Sopra una superficie appartenente ad uno spazio S_r un sistema lineare ∞^k di varietà (ad $r-1$ dimensioni) non contenenti la superficie, sega sempre un sistema lineare ∞^k di curve; vedremo più tardi come in tal modo si possa ottenere qualunque sistema lineare d'una superficie S, ad es. segandola con sistemi lineari di superficie se essa appartiene allo spazio S_3 (o è stata proiettata in quello); ma noi vogliamo anzitutto ricavare le proprietà generali dei sistemi lineari dalla definizione che ne abbiamo data, senza occuparci del modo con cui sono stati costruiti.

Se si ha un sistema lineare ∞^k di curve di cui le parti variabili si segano due a due in D punti variabili, diremo che il sistena è di *dimensione* k, e *grado* D: se le curve del sistema sono irreduttibili e la curva generica ha il genere π, diremo che il sistema ∞^k è di *genere* π.

([28]) Il secondo fatto per $k > 1$ è una conseguenza del primo quando la curva generica del sistema è irreduttibile. Cfr. la mia nota: *Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (« Accad. dei Lincei », giugno 1893) [questo volume, III]. Il teorema è stato nuovamente dedotto dal sig. CASTELNUOVO come corollario di una importante proposizione sulle involuzioni appartenenti ad una curva algebrica (« Accad. di Torino », giugno, 1893).

Se $k = 1$ non si può parlare di grado del sistema. Non vi sono altri casi in cui non si può parlare di grado d'un sistema irreduttibile.

Infatti se $k > 1$ per un punto della superficie deve passare più d'una curva del sistema e quindi il punto è comune a due curve; perciò l'unico caso in cui non si possa parlare di grado del sistema è quello in cui due curve aventi un punto comune abbiano comuni altri infiniti punti ossia abbiano comune una linea, l'insieme di tutte queste linee è tale che per un punto della superficie ne passa *una* ossia è ciò che dicesi un *fascio*; allora *le curve del sistema si compongono d'un certo numero m di curve del fascio e non sono più irreduttibili.* Per ogni sistema lineare irreduttibile di dimensione $k > 1$ i caratteri k, D, π hanno dunque un significato ben definito.

Può darsi che tutte le curve d'un sistema ∞^k passanti per un punto, debbano in conseguenza passare per altri punti della superficie in numero finito $m - 1$ variabili con esso, e si ha allora sulla superficie una serie ∞^2 di gruppi di m punti tale che un punto appartiene ad *un* gruppo della serie, ossia ciò che può dirsi una *involuzione* I_m; possiamo dire che il sistema *appartiene* all'involuzione I_m; diremo *semplice* un sistema in cui il passaggio d'una curva generica per un punto non trae di conseguenza il passaggio per altri punti variabili con esso.

Un sistema ∞^2 (*rete*) appartiene ad una involuzione I_D, se D è il suo grado. Tranne per le superficie omaloidi un sistema semplice ha sempre la dimensione $k > 2$.

Si riferiscano proiettivamente le curve del sistema semplice (C) agli iperpiani (S_{k-1}) di S_k; ogni punto della superficie S è *base* per un sistema lineare ∞^{k-1} costituito da tutte le curve di (C) che passano per esso; a questo sistema ∞^{k-1} corrisponde in S_k la ∞^{k-1} degli iperpiani per un punto P, ossia la stella di centro P: in questo modo nascono in S_k ∞^2 punti P i quali generano una superficie F, e poichè per ipotesi, (C) è un sistema semplice, la *superficie F è riferita alla S punto per punto.* Indicheremo brevemente la trasformazione eseguita dicendo che si è *trasformata la S in un'altra superficie F di S_k su cui le curve del dato sistema (C) sono segate dagli iperpiani* od anche dicendo che *facciamo segare sulla superficie le curve del sistema (C) dagli iperpiani di S_k.*

La trasformazione indicata non riesce più univoca se il sistema (C) non è semplice. In tal caso possiamo sempre costruire un sistema lineare ∞^1 di curve (fascio razionale) che non appartenga all'involuzione I_m cui appartiene (C); invero basta considerare il fascio segato da un fascio di iperpiani (o di piani) nello spazio S_r a cui la superficie S appartiene, escludendo (tutt'al più) posizioni particolari dello S_{r-2} base. Ciò posto si riferiscano proiettivamente le curve del sistema (C) agli iperpiani (S_k) di un S_{k+1} per un punto O e le curve del fascio razionale agli iperpiani per un S_{k-1} in S_{k+1} non contenente O: un punto della superficie S è base per un sistema ∞^{k-1} di curve in (C) ed appartiene ad una curva del fascio; al sistema ∞^{k-1} corrisponde la forma degli iperpiani aventi una retta base per O, ed alla curva un iperpiano per lo S_{k-1} che incontra la detta retta in un punto P; il luogo dei punti P così costruiti *è una superficie F di S_{k+1} riferita biunivocamente alla S su cui le curve del sistema (C) sono segate dagli iperpiani per O.*

Questa 2ª trasformazione riesce biunivoca per tutti i sistemi (C) (naturalmente anche per quelli semplici) tali che il passaggio di una curva di essi per un punto non tragga di conseguenza il passaggio per infiniti punti. Infine anche *un fascio razionale di curve può farsi segare dai piani d'un fascio in S_3* (o dagli iperpiani d'un fascio in un iperspazio), adoprando una rete (od altro sistema) ausiliaria e compiendo la trasformazione indicata innanzi. È utile che ci fermiamo a considerare alcune particolarità di queste trasformazioni ottenute partendo da una rete e da un fascio (nel seguito si sottintenderà razionale salvo avviso in contrario), come pure di un'altra trasformazione analoga che può ottenersi partendo da tre fasci, poichè nel seguito ci occorrerà di richiamare queste proprietà.

Si abbia una rete di grado D, ed un fascio di cui una curva generica seghi in n punti variabili una curva della rete e che non appartenga all'involuzione I_D che la rete determina; riferiamo proiettivamente le curve della rete ai piani per un punto O e le curve del fascio ai piani per una retta r (non contenente O), compiendo così la trasformazione della data superficie. Sulla nuova superficie F i piani per r segano (fuori di r) curve d'ordine n (aventi n punti comuni coi piani per O); ad un punto della r corrispondono i D punti base d'un fascio appartenente alla rete, e quindi la r è D-pla per la F, la quale risulta d'ordine $n+D$; una retta per O sega la F in D punti (base d'un fascio immerso nella rete), quindi O è n-plo per la superficie F: inoltre la superficie contiene curve multiple secondo h_1, h_2, ... (in generale una curva doppia) i cui punti corrispondono risp. a gruppi di h_1, h_2, ... punti contenuti in un gruppo della involuzione I_D cui appartiene la rete ed appartenenti ad una stessa curva del fascio; vi sono poi in generale rette multiple per O della F e punti multipli isolati corrispondenti a curve che non hanno intersezioni variabili con quelle della rete (*fondamentali*), ed infine la F potrà presentare anche altre singolarità in corrispondenza a singolarità della primitiva superficie. È anche d'uopo avvertire che dalla superficie F può eventualmente staccarsi un certo numero di volte il piano Or, ed allora soltanto la parte residua dovrà considerarsi la trasformata propria della superficie data; il caso accennato si verifica se il fascio e la rete hanno una curva comune cui corrisponda il piano Or considerato sia come appartenente alla stella di centro O, sia come appartenente al fascio di asse r.

In modo analogo potranno vedersi le proprietà, che ora accenno, della trasformazione in cui si fanno segare 3 fasci dai piani risp. per 3 rette r_1, r_2, r_3 (non passanti per un punto). Se le curve del 1° fascio incontrano quelle del 2° e 3° risp. in n_3, n_2 punti e quelle del 2° e del 3° s'incontrano in n_1 punti (e 3 curve di ciascuno dei fasci per un punto non han comuni altri punti variabili con esso), riferendo proiettivamente le curve dei 3 fasci risp. ai piani per r_1, r_2, r_3, la superficie si trasforma in una F di ordine $n_1+n_2+n_3$, che ha le rette r_1, r_2, r_3, multiple risp. secondo n_1, n_2, n_3, ecc. È da osservarsi che due rette ad es. r_1, r_2 possono essersi scelte passanti per un punto O, ed allora può ancora accadere che si stacchi il loro piano (un certo numero di volte) dalla superficie F.

Stabiliamo ora il seg. teorema: *Se in un sistema lineare la curva generica si spezza, o il sistema si compone delle curve irriduttibili d'un altro sistema a cui si sono aggiunte delle curve (componenti) fisse, o le componenti irriduttibili delle curve del sistema formano un fascio (razionale o no)* ([29]).

Facciamo segare le curve del sistema (C) (in cui si può supporre $k>1$) dagli iperpiani di S_{k+1} per un punto O sulla superficie F riferita in modo semplice o multiplo alla primitiva; la F non può essere spezzata (poichè tale non si suppone la primitiva), quindi dico che le sue sezioni iperpianali per O non possono tutte spezzarsi tranne in rette per O. Basta vedere il fatto per $k=2$ potendosi altrimenti proiettare la F in S_3. Ora ricordiamo che la F può supporsi riferita semplicemente alla primitiva superficie se la F stessa non è un cono di vertice O (ossia la rete (C) ha un grado): escluso che la F sia un cono, consideriamo un fascio di piani seganti la F il cui asse r passi per O e non appartenga alla F; le curve C sezioni dei piani per r formano un fascio cioè un sistema che sulla superficie irreduttibile F non può spezzarsi in più sistemi; se in ogni piano per r la sezione della F è spezzata in s (>1) curve K, sulla varietà ∞^1 che ha per elementi le curve K (componenti un fascio) i gruppi di s curve costituenti le C formano una serie lineare g_s^1 la quale possiede almeno $2(s-1)$ elementi di coincidenza: si arriverebbe così alla conclusione che per un'arbitraria retta r per O vi sono dei piani tangenti alla F lungo una linea (una K), e poichè vi sarebbero infiniti di tali piani la F sarebbe contata più volte, ciò che è assurdo.

Ciò posto nel 1° caso (cioè se le sezioni generiche della F per O sono irreduttibili) alla curva generica di (C) corrisponde una parte variabile

([29]) Cfr. pei sistemi lineari del piano: BERTINI («Istit. lomb.», 1882), e per quelli su una qualunque superficie: NOETHER, «Math. Ann.», 3, pag. 171; 8, pag. 524.

irreduttibile, sezione della F con un iperpiano per O, ed il punto O che non può esser dato se non da componenti fisse; nel 2° caso le curve del sistema (C) si compongono con quelle del fascio, rappresentato dalle ∞^1 rette per O sulla F. Così ogni sistema riduttibile di cui le curve non si compongono delle curve d'un fascio definisce un sistema irreduttibile di ugual dimensione ottenuto staccando le componenti fisse: diremo genere e grado del primitivo sistema quelli del sistema irreduttibile così definito, ed *escluderemo nel seguito la considerazione dei sistemi di cui la curva generica si compone di m curve d'un fascio.*

Sussiste pure il teorema:

In un sistema lineare di curve irreduttibili la curva generica non può avere punti multipli fuori dei punti base, e delle linee multiple della superficie ([30]).

Nel sistema lineare si consideri un fascio (razionale); basterà dimostrare che non può esistere una linea, non singolare per la superficie, luogo di punti multipli delle curve del fascio; ne seguirà allora immediatamente il teorema enunciato. Ora la dimostrazione si farà per assurdo.

Supposto che esista una tal curva C luogo dei punti multipli delle curve del fascio, si può immaginare sulla superficie una rete di curve per la quale il passaggio per un punto della C non porti di conseguenza il passaggio per altri punti della C stessa (in modo cioè che la C non sia luogo di coppie appartenenti a gruppi dell'involuzione definita dalla rete), ed allora si può trasformare la superficie in una F su cui le curve della rete sien segate dai piani per un punto O, quelle del fascio dai piani per una retta r, ed alla curva C venga a corrispondere sulla F una curva C' non singolare; ora la sezione piana generica della F per r non può avere punti multipli fuori della curva multipla della F stessa e della retta multipla r la quale contiene i punti di contatto con F del piano generico per r; è dunque assurdo che le sezioni piane per r della F abbiano dei punti multipli i quali descrivano la C' come avverrebbe per conseguenza della nostra ipotesi sulla C.

2. - Sistemi normali e sistemi completi.

Come è noto una superficie si dice *normale* in un S_n a cui appartiene, quando essa non può ritenersi come proiezione di una superficie dello stesso ordine (ossia da un punto esterno) di S_{n+1}; traducendo questa definizione in linguaggio invariantivo diremo *normale un sistema lineare (avente un grado) che non può esser contenuto in un altro dello stesso grado.*

([30]) Cfr. pei sistemi piani: BERTINI (l. c.).

È chiaro, appunto per la considerazione proiettiva da cui siamo partiti, che se un sistema semplice è contenuto in un altro dello stesso grado, anche i generi dei due sistemi debbono essere uguali. Non sussiste però la proprietà inversa, giacchè proiettando una superficie normale da un suo punto semplice (da S_n in S_{n-1}) si ottiene una nuova superficie normale le cui sezioni sono curve dello stesso genere, ma di cui l'ordine è diminuito di una unità. Questa osservazione fa nascere l'idea di considerare accanto ai sistemi normali quei sistemi (che diremo *completi*) *i quali non possono esser contenuti in altri di ugual genere*; il concetto di sistema completo è dunque più largo di quello di sistema normale, poichè, per quanto abbiamo osservato, *un sistema completo è sempre un sistema normale* (anche se non è semplice come risulta da un successivo teorema), *ma non viceversa*. È anche opportuno rilevare con esattezza ciò che può intendersi dicendo che un sistema *è contenuto* in un altro. Dato un sistema (K) di curve K, un sistema (C) di curve C è contenuto in (K) in modo *totale* se ogni curva C è da sola una K; ma può anche darsi che invece ogni curva C non costituisca da sola una K, mentre una curva composta di una C e di un'altra C' sia una K; si dirà allora che il sistema (C) è contenuto in (K) in modo *parziale* (ossia che le C sono curve parziali di (K)). Ora io dico che *un sistema non può essere contenuto parzialmente in un altro di ugual grado.*

Infatti se un sistema ∞^h (K) ne contiene uno ∞^r (C), facendo segare le curve K di (K) dagli iperpiani di S_{h+1} per un punto O, sulla superficie F, le curve C di (C) risulteranno segate dagli iperpiani per un S_{h-r} contenente O: se ora le C sono contenute in (K) in modo parziale il detto S_{h-r} sega F secondo una curva C' (o in un gruppo di punti) che insieme a ciascuna C dà una K ed allora si può considerare un sistema ∞^{r+1} immerso in (K) contenente parzialmente (C). Si facciano segare le curve del nuovo sistema dagli iperpiani di S_{r+1} sulla superficie F' (la quale potrebbe essere anche in corrispondenza [1. m] colla F); alla curva C' corrisponde su F' un punto, in generale multiplo, e proiettando la F' da questo punto si ottiene certo una superficie d'ordine minore; dunque il sistema (K) ha il grado maggiore di (C). Dalle considerazioni occorse risulta pure che, ove si voglia attribuire un senso invariantivo al fatto che un sistema sia contenuto parzialmente o totalmente in un altro, bisogna intendere che una curva C' la quale insieme ad una C costituisce una curva K di (K), possa anche esser rappresentata da un punto; così se in un sistema lineare se ne considera un altro contenuto con qualche punto base di più (in modo che il grado diminuisce), il secondo sistema è contenuto parzialmente nel primo.

Per il resultato precedente si vede che la definizione di sistema normale come di sistema non contenuto in altro di ugual grado è indipendente dalla larghezza di significato che voglia attribuirsi alla parola *contenere,* dicendo contenuto in un altro anche un sistema che vi è contenuto parzialmente, giacchè è inutile cercare un sistema di ugual grado che ne contenga un altro parzialmente. Invece non accade lo stesso per rispetto alla definizione di sistema completo, ed un esempio varrà ad illuminare meglio la cosa. Si abbia sopra una superficie F un sistema (C) del genere π; le curve C per un punto semplice O costituiscono un sistema contenuto in esso dello stesso genere; ora si trasformi la superficie in modo che al punto O corrisponda una curva semplice K della superficie trasformata F'; alle curve C corrispondono sulla F' le curve C' d'un sistema (C'), ed alle curve C per O curve C' spezzate nella K ed in altre curve d'un sistema lineare (C''); *il sistema* (C'') *è contenuto parzialmente in quello* (C') *dello stesso genere.* Da questa osservazione scaturisce la necessità di fissare bene il senso della parola *contenere* nella definizione di sistema completo, e noi fissiamo di chiamare *completo un sistema che non può essere contenuto in altro di ugual genere nemmeno parzialmente*; questa definizione più larga è assolutamente necessaria (come appare dal prec. esempio) ove si voglia che il carattere d'un sistema di essere completo (invariantivo per trasformazioni birazionali della superficie) esprima qualcosa di differente da quello di esser normale.

Si considerino ora due fasci di curve irreduttibili di ugual genere aventi comune una curva totale dello stesso genere e sulla superficie F si facciano segare le curve di essi risp. dai piani per le rette r, r' che s'incontrano nel punto O; se la trasformazione è fatta nel modo generale indicato, alla curva comune dei due fasci, secondochè si considera appartenente all'uno o all'altro fascio, corrisponde la retta multipla r o la r' sulla F; abbiamo già notato però che se si fa corrispondere, nella proiettività posta tra ciascuno dei due fasci ed il fascio di piani omologo, la curva comune al piano rr', questo si stacca (un certo numero di volte) dalla superficie F; dico che alla rimanente F non appartengono le rette r, r'. Un punto infinitamente vicino alla curva comune C dei due fasci individua in generale una curva in ciascun fascio, e quindi alla curva comune dei due fasci corrisponde punto per punto la sezione della F col piano rr' fuori di r ed r'; se la retta r appartiene (come semplice o multipla) alla F, le corrisponde una curva che insieme alla C compone una curva del fascio segato sulla F dai piani per r'; quindi nell'ipotesi fatta che la C sia una curva totale per i due fasci, le rette r, r' non appartengono alla F, e su questa i piani per O segano una rete di curve dello stesso genere dei due fasci, in cui questi sono contenuti totalmente.

Supponiamo ora che la curva C comune ai due fasci sia contenuta parzialmente in uno di essi o in ambedue, ma abbia però il genere comune dei due fasci. Compiendo la trasformazione eseguita prima, sulla F (da cui è staccato quante volte occorre il piano rr') alla C corrisponde la sezione del piano rr' fuori di r ed r'.

Le rette r, r' (ambedue o una sola di esse) apparterranno ora alla F con molteplicità i, i' risp.. Sia n l'ordine della F, m la molteplicità del punto O, δ il numero dei punti doppi a cui equivalgono (rispetto alle formule pluecheriane) i punti multipli di una sezione generica per O fuori di O, π il genere di tale sezione; si avrà:

$$\pi = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} - \delta .$$

La r potrà incontrare la curva multipla di F in qualche punto, in modo che una sezione piana per r da cui sia tolta la r avrà $\delta - \delta_1$ punti doppi fuori di O (o molteplicità equivalenti) essendo $\delta \geqslant \delta_1$; indicando con π_1 il genere di una tale curva si avrà dunque

$$\pi_1 = \frac{(n-i-1)(n-i-2)}{2} - \frac{(m-i)(m-i-1)}{2} - \delta + \delta_1 :$$

dando a π_1', δ_1' gli analoghi significati di π_1, δ_1, rispetto alle sezioni piane della F per r' da cui è tolta la r', si ha pure

$$\pi_1' = \frac{(n-i'-1)(n-i'-2)}{2} - \frac{(m-i')(m-i'-1)}{2} - \delta + \delta_1' .$$

La curva C di genere π_2 sezione della F col piano rr' da cui sieno tolte le r, r', è d'ordine $n-i-i'$, ed ha $\delta - \delta_1 - \delta_1'$ punti doppi (almeno) fuori di O (o molteplicità equivalenti), poichè la curva composta $C+r+r'$ ha δ punti doppi (o molteplicità equivalenti) sulla curva doppia (o multipla) della F fuori di O, di cui δ_1 dipendono dal fatto che il piano della C passa per la retta multipla r, δ_1' dal fatto che passa per r_1'. Il genere della C vale dunque

$$\pi_2 \leqslant \frac{(n-i-i'-1)(n-i-i'-2)}{2} - \frac{(m-i-i')(m-i-i'-1)}{2} - \delta + \delta_1 + \delta_1' ,$$

dove il segno $<$ dovrebbe prendersi se la C avesse ulteriori punti multipli accidentali (di cui potrebbe escludersi l'esistenza).

Ora dalle uguaglianze scritte segue:

$$\pi - \pi_1 = i\,(n - m - 1) - \delta_1$$
$$\pi - \pi_1' = i'(n - m - 1) - \delta_1'$$
$$\pi - \pi_2 \geqslant (i + i')(n - m - 1) - \delta_1 - \delta_1',$$

ossia

$$\pi - \pi_2 \geqslant 2\pi - \pi_1 - \pi_1' .$$

Ma secondo le nostre ipotesi

$$\pi_2 = \pi_1 = \pi_1' ,$$

quindi

$$\pi - \pi_2 \geqslant 2(\pi - \pi_2)$$
$$\pi \leqslant \pi_2 .$$

Dico che ne segue

$$\pi = \pi_2 \quad \text{e perciò} \quad \pi = \pi_1 = \pi_1' .$$

Infatti π è il genere d'una sezione piana generica della stella di centro O su F, se questa sezione si particolarizza comunque spezzandosi in s parti di genere $k_1, k_2, \ldots, k_s$ di cui due parti di genere k_r, k_ϱ si segano in $i_{r\varrho}$ punti, si ha, secondo una formula di NOETHER ([31]),

$$\pi \geqslant k_1 + \ldots + k_s + \sum i_{r\varrho} - 1$$

dove la somma è estesa a tutte le combinazioni di r, ϱ; siccome la curva composta spezzata è connessa perchè limite di una curva irreduttibile connessa, almeno s—1 fra le $i_{r\varrho}$ non possono essere 0, quindi

$$\pi \geqslant k_1 + k_2 + \ldots + k_s ;$$

perciò nel nostro caso:

$$\pi \geqslant \pi_2 , \qquad \pi = \pi_2 = \pi_1 = \pi_1' .$$

Si deduce che i piani per O segano ancora sulla F una rete di curve dello stesso genere dei due fasci e della loro curva comune parziale, nella

([31]) « Acta Mathematica », 1886. È da prendersi il segno = quando nessuna delle componenti della curva spezzata acquista punti multipli accidentali.

quale i due fasci sono contenuti (tutti e due parzialmente o uno parzialmente e uno totalmente). Si conclude:

Due fasci di curve dello stesso genere aventi comune una curva di ugual genere, sono contenuti in una rete dello stesso genere, e sono contenuti totalmente in una tal rete se la loro curva comune è totale.

Questo teorema è suscettibile di una immediata generalizzazione. Infatti, sia estendendo il metodo qui seguìto, sia mediante le più elementari proprietà dei sistemi lineari di enti si deduce che:

Se due sistemi lineari ∞^r, ∞^s di curve sopra una superficie hanno comune un sistema ∞^σ di curve dello stesso genere comune ai due sistemi (per $\sigma = 0$ s'intende una curva), vi è un sistema lineare $\infty^{r+s-\sigma}$ che ha pure il detto genere in cui i due sistemi sono contenuti.

Il sistema $\infty^{r+s-\sigma}$ si costruisce prendendo risp. nei due sistemi ∞^r, ∞^s due fasci che abbiano comune una curva del sistema ∞^σ e costruendo la rete che contiene i due fasci come prima abbiam visto.

Supponiamo che i sistemi ∞^r, ∞^s e quello comune ∞^σ abbiano il grado D ($\sigma \geqslant 2$); ossia che il sistema ∞^σ sia contenuto totalmente nei due. Facendo segare le curve del sistema $\infty^{r+s-\sigma}$ dagli iperpiani per un punto O in $S_{r+s-\sigma+1}$, si vede che questo sistema ha pure il grado D, giacchè altrimenti gli $S_{s-\sigma}$, $S_{r-\sigma}$ base dei sistemi d'iperpiani seganti i due sistemi ∞^r, ∞^s conterrebbero qualche curva o punto della superficie F ed il sistema ∞^σ segato dagli iperpiani per lo $S_{r+s-2\sigma}$ a cui $S_{r-\sigma}$, $S_{s-\sigma}$ appartengono, avrebbe un grado minore di quello dei due sistemi ∞^r, ∞^s. Tanto basta per concludere che un sistema di dato grado non può appartenere a due diversi sistemi normali (s'intende dello stesso grado), giacchè questi sarebbero contenuti in un altro di ugual grado. Ora poichè la dimensione d'un sistema lineare non può superare il grado aumentato di una unità, concludiamo:

Un sistema lineare di dato grado appartiene ad un determinato sistema normale dello stesso grado.

Quando si ha una sola curva (od un fascio) non si può parlare di sistema normale individuato da essa, mancando per essa la nozione di grado: bisogna quindi ricorrere al concetto di sistema completo.

Noi possiamo per ora asserire (in modo analogo al prec. teor.) che:

Una curva non può appartenere a due diversi sistemi completi dello stesso suo genere.

Non possiamo però trarne la conclusione generale che esista un sistema completo (con un numero finito di dimensioni) individuato da una data curva: occorre perciò fissare un massimo della dimensione d'un sistema di dato genere, e questo massimo manca ad es. pei sistemi di curve razionali nel piano e di curve di genere più alto sulle rigate di genere > 0: queste classi di superficie verranno escluse nei cap. che seguiranno, e dopo aver parlato del genere p delle superficie vedremo come per $p > 0$ il teorema accennato sussista senza eccezione (cap. II). *Intanto una curva appartiene ad un determinato sistema completo se si sa che essa è contenuta (anche parzialmente) in un sistema completo.*

Tutte le curve C' d'un sistema lineare (K) che insieme ad una stessa C formano una curva totale $C+C'$ di (K) costituiscono *il sistema residuo della curva C rispetto al sistema* (K): è da avvertire che la C potrà essere una curva composta e tra le sue componenti potranno esservi dei punti base per (C').

3. - Sistemi residui. - Teorema del resto.

Tutte le curve C' d'un sistema lineare (K) che insieme ad una stessa C formano una curva totale $C + C'$ di (K) costituiscono *il sistema residuo della curva C rispetto al sistema* (K): è da avvertire che la C potrà essere una curva composta e tra le sue componenti potranno esservi dei punti base per (C').

Sia (K) un sistema completo e (C') il residuo della curva C rispetto ad esso. Si consideri (se vi è) un sistema contenente (C') e dello stesso genere di esso, ed in quel sistema un fascio contenente una curva generica C' di (C'); il detto fascio venga fatto segare sulla superficie F dai piani per una retta r', mentre un fascio di curve K di (K) contenente la $C+C'$ venga segato dai piani per una retta r intersecante la r' in un punto O: inoltre il piano rr' considerato come appartenente ai due fasci corrisponda risp. alle curve C' e $C+C'$, di guisa che esso si stacchi (un certo numero di volte) dalla superficie F. Staccato il detto piano la curva C' vien rappresentata dalla sezione di esso sulla F fuori di rr'.

Sia π il genere d'una sezione piana generica della F per O, π_1 il genere d'una sezione per r, π_1' quello d'una sezione per r', π_2 il genere della C'; si ha per ipotesi $\pi_2 = \pi_1'$: come abbiam visto nel precedente §, sussiste la relazione

$$\pi - \pi_2 \geqslant 2\pi - \pi_1 - \pi_1'$$

e quindi, posto in esso $\pi_1' = \pi_2$, segue $\pi \leqslant \pi_1$ e però $\pi = \pi_1$.

Si deduce che le sezioni per O della F sono curve del sistema completo (K) di genere π, e poichè la $C+C'$ è una curva totale di questo sistema la r non appartiene ad F.

Il fascio delle sezioni piane per r' (contenente C') appartiene dunque parimente a (K) ed esso è il residuo della componente della C rappresentata dalla r'; le altre componenti debbono necessariamente essere curve razionali giacchè se il genere di una curva spezzata (connessa) è uguale al genere di una componente, le altre componenti sono di genere 0 (avendosi il genere della curva composta maggiore od uguale della somma dei generi delle sue parti): si vede così che nel caso più generale possibile la C si spezza in due parti C_1, C_2 (la 2^a delle quali composta di parti razionali) in modo che il sistema residuo di C_1 rispetto a (K) è il sistema completo a cui appartiene il residuo (C') della C $(= C_1 + C_2)$.

Così si ha intanto:

Il sistema residuo d'una curva C, senza componenti razionali (*o punti*), *rispetto ad un sistema completo* (K) *è completo.*

Supponiamo che (C') abbia un grado e consideriamo il sistema normale di ugual grado ∞^s a cui appartiene: questo è contenuto nel sistema completo residuo di C_1 rispetto a (K).

Si consideri (se esso non è completo) un sistema ∞^{s+1} di curve generiche del sistema completo residuo di C_1 che contenga in sè il sistema normale ∞^s e si facciano segare queste curve dagli iperpiani di S_{s+1} sulla superficie (semplice o multipla) F'. Il sistema ∞^s vien segato dagli iperpiani per un punto O in generale multiplo per F', ed al punto O corrisponde sulla data superficie una curva C_3 (composta forse anche di punti) tale che il residuo della C_1+C_3 rispetto a (K) è il sistema normale a cui appartiene (C'). Perciò la C_3 fa parte della C_2 (la quale insieme con C_1 costituisce la C che ha per residuo (C')), e siccome il sistema (C') deve esser contenuto totalmente nel sistema normale di ugual grado che esso determina, si deduce che C_3 coincide con C_2, e però (C') col sistema normale residuo di $C_1 + C_3 = C_1 + C_2 = C$.

La deduzione sussiste ancora se il sistema (K) non è completo ma soltanto normale purchè appartenente ad un sistema completo. Infatti in tal caso se la dimensione di (K) è r, possiamo considerare un sistema ∞^{r+1} che lo contenga appartenente al sistema completo (U) che (K) determina; le ∞^{r+1} curve posson farsi segare dagli iperpiani di S_{r+1} sulla superficie (semplice o multipla) F'; su di essa si ha allora un punto (in generale multiplo) O rappresentante una curva L il cui residuo rispetto al sistema completo (U) è il sistema normale (K); basta aggiungere alla C la L e considerare il residuo di $L+C$ rispetto al sistema completo (U) per trarne la conclusione che il sistema residuo (C') è normale. Dunque:

Il residuo d'una curva rispetto ad un sistema normale (*appartenente ad un sistema completo*) *è un sistema normale* (se ha un grado).

Nel sistema completo (K) sieno contenuti parzialmente i due sistemi irreduttibili (C) e (C') tali che (C') sia il residuo di una curva generica C rispetto a K, e (C) il residuo di una generica C'. Supposto (per brevità) che la superficie non sia razionale, le C, C' generiche non sono razionali, quindi (C') e (C) (residui di esse rispetto al sistema completo (K)) sono completi (la deduzione sussiste anche per le superficie razionali). Poichè una curva generica di un sistema completo lo determina in modo unico, si trae la conclusione che (C') è il residuo d'ogni altra curva C di (C), e (C) è il residuo di ogni altra curva C' di (C'). Dunque:

Se in un sistema completo (K) sono contenuti parzialmente due sistemi irreduttibili (C), (C'), tali che ciascuno di essi sia il residuo rispetto a (K) di una curva generica dell'altro, ciascuno dei due sistemi è il residuo rispetto a (K) di ogni curva dell'altro; così tra i sistemi (C), (C') è stabilito un tal legame reciproco che ogni curva dell'uno insieme ad una curva dell'altro costituisce una curva totale di (K).

Questo teorema è noto sotto il nome di teorema del resto (*Restsatz* [32]), i due sistemi (C), (C') diconsi residui uno dell'altro.

4. - Sistema somma di due sistemi.

Sieno dati due sistemi ∞^r, ∞^s e si facciano segare le curve di essi sulla superficie F in S_{r+s} risp. dagli iperpiani per un S_{r-1} e per un S_{s-1} riferendo le dette curve proiettivamente ai nominati iperpiani; le quadriche di S_{r+s} per S_{r-1}, S_{s-1} segano sulla F un sistema contenente tutte le coppie di curve composte con una curva d'un sistema e una dell'altro, e contenente totalmente le dette coppie: così accade che se n, n', sono i gradi dei due sistemi e la curva generica dell'uno incontra in D punti quella dell'altro, il sistema segato su F dalle quadriche per S_{r-1} S_{s-1} è di grado $n+n'+2D$. Il detto sistema appartiene ad un determinato sistema normale; non possono esistere due sistemi normali diversi contenenti tutte le coppie di curve dei due dati sistemi poichè essi avrebbero comune un sistema dello stesso grado. Dunque:

Esiste un determinato sistema normale irreduttibile contenente totalmente tutte le coppie di curve composte con una curva d'un sistema normale e una d'un altro (irreduttibili): esso si dirà il sistema somma dei due nominati.

Il sistema somma d'un sistema (C) con se stesso si dirà il suo *doppio*; il sistema r-plo di (C) risulta definito come somma di (C) col sistema $(r-1)$-plo di (C) ed *è un determinato sistema normale contenente totalmente tutti i gruppi di r curve di (C).*

Si può considerare il sistema somma di (C) con una curva (che in una trasformazione può essere sostituita da un punto), ma le curve di questo possono anche esser spezzate in quelle di (C) e nella curva nominata.

---

(32) NOETHER, « Mat. Ann. », 8.

II.

IL SISTEMA CANONICO

1. - Superficie aggiunte.

Una superficie F di S_3 ha in generale una o più curve multiple e dei punti multipli particolari che diremo *isolati* appartenenti in vario modo alle curve multiple. Se si considera una retta r non appartenente alla F che passi per un suo punto multiplo O, può darsi che la sezione piana generica della F per r abbia in O una singolarità superiore di quella competente alla sezione generica della stella di centro O; si dirà in tal caso che sulla retta r vi è un punto multiplo infinitamente vicino ad O; se la r è tangente ad una curva i-pla per O, vi è certo su di essa un punto i-plo infinitamente vicino ad O, ma questo non è un punto i-plo isolato. Se non vi sono punti multipli isolati infinitamente vicini a qualche punto multiplo (isolato) della F si dirà che *la F ha punti multipli isolati distinti*: introduciamo per ora tale restrizione. Diremo *superficie aggiunta* alla F ([33]) ogni superficie che gode delle due proprietà caratteristiche seguenti:

a) sega un piano generico secondo una curva aggiunta alla sezione piana della F;

b) sega un piano passante per un punto multiplo isolato secondo una curva che insieme ad una retta arbitraria per il punto costituisce una linea aggiunta alla detta sezione piana.

Segue che se la F è dotata solo di singolarità ordinarie una sua superficie aggiunta è sottoposta alla condizione di avere come $(i-1)$-pla ogni curva i-pla della F e come $(n-2)$-plo ogni punto n-plo di essa: ma non possiamo escludere che per effetto delle condizioni imposte ogni superficie di un dato ordine aggiunta alla F possa avere nei punti singolari della F molteplicità superiori di quelle assegnate, o (come diremo più brevemente) della *ipermolteplicità*.

Quando poi si tratta di singolarità straordinarie, per questo solo fatto può avvenire che le aggiunte debbano avere nei punti (o curve) multipli molteplicità superiori di quelle indicate: così p. e. un punto doppio isolato ordinario non appartiene in generale alle aggiunte della superficie F, ma se il punto è un *contatto della superficie con sè stessa* (tacnodo) ([34]), in guisa che in ogni piano per esso la sezione ha ivi un

([33]) Cfr. Noether (« Math. Ann. », 2, 8).

([34]) Cfr. ad es. la superficie del 4° ordine con tacnodo di Cremona (« Collectanea mathematica ») e Noether (« Göttinger Nachrichten », 1871 e « Math. Ann. », 33).

tacnodo, segue dalla definizione che le superficie aggiunte alla F debbono passare (semplicemente) per quel punto.

Se n è l'ordine della superficie F, una sua aggiunta ψ_{n-4} d'ordine $n-4$ (se esiste) sega un piano qualunque secondo una curva C_{n-4} aggiunta alla sezione C_n della F, (la quale insieme ad una retta dà una C_{n-3} aggiunta alla C_n) e quindi se la ψ_{n-4} non ha ipermolteplicità nella linea singolare della F, la sua curva sezione colla F (fuori della linea multipla) sega una C_n sezione piana generica in un gruppo residuo ([35]) di quelli segati dalle rette del piano: per togliere ogni caso d'eccezione noi possiamo osservare che, allorquando la ψ_{n-4} e quindi la C_{n-4} ha delle ipermolteplicità nei punti singolari della C_n, si debbono riguardare come cadute in quei punti alcune delle intersezioni della ψ_{n-4} colla C_n, giacchè in una trasformazione della C_n a quei punti in quanto sono ipermultipli corrispondono punti della curva trasformata che completano su di essa il gruppo residuo di quello corrispondente all'intersezione di una retta colla C_n. Un riguardo analogo deve aversi per le sezioni piane passanti per un punto multiplo della F.

Così si abbia una superficie F d'ordine n dotata di un punto i-plo O (ordinario) e si supponga che O abbia una molteplicità $> i-2$ (per precisare $i-1$) per le superficie ψ_{n-4} d'ordine $n-4$ aggiunte alla F: allora ciascuna di esse sega sopra una sezione piana per O *fuori dei punti multipli* un gruppo residuo di quello segato da una retta generica del piano, e *contenuto* nel residuo di quello segato da una retta per O; secondo le nostre convenzioni riguardo alle ipermolteplicità dobbiamo però considerare il gruppo segato da una ψ_{n-4} sulla sezione piana di F per O *fuori dei punti multipli come la somma del gruppo considerato e di quello degli* i *punti infinitamente vicini ad* O: trasformando la superficie si ha come corrispondente alla sezione della ψ_{n-4} in F la curva che corrisponde alla sezione propria della ψ_{n-4} e quella luogo dei punti corrispondenti ai punti infinitamente vicini ad O, ed allora questa curva composta delle due nominate sega proprio un gruppo residuo della serie caratteristica sopra una curva generica della rete trasformata di quella delle sezioni piane per O della F.

Per chiarire riferiamoci ad un esempio. Si consideri un sistema lineare ∞^r $(r > 2)$ ed in esso le curve d'una rete che hanno $r-2$ punti fissi: si può costruire (fissando una curva del sistema fuori della rete) un sistema ∞^3 che contenga la rete, e supporremo che esso sia semplice: facendo segare le sue curve dai piani sulla superficie F d'ordine n

---

([35]) Nel senso dei signori BRILL e NOETHER (« Math. Ann. », 7), cioè rispetto alla serie speciale g_{2p-2}^{p-1} della curva che (seguendo una denominazione del sig. SEGRE) si dirà serie *canonica* della curva.

le superficie ψ_{n-4} d'ordine $n-4$ aggiunte alla F segano sulla F una curva C la quale determina un gruppo residuo della serie segata dai piani sopra una sezione piana generica, per modo che la linea corrispondente C' sulla prima superficie sega un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica del sistema ∞^3; supponiamo inoltre che la F abbia solo una curva doppia e non di molteplicità superiore, cioè non esistano infinite terne di punti presentanti una sola condizione alle curve del sistema ∞^3. Al gruppo base di $r-2$ punti per la rete contenuta nel sistema ∞^3 che stiamo considerando, corrisponde sulla F un punto O $(r-2)$-plo che è $((r-2)(r-3)/2)$-plo per la curva doppia: si vede quindi che il punto O è $(r-3)$-plo per le ψ_{n-4} aggiunte alla F (anzichè $(r-4)$-plo); questo fatto porta che la C' sega sulla curva generica della rete un gruppo residuo della serie caratteristica aumentata del gruppo base (di $r-2$ punti) della rete, ciò che è d'altra parte una conseguenza del modo con cui la C' è stata costruita: la C' aumentata degli $(r-2)$ punti base della rete sega quindi un gruppo residuo della serie caratteristica sopra la curva generica della rete; essa gode dell'analoga proprietà anche rispetto al sistema ∞^3 contenente la rete, poichè i punti base della rete sono curve senza intersezioni colle linee del sistema che non passano per essi.

Ciò posto possiamo dire che:

Una superficie ψ_{n-4} d'ordine $n-4$ aggiunta ad una F d'ordine n sega sopra una sezione piana generica (fuori dei punti multipli) un gruppo residuo di quello segato da tutte le rette del piano, e sopra una qualunque sezione piana per un punto multiplo isolato un gruppo residuo di quello segato dalle rette per il punto. Così pure *sega un gruppo speciale, contenuto nel residuo del gruppo dei punti base semplici, sopra la sezione piana generica di un fascio il cui asse contenga quanti si vogliano punti multipli o sia una retta multipla.*

Infatti una retta i-pla della F è $(i-1)$-pla per una ψ_{n-4} aggiunta e quindi la sezione della ψ_{n-4} con un piano generico passante per la retta si compone di una curva C_{n-i-3} e della retta r contata $(i-1)$ volte; la C_{n-i-3} ha come punto $(\varrho-1)$-plo un punto ϱ-plo della sezione C_{n-i} della F fuori di r, e così pure come punto $(\varrho-1)$-plo un punto $(\varrho+i)$-plo della C_{n-i} sulla r, giacchè questo punto $(\varrho+i)$-plo per la sezione totale di F, è $(\varrho+i-2)$-plo per la curva composta di C_{n-i-3} e di r contata $i-1$ volte.

Se invece la r non appartiene alla F, essa, insieme alla sezione C_{n-4} della ψ_{n-4} con un piano per essa, dà una curva C_{n-3} aggiunta alla sezione piana della F.

Le proprietà che secondo il teorema precedente competono ad una curva sezione della ψ_{n-4} sulla F (tolta la curva multipla) sono caratteristiche per questa curva, anzi due sole di esse bastano a definirla, dico cioè (per limitarmi a ciò che qui occorre) che:

Se si ha una superficie F (non rigata) e si considera una stella di sezioni piane di essa tale che pel suo centro non passino rette multiple infinitamente vicine, e si ha una curva C la quale seghi un gruppo residuo di quello segato dai piani della stella sulla sezione generica di essa e seghi un gruppo speciale contenuto nel residuo del gruppo dei punti base semplici sulla curva sezione generica d'un fascio contenuto nella stella, la C è sezione della superficie F (d'ordine n) con una determinata superficie aggiunta d'ordine $n-4$ (ψ_{n-4}).

Sia O il centro della stella ed r una qualunque retta per esso, la quale supporremo non incontri la curva in questione C: un piano per r sega la F secondo una curva K, su cui la C sega un gruppo che insieme al gruppo segato da una retta per O dà un gruppo canonico, cioè un gruppo sezione di una determinata curva d'ordine $n-3$ aggiunta alla K: questa aggiunta d'ordine $n-3$ si spezza per altro necessariamente (anche se O è multiplo) nella retta per O ed in una curva χ d'ordine $n-4$ aggiunta alla K tranne tutt'al più nel punto O che risulta $(i-2)$-plo almeno per essa se è i-plo per la F $(i > 2)$: ora il luogo della curva χ variando il piano scelto per r è una superficie (contenente la data curva C) che si comporta nel punto O e rispetto alla curva multipla della F (tranne eventualmente rispetto a rette multiple per O) come una superficie aggiunta: se questa superficie contenesse r essa dovrebbe segare F in qualche curva passante per le intersezioni di r con F, ma poichè (la r essendo una retta arbitraria per O) per queste non passa C nè la curva multipla, e la ulteriore curva intersezione non ha con un piano per r altri punti comuni fuori di C e dei punti multipli, la detta ulteriore intersezione dovrebbe comporsi di rette incontranti la retta arbitraria r fuori di O, mentre la F non è rigata. Dunque la superficie luogo della curva χ è una ψ_{n-4} di ordine $n-4$ come la χ. Resta a vedersi che questa superficie ψ_{n-4} si comporta come una aggiunta anche rispetto alle rette multiple (eventuali) per O ed ai punti multipli isolati fuori di O e che essa è determinata in modo unico dalla C, ossia è indipendente dalla r.

Sia a una retta h-pla della F per O $(h > 0)$: se la ψ_{n-4} contiene la a con una molteplicità $< h-1$ (o non la contiene), essa sega un piano per a secondo una curva d'ordine $> n-h-3$ (oltre la a) la quale è aggiunta della sezione piana della F (fuori di a) tranne forse rispetto a punti su a; per conseguenza in tale ipotesi la ψ_{n-4} segherebbe sopra la sezione piana del fascio di asse a un gruppo non speciale, mentre il gruppo sezione appartenendo alla C è per ipotesi un gruppo speciale: così risulta che la ψ_{n-4} ha come $(h-1)$-pla (almeno) la retta h-pla a della F.

Si consideri ora un punto multiplo isolato O' della F, ϱ-plo per essa: la retta $a \equiv OO'$, sarà in generale h-pla per F con $h \geqslant 0$. Suppongasi dapprima $h = 0$: la ψ_{n-4} sega (come la C) un gruppo speciale sopra una sezione piana generica della F per a, contenuto nel residuo del gruppo sezione di a (fuori dei punti multipli), quindi la curva d'ordine $n-4$ sezione della ψ_{n-4} con un tal piano dà insieme alla a una curva d'ordine $n-3$ segante la sezione piana di F in un gruppo speciale, la quale si comporta come un'aggiunta rispetto ai punti multipli della detta sezione fuori di a, dunque essa ha la molteplicità $\varrho - 1$ (almeno) nel punto ϱ-plo O' della F e perciò questo è $(\varrho - 2)$-plo (almeno) per la ψ_{n-4}: la conclusione permane se vi sono più punti multipli isolati sulla a, giacchè le ipermolteplicità che la ψ_{n-4} potrebbe avere in qualcuno di essi rappresenterebbero soltanto dei punti del gruppo segato da C caduti nell'intorno di un punto multiplo. Suppongasi invece $h > 0$: allora la a è $(h-1)$-pla per la ψ_{n-4} e la ψ_{n-4} sega sopra un piano per a una curva d'ordine $n - h - 3$ la quale si comporta come un'aggiunta rispetto alla curva d'ordine $n - h$ sezione della F col piano (fuori di a) nei punti multipli della curva multipla; poichè essa sega sulla detta curva un gruppo speciale si vede (analogamente al caso precedente) che ogni punto O' ϱ-plo su a deve essere $(\varrho - 1)$-plo (almeno) per essa, ossia la ψ_{n-4} ha come $(\varrho - 1)$-plo (almeno) ogni punto ϱ-plo sulla retta h-pla a.

Finalmente la superficie ψ_{n-4} (che si è dimostrato essere aggiunta alla F) è unicamente determinata dalla condizione di contenere la curva C. Infatti l'intersezione della ψ_{n-4} colla F si compone della curva multipla, della C ed eventualmente di rette per O; queste rette per O non possono variare al variare della retta r che ha servito per la costruzione della ψ_{n-4} giacchè altrimenti la F sarebbe un cono, quindi l'intersezione della ψ_{n-4} colla F è fissa al variare della r: tanto basta per affermare che la ψ_{n-4} stessa è indipendente dal variare della r, giacchè altrimenti si avrebbe un fascio di superficie ψ_{n-4} aventi fissa l'intersezione colla superficie F d'ordine n $(> n-4)$, ciò che è assurdo.

Così rimane stabilito il teorema enunciato in principio.

Escluderemo nel seguito le superficie F rigate e le loro trasformate per le quali d'altra parte si può stabilire che non esistono superficie aggiunte ψ_{n-4}.

Se è data una superficie F d'ordine n in S_3 e si considera la stella delle sezioni piane per un punto fuori di essa si deduce:

Se una curva C sega un gruppo residuo di quello segato da una retta arbitraria sopra una sezione piana generica della F, ed un gruppo contenuto nel residuo di quello segato da una retta pel punto multiplo sopra una sezione piana generica per un punto multiplo isolato, la detta curva C è la sezione colla F di una determinata superficie ψ_{n-4} d'ordine $n-4$ aggiunta alla F.

2. - Il sistema canonico.

I teoremi del precedente § sono suscettibili d'una più vasta estensione conducendo ad un resultato generale che possiamo enunciare sotto forma invariantiva.

A tal fine diremo *curva fondamentale* per un sistema lineare ogni curva parziale del sistema (cap. I), la quale presenti una sola condizione ad una curva del sistema che debba contenerla; se la curva è irreduttibile basta assegnare la condizione che la curva fondamentale non abbia intersezioni variabili colle curve del sistema, non così se è composta: intendiamo per altro di includere sempre in una curva fondamentale composta tutte le linee parziali (o punti) che si staccano da una linea del sistema in conseguenza dello staccarsi di una parte di essa.

Allora una linea fondamentale d'una rete di curve, quando questa venga segata dai piani d'una stella, è rappresentata o da una retta (multipla) pel centro della stella, o da uno o più punti multipli isolati sopra una retta pel detto centro ed eventualmente anche dalla retta stessa; nel 1° caso la curva non è fondamentale per il sistema ∞^3 segato dai piani, nel 2° sì se si tratta d'un solo punto multiplo isolato.

Una linea fondamentale d'un sistema semplice viene sempre rappresentata da un punto multiplo sopra la superficie F trasformata facendo segare dagli iperpiani (o piani) le curve del sistema: diremo che il sistema *ha curve fondamentali distinte* se la superficie F ha punti multipli isolati distinti (cfr. § prec.). Fisseremo l'analoga definizione per una rete dicendo che essa *ha curve fondamentali distinte quando è impossibile fare segare le curve di essa sopra la superficie dai piani per un punto* (*in* S_3) *per cui passano due rette multiple infinitamente vicine*: è facile vedere che una rete generica immersa in un sistema semplice ∞^3 con curve fondamentali distinte ha curve fondamentali distinte, poichè non contiene due fasci infinitamente vicini residui di curve fondamentali.

Ciò posto noi stabiliamo ancora di definire come *serie caratteristica* di un sistema lineare la serie g_D^{r-1} che le curve del sistema (di dimensione r e grado D) segano sopra una curva generica del sistema stesso ([36]): i piani d'una stella (ossia le rette pel centro) segano sopra una sezione piana la serie caratteristica della rete delle sezioni piane della stella stessa, ecc.

Si abbia sopra una superficie una rete con curve fondamentali distinte e si consideri un arbitrario sistema lineare ∞^k ($k \geqslant 1$) ed in esso un fascio generico avente m punti base semplici: facciamo segare sulla super-

([36]) Cfr. pei sistemi di curve piane, CASTELNUOVO (« Accad. di Scienze Torino, Memorie », 1891).

ficie F (d'ordine n) le curve della rete dai piani per un punto O, e le curve del fascio dai piani per una retta r non passante per O; ai punti base semplici del fascio corrispondono rette per O semplici per F (curve fondamentali della rete aventi una intersezione con ciascuna curva del fascio).

Sia C una curva la quale seghi un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica della rete, ed un gruppo speciale contenuto nel residuo del gruppo dei punti base semplici sulla curva d'un fascio contenuto nella rete; come nel prec. § si prova che la C è sezione della superficie F d'ordine n con una superficie ψ_{n-4} d'ordine $n-4$ la quale si comporta come un'aggiunta rispetto alle linee multiple della F (quantunque forse la F possa non avere punti multipli isolati distinti): dico inoltre che la ψ_{n-4} contiene le rette semplici per O corrispondenti ai punti base del fascio fatto segare dai piani per r. Infatti un piano per una tal retta a sega la F secondo una curva K_{n-1} d'ordine $n-1$ (fuori di r) e la C sega la K_{n-1} secondo un gruppo che insieme ad una retta per O, p. es. insieme alla r, costituisce un gruppo canonico, sicchè la curva sezione della ψ_{n-4} fuori di r è una curva d'ordine $n-5$ che insieme alla r fornisce un'aggiunta d'ordine $n-4$ alla K_{n-1}, perciò la r appartiene alla ψ_{n-4}, c.d.d. Ne segue che la C aumentata delle rette per O analoghe ad a sega sopra la curva sezione della F con un piano per r, un gruppo appartenente a quello segato dalla ψ_{n-4}, ossia dalla curva d'ordine $n-i-3$ sezione della ψ_{n-4} col piano fuori della r (supposta i-pla per F) ed aggiunta alla sezione piana di F: in altre parole la C sega un gruppo contenuto nel residuo del gruppo dei punti base semplici sulla curva del fascio fatto segare dai piani per r, e sommata (ove occorra) con curve fondamentali della rete (ulteriore sezione della ψ_{n-4} con F fuori delle rette analoghe ad a) sega proprio un tal gruppo residuo sulla curva generica del detto fascio. Si deduce che la C insieme ad eventuali curve fondamentali della data rete sega un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica del sistema ∞^k.

Il ragionamento precedente patisce eccezione se il fascio preso ad arbitrio nel sistema ∞^k sulla superficie appartiene alla involuzione che la rete determina; in tal caso sussiste ancora la conclusione precedente perchè la C (completata ove occorra) gode della stessa proprietà fissata per la primitiva rete rispetto ad altre reti non appartenenti alla stessa involuzione.

Così possiamo enunciare il teorema:

Se una curva C sega un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica d'un sistema ∞^r (con $r \geqslant 2$) dotato di curve fondamentali distinte, ed un gruppo contenuto nel residuo della serie caratteristica (che si riduce al gruppo dei punti base semplici per un fascio) sulla curva generica *di ogni sistema* ∞^{r-1} *contenuto nel primo, residuo d'una curva fondamentale, la curva* C *sola o insieme a qualche curva fondamentale pel dato sistema sega un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica d'un sistema* ∞^s $(s \geqslant 2)$ *(semplice o no) arbitrariamente fissato sulla superficie.*

Da questo teorema risulta che le curve C definite dalle proprietà indicate rispetto ad un sistema ∞^r $(r \geqslant 2)$ non dipendono dalla natura del sistema ove si prescinda da certe componenti fisse di esse (*curve eccezionali*): le curve C si ottengono come sezioni della superficie F d'ordine n in S_3 colle superficie aggiunte d'ordine $n-4$ quando la F sia stata preventivamente trasformata in modo da avere punti multipli isolati distinti (come supponiamo), e perciò compongono un sistema lineare; segue che *le componenti variabili del sistema lineare segato sopra una superficie d'ordine* n *dalle superficie d'ordine* $n-4$ *aggiunte ad essa, si trasformano in curve analoghe quando si trasforma birazionalmente la superficie*; queste curve, legate invariantivamente alla superficie, che diremo *curve canoniche, segano sulla curva generica d'ogni sistema lineare un gruppo contenuto in un gruppo residuo della serie caratteristica o proprio residuo di essa* (37): dovremo poi distinguere quando si presenti l'uno o l'altro caso.

Il *sistema canonico* (costituito dalle curve canoniche) conduce in generale a due caratteri invariantivi della superficie; cioè il *1° genere* p (o semplicemente genere) cioè *la dimensione del sistema canonico aumentata di* 1 (Flächengeschlecht) (38), ed il *2° genere* $p^{(1)}$ cioè il *genere del sistema canonico* (Curvengeschlect di NOETHER); un terzo carattere, il *grado* $p^{(2)}$, è legato al 2° genere $p^{(1)}$ dalla relazione

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1$$

stabilita dal NOETHER (« Mathem. Ann. », VIII), di cui ora dovremo discorrere.

Se il 1° genere $p = 1$, mancano le curve canoniche propriamente dette (secondo la nostra definizione), ma ogni sistema lineare ha la serie caratteristica speciale: manca il secondo carattere $p^{(1)}$: esiste *una* superficie d'ordine $n-4$ aggiunta alla superficie supposta d'ordine n in S_3.

---

(37) L'invariantività delle curve canoniche è stata dimostrata per la prima volta dal sig. NOETHER (« Math. Ann. », 2, 8) con un lungo procedimento analitico. Il sig. CASTELNUOVO (« Istituto lomb. », 1891) ne ha dedotto la proprietà qui enunciata di queste curve, la quale sotto le restrizioni del precedente teorema risulta ora caratteristica di quelle curve.

(38) Il concetto del genere per le superficie, fu dapprima stabilito dal CLEBSCH (« Comptes rendus », 1868), quindi il detto concetto fu stabilito dal sig. NOETHER (« Mathem. Ann. », 2) per tutte le varietà algebriche più volte estese.

3. - Curve eccezionali.

Consideriamo un sistema semplice ∞^r (C) $(r \geqslant 3)$ con un punto base i-plo (isolato) in un punto semplice O della superficie F e trasformiamo la superficie in una F' di S_3 su cui ∞^3 curve generiche C di (C) vengano segate dai piani: al punto O corrisponde sulla F' una curva d'ordine i (che può anche ridursi ad una curva d'ordine i/j contata j volte) la quale deve essere aggiunta ad ogni curva canonica (insieme forse ad altre curve) per segare un gruppo residuo della serie caratteristica sulla sezione piana generica di F'; infatti la curva composta di una curva canonica e del punto O sulla F sega un gruppo residuo della serie caratteristica sopra la curva generica di ogni sistema non avente il punto base O e quindi pel teorema principale del precedente § sega un gruppo residuo della serie caratteristica anche sopra la curva generica d'un arbitrario sistema avente il punto base O. Dunque *la curva d'ordine i che corrisponde al punto O su F' appartiene a tutte le superficie d'ordine $n-4$ aggiunte alla F' supposta d'ordine n*; per questa proprietà la detta curva dicesi (secondo il NOETHER, « Math. Ann. », VIII) una *curva eccezionale* della F' (ausgezeichnete).

Viceversa si supponga l'esistenza di una curva eccezionale C d'ordine i sulla F': il sig. NOETHER (op. cit., § 514) ha indicato una trasformazione della superficie F' in una F su cui alla C corrisponde un punto semplice per la F e base i-plo per il sistema delle curve corrispondenti alle sezioni piane della F'.

La curva eccezionale C su F' può eventualmente essere sostituita da un punto; la trasformazione della F' in una superficie F su cui la C è rappresentata da un punto O semplice (per F) e base (con data molteplicità) per il sistema delle curve C' corrispondenti alle sezioni piane della F' continua a sussistere, ma nel punto O le curve C' hanno le tangenti fisse altrimenti ad O corrisponderebbe una linea su F': reciprocamente se sopra una superficie F si considera un sistema (semplice) ∞^3 (almeno) di curve C' con un punto base O semplice per F e con data molteplicità per le C', dove le C' hanno le tangenti fisse, facendo segare le curve C' dai piani (di S_3) sopra la superficie F', si ha su F' un punto O' multiplo eccezionale, ossia un punto ipermultiplo di cui un intorno rappresenta una curva appartenente a tutte le curve canoniche; in particolare si può considerare l'esempio in cui le C' tocchino in O una data retta; O' è allora un punto doppio eccezionale per la F'.

Risulta di qua che non vi può essere sulla F' un punto eccezionale semplice (per F'), ossia un punto base pel sistema canonico (semplice per la F'). Infatti sulla superficie trasformata F il punto O corrispondente ad O' non potrebbe essere un punto base isolato per le C', altrimenti gli corrisponderebbe una curva sulla F', e d'altra parte se in O le C' hanno una tangente fissa il punto O' risulta doppio almeno per la F'.

Ora si consideri una trasformata F della F' senza curve (nè punti) eccezionali, come è possibile con successive trasformazioni che mutino in punti semplici le curve eccezionali della F''; sulla F, supposta d'ordine n, le superficie aggiunte φ_{n-4} (d'ordine $n-4$) segano fuori della curva multipla *soltanto* curve canoniche (e non componenti fisse eccezionali), e quindi le curve canoniche segano sulle sezioni piane della F proprio un gruppo residuo della serie segata dai piani (non un gruppo contenuto in un gruppo residuo).

Se si considera sulla F un sistema semplice (∞^3 almeno) senza punti base e si fanno segare le sue curve dai piani di S_3, sulla superficie trasformata non nascono curve eccezionali (che corrisponderebbero necessariamente a punti sulla F) e quindi la proprietà indicata compete alle curve canoniche anche rispetto alle curve del nuovo sistema.

La proprietà di una superficie di S_3 di non possedere curve eccezionali si traduce in una proprietà invariantiva pel sistema delle sezioni piane che può enunciarsi dicendo che il *sistema è privo di punti base*, intendendo che il sistema non può acquistare punti base (semplici per la superficie) sopra una superficie trasformata, e scegliendo per tipo fra le trasformate una superficie senza curve eccezionali sulla quale il sistema avrebbe necessariamente punti base se li avesse sopra un'altra superficie riferita ad essa biunivocamente: con questa scelta della superficie tipo rimane pure fissato che cosa si deve intendere quando si dice che un sistema ha certi punti base con certe molteplicità; nella scelta medesima evitiamo di riferirci a quelle superficie su cui accidentalmente i punti base del sistema cadano infinitamente vicini a punti multipli. Infine queste definizioni non esigono che il sistema di cui si tratta sia semplice.

Con queste convenzioni *l'esistenza di punti base d'un sistema costituisce una proprietà invariantiva di esso che compete evidentemente al sistema normale definito dal dato sistema* (altrimenti il grado aumenterebbe).

Diremo per brevità *puro* o *impuro* un sistema secondochè non ha o ha punti base; diremo pure *curva eccezionale* sopra una superficie in S_n la curva che corrisponde ad un punto base pel sistema delle curve trasformate delle sue sezioni iperpianali.

Ora sopra una superficie F senza curve eccezionali si abbia un sistema puro (semplice o no): se una curva canonica non segasse proprio un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica del sistema (supposto di dimensione $\geqslant 2$), tale proprietà competerebbe alla somma di essa con una curva eccezionale su F; questa curva non potrebbe essere che un punto base pel sistema, ciò che contrasta all'ipotesi che il sistema sia puro. Concludiamo:

Una curva canonica sega proprio un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica d'ogni sistema puro (∞^2 *almeno*) *ed è caratterizzata da questa proprietà.*

Parimente:

Se un sistema impuro (∞^2 *almeno*) *ha* s *punti base isolati di molteplicità* $i_1, i_2 \dots i_s$, *una curva canonica sega sulla curva generica di esso un gruppo che aumentato dei gruppi di* $i_1\, i_2 \dots i_s$ *punti infinitamente vicini ai rispettivi punti base dà un gruppo residuo della serie caratteristica.*

Il sistema canonico non ha punti base (come abbiamo osservato), quindi *la serie caratteristica del sistema canonico è autoresidua e perciò*

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1$$

(cfr. citaz. precedente): va fatta eccezione per il caso che il sistema canonico si spezzi nelle componenti d'un fascio (o per $p = 1$ in cui il teorema non ha significato) giacchè tali sistemi sono stati esclusi dalle nostre considerazioni nel § 1, cap. I; nondimeno il signor NOETHER ha stabilito che in tale ipotesi le curve componenti le curve canoniche sono ellittiche, sicchè $p^{(2)} = 0$, $p^{(1)} = 1$, e la relazione è ancora verificata.

Possiamo ora estendere il concetto di superficie aggiunta anche al caso in cui la superficie F sia stata trasformata in modo da non avere più punti multipli isolati distinti, basandoci sulla invariantività del sistema canonico ($p > 0$). Invero una curva canonica C insieme alle curve eccezionali sega un gruppo residuo della serie caratteristica del sistema ∞^3 segato dai piani sulla sezione piana generica della F, ed un gruppo residuo di quello segato dai piani per il punto sopra la sezione piana per un punto multiplo isolato, perciò col ragionamento del § 1 si prova che la curva composta della C e delle curve eccezionali (corrispondenti ai punti base del sistema ∞^3 segato dai piani) è sezione di una determinata superficie ψ_{n-4} d'ordine $n-4$ (essendo n l'ordine della F) la quale soddisfa alle condizioni a), b) del § 1 richieste dalla definizione di superficie aggiunta rispetto ad una superficie con punti multipli isolati distinti; inoltre la ψ_{n-4} si comporta nei punti multipli isolati della F in un modo particolare pienamente determinato (p. e. si può vedere che essa ha come $(i-2)$-plo (almeno) un punto i-plo infinitamente vicino ad un punto multiplo); noi assumiamo il modo di comportarsi della ψ_{n-4} nei punti multipli come definizione del modo di comportarsi delle superficie aggiunte alla F, con riguardo però al fatto che debbono considerarsi come ipermoltiplicità della F i punti multipli rappresentanti una curva eccezionale; per evitare discussioni troppo minute diciamo che *sono aggiunte* *alla superficie F dotata di arbitrarie singolarità e di curve eccezionali distinte, le superficie che segano un piano generico secondo una curva aggiunta alla sezione piana e si comportano nei punti multipli isolati come le ψ_{n-4}*; invero nessuna curva eccezionale (immagine d'un punto base isolato) può in questo caso ridursi all'intorno d'un punto multiplo.

Osserviamo che la costruzione delle ψ_{n-4} riesce per $p = 1$ anche se mancano le curve eccezionali, essendovi in ogni piano *una* curva d'ordine $n - 4$ aggiunta alla sezione piana: va fatta eccezione per le superficie del 4° ordine (genere 1) a cui sono aggiunte tutte le superficie.

4. - Applicazioni.

Una conclusione emerge subito dai resultati del § 2. Se il genere p di una superficie è > 0, la dimensione r d'un sistema lineare di genere π è $\leqslant \pi$ (poichè la serie caratteristica è speciale), quindi ricordando gli ultimi resultati del cap. precedente si ha:

Sopra una superficie di genere > 0 *una curva appartiene ad un determinato sistema completo.*

E parimente (poichè allora ogni sistema normale è contenuto in un sistema completo):

Il residuo d'una curva rispetto ad un sistema normale è sempre un sistema normale (*se ha un grado*).

Si consideri ora un sistema normale di grado n (C), appartenente ad un sistema completo puro di grado $n+\delta$ $(\delta > 0)$, sopra una superficie di genere $p > 0$. Una curva canonica sega la curva generica del sistema completo di genere π in $2(\pi - 1) - n - \delta$ punti, ed insieme ai punti base di (C) sega una curva generica C (di (C)) in $2(\pi - 1) - n$ punti; i detti punti base non possono essere multipli perchè (C) ha lo stesso genere π del sistema completo a cui appartiene, quindi (C) ha almeno δ punti base semplici, e precisamente ne ha δ perchè è δ la differenza fra il suo grado e quello del sistema completo.

Si deduce che se $\delta = 0$ (C) coincide col sistema completo a cui appartiene. Dunque:

Un sistema puro normale è necessariamente completo $(p > 0)$.

III.

IL SISTEMA AGGIUNTO

1. - Definizione del sistema aggiunto.

In S_3 si abbia una superficie F d'ordine n; una superficie ψ_{n-3} d'ordine $n-3$ aggiunta alla F sega la F (fuori dei punti multipli) secondo una curva K la quale gode delle due proprietà seguenti:

a) sega una sezione piana generica della F secondo un gruppo canonico;

b) sega una sezione piana generica (non razionale) per un punto multiplo O della F secondo un gruppo contenuto in uno appartenente alla serie somma di quella canonica e della serie differenza di quella segata sulla curva dai piani generici di S_3 e di quella segata su di essa dai piani per O. Escludiamo che la F abbia una stella di sezioni piane razionali (nel qual caso sarebbe razionale).

Se il punto O è un punto i-plo ordinario la serie differenza di quella segata dai piani generici di S_3 sopra una sezione piana per O e di quella segata sulla curva stessa dai piani per O, è la serie determinata dal gruppo degli i punti della curva in questione infinitamente vicini al punto O.

In modo analogo a quello con cui è stato dimostrato il teorema principale del § 1, cap. II, si stabilisce che:

Se la F è dotata solo di punti multipli isolati distinti, una curva la quale goda delle proprietà a), b), è la sezione della F con una determinata superficie aggiunta ψ_{n-3} d'ordine $n-3$.

Le proprietà *a*), *b*) di una curva K rispetto alla F, si traducono in proprietà della K rispetto alle sezioni piane di una stella col centro fuori della F o in un punto semplice di essa, le quali d'altra parte (per la dimostrazione analoga a quella citata) sono caratteristiche per la K. Si ha dunque:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la K sia la sezione della F (dotata di punti multipli isolati distinti) con una superficie ψ_{n-3} d'ordine $n-3$ aggiunta alla F stessa, è che la K:

α) seghi un gruppo canonico sopra ogni sezione generica della F con un piano appartenente ad una stella il cui centro O è fuori della F o è semplice per essa,

β) seghi un gruppo contenuto in uno appartenente alla serie somma della canonica colla serie differenza di quella segata dai piani per O e di *quella individuata dal gruppo dei punti base semplici del fascio, sopra la curva generica d'un fascio segato da piani per O.*

Si supponga che le sezioni piane della F di genere π sieno le curve di un sistema generico ∞^3 immerso in un sistema completo (C) di dimensione $r > 3$ (e necessariamente semplice). Le curve C si facciano segare sulla superficie trasformata φ dagli iperpiani di S_r: il sistema delle sezioni piane della F viene segato dagli iperpiani per un S_{r-4} di S_r non incontrante la φ. Dato un altro S_{r-4} non incontrante la φ in S_r si può sempre costruire una serie di S_{r-4} in S_r (avente per estremi i due dati) tale che due S_{r-4} consecutivi giacciano in un S_{r-3} senza intersezioni colla φ. Allora una curva K che gode delle proprietà *a*), *b*) rispetto al primo sistema ∞^3 (quando le sue curve sieno fatte segare dai piani di S_3), gode delle proprietà α), β) rispetto alle curve della rete data dagli iperpiani per S_{r-3} (che vien segata dai piani d'una stella col centro fuori di F, quindi gode delle proprietà *a*), *b*) rispetto al 2° sistema ∞^3 immerso in (C) e così via fino all'ultimo (supposto che tutti questi sistemi sieno semplici).

Allora traducendo in linguaggio invariantivo le proprietà α), β), *a*), *b*) si può enunciare il teorema:

Sia (C) un sistema completo semplice di dimensione $r \geqslant 3$ dotato di curve fondamentali, e sia K una curva la quale goda delle due proprietà seguenti:

α) *di segare un gruppo canonico sopra la curva generica di una rete generica immersa in (C),*

β) *di segare sopra la curva generica di un fascio contenuto nella rete un gruppo contenuto in uno appartenente alla serie somma della serie canonica e di quella differenza tra la serie segata dalla rete e quella individuata dal gruppo dei punti base semplici del fascio; allora la curva K gode le due proprietà caratteristiche seguenti:*

a) *sega un gruppo canonico sopra ogni curva generica di (C),*

b) *sega sopra la curva generica d'un sistema ∞^{r-1} residuo di una curva fondamentale di (C) un gruppo contenuto in uno appartenente alla serie somma della serie canonica e della serie differenza fra quella segata sulla curva da (C) e la serie caratteristica del sistema ∞^{r-1}.*

La curva K è caratterizzata dal fatto di essere la sezione (fuori della linea multipla) della superficie F d'ordine n ottenuta facendo segare dai piani di S_3, ∞^3 curve generiche di (C), con una superficie ψ_{n-3} d'ordine $n-3$ aggiunta ad essa F. Perciò le curve K compongono un sistema lineare che si dirà il sistema aggiunto di (C).

Se si tratta di una superficie di genere $p > 0$, le proprietà *a*), *b*) rispetto ad un sistema (C) con punti base *distinti* ([39]), competono alle curve

---

([39]) Ossia tali che in nessuno di essi le curve C hanno una tangente fissa. Sebbene introduca costantemente questa ipotesi per non entrare in una analisi troppo minuta, non sarebbe difficomposte di una curva C (di (C)) e di una curva canonica aumentata dei punti base di (C) (cfr. cap. II, § 3), e quindi evidentemente anche alle curve del sistema (normale) somma di (C), del canonico, e delle curve rappresentate dai punti base di (C).

Viceversa consideriamo il sistema (K) aggiunto di (C). Sulla curva generica C di (C) una K di (K) sega un gruppo canonico per il quale passano oltre la K ∞^{p-1} curve del sistema aggiunto spezzate nella C ed in una curva canonica aumentata dei punti base (o curve eccezionali corrispondenti) di (C), quindi pel detto gruppo canonico passano almeno ∞^p curve di (K); ma per il gruppo non possono passare più di ∞^p curve K giacchè altrimenti vi sarebbero più che ∞^{p-1} curve di (K) spezzate nella C ed in una curva residua, la quale per le proprietà $a)$, $b)$ di (C) possiede necessariamente le proprietà caratteristiche (indicate nel cap. II, §§ 2, 3) proprie di una curva canonica e delle linee eccezionali (o punti base) di (C); dunque per un gruppo canonico sezione d'una curva irreduttibile K con una curva generica C passano appunto ∞^p curve K. Il sistema (K) è dunque il sistema normale somma di (C) col sistema canonico e colle curve eccezionali (distinte) di (C), e *questo fatto si assumerà come definizione per* (K) *se* (C) *non ha curve fondamentali distinte* (per $p > 0$): risulta ancora (per la convenzione del cap. prec.) che (K) viene segato dalle superficie d'ordine $n - 3$ aggiunte sulla superficie d'ordine n le cui sezioni piane sono curve generiche di (C).

Come ora abbiamo osservato le curve di (K) residue di una C sono curve canoniche aumentate dei punti base di (C); allora consideriamo un punto base O i-plo isolato di (C) (sopra una superficie senza curve eccezionali) e supponiamo per pura semplicità di ragionamento che (C) non abbia altri punti base.

Staccando da (K) una curva C generica si ha un sistema residuo somma del sistema canonico e del punto O, ciò vuol dire che il punto O ha come residuo rispetto a (K) il sistema somma di (C) e del canonico; poichè il sistema canonico non ha punti base (è puro) il detto sistema somma ha il punto O come base i-plo; ora si possono fare due ipotesi; o il sistema (K) è spezzato nel detto sistema somma e nel punto O (se si vuole curva eccezionale corrispondente), oppure il punto O ha una tale molteplicità s per le curve K che imponendo ad una di esse di avere un altro punto infinitamente vicino ad O oltre agli s tenuti fissi (ossia staccando O, o se si vuole la curva eccezionale corrispondente, da (K)) il punto O diviene i-plo per le curve K residue; il punto O facendo parte *una sola volta* delle curve K spezzate in una C in una canonica ed in O,

cile estendere molti resultati anche al caso in cui (C) abbia punti base di arbitraria natura, come si fa nel piano colla considerazione delle singolarità straordinarie delle curve.

segue che $s = i - 1$, ossia il punto O è $(i-1)$-plo per (K). D'altra parte (K) non può avere altri punti base fuori di quelli di (C) poichè un punto base O di (K) è base pel residuo del canonico e pel residuo rispetto al nuovo sistema di curve o punti non contenenti O. Deduciamo:

Sopra una superficie di genere > 0 *il sistema* (K) *aggiunto a* (C) (∞^2 *almeno*) *è il sistema normale somma di* (C), *del sistema canonico e dei punti base* (*supposti isolati*) (*o curve eccezionali*) *di* (C): *un punto base i-plo di* (C) *o si stacca* (*forse*) *da tutte le curve di* (K) *ed allora è i-plo per le componenti irreduttibili di esso, o è base* $(i-1)$*-plo per* (K); (K) *non ha punti base fuori di quelli di* (C).

2. - Dimensione del sistema aggiunto.

Le curve del sistema (K) aggiunto a (C) segano sulla curva generica C (di (C)) gruppi canonici; sorge la questione « la serie segata da (K) sulla curva C è la serie canonica completa? ».

Con effettivi esempi (di superficie aventi il genere geometrico diverso dal numerico che avrò occasione di menzionare) si vede che può avvenire l'uno o l'altro caso; importa però a noi di stabilire che questo fatto è legato invariantivamente alla superficie e non dipende dal particolare sistema (C) considerato.

Intanto notiamo che la questione posta equivale a quella di determinare la dimensione del sistema (K) aggiunto al sistema (C) di genere π sopra una superficie di genere p, infatti abbiamo avuto occasione di osservare nel precedente § che per un gruppo canonico della C sezione di una K (di cui la C non fa parte) passano ∞^p curve K, quindi la dimensione di (K) è $p+\pi-\omega-1$ essendo ω $(\geqslant 0)$ il difetto di completezza della serie che (K) sega sulla C. Questa quantità $\omega \geqslant 0$ che esprime la differenza fra la dimensione virtuale (per dir così) $p+\pi-1$ dell'aggiunto a (C) e la dimensione effettiva del detto sistema aggiunto, si designerà nel seguito con $\delta(C)$.

Il sistema (C) sia un sistema puro semplice (quindi ∞^3 almeno, essendo $p > 0$), e ∞^3 delle sue curve generiche sieno segate sulla superficie F dai piani di S_3; la F risulta senza curve eccezionali; s'indichi con (C') il sistema canonico e con $(C+C')$ il sistema normale somma di (C), (C'), ossia il sistema aggiunto a (C); analogamente con $(rC+C')$ il sistema aggiunto ad (rC); infine $\pi^{(r)}$ designi il genere di (rC) $(\pi^{(1)} = \pi)$. Il sistema (rC) contiene in sè (totalmente) quello segato sulla F da tutte le superficie φ_r di ordine r; dato un arbitrario sistema (C_1) si può prendere r così grande che per la curva generica C_1 passino delle φ_r, e quindi (C_1) sia contenuto (parzialmente) in (rC); anzi per r assai elevato le φ_r

passanti per C_1 non passeranno in conseguenza per altri elementi fissi e perciò il residuo di (C_1) rispetto ad (rC) sarà un sistema puro (C_2); supponiamo ancora che (C_1) stesso sia un sistema puro.

Indicando con π_1, π_2 i risp. generi di (C_1), (C_2), la curva spezzata C_1+C_2 non ha, fuori dei punti multipli per le curve di (rC), altri punti multipli che i D punti doppi intersezioni di C_1, C_2 (essendo (C_1), (C_2) due sistemi puri residui un dell'altro rispetto ad (rC)), quindi secondo la formola di NOETHER che dà il genere d'una curva spezzata si ha:

$$\pi^{(r)} = \pi_1 + \pi_2 + D - 1 .$$

Ora il sistema aggiunto di (rC), ossia $(rC+C')$ è anche la somma $(C_2+(C_1+C'))$ ossia è la somma di (C_2) e dell'aggiunto a (C_1). Sopra la curva generica C_2 (di genere π_2) il sistema $(C_2+(C_1+C'))=(C_1+(C_2+C'))$ sega una serie g (forse scompleta) di grado

$$D + 2\pi_2 - 2$$

e però di dimensione

$$D + \pi_2 - 2 - \omega_2 \qquad (\omega_2 \geqslant 0):$$

se

$$p + \pi_1 - 1 - \omega_1 \qquad (\omega_1 = \delta(C_1) \geqslant 0)$$

è la dimensione di (C_1+C'), per un gruppo della serie g passano $\infty^{p+\pi_1-\omega_1}$ curve di (C_2+C_1+C') tra cui $\infty^{p+\pi_1-1-\omega_1}$ spezzate nella C_2 ed in una curva arbitraria di (C_1+C'); dunque la dimensione del sistema aggiunto ad (rC), cioè di $(rC+C') = (C_2+C_1+C')$ vale

$$p + \pi_1 + \pi_2 + D - 2 - \omega_1 - \omega_2 ;$$

ma

$$\pi_1 + \pi_2 + D - 1 = \pi^{(r)} ,$$

quindi è

$$\delta(rC) = \omega_2 + \delta(C_1) \qquad (\delta(C_1) = \omega_1)$$

ossia

$$\delta(rC) \geqslant \delta(C_1) .$$

Dunque la quantità $\delta(C_1)$ relativa ad un qualunque sistema puro (C_1) non supera l'analoga quantità calcolata per (rC) dove si prenda r assai elevato. Perciò se il $\delta(rC)$ anzichè crescere indefinitamente con r assume un valore massimo (che sarà pur quello di $\delta((r+s)C)$ per $s \geqslant 0$), questo valore è un *vero carattere invariantivo della superficie*; effettivamente se la F ha singolarità ordinarie in guisa che si possano applicare da un certo punto in poi le formule di postulazione di NOETHER per calcolare le dimensioni dei sistemi delle superficie (di dato ordine) aggiunte alla F (di ordine n), si verifica con un semplice calcolo che la dimensione del sistema aggiunto ad (rC) che contiene quello segato dalle aggiunte d'ordine $n-4+r$ è (per r assai elevato)

$$\geqslant p_1 + \pi^{(r)} - 1$$

dove p_1 è un numero indipendente da r che esprime il numero *virtuale* delle superficie aggiunte d'ordine $n-4$ (linearmente indipendenti) e dicesi *genere numerico* della F; si ha dunque:

$$\delta(rC) \leqslant p - p_1 ,$$

e perciò il $\delta(rC)$ *ha un massimo* K *che esprime il massimo difetto di scompletezza della serie segata sulla curva generica di un arbitrario sistema dal suo sistema aggiunto* (e si stabilirebbe essere $= p - p_1$ dimostrando che è completo il sistema segato sulla F da tutte le aggiunte di ordine assai elevato) ([40]). Ma ciò che a noi interessa è la considerazione del caso in cui $K = 0$, e delle condizioni che permettono di trarre tale conclusione, a cui vogliamo giungere *senza occuparci della natura delle singolarità che la* F *possiede.*

Occorre premettere un lemma di geometria sopra una curva la cui dimostrazione si compie facilmente usando di un ragionamento adoperato dal signor CASTELNUOVO in un suo recente lavoro ([41]). Il lemma è il seguente:

Sopra una curva piana d'ordine n *e genere* π *la minima serie* g *di grado* $(r+1)n+2(\pi-1)$ *contenente tutti i gruppi composti dell'intersezione d'una curva aggiunta d'ordine* $n-3+r$ *e dell'intersezione d'una retta, è la serie completa somma della* $g^{rn+\pi-2}_{rn+2(\pi-1)}$ *segata dalle curve aggiunte d'ordine* $n-3+r$, *e della* g^2_n *segata dalle rette.*

Per dimostrare questo lemma osserviamo anzitutto che la serie g in questione è certo contenuta nella serie completa segata sulla nostra curva

([40]) Così risulterebbe fissata in ogni caso la invariantività di p_1 che i signori ZEUTHEN (« Math. Ann. », 4) e NOETHER (« Math. Ann. », 8) hanno stabilito soltanto con restrizioni alle singolarità nascenti sulla superficie nelle trasformazioni considerate. Effettivi esempi di superficie aventi il genere geometrico diverso dal numerico (comunque elevato) sono stati dati dal sig. CASTELNUOVO (« Istituto lomb. », 1891).

([41]) *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica* (« Circolo Mat. di Palermo », t. VII).

C_n dalle $C_{n-3+(r+1)}$ aggiunte d'ordine $n-3+(r+1)$; basta quindi stabilire che è completo il minimo sistema lineare contenente tutte le curve composte d'una C_{n-3+r} (d'ordine $n-3+r$) aggiunta alla C_n e d'una retta: infatti il sistema delle $C_{n-3+(r+1)}$ che sega la g sulla C_n (comprese in esso sistema tutte le $C_{n-3+(r+1)}$ per un gruppo della g) è appunto tale che contiene in sè *tutte* le curve composte d'una retta e d'una C_{n-3+r} e non può essere completo se è scompleta la detta serie g. Ora per ipotesi fra le curve $C_{n-3+(r+1)}$ vi sono quelle composte di una retta fissa a e di una C_{n-3+r} che sono

$$\infty^{\pi-1+rn+r(r-3)/2}$$

e così pure quelle composte di una retta fissa a' e di una C_{n-3+r}; i due sistemi hanno comune il sistema delle $C_{n-3+(r-1)}$ la cui dimensione è

$$\pi-1+(r-1)n+\frac{(r-1)(r-4)}{2}$$

e però il loro minimo sistema somma ha una dimensione

$$\geqslant 2\left\{\pi-1+rn+\frac{r(r-3)}{2}\right\}-\left\{\pi-1+(r-1)n+\frac{(r-1)(r-4)}{2}\right\},$$

cioè

$$\geqslant \pi-2+(r+1)n+\frac{(r+1)(r-2)}{2},$$

ma questo sistema è contenuto o coincide con quello delle $C_{n-3+(r+1)}$ passanti per il punto comune ad a, a', e poichè le $C_{n-3+(r+1)}$ seganti la g sulla C_n non passano tutte per quel punto, la dimensione del sistema delle $C_{n-3+(r+1}$ in questione è

$$\geqslant \pi-1+(r+1)n+\frac{(r+1)(r-2)}{2}$$

e quindi è appunto la dimensione

$$\pi-1+(r+1)n+\frac{(r+1)(r-2)}{2}$$

del sistema completo di *tutte* le $C_{n-3+(r+1)}$, c.d.d.

Ritornando alla questione precedente si ha come immediata applicazione del lemma ora stabilito, che se il sistema $(rC+C')$ aggiunto ad

(rC) (dove $r > 1$) sega sulla curva generica C una serie completa, lo stesso accade per $((r+1)C+C')$, e poichè la differenza ($\geqslant 0$) fra $\delta((r+1)C)$ e $\delta(rC)$ è la scompletezza ω della serie segata da $((r+1)C)$ sulla C, si ha in tal caso

$$\delta(rC) = \delta((r+1)C) = ... = K .$$

Un corollario di questo resultato è il seguente: se per $r > 1$ è $\delta(rC)=0$, la superficie ha il carattere $K=0$; il resultato più semplice si ha per $r=2$. Possiamo così enunciare il teorema:

Se sopra una superficie di genere $p > 0$ esiste un sistema puro semplice (C) (quindi ∞^3 almeno) tale che il sistema aggiunto a $(2C)$ seghi la serie canonica completa sulla curva generica di $(2C)$, ossia abbia la dimensione $p+2\pi+n-2$, dove π ed n sono risp. il genere e il grado di (C), allora sulla curva generica di ogni sistema puro di genere Π, appartenente alla superficie, il sistema aggiunto sega la serie canonica completa, ossia esso ha la dimensione

$$p + \Pi - 1 .$$

In altre parole la condizione necessaria e sufficiente affinchè per una superficie sia il carattere invariantivo

$$K = 0$$

è che esista un sistema puro semplice (C) tale che

$$\delta(2C) = 0 .$$

Il teorema verrà poi esteso anche ai sistemi impuri; dobbiamo prima illuminarne meglio il contenuto ponendolo in relazione colle proprietà che si riferiscono al genere numerico della superficie, ed ai sistemi segati su di essa da superficie aggiunte.

3. - Sistemi segati sopra una superficie dalle superficie aggiunte.

Consideriamo in S_3 la superficie F d'ordine n di genere $p > 0$ senza curve eccezionali, dotata di singolarità qualunque, le cui sezioni piane appartengono ad un sistema puro (C); indichiamo col simbolo φ_μ le sue superficie aggiunte d'ordine μ. Come nel § 1 per le φ_{n-3}, si dimostra che le curve appartenenti al sistema (normale) somma di (C) e del sistema aggiunto a (C) sono sezioni della F con una ψ_{n-2}, e però che le ψ_{n-2} segano sulla F un sistema normale; poichè (C) è puro le ψ_{n-2} segano sulla F il sistema puro completo aggiunto a $(2C)$ (cioè $(2C+C')$ se (C') è il sistema canonico). Parimente si vedrebbe ancora che le ψ_{n-1} segano sulla F il sistema completo $(3C+C')$ (poichè ancora il gruppo sezione sopra una sezione piana C appartiene ad *una* curva aggiunta d'ordine $n-1$).

Supponiamo che le superficie ψ_{n-3+r} $(r>1)$ seghino la serie completa sopra una sezione piana generica C della F; per il lemma di geometria sopra una curva stabilito nel precedente §, segue che le $\psi_{n-3+(r+1)}$ segheranno pure sopra la C la serie completa; allora se il sistema segato dalle ψ_{n-3+r} sulla F è il sistema $(rC+C')$ completo, quello segato dalle $\psi_{n-3+(r+1)}$ è necessariamente il sistema completo $((r+1)C+C')$ e si ha (come si è visto)

$$\delta(rC) = \delta((r+1)C)\,.$$

Dunque se $\delta(2C)=0$ (poichè le ψ_{n-2} segano sulla F *tutto* il sistema $(2C+C')$), le superficie aggiunte alla F ψ_{n-4+r} $(r>1)$ segano pure sulla F *tutto* il sistema $(rC+C')$. In tal caso le ψ_{n-3+r} segano sulla F un sistema di dimensione $p+\pi^{(r+1)}-1$ (essendo $\pi^{(r)}$ il genere di (rC)); per ogni curva sezione passano (se $r\geqslant 3$) $\binom{r}{3}+1$ ψ_{n-3+r} linearmente indipendenti fra cui $\binom{r}{3}$ spezzate nella F ed in una arbitraria superficie d'ordine $r-3$, quindi il numero A_{n-3+r} della superficie ψ_{n-3+r} linearmente indipendenti è dato da

$$A_{n-3+r} = p+\pi^{(r+1)}+\binom{r}{3} \qquad \left(\text{dove } \binom{r}{3}=0 \text{ se } r<3\right).$$

Se $\pi^{(1)}=\pi$ è il genere di (C) si ha

$$\pi^{(r+1)} = \pi^{(r)}+\pi+rn-1\,,$$

quindi

$$A_{n-3+r} = A_{n-3+(r-1)}+\pi+rn-1+\binom{r-1}{2},$$

uguaglianza la quale significa che le ψ_{n-3+r} segano sopra un piano il sistema lineare completo delle curve d'ordine $n-3+r$ aggiunte alla sezione piana la cui dimensione è $\pi+rn-2+\binom{r-1}{2}$.

Ma se la F è dotata di singolarità ordinarie e se i numeri A_{n-3+r}, $A_{n-3+(r-1)}$ sono quelli dati dalle formule di postulazione di NOETHER si deduce appunto (per differenza) la precedente uguaglianza (come il signor CASTELNUOVO ha osservato ([42])): valendo la detta formula ricorrente (che è stata dimostrata partendo dall'ipotesi $K = \delta(2C) = 0$), si conclude dunque che valgono le formule di postulazione di NOETHER per le ψ_{n-3-r} se valgono per le ψ_{n-3}, e poichè esse dànno $p_1 + \pi$ ψ_{n-3} linearmente indipendenti, se p_1 è il numero virtuale delle ψ_{n-4} (ossia il genere numerico), è condizione necessaria e sufficiente affinchè valgano per r assai grande le dette formule di postulazione che sia

$$p_1 = p\ ;$$

siccome effettivamente le formule di postulazione di NOETHER valgono per r assai elevato, l'uguaglianza $p = p_1$ risulta stabilita. Viceversa se $p = p_1$ valendo le formule di postulazione per r assai grande, si ha $\delta(rC) = 0$ e quindi $K = 0$.

Le superficie di genere $p > 0$ per le quali il carattere invariantivo $K=0$ allorchè sieno trasformate in modo da avere soltanto singolarità ordinarie (se è possibile) e non curve eccezionali, hanno il genere numerico $p_1 = p$, e viceversa ([43]).

Poichè p_1 non è definito per le superficie con singolarità straordinarie assumeremo per esse convenzionalmente $p_1 = p$ quando è $K=0$.

Possiamo enunciare il teorema (dimostrato mediante le considerazioni precedenti):

Sopra una superficie d'ordine n di S_3 senza curve eccezionali, dotata di singolarità qualunque, avente il genere numerico uguale al geometrico > 0, ossia $K = 0$), le superficie aggiunte di arbitrario ordine segano un sistema completo.

La dimostrazione è stata data soltanto per le ψ_{n-3+r} con $r \geqslant 0$ (poichè esse segano *tutto* il sistema aggiunto ad un sistema puro il quale è un sistema puro normale e perciò un sistema completo), ma in vista del teorema del resto del cap. I, staccando successivamente sezioni piane si stabilisce la cosa in ogni caso.

Allora adoperando il ricordato teorema del resto del cap. I si ha: *Il sistema completo a cui appartiene una curva C sopra la superficie F viene segato da tutte le superficie aggiunte di arbitrario ordine che passano*

([42]) *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche* (« Circolo Mat. di Palermo », t. IV, 1890).

([43]) Indipendentemente dai ragionamenti fatti che suppongono $p > 0$, tenendo conto dell'osservazione che la differenza virtuale $\Delta_\mu - \Delta_{\mu-1}$ è la dimensione del sistema di tutte le curve d'ordine μ aggiunte ad una sezione piana, partendo dall'ipotesi che le formule di postulazione valgano per μ assai grande (come accade se la superficie ha singolarità ordinarie) si prova che è $p_1 \leqslant p$ e se $p_1 = p$ le formule di postulazione valgono per le ψ_{n-4+r} $(r \geqslant 0)$.

per una intersezione complementare irreduttibile della C e si comportano debitamente nei punti multipli della C stessa.

È questo il complemento del ricordato teorema del resto (*Restsatz*, secondo NOETHER).

4. - Sistemi impuri.

Sopra la superficie F di genere geometrico uguale al numerico $p > 0$, le cui sezioni piane appartengono ad un sistema puro (C), si consideri ora un sistema impuro (C_1) avente s punti base multipli risp. secondo $i_1, i_2, \ldots, i_s$; possiamo prendere r così grande che (C_1) sia contenuto in (rC) ed abbia come residuo rispetto ad esso il sistema puro (C_2). Indicando con π_1, π_2 i risp. generi di (C_1), (C_2), con $\pi^{(r)}$ quello di (rC), e considerando che un punto j-plo d'una curva le cui tangenti stanno in un piano diminuisce di $[j(j-1)]/2$ il genere della curva, si ha

$$\pi^{(r)} = \pi_1 + \pi_2 + D - 1 + \sum_1^s \frac{i_\varrho(i_\varrho - 1)}{2}$$

dove D è il numero delle intersezioni di una C_1, con una C_2. Sia (C') il sistema canonico e quindi $(rC+C')$ l'aggiunto di (rC), ed $(rC+C'-C_2)$ il residuo di (C_2) rispetto al detto aggiunto; ripetiamo il ragionamento del § 2; $(rC+C')$ sega sulla C_2 una serie di grado $D+2\pi_2-2$ e quindi di dimensione $D+\pi_2-2-\omega$, $(\omega \geqslant 0)$ sicchè la dimensione di $(rC+C'-C_2)$ è

$$p + \pi^{(r)} - D - \pi_2 + \omega ,$$

ossia è

$$p + \pi_1 + \sum_1^s \frac{i_\varrho(i_\varrho - 1)}{2} - 1 + \omega .$$

Le curve d'un sistema lineare che hanno un punto j-plo in un punto semplice di F soddisfano ad $[j(j+1)]/2$ condizioni lineari al più; quindi le curve di $(rC+C'-C_2)$ che hanno un punto $(i_\varrho-1)$-plo in ogni punto base i_ϱ-plo di (C_1) costituiscono un sistema di dimensione

$$\geqslant p + \pi_1 - 1 + \omega ;$$

questo sistema appartiene evidentemente al sistema somma di (C_1) con (C') e coi punti base di (C_1) ossia all'aggiunto di (C_1), il quale ha una dimensione $\leqslant p+\pi_1-1$; segue $\omega = 0$, e la dimensione del nominato sistema aggiunto (C_1) è quindi proprio

$$p + \pi_1 - 1 .$$

Dunque:

Sopra una superficie F di genere geometrico uguale al numerico $p > 0$, anche ogni sistema impuro di genere Π ha il sistema aggiunto di dimensione $p + \Pi - 1$ come ogni sistema puro.

Se il sistema impuro (C_1) ha i suoi punti base distinti (come supponiamo) non può nessuno di essi staccarsi dal sistema (K) aggiunto a (C_1), poichè (K) deve segare la serie canonica completa sulla curva generica C_1, e questa non ha come punti fissi gli i punti infinitamente vicini ad un punto i-plo; quindi (cfr. anche il § 1):

Sopra la superficie F il sistema aggiunto ad un sistema impuro con punti base distinti è irreduttibile ed ha come $(i-1)$-plo un punto base i-plo del nominato sistema impuro.

Sopra la superficie F senza curve eccezionali di genere geometrico uguale al numerico $p > 0$ di cui le sezioni piane appartengono al sistema (puro) (C), si torni a considerare il sistema impuro (C_1) di genere π_1 con s punti base distinti di molteplicità $i_1, i_2, \ldots, i_s$, e si prenda r così grande che il sistema (rC) di genere $\pi^{(r)}$ contenga (C) in modo che (C_1) abbia come residuo rispetto ad esso un sistema puro (C_2) di genere π_2; sia ancora (C') il sistema canonico. Il sistema $(rC + C' - C_2)$ residuo di (C_2) rispetto ad $(rC + C')$ ha la dimensione

$$\geqslant p + \pi_1 + \sum_1^s \frac{i_\varrho(i_\varrho - 1)}{2} - 1$$

(come abbiamo visto essendo $\omega = 0$); questo sistema non può avere alcun punto base fuori dei punti base di (C_1), poichè un tal punto sarebbe base per l'aggiunto di (C_1); d'altra parte se un punto O base i-plo per (C_1) fosse base per $(rC + C' - C_2)$, imponendo a questo sistema di avere il punto O come $(i-1)$-plo si imporrebbe alla curva generica di esso meno di $[i(i-1)]/2$ condizioni lineari e ne conseguirebbe che la dimensione del sistema aggiunto a (C_1) sarebbe $> p + \pi_1 - 1$ mentre ciò è impossibile; si conclude che staccando (C_2) da $(rC + C')$ il sistema residuo $(rC + C' - C_2)$ non può acquistare punti base, ossia è un sistema puro. Consideriamo il sistema $(rC - C_2)$ residuo di (C') rispetto al nominato sistema $(rC + C' - C_2)$; il sistema aggiunto ad $(rC - C_2)$ è la somma di $(rC + C' - C_2)$ coi punti base eventuali di $(rC - C_2)$, e però ha la dimensione

$$\geqslant p + \pi_1 + \sum_1^s \frac{i_\varrho(i_\varrho - 1)}{2} - 1$$

(numero esprimente la dimensione di $(rC+C'-C_2)$); ma il genere di $(rC-C_2)$ è

$$\leqslant \pi_1 + \sum_1^s \frac{i_\varrho(i_\varrho-1)}{2}$$

e precisamente vale

$$\pi_1 + \sum_1^s \frac{i_\varrho(i_\varrho-1)}{2}$$

se $(rC-C_2)$ non ha punti base multipli e vale meno del detto numero in caso contrario; tenendo conto del fatto che la dimensione del sistema aggiunto ad un dato sistema è uguale al genere di esso aumentato di $p-1$, si conclude che $(rC-C_2)$ non ha punti base multipli e quindi è di genere

$$\pi_1 + \sum_1^s \frac{i_\varrho(i_\varrho-1)}{2},$$

ed il suo aggiunto è proprio il sistema $(rC+C'-C_2)$ di dimensione

$$p + \pi_1 + \sum_1^s \frac{i_\varrho(i_\varrho-1)}{2} - 1 .$$

Sono dunque possibili due casi:

o il sistema $(rC-C_2)$ è un sistema puro ed allora (C_1) si ottiene da esso imponendo i punti base colle molteplicità $i_1, i_2, \ldots, i_s$ alle sue curve generiche;

o (forse) il sistema $(rC-C_2)$ ha alcuni punti base semplici (conseguenza dello staccare (C_2) da (rC)) i quali cadono in punti base di (C_1), ma però coincide col residuo del sistema canonico (C') rispetto al suo aggiunto (mentre in generale un sistema impuro è contenuto nel residuo del canonico rispetto al suo aggiunto, quando lo staccare il sistema canonico dal detto sistema aggiunto non tragga di conseguenza lo staccarsi dei punti base del primitivo sistema); allora (C_1) si ottiene da $(rC-C_2)$ imponendo le molteplicità $i_1, i_2, \ldots, i_s$ nei punti base di (C_1) sieno essi base o no per $(rC-C_2)$.

In ogni caso possiamo dunque concludere:

Ogni sistema impuro (con punti base distinti) può dedursi coll'aggiunta dei suoi punti base, non traenti con sè lo staccarsi di alcuna altra curva, da un sistema che coincide col residuo del canonico rispetto all'aggiunto, il quale è puro o (forse) ha soltanto dei punti base semplici.

5. - Cenno sulle superficie di genere 0.

Nei precedenti §§ abbiamo escluso le superficie di genere 0 alle quali non si estende la dimostrazione del teorema fondamentale del § 2. In virtù delle considerazioni svolte in quel § (cfr. anche una nota di esso) intorno alle formule di postulazione di NOETHER, ed approfittando del citato teorema di ZEUTHEN e NOETHER sulla invariantività del genere numerico nelle trasformazioni che non producono sulla superficie singolarità straordinarie, possiamo concludere che:

Sopra una superficie di genere geometrico uguale al numero 0, *un sistema* (C) *semplice di genere* π, *tale che la superficie su cui gli iperpiani segano le curve di* (C) *abbia soltanto singolarità ordinarie, possiede un sistema aggiunto* $\infty^{\pi-1}$.

Ora stabiliremo il seguente teorema:

Se sopra una superficie razionale dotata di punti multipli isolati distinti vi è un sistema semplice (C) (∞^3 *almeno*) *tale che i residui delle sue curve fondamentali sieno sistemi di genere* > 0, *quando la superficie sia rappresentata sul piano, il sistema aggiunto a* (C) *viene rappresentato dal sistema delle curve d'ordine* $n-3$ *aggiunte alle curve* C'_n *d'ordine* n *immagini di quelle di* (C), *spogliato delle componenti fisse eventuali* ([44]).

Per la dimostrazione si consideri nel piano il sistema (C'_n) delle C'_n e quello (C'_{n-3}) delle curve aggiunte d'ordine $n-3$; le curve C'_{n-3} segano anzitutto sopra la curva generica C'_n un gruppo canonico. Sia G una curva fondamentale di (C'_n) e (C'_p) il sistema residuo d'ordine p: sia (C'_{p-3}) il sistema delle curve d'ordine $p-3$ aggiunte alle C'_p (le quali sono di genere > 0). Fra le C'_{n-3} vi sono le curve composte $G+C'_{p-3}$ le quali segano sopra una C'_p dei gruppi di punti (individuanti la serie segnata da C'_{n-3}) che sommati con un gruppo sezione di una C'_p dànno gruppi equivalenti (cioè appartenenti alla stessa serie completa) a quelli segati sulla C'_p dalla curva composta $C'_n+C'_{p-3}=(G+C'_p)+C'_{p-3}$. Dunque le C'_{n-3} segano sulla C'_p gruppi della serie somma della serie canonica (segata dalle C'_{p-3}) e di quella differenza tra la serie segata dalle C'_n e la serie caratteristica di (C'_p). Tanto basta (secondo la definizione del § 1) perchè il teorema risulti dimostrato; giacchè il sistema aggiunto a (C) di genere π è in tal caso $\infty^{\pi-1}$ ed è pure $\infty^{\pi-1}$ quello (C'_{n-3}) nel piano: le componenti fisse della C'_{n-3} nel piano rappresentano curve che si possono impunemente

([44]) Ossia dal sistema aggiunto puro di quello (C'_n) delle C'_n secondo la definizione di CASTELNUOVO. La restrizione che i sistemi residui delle curve fondamentali di (C) siano di genere > 0 dipende solo dal fatto che la definizione data pel sistema aggiunto non si estende al detto caso escluso: siccome una superficie con una rete di curve razionali è razionale, possiamo estendere convenzionalmente il teorema di guisa che il sistema aggiunto risulta definito anche pei sistemi (C) ∞^r contenenti un sistema ∞^{r-1} di curve razionali.

aggiungere al sistema aggiunto a (C) perchè essendo fondamentali per (C) non ne risultano alterati i caratteri essenziali di esso (§ 1).

6. - Un teorema sulla superficie del 4° ordine.

Sopra una superficie di genere 1 (geometrico e numerico) si consideri un sistema (C) con s punti base distinti di molteplicità $i_1, i_2, \ldots, i_s$ risp., e sia i la più alta molteplicità di un punto base. Indichiamo con (C') il sistema aggiunto a (C), con (C'') l'aggiunto di (C') (o, se si vuole, 2° aggiunto di (C)), ecc.; il sistema $(C^{(i)})$ i-esimo aggiunto di (C) è un sistema puro da cui (C) è dedotto coll'aggiunta dei suoi punti base.

Sopra una superficie di genere 1 non vi sono curve canoniche (non eccezionali), quindi *un sistema puro di genere π è l'aggiunto di sè stesso e però ha la dimensione π e il grado* $2(\pi-1)$.

Si possono classificare le superficie di genere 1 a seconda del sistema puro di dimensione minima che esse contengono. In questa classificazione s'incontra dapprima la superficie del 4° ordine, poi la superficie del 6° ordine di S_4 sezione d'una quadrica con una varietà cubica, poi la superficie di 8° ordine sezione di 3 quadriche in S_5, e così via; l'irreducibilità di queste superficie (generali) a quella generale del 4° ordine seguirà dalle considerazioni che andiamo ad esporre ([45]).

Senza toccare l'interessante questione di assegnare *tutti* i tipi irreducibili di superficie del genere 1, ci limitiamo qua a risolvere il seguente problema:

Quando due superficie generali del 4° ordine possono essere riferite punto per punto?

Si dimostrerà che questo avviene soltanto quando esse sono proiettive.

Invece si immaginino due superficie generali del 4° ordine riferite punto per punto; alle sezioni piane dell'una corrispondono sull'altra le ∞^3 curve d'un sistema lineare, le quali se la superficie è generale debbono essere intersezioni complete di altre superficie ([46]); se esse non fossero ancora sezioni piane (cioè se le superficie non fossero proiettive), il sistema ∞^3 (essendo di genere 3) avrebbe dei punti base multipli e quindi non sarebbe puro: ciò è assurdo perchè in una trasformazione birazionale d'una superficie un sistema puro è sempre mutato in un sistema puro. Dunque:

([45]) Il sig. CASTELNUOVO mi segnalò le dette classi di superficie di genere 1 contenenti lo stesso numero di moduli delle superficie del 4° ordine e ad esse irreducibili.

([46]) Cfr. NOETHER, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischer Raumcurve*, § 11, « Abhandl. d. Akad. d. Wiss. », Berlin, 1883.

Due superficie generali del 4° ordine riferibili punto per punto sono proiettive.

Si trae pure poichè gli unici sistemi puri sopra una superficie generale del 4° ordine sono quelli segati da tutte le superficie d'ordine n, che:

Una superficie generale del 4° ordine non è riferibile ad altre superficie normali senza curve eccezionali di uno spazio superiore, tranne di ordine $4n^2$ *nello spazio* S_{2n^2+1} (*a sezioni iperpianali di genere* $2n^2+1$).

Il teorema dato prima per le superficie generali del 4° ordine si estende a quelle generali d'ordine $n > 4$, sia collo stesso metodo, sia (anche più semplicemente) usando qui del sistema canonico; per modo che si conclude:

Due superficie generali d'ordine $n \geqslant 4$ (*in* S_3) *si possono riferire biunivocamente solo quando sieno proiettive.*

Il teorema non sussiste per $n = 3$.

7. - Osservazioni sui resultati contenuti in questo capitolo.

I resultati fondamentali di questo capitolo fondati sopra l'esistenza d'un sistema $\infty^{p+\pi-1}$ aggiunto ad un sistema di genere π sopra una superficie di genere geometrico $p > 0$ son fatti dipendere dalla restrizione $K = 0$ che si è trovata verificata se esiste un sistema puro semplice (C) tale che $\delta(2C) = 0$.

Poichè si tratta d'un punto fondamentale nella teoria delle superficie è interessante stabilire come la uguaglianza $\delta(2C) = 0$ segua da quella $\delta(C) = 0$ ove si sappia che la serie caratteristica di (C) è completa. Invero nel seguente capitolo verrà dimostrato che ogni sistema puro ha la serie caratteristica completa se tale proprietà compete al sistema canonico; sebbene non sembri possa dedursi un tal fatto dalla restrizione già ammessa per la superficie ($K = 0$), pure il fatto stesso appare così legato alla restrizione medesima per effetto del teorema accennato che vogliamo dimostrare.

Premettiamo le seguenti considerazioni fondate sullo stesso concetto che ha servito per il lemma del § 2:

Sopra una superficie si abbiano due sistemi (C), (K); sia r_0 la dimensione di (C), r_1 quella di $(C+K)$, r_2 quella di $(C+2K)$.

Al sistema $(C+2K)$ appartiene il sistema ∞^{r_1} costituito da una curva fissa K' di (K) presa insieme con tutte le curve di $(C+K)$, cioè (simbolicamente) il sistema

$$(C + K) + K' ;$$

parimenti se K'' è un'altra curva di (K) a $(C+2K)$ appartiene il sistema

$$(C + K) + K'' ;$$

i due sistemi (∞^{r_1} ciascuno) hanno comune un sistema di dimensione r_0 (cioè $(C)+K'+K''$) e però il loro sistema somma ha la dimensione

$$\geqslant 2r_1 - r_0 .$$

Ora questo sistema è contenuto nel sistema delle curve di $(C+2K)$ che passano per le D intersezioni delle curve K', K''; se dunque sono ν_2 le condizioni imposte dal gruppo $K'K''$ alle curve di $(C+2K)$ che debbono contenerlo, si ha:

$$r_2 \geqslant 2r_1 - r_0 + \nu_2 .$$

Indichiamo con ν_1 il numero delle condizioni che il gruppo $K'K''$ impone alle curve di $(C+K)$, e sia r la dimensione di (K); allora per $\nu_1 - 1$ tra i D punti del gruppo $K'K''$ passa una curva di $(C+K)$ non contenente tutti i D punti del gruppo, e per $r-2$ punti del gruppo medesimo (appartenente alla serie caratteristica g_D^{r-1} di (K)) si può condurre una curva K''' di (K) non contenente tutti i D punti, la quale insieme con una curva di $(C+K)$ pei detti $\nu_1 - 1$ punti compone una curva di $(C+2K)$ non contenente tutto il gruppo $K'K''$; ne segue che

$$\nu_2 \geqslant \nu_1 + r - 2 \qquad \text{o} \qquad \nu_2 \geqslant D - 1$$

(l'ultima disuguaglianza valendo nel caso che sia $\nu_1 + r - 3 > D - 1$). Si deduce

$$r_2 \geqslant 2r_1 - r_0 + \nu_1 + r - 2 ,$$

o

$$r_2 \geqslant 2r_1 - r_0 + D - 1 .$$

Ora sia (C) il sistema canonico (supposto irreduttibile, con $r_0 = p - 1 \geqslant 2$), e (K) sia un sistema puro semplice ∞^r di genere π e grado D, la cui serie caratteristica sia (per ipotesi) completa; inoltre il sistema $(C+K)$ aggiunto a (K) abbia la dimensione $p + \pi - 1$.

Il gruppo della serie caratteristica completa g_D^{r-1} di (C), impone (pel teorema di RIEMANN-ROCH)

$$\nu_1 = D - r + 1$$

condizioni alle curve del sistema aggiunto $(C+K)$ che debbono contenerla; in questo caso è dunque:

$$r_2 \geqslant D - 1\,, \qquad (r_1 = p + \pi - 1)\,,$$

e perciò

$$r_2 \geqslant 2(p + \pi - 1) - (p - 1) + D - 1$$
$$r_2 \geqslant p + 2\pi + D - 2\ ;$$

e poichè $2\pi + D - 1$ è il genere π_2 di $(C+K)$ si ha proprio

$$r_2 = p + \pi_2 - 1$$

(non potendo essere $r_2 > p + \pi_2 - 1$).

Dunque (poichè è ora $\delta(K) = \delta(2K) = 0$) si ha il teorema:

Se sopra una superficie di genere $p > 2$ (a sistema canonico irreduttibile) si ha un sistema puro semplice di genere π avente la serie caratteristica completa, e di cui l'aggiunto è $\infty^{p+\pi-1}$ per ogni altro sistema di genere Π appartenente alla stessa superficie la dimensione del sistema aggiunto è

$$p + \Pi - 1\,,$$

cioè la superficie ha il genere geometrico uguale al numerico.

IV.

SISTEMI PURI

ESTENSIONE DEL TEOREMA DI RIEMANN-ROCH

1. - La serie caratteristica.

In seguito al teorema del capitolo precedente § 4, il nostro maggior interesse si rivolge allo studio dei sistemi puri, poichè dalle proprietà di questi potranno dedursi quelle di tutti i sistemi impuri ottenuti coll'aggiunta di punti base, non avendo in complesso a superare difficoltà maggiori di quelle che s'incontrano nello studio dei sistemi lineari di curve piane e di una indole non molto diversa. In questo capitolo parlando di un sistema (C) (ove non si avverta espressamente il contrario) intendiamo senz'altro che sia un sistema puro irreduttibile di dimensione $\geqslant 2$ (completo); supponiamo inoltre che la superficie di cui si tratta abbia il genere geometrico uguale al numerico $p > 0$, e intendiamo che il *sistema* (K) *aggiunto a* (C) *sia semplice*, e per ciò basta che sia semplice (C) o il sistema canonico.

Dato il sistema (C) se ne designerà con π il *genere*, con n *il grado*, con r *la dimensione*, e diremo senz'altro che (C) ha i *caratteri* π, n, r. Sia (K) il sistema aggiunto di (C) (necessariamente puro) e Π, N, R i suoi caratteri. Vi sono curve K di (K) spezzate in una C di (C) ed in una C' del sistema canonico (C'); una curva generica C o una generica C' (poichè (C), (C') son sistemi puri) non hanno punti multipli in punti semplici della superficie (o ipermolteplicità nei punti multipli) dimodochè per la formula di NOETHER ([47])

$$\Pi = p^{(1)} + 3(\pi - 1) - n :$$

due curve spezzate ciascuna in una C ed una C' si segano come due K in N punti e quindi:

$$N = p^{(1)} - 1 + 4(\pi - 1) - n ;$$

si ha poi (Cap. III, § 2):

$$R = p + \pi - 1 .$$

Si riferiscano ora le curve K del sistema (K) aggiunto a (C) agli iperpiani di $S_{p+\pi-1}$ e si consideri la superficie F così trasformata.

Una curva C sta sulla F in un $S_{\pi-1}$ poichè vi sono ∞^{p-1} K spezzate in una C ed in una curva canonica, ossia ∞^{p-1} iperpiani per la C. Invece una curva canonica C' sta in un $S_{p+\pi-2-r}$, poichè vi sono ∞^r K spezzate in una C' fissa ed in una C. Le curve K ossia gli iperpiani di $S_{p+\pi-1}$ segano sulla C la serie canonica completa (la C è curva canonica in $S_{\pi-1}$). Consideriamo gli iperpiani che passano per lo $S_{p+\pi-2-r}$ contenente una C' e la serie che essi segano sopra una curva C; essa viene segata nello $S_{\pi-1}$ della C dagli $S_{\pi-2}$ contenenti l'intersezione dello $S_{p+\pi-2-r}$ di C' e dello $S_{\pi-1}$ di C; essa è dunque completa se i $2(\pi-1)-n$ punti comuni alle C, C', *individuano* l'intersezione dei 2 spazi a cui le C, C', risp. appartengono; se questo non accade, ed i detti $2(\pi-1)-n$ punti non individuano quella intersezione, ma uno spazio di dimensione minore, la detta serie è invece necessariamente scompleta. Ma allora per la stessa ragione è scompleta (e con un difetto di completezza non minore) la serie che gli iperpiani $(S_{p+\pi-2})$, passanti per la detta intersezione degli

([47]) « Acta Mathematica », 1886.

spazi di C, C', segano sulla C'. Ora la 1ª serie non è altro che la serie caratteristica del sistema (C), la 2ª è quella del sistema canonico (C') (suppostane l'esistenza). Dunque:

Se la serie caratteristica del sistema canonico è completa, è completa la serie caratteristica di ogni altro sistema puro ([48]).

Nel seguito considereremo per ora soltanto le superficie aventi la *serie caratteristica del sistema canonico completa* (se $p > 2$). Così su tali superficie *ogni sistema puro ha la serie caratteristica completa*; ciò accade anche se $p = 1$ (cfr. cap. III), e se le curve canoniche si compongono di quelle d'un fascio ($p \geqslant 2$) bastando ripetere in questo caso il precedente ragionamento; *anche questi casi nei quali non esiste serie caratteristica del sistema canonico sono tra quelli che consideriamo.*

2. - Estensione del teorema di Riemann-Roch.

Ci proponiamo il seguente problema:

Quante curve del sistema aggiunto a (C) passano per un gruppo della sua serie caratteristica, cioè per un gruppo comune a due curve C?

Supponiamo dapprima il sistema (C) *non speciale* (cioè non contenuto nel canonico), e consideriamo il sistema (K) aggiunto a (C). Sieno π n r i caratteri di (C); e riferiamo le curve K agli iperpiani di $S_{p+\pi-1}$ in guisa da ottenere una superficie trasformata F, sulla quale (come prima abbiam visto) una C sta in un $S_{\pi-1}$.

Due arbitrari $S_{\pi-1}$ contenenti ciascuno una curva C non possono esser contenuti in uno spazio a meno di $p+\pi-1$ dimensioni, altrimenti il sistema *doppio* di (C) (contenente tutte le coppie di curve C) sarebbe contenuto nell'aggiunto (K) di (C) e quindi (togliendo una C da ambedue i sistemi) (C) sarebbe contenuto nel canonico (cioè sarebbe speciale); quindi due tali $S_{\pi-1}$ si segano secondo uno spazio $S_{\pi-1-p}$ per il quale passano ∞^{2p-1} iperpiani. Ognuno degli ∞^{2p-1} iperpiani passanti per $S_{\pi-1-p}$ passa per gli n punti comuni alle due curve C, quindi per gli n punti passano almeno ∞^{2p-1} curve K, ed in generale $\infty^{2p-1+\omega}$ con $\omega \geqslant 0$.

La quantità ω ha un altro significato notevole; invero poichè gli iperpiani segano sulla C una serie completa, quelli passanti per una C segheranno sopra un'altra C una serie il cui difetto di completezza è ω (cfr. § prec.) poichè gli n punti comuni a due C stanno in un $S_{\pi-1-p-\omega}$ immerso nello $S_{\pi-1-p}$ comune ai due $S_{\pi-1}$ che contengono le dette C.

([48]) Il teorema si estenderebbe colla medesima dimostrazione anche ai sistemi impuri che coincidono col residuo del canonico rispetto all'aggiunto, notando che una curva eccezionale non ha intersezione con una curva canonica.

Ora questa serie è quella che le curve canoniche segano sulla curva C, la quale (poichè (C) è non speciale) è una $g^{p-1}_{2(\pi-1)-n}$ immersa dunque in una serie completa $g^{p-1+\omega}_{2(\pi-1)-n}$. Si vede intanto che per il gruppo di punti comune a due curve C d'un sistema non speciale passano $\infty^{2p-1+\omega}$ curve del sistema aggiunto, essendo ω il difetto di completezza della serie che le curve canoniche segano sulla C.

Sia ora (C) un sistema speciale, e sia r' la dimensione del *residuo* (s'intende residuo di esso rispetto al canonico), designeremo la quantità $i=r'+1$ col nome di *indice di specialità* del sistema. (Quando $i=0$ il sistema è non speciale). Allora il doppio di (C) è contenuto nell'aggiunto (K) ed il residuo di questo doppio rispetto a (K) è il residuo di (C) (rispetto al canonico) e quindi è di dimensione r'; due $S_{\pi-1}$ contenenti ciascuno una C sulla F in $S_{p+\pi-1}$, sono ora immersi in un $S_{p+\pi-1-i}$ e quindi han comune un $S_{\pi-1-p+i}$ per il quale passano ∞^{2p-1-i} iperpiani. Quindi si conclude come nel caso precedente che pel gruppo comune a due curve C passano $\infty^{2p-i-1+\omega}$ curve del sistema aggiunto, dove $\omega\geqslant 0$ è ancora il difetto di completezza della serie segata sopra una C dalle curve canoniche, la quale serie è dunque una $g^{p-1-i}_{2(\pi-1)-n}$ (poichè essendo r' la dimensione del sistema residuo di (C) per un gruppo della serie passano $\infty^i=\infty^{r'+1}$ curve canoniche giacchè una C fa parte di ∞^1 curve canoniche) immersa in una serie completa $g^{p-1-i+\omega}_{2(\pi-1)-n}$. Così possiamo concludere:

Per un gruppo comune a due curve C d'un sistema non speciale, sopra una superficie di genere p, passano $2p+\omega$ curve linearmente indipendenti del sistema aggiunto; e se il sistema è speciale coll'indice di specialità i ne passano $2p-i+\omega$; la quantità $\omega\geqslant 0$ è in ambo i casi il difetto di completezza della serie segata dalle curve canoniche sopra una curva C ([49]).

Diremo ω la *sovrabbondanza* del sistema (C); questa denominazione è intanto giustificata dal fatto che per $p=0$ (quindi anche $i=0$) la ω è la ordinaria sovrabbondanza dei sistemi lineari di curve piane ([50]) (supposta la superficie razionale); ma la denominazione stessa verrà meglio giustificata quando considereremo il sistema (C) come segato da superficie aggiunte sopra una superficie in S_3 ed esamineremo la differenza fra la sua dimensione effettiva e quella *virtuale* data dalle formule di postulazione di NOETHER.

D'ora innanzi parlando di un sistema dovremo considerare insieme ai caratteri π, r, n già definiti anche la sua sovrabbondanza ω; se $\omega=0$

([49]) Il teorema può anche enunciarsi dicendo che in S_3 vi sono per una retta $2p+\omega-i$ superficie linearmente indipendenti d'ordine $n-3$ aggiunte ad una d'ordine n e genere p, quando le sezioni piane appartengono ad un sistema (puro) d'indice di specialità i e sovrabbondanza ω, essendo ω il difetto di completezza del sistema delle curve d'ordine $n-4$, segato sopra un piano dalle aggiunte d'ordine $n-4$.

([50]) Cfr. CASTELNUOVO, « Accademia di Torino, Memorie », 1891.

diremo il sistema regolare. I caratteri π, r, n, ω (ed i, cioè l'indice di specialità, se si tratta d'un sistema speciale) di un sistema (C) sono legati da una relazione nella quale figura il genere p della superficie. Invero sopra una curva C la serie caratteristica g_n^{r-1} (che è completa), è residua di una serie completa $g_{2(\pi-1)-n}^{p-1+\omega-i}$ a cui appartiene quella $g_{2(\pi-1)-n}^{p-1-i}$ segata dal sistema canonico, quindi per il teorema di RIEMANN-ROCH si ha

$$\pi - 1 - n + r = p + \omega - i$$

dove è $i = 0$ se (C) è non speciale.

Questa relazione dà un'estensione alla superficie (e per ora soltanto pei sistemi puri) del teorema di RIEMANN ROCH relativo alla serie lineari appartenenti alle curve algebriche. Si può enunciare il resultato sotto la forma seguente:

Per un sistema puro non speciale di caratteri π, r, n, ω si ha:

$$\pi - 1 - n + r = p + \omega \quad ({}^{51}).$$

Se un dato sistema speciale puro di caratteri π, r, n, ω ha un sistema residuo di dimensione r' si ha:

$$r' = p - \pi + n - r + \omega \quad ({}^{52}).$$

3. - Sistemi speciali residui uno dell'altro.

La relazione precedentemente trovata permette di esprimere in funzione dei caratteri di un sistema speciale la dimensione del residuo, nell'ipotesi che il dato sistema sia puro; la restrizione stessa è in generale

---

([51]) Enunciando questo resultato sotto forma proiettiva si ha l'estensione del noto teorema di CLIFFORD per le curve (« Phil. Transactions », 1878).

([52]) Non si creda che possa prendersi sempre in queste formule $\omega = 0$. Basta per ciò considerare gli esempi seguenti: 1° il sistema segato dalle quadriche sopra la superficie del 5° ordine dotata di un punto triplo; 2° il sistema segato dai piani sulla superficie del 7° ordine con due punti tripli ed il residuo segato dalle quadriche per i due punti.

Il 2° teorema sotto la forma

$$r' \geqslant p - \pi + n - r$$

è stato dato dal sig. NOETHER (« Comptes rendus », 1886) con una dimostrazione non differente da quella qui usata: mancano solo là le restrizioni da noi introdotte, che appariscono necessarie per dimostrare come la serie caratteristica di un sistema (C) sia completa (ciò che viene omesso), ed il teorema appare qua completato essendosi assegnato il significato di ω.

I due teoremi enunciati vengono poi estesi anche ai sistemi impuri.

soddisfatta quando si considerano due sistemi residui uno dell'altro di dimensione $\geqslant 2$ in relazione reciproca (C), (C').

Sieno (C), (C') due sistemi puri residui uno dell'altro (di dimensione $\geqslant 2$), esprimiamo tutti i caratteri π', r', n', ω' dell'uno (C') in funzione di quelli π, r, n, ω dell'altro (C), o viceversa.

Sia al solito $p^{(1)}$ il 2° genere della superficie, e sia D il numero dei punti comuni ad una curva C ad una C'. Poichè il sistema canonico è la somma di (C), (C') usando di note formule già adoperate, si ha:

$$p^{(1)} = \pi + \pi' + D - 1$$

$$(p^{(2)} =) p^{(1)} - 1 = n + n' + 2D\,,$$

e, poichè una curva canonica incontra una C in $2(\pi - 1) - n$ punti,

$$2n + D = 2(\pi - 1)\,.$$

Mediante l'ultima relazione eliminando D si deduce

$$D = 2(\pi - 1) - 2n$$

$$p^{(1)} = 3(\pi - 1) + \pi' - 2n$$

$$p^{(1)} - 1 = n' + 4(\pi - 1) - 3n\;;$$

siccome poi sottraendo segue

$$n - \pi = n' - \pi'$$

e si ha

$$r + r' = p - \pi + n + \omega = p - \pi' + n' + \omega'\,,$$

così si deduce:

$$\omega = \omega'\,.$$

Dunque: *Fra i caratteri π, r, n, ω, π', r', n', ω', dei due sistemi speciali (puri), $(C,)$ (C') residui uno dell'altro, di dimensione* > 1, *sussistono le relazioni*

$$\begin{cases} r' = p - \pi + n - r + \omega \\ \pi' = p^{(1)} - 3(\pi - 1) + 2n \\ n' = p^{(1)} - 1 - 4(\pi - 1) + 3n \\ \omega' = \omega \qquad (n - \pi = n' - \pi')\,. \end{cases}$$

4. - La sovrabbondanza. - Dimensione virtuale d'un sistema.

Il concetto della sovrabbondanza d'un sistema (C) cui siamo giunti partendo dalla considerazione delle curve del sistema aggiunto a (C) che passano pel gruppo comune a due curve C, è suscettibile di ricevere un'altra interpretazione, cui già ho accennato, la quale rende meglio ragione della denominazione scelta.

Si consideri un sistema (K) di caratteri Π, R, N, Ω, I (dove l'indice di specialità $I = 0$ se (K) è non speciale) ed un sistema (C) contenuto in esso e residuo di una curva C'; sieno π, r, n, ω, i i caratteri di (C), e la curva C' sia di genere π' incontrata in D punti da una curva C.

Supponiamo che la C' non abbia punti multipli in punti semplici della superficie (o ipermolteplicità nei punti multipli) di guisa che, essendo (C) un sistema puro, una curva $C+C'$ non abbia altri punti multipli che non siano tali per le K eccetto i punti doppi intersezioni di una C e di una C', allora si ha:

$$\Pi = \pi + \pi' + D - 1 .$$

Una curva K incontra una curva K spezzata in una C e nella C' in N punti; d'altra parte una curva K spezzata in una C ed una C' incontra una C in $n+D$ punti, quindi una K incontra la C' in D' punti dove:

$$N = n + D + D' .$$

Ora il sistema (K) sega su C' una serie $g_{D'}^{R-r-1}$; se indichiamo con ε il difetto di completezza della serie e con h il suo indice di specialità si ha dunque:

$$R - r - 1 + \varepsilon = D' - \pi' + h$$

ossia:

$$R = D' - \pi' + h - \varepsilon + r + 1 .$$

Ne segue:

$$\Pi - 1 - N + R = (\pi + \pi' + D - 1) - \\ - 1 - (n + D + D') + (D' - \pi' + h - \varepsilon + r + 1)$$

ossia:

$$\Pi - 1 - N + R = \pi - 1 - n + r + (h - \varepsilon) :$$

d'altra parte è:

$$\Pi - 1 - N + R = p + \Omega - I$$
$$\pi - 1 - n + r \quad = p + \omega - i$$

quindi

$$\Omega - I = \omega - i + (h - \varepsilon)$$

ed

$$\omega - i = \Omega - I + (\varepsilon - h)\,.$$

Dunque:

Se da un sistema (K) se ne deduce un altro puro (C) come residuo di una curva C' che non abbia punti multipli in punti semplici della superficie (nè ipermolteplicità nei suoi punti multipli), la differenza fra la sovrabbondanza e l'indice di specialità di (C) è uguale all'analoga differenza per (K) aumentata della differenza fra il difetto di completezza e l'indice di specialità della serie che le curve K segano sulla C'.

Di questo teorema è utile il corollario:

La differenza fra la sovrabbondanza e l'indice di specialità d'un sistema (C) residuo della curva C' rispetto ad un sistema regolare non speciale (K) è uguale alla differenza fra il difetto di completezza e l'indice di specialità della serie segata dalle curve K (di (K)) sulla C'.

Per il nostro scopo occorre ancora dimostrare il lemma:

Il sistema aggiunto ad un sistema puro (C) è regolare.

Questo si verifica immediatamente. Infatti se π, r, n, sono i caratteri del sistema (C), e Π, R, N, Ω quelli del suo aggiunto, si ha:

$$\Pi = \pi + p^{(1)} + 2(\pi - 1) - n - 1$$
$$R = p + \pi - 1$$
$$N = n + p^{(1)} - 1 + 2\{2(\pi - 1) - n\}$$

e quindi:

$$\Pi - 1 - N + R = p\,,$$

ed

$$\Omega = 0\,. \qquad \text{c.d.d.}$$

Deduciamo che sopra una superficie F di S_3 d'ordine n senza curve eccezionali, le superficie aggiunte d'ordine $\geqslant n-3$ segano un sistema regolare; infatti abbiamo già avuto occasione di osservare che le aggiunte d'ordine $n - 3 + r$ segano sulla F il sistema aggiunto a quello r-plo delle sezioni piane.

Ora si consideri sulla F un sistema (C) segato da superficie aggiunte d'ordine $> n - 4$. Sappiamo che il sistema segato da tutte le superficie aggiunte d'ordine $> n - 4$ ha la dimensione che si può calcolare in base alle formule di postulazione di NOETHER, le quali in base alla convenzione $p_1 = p$ (cap. III, § 3) ed al corollario di CASTELNUOVO secondo il quale si ha l'espressione della differenza fra il numero delle superficie aggiunte di un dato ordine e quello delle superficie aggiunte dell'ordine consecutivo, debbono riguardarsi come valevoli anche per le superficie dotate di singolarità straordinarie. Se vogliamo calcolare secondo queste formule di postulazione la dimensione che dovrebbe competere al sistema (C), dobbiamo far passare per una curva C (di (C)) un'aggiunta d'ordine $n - 3 + l$ $(l \geqslant 0)$, ψ_{n-3+l}, la quale seghi ulteriormente la F in una curva C' (che possiamo supporre non avente punti multipli in punti semplici della superficie) e vedere quante condizioni la C', unita al gruppo base, imponga ad una ψ_{n-3+l} che debba contenerla. Possiamo dire che il numero così calcolato (che, per così dire dovrebbe esprimere la dimensione del sistema (C)) è la dimensione *virtuale* del sistema (C); ma può sorgere il dubbio che questo numero vari con l, o muti rifacendo la costruzione per una superficie trasformata.

A questa questione rispondono i risultati precedenti. Infatti quando uniamo la C' al gruppo base delle ψ_{n-3+l}, e vogliamo calcolare l'effetto prodotto sulle formule di postulazione, noi veniamo in sostanza a considerare la serie g_n segata da tutte le ψ_{n-3+l} sulla C' (di genere π') come completa e non speciale, ed allora la sua dimensione vien data dal teorema $n - h = \pi'$; il numero ϱ così calcolato è la dimensione virtuale di (C), ed in base al calcolo precedente (poichè l'espressione $\pi - 1 - n + \varrho$ non differisce dall'analoga calcolata per il sistema regolare non speciale segato dalle ψ_{n-3+l}) si ha:

$$\pi - 1 - n + \varrho = p \, .$$

Se vogliamo la dimensione effettiva r dobbiamo introdurre la differenza θ fra il difetto di completezza e l'indice di specialità della serie che le ψ_{n-3+l} (ossia le curve del sistema regolare non speciale che esse segano sulla superficie) segano sulla C', e si avrà:

$$r = \varrho + \theta \, ,$$

dove $\theta = \omega - i$; cioè si avrà appunto come abbiamo trovato

$$\pi - 1 - n + r = p + \omega - i \, .$$

Concludiamo:

La dimensione ϱ *(virtuale) di un sistema puro* (C) *calcolata facendo segare il sistema* (C) *da superficie aggiunte d'ordine* $> n-4$ *sopra una superficie d'ordine* n *(in* S_3*) priva di curve eccezionali, è un carattere invariantivo del sistema* (C) *e coincide colla dimensione effettiva se il sistema è regolare non speciale, in modo che si ha:*

$$\pi - 1 - n + \varrho = p \, .$$

La differenza $(\omega - i)$ *fra la sovrabbondanza e l'indice di specialità di* (C) *è uguale alla differenza* $(r - \varrho)$ *tra la dimensione effettiva e quella virtuale del sistema stesso.*

Così la denominazione di sovrabbondanza data alla quantità ω (definita nel § 2) appare pienamente giustificata. Di più è interessante notare che *il teorema stabilito sussiste indipendentemente dalla completezza della serie caratteristica del sistema canonico* ([53]) (da cui segue quella di (C)) *e quindi anche prescindendo da quella ipotesi si ha la relazione:*

$$\pi - 1 - n + r = p + \omega - i$$

dove la sovrabbondanza ω *è definita dalla uguaglianza*

$$\omega - i = r - \varrho \, .$$

Solo non risulta così che sia sempre $\omega \geqslant 0$ come si è riconosconiuto sotto la precedente restrizione, ma questo resultato sarà stabilito nel successivo § al di là di un certo limite per r.

Il teorema stesso si estende ai sistemi impuri (C') *normali, dedotti* da (C) *coll'aggiunta di* s *punti base di molteplicità* $h_1, h_2, \ldots, h_s$; infatti i caratteri $\pi', n', r', \omega', i'$ di (C') si esprimono per quelli di (C) mediante le formule:

$$\pi' = \pi - \sum \frac{h(h-1)}{2} \, , \qquad n' = n - \sum h^2 \, , \qquad r' = r - \sum \frac{h(h+1)}{2} + \theta$$

(dove $\theta \geqslant 0$ è il numero dei legami tra i detti punti base) dimodochè risulta

$$\pi' - 1 - n' + r' = \pi - 1 - n + r + \theta \, ;$$

([53]) Infatti nel dimostrarlo non si è tenuto conto di quella ipotesi.

d'altra parte $i' = i$ (poichè (C') e (C) hanno lo stesso sistema residuo) e la dimensione virtuale ϱ' di (C') vale

$$\varrho' = \varrho - \sum \frac{h(h+1)}{2},$$

sicchè si conclude:

$$\pi' - 1 - n' + r' = p + \omega' - i' \quad (\omega' = \omega + \theta) \text{ (}^{54}\text{)}.$$

Ora è opportuno rilevare una differenza peculiare che si presenta fra lo studio delle serie complete lineari di gruppi di punti sopra una curva e quello dei sistemi lineari di curve sopra una superficie. Nella geometria sulle curve di genere π si presentano accanto alle serie g_n^r non speciali la cui dimensione è data dal teorema $n - r = \pi$ quelle speciali la cui dimensione è, per così dire, superiore a quella virtuale, quindi per una g_n^r completa il binomio $n - r$, che di regola può considerarsi uguale al genere π della curva sostegno, non supera mai questo genere π, ed è $n - r < \pi$ solo quando la g_n^r è contenuta in una data serie (la canonica $g_{2(\pi-1)}^{\pi-1}$). Nel piano la dimensione di un sistema lineare normale può superare quella virtuale (se vi sono legami tra i punti base), ma non può esserle inferiore; per così dire una sola causa perturbatrice opera anche qui in un solo senso sulla dimensione del sistema, ma a differenza di quel che avviene sulle curve la causa perturbatrice non cessa con l'elevarsi della dimensione del sistema (ma solo coll'elevarsi della dimensione in confronto al genere).

Sulle superficie, di genere qualunque, vi sono in generale due cause perturbatrici opposte per le quali la dimensione effettiva può differire dalla virtuale; l'una dipende dall'esser il sistema contenuto nel canonico ed opera quindi limitatamente (come per le curve, ma in senso opposto), l'altra opera invece (come vedremo) su sistemi comunque elevati (come nel piano) ed è legata (pure come nel piano) alle curve fondamentali del sistema ([55]). Per ciò la opportunità di dare due nomi diversi (sovrabbondanza e indice di specialità) ai caratteri modificatori della dimensione che provengono dalle due cause nominate, giacchè introducendo soltanto la loro differenza ($\omega - i = r - \varrho$) si avrebbe un termine correttivo algebrico, ma si presenterebbe allora come regolare un sistema speciale sovrab-

---

([54]) Pei sistemi di curve piane sussiste pure la relazione $\pi - 1 - n + r = \omega$ $(p = 0;\ i = 0)$ contenuta essenzialmente nel teorema del sig. Segre (« Circolo Mat. di Palermo », t. I) o in quello del sig. Castelnuovo (« Accad. di Torino, Memorie », 1891, pag. 24).

([55]) Così anche segando sopra una superficie un sistema mediante le superficie per una curva, l'errore nell'applicazione delle formule di postulazione dipende dall'esser scompleta o speciale la serie che le superficie postulabili segano sulla curva.

bondante in cui $\omega = i$, un sistema cioè che (dal punto di vista geometrico) apparisce doppiamente irregolare.

5. - Un teorema sulla sovrabbondanza.

Per un sistema puro o impuro (C) di caratteri π, r, n, ω, i, sopra una superficie di genere p, siamo pervenuti alla relazione

$$\pi - 1 - n + r = p + \omega - i\,,$$

o, introducendo la dimensione virtuale ϱ, all'altra

$$\pi - 1 - n + \varrho = p\,,$$

ed abbiamo visto che $\omega \geqslant 0$ supponendo che la serie caratteristica del sistema canonico fosse completa, poichè di là abbiamo dedotto che la serie caratteristica di un sistema puro doveva pure esser completa; si sono esclusi soltanto i sistemi impuri dedotti coll'aggiunta di punti base da un sistema con soli punti base semplici coincidente col residuo del canonico rispetto al suo aggiunto (anzichè puro), ma anche per quelli sarebbe facile dimostrare come sussista la relazione precedente lievemente modificata (aggiungendo al grado il numero dei detti punti base semplici).

Quando non si sa nulla circa la completezza della serie caratteristica del sistema canonico e quindi del sistema puro da cui (C) è dedotto, rimane incerto il segno di ω, che soltanto può asserirsi essere non minore della sovrabbondanza del corrispondente sistema puro.

Vediamo cosa possa dirsi del segno di ω prescindendo dalla detta ipotesi; possiamo supporre (senza restrizione), che (C) sia un sistema puro (di caratteri π, n, r, ω, i); indichiamo con (K) l'aggiunto a (C) di caratteri Π, R, N, Ω $(I = 0)$.

Secondo quel che abbiamo dimostrato, se è θ il difetto di completezza della serie $g^{p+\pi-1-(r+1)}_{2(\pi-1)-n+p^{(1)}-1}$ segata da (K) sopra una curva canonica (generica) C' diminuito dell'indice di specialità della medesima serie g, sussiste la relazione

$$\Pi - 1 - N + R = \pi - 1 - n + r - \omega + i = \pi - 1 - n + r - \theta \qquad (= p):$$

poichè $i \geqslant 0$ se anche $\theta \geqslant 0$ segue necessariamente $\omega \geqslant 0$.

Basta dunque, perchè si possa concludere che $\omega \geqslant 0$, sapere che la serie g segata da (K) sulla C' è non speciale, come ad esempio se

$$2(\pi-1)-n>p^{(1)}-1 .$$

È notevole il fatto che questa circostanza può essere accertata soltanto col prendere r abbastanza grande. Appunto la determinazione di questo limite per r forma l'oggetto di questo §.

Per ciò che abbiamo notato alla fine del § 1 si può supporre qui che sia $p>2$ e che il sistema canonico sia irreduttibile.

Supponiamo dapprima che il passaggio per un punto di una curva canonica tragga di conseguenza il passaggio di essa per un altro punto coniugato della detta curva supposta iperellittica; allora (secondo NOETHER) ([56]) è

$$2p-2=p^{(1)}+1 .$$

Sia (C) un sistema puro di dimensione

$$r \geqslant \frac{p^{(1)}+1}{2} .$$

Se (C) è speciale deve essere

$$r=p-1$$

e però (C) è il sistema canonico per il quale $\omega=0$.

Se (C) è non speciale $(i=0)$, ma contiene il sistema canonico, la serie segata dall'aggiunto (K) sulla curva canonica C' è non speciale o è (forse) la serie canonica; nel 1° caso $\omega \geqslant 0$; il 2° caso è impossibile giacchè (C) conterrebbe totalmente il sistema canonico (poichè la C e la C' hanno $p^{(1)}-1$ punti comuni) e quindi avrebbe lo stesso grado di esso (cap. I) mentre esso è normale (anzi completo). Infine se (C) non contiene il sistema canonico pur essendo non speciale, la serie segata da (C) sulla C' è una serie g di dimensione r e però (secondo un noto teorema di CLIFFORD) di grado $\geqslant 2r$, cioè di grado $\geqslant p^{(1)}+1$; ne segue che l'aggiunto (K) di (C) sega sulla C' una serie di grado $>2p^{(1)}-2$ e quindi non speciale, ed in conseguenza è

$$\omega \geqslant 0 .$$

Suppongasi invece che il sistema canonico sia semplice; allora è

([56]) « Math. Ann. », 8.

(sempre secondo NOETHER):

$$2p - 2 < p^{(1)} + 1$$

(anzi, secondo CASTELNUOVO [57] $p^{(1)} \geqslant 3p - 6$); perciò se la dimensione r di (C) soddisfa alla disuguaglianza

$$r \geqslant \frac{p^{(1)} + 1}{2}$$

si ha $r > p - 1$ ossia (C) è non speciale, e col ragionamento precedente segue

$$\omega \geqslant 0 \, .$$

Dunque:

Pur prescindendo dalla completezza della serie caratteristica del sistema canonico, per ogni sistema lineare appartenente ad una superficie di 2° genere $p^{(1)}$, avente una dimensione

$$r \geqslant \frac{p^{(1)} + 1}{2}$$

la sovrabbondanza

$$\omega \geqslant 0$$

(e se il sistema non è il sistema canonico esso è non speciale, sicchè $\pi - 1 - n + r \geqslant p$).

V.

LE CURVE FONDAMENTALI

1. - Preliminari.

Mi propongo ora di esaminare le proprietà dei sistemi lineari in relazione alle loro curve fondamentali; siccome capiterà qui sempre di considerare la differenza tra la sovrabbondanza e l'indice di specialità (cioè quella $r - \varrho$ tra la dimensione effettiva e la virtuale) indicherò qui con θ questa quantità (che prima avevo designata con $\omega - i$), e così θ *sarà*

[57] « Istituto lombardo », 1891 (Nota II).

ora la sovrabbondanza ($= \omega$) *quando si tratta d'un sistema non speciale*; indicherò ancora con π, r, n, gli altri caratteri d'un sistema (C) e supporrò che (C) sia un sistema *semplice* ($r \geqslant 3$) dedotto coll'aggiunta di punti base distinti da un sistema puro. Supporrò inoltre la superficie avente il genere geometrico uguale al numerico $p > 0$.

Come già abbiamo detto, una *curva fondamentale* di (C) è una curva K che presenta una sola condizione ad una C che debba contenerla; *escluderò che essa possa essere rappresentata da un gruppo di punti semplici sopra una superficie trasformata*; per la definizione il sistema residuo della K rispetto a (C) è ∞^{r-1}; noi supporremo che esso soddisfi alla restrizione di avere punti base distinti e di esser dedotto mediante l'aggiunta di essi da un sistema puro. Le curve C si facciano segare sulla superficie F dagli iperpiani di S_r: alla K corrisponde un punto multiplo O, quindi *una curva fondamentale non ha intersezioni variabili col dato sistema ma ha qualche intersezione variabile col residuo*. Gli iperpiani per O non hanno altri punti fissi sulla F, quindi includendo in K il gruppo di tutte le curve (e punti) che corrispondono ad O, lo staccarsi della K da (C) non trae di conseguenza lo staccarsi di altre curve; è quanto dire che *lo staccarsi da* (C) *d'una curva fondamentale può trarre solo di conseguenza lo staccarsi di altre curve fondamentali le quali tutte compongono insieme una curva fondamentale* K.

Quando si fan segare sulla F le curve C di (C) dagli iperpiani di S_r, nella trasformazione che così viene ad eseguirsi ad ogni punto della primitiva superficie che sia base i-plo per (C) viene a corrispondere una curva eccezionale d'ordine i sulla F. Ora una curva eccezionale d'ordine i che abbia il punto O come ϱ-plo viene proiettata da O in una curva d'ordine $i - \varrho$ eccezionale per la superficie proiezione della F, e si deve notare che la curva d'ordine i (che corrisponde ad un punto) non può essere spezzata e però è $i > \varrho$ tranne per $i = \varrho = 1$; così si deduce: *Il sistema residuo della curva fondamentale* K *rispetto al sistema* (C) *ha come punto base* i*-plo ogni punto* i*-plo di* (C) *fuori della* K; *la curva* K *può avere una molteplicità* $\varrho < i$ *in un punto base* i*-plo per* (C) *con* $i > 1$, *e solo un punto semplice* ($\varrho = i = 1$) *in un punto base semplice di* (C), *ed allora il residuo della* K *ha un punto base* $(i - \varrho)$*-plo* (*e non di molteplicità più elevata*) *nel detto punto base* i*-plo di* (C).

Questa deduzione (importa notarlo) è fondata sull'ipotesi fatta che il sistema (C') residuo di K rispetto a (C) abbia solo punti base distinti, e quindi i tangenti variabili in un punto i-plo.

2. - Una relazione fra i caratteri d'un sistema, il genere d'una sua curva fondamentale ed i caratteri del residuo.

Se una curva K è comunque composta con parti irreduttibili distinte $C_1 \dots C_s$ di generi $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s$, e se C_r, C_ϱ hanno $i_{r\varrho}$ punti comuni, il genere della curva composta è (secondo NOETHER)

$$\Pi = \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_s + \sum i_{r\varrho} - s + 1$$

dove la $\sum$ va estesa a tutte le combinazioni di valori diversi r e ϱ (come già abbiamo avuto occasione di ricordare).

La curva $K = C_1 + C_2 + \dots + C_s$ sia una curva fondamentale per il sistema (C) (nella quale per convenzione sono incluse tutte le componenti, anche punti, che si staccano da (C) quando si stacca una componente); i generi $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s$ sieno calcolati prescindendo dalle molteplicità delle curve $C_1, C_2, \dots, C_s$ fuori dei punti base di (C), inoltre il genere di un punto h-plo (componente K) sia 0 come quello della curva razionale d'ordine i che gli corrisponde sulla superficie su cui gl'iperpiani segano le curve C' residue di K rispetto a (C). Diremo Π *il genere della curva fondamentale K di (C), che non ha (per ipotesi) componenti multiple, calcolato in base alle convenzioni precedenti.*

Sieno π, r, n, θ i caratteri di (C), π', r', n', θ' quelli del residuo (C') di K. Una curva composta $C'+K$ ha (per il teorema del § precedente) le stesse molteplicità d'una curva generica C nei punti base di (C); allora se indichiamo con i il numero delle intersezioni variabili della K con una C' cioè (come diremo) *il grado della K*, si avrà:

$$\pi = \pi' + \Pi + i - 1 \ ;$$

d'altra parte se si fan segare le curve C da iperpiani, il punto O che viene a corrispondere a K sulla superficie trasformata è i-plo per quella superficie, quindi

$$n = n' + i$$

(infatti nel numero i sono comprese le intersezioni che una C' ha con ogni componente di K ed in particolare anche coi punti che risultano h-pli per (C')).

Si deduce:

$$\pi - 1 - n + r = \pi' - 1 - n' + r' + \Pi \ ;$$

ma

$$\pi - 1 - n + r = p + \theta$$
$$\pi' - 1 - n' + r' = p + \theta',$$

quindi

$$\theta = \theta' + \Pi .$$

Dunque si può enunciare il teorema:

Se il sistema (C) possiede una curva fondamentale K di genere Π (priva di componenti multiple), ed avente come residuo il sistema (C'), fra i caratteri θ, θ', dei sistemi (C), (C') sussiste la relazione

$$\theta - \theta' = \Pi$$

(ossia $\omega - i - (\omega' - i') = \Pi$).

3. - Sistemi regolari.

Suppongasi in questo § che se il sistema canonico è irreduttibile con $p > 2$, la *sua serie caratteristica sia completa*; i resultati più restrittivi a cui si perviene prescindendo da questa ipotesi si stabiliranno facilmente in modo analogo riferendosi al cap. IV, § 5.

La relazione stabilita nel precedente § stabilisce un interessante legame fra la sovrabbondanza d'un sistema ed i generi delle sue curve fondamentali quando p. es. il sistema residuo delle curve fondamentali sia non speciale, e perciò basta che la sua dimensione sia $> p - 1$, o il suo grado $> p^{(1)} - 1$. Noi vogliamo trarre da quella relazione alcuni utili corollari.

Se un sistema (C) di dimensione $> p$ ha una curva fondamentale K di genere Π, il residuo (C') ha la dimensione $> p - 1$ e quindi è non speciale; allora i caratteri θ, θ', di (C), (C') sono le loro sovrabbondanze ω, ω' (sempre positive); in questo caso *la relazione precedente ci dà*:

$$\omega \geqslant \Pi .$$

Di qui il corollario:

Un sistema regolare di dimensione $> p$ non ha curve fondamentali di genere > 0.

Per trarre la deduzione enunciata bastava conoscere in qualsiasi modo la non specialità di (C'), e quindi sapere per es. che il suo grado è $> p^{(1)} - 1$; per ciò basta che il grado di (C) superi $p^{(1)} - 1$ aumentato del grado di K.

Di qui il teorema:

Se un sistema regolare (C) *ha una curva fondamentale* K, *tale che il grado di* (C) *supera il grado di* K *aumentato di* $p^{(1)}-1$, *la curva fondamentale* K *è di genere* 0.

Se un sistema regolare ha una curva fondamentale di genere Π, il residuo (C') ha il carattere

$$\theta' = \theta - \Pi\,,$$

ma

$$\theta = \omega - i\,, \qquad \omega = 0\,,$$

e quindi $\theta \leqslant 0$, sicchè $\theta' \leqslant -\Pi$; ora

$$\theta' = \omega' - i' \qquad (\omega' \geqslant 0)\,,$$

quindi

$$i' - \omega' \geqslant \Pi\,, \qquad i' \geqslant \Pi\,.$$

Dunque:

Se un sistema regolare ha una curva fondamentale di genere Π, *il residuo è speciale con un indice di specialità maggiore del precedente almeno di* Π.

Ora si consideri un sistema speciale ∞^{p-2}; sulla superficie canonica (ottenuta facendo segare dagli iperpiani di S_{p-1} le curve del sistema canonico supposto semplice) esso è segato dagli iperpiani per un punto, e però ha come residua una curva, ossia il suo indice di specialità è 1 come quello del sistema canonico (∞^{p-1}).

Si deduce:

Il sistema canonico, se è semplice, non ha curve fondamentali di genere >0.

In modo analogo si dimostrano i corollari:

Un sistema regolare ∞^p *non può avere altre curve fondamentali di genere* >0, *tranne tutt'al più una sola curva fondamentale di genere* 1 (*che ha per residuo il sistema canonico*).

Un sistema regolare ∞^{p-1} *non può avere altre curve fondamentali di genere* >0 *tranne curve fondamentali di genere* 1 (*ed allora è non speciale*).

4. - Sistemi multipli d'un sistema.

Se si hanno sopra una superficie F due sistemi (C), (C'), che possono supporsi segati da due sistemi lineari di superficie, il sistema *somma* dei due sistemi di superficie sega sulla F un sistema lineare di curve contenente tutte le curve composte $C+C'$; questo sistema appartiene ad un determinato sistema normale che si è detto *il sistema somma di* (C), (C')

e si è indicato con $(C+C')$; si è detto poi m-plo di (C) ed indicato con (mC) il sistema somma di m sistemi (C), cioè il sistema normale contenente tutti i gruppi di m curve C.

Enuncio alcuni lemmi di facile dimostrazione:

Se una curva irreduttibile è fondamentale per il sistema (C) essa è fondamentale per (mC).

Se una curva irreduttibile è fondamentale per (mC) essa è fondamentale per (C).

Se una curva irreduttibile è fondamentale per (C) ma non per (C') essa non è fondamentale per $(C+C')$.

Le dimostrazioni di questi lemmi si fondano sulla considerazione che una curva irreduttibile non avente intersezioni variabili con quelle d'un sistema è fondamentale per esso e viceversa.

Come abbiamo avuto occasione di osservare nel cap. III se (C) è puro, il sistema (mC) per m assai grande contiene un altro arbitrario sistema, in particolare il canonico, in modo che il residuo di questo rispetto ad (mC) (disposto convenientemente di m) è un sistema puro (K) di dimensione elevata quanto occorre.

Se si suppone che (C) abbia solo curve fondamentali irreduttibili di genere 0 (distinte), lo stesso avverrà per uno dei precedenti lemmi pel sistema $(C+K)$. Si facciano segare ∞^3 curve generiche di $(C+K)$ dai piani di S_3 sulla superficie F e si supponga per semplicità che essa sia dotata soltanto di curva doppia e punti multipli ordinari; ad una curva fondamentale (di genere 0) del sistema corrisponde un punto multiplo secondo d a cono osculatore irreduttibile di genere 0; un tale cono ha $(d-1)(d-2)/2$ generatrici doppie (o generatrici multiple equivalenti), le quali rappresentano altrettanti rami della curva doppia della F passanti per esso, giacchè una generatrice doppia del cono non tangente alla curva doppia rappresenterebbe un punto doppio della curva fondamentale del sistema $(C+K)$ che non andrebbe computato nel genere della curva (§ 2). Allora si considerino le curve del sistema $((m+1)C)$, e si supponga che (C) e quindi $((m+1)C))$ sia puro. Esse segano su quelle di $(C+K)$ (sezioni piane della F) un gruppo canonico, e quindi sono segate da una superficie ψ_{D-3} aggiunta alla F (supposta d'ordine D) salvo forse nei punti multipli (cfr. capitolo II, III), e poichè i punti d-pli della F sono $(d-1)(d-2)/2$-pli per la curva doppia la ψ_{D-3} ha la molteplicità $d-2$ (almeno) in un punto d-plo e quindi è aggiunta alla F. Ne segue che il sistema $((m+1)C)$ è aggiunto a $(C+K)$ e però è regolare (capitolo IV, § 4).

Dunque:

Per m assai grande il multiplo (mC) del sistema puro irreduttibile (C) non dotato che di curve fondamentali irreduttibili di genere 0, è regolare.

5. - Sulla postulazione d'una superficie di S_r rispetto alla varietà d'ordine m.

Si abbia in S_r una superficie F non dotata di curve eccezionali, ed avente soltanto punti multipli a cono osculatore di genere 0. Quante varietà V_m (linearmente indipendenti) d'ordine m contengono la F in S_r?

Se le sezioni iperpianali della F segano sulla F ∞^r curve appartenenti ad un sistema (C), le V_m segano sulla F curve appartenenti al sistema (mC).

Indichiamo con π_m, n_m, r_m i caratteri del sistema normale (mC); $(\pi_1 = \pi,\ n_1 = n)$; abbiamo allora le relazioni:

$$\pi_m = \pi_{m-1} + \pi + (m-1)n - 1$$

$$n_m = n_{m-1} + 2(m-1)n + n$$

e quindi

$$\pi_m = m\pi + \frac{m(m-1)}{2}\, n - m + 1$$

$$n_m = m^2 n :$$

al crescere di m la dimensione di (mC) cresce oltre ogni limite (e quindi oltre $(p^{(1)}-1)/2$), di guisa che come nel § precedente si deduce che in ogni caso la sua sovrabbondanza $(\omega_m \geqslant 0)$ è $= 0$; perciò quando m è assai grande,

$$r_m = p + \frac{m(m+1)}{2}\, n - m(\pi - 1)\,.$$

Se indichiamo con

$$N_m = \binom{m+r}{r} - 1$$

la infinità delle V_m, per ogni curva sezione della V_m colla F passano $\infty^{N_m - r_m}$ V_m, e perciò la *postulazione* della superficie rispetto alle V_m è

$$\leqslant r_m + 1 = p + \frac{m(m+1)}{2}\, n - m(\pi - 1) + 1\,;$$

dove vale il segno $=$ se (come avviene, si può dire, nel caso generale) il sistema segato dalle V_m su F, per m assai grande, è completo (e per ciò, poichè esso è puro, basta che sia normale).

Dunque, *per la superficie F di S_r passano (per m assai grande)*

$$L \leqslant N_m - p - \frac{m(m+1)}{2} n + m(\pi - 1)$$

varietà V_m linearmente indipendenti.

Facciamo ora una breve digressione determinando il numero delle quadriche di S_r passanti per una superficie F a sezioni normali (sulla quale non si fa nessuna altra ipotesi).

Se per la F di S_r passa una quadrica la sezione iperpianale C_π di F e gli n punti sezione d'un S_{r-2} stanno pure sopra una quadrica (risp. in S_{r-1} e in S_{r-2}). Suppongasi ora che gli n punti sezione della F con un S_{r-2} sieno sopra una quadrica q; in un S_{r-1} per lo S_{r-2} le quadriche Q per q sono ∞^r e segano sulla C_π la serie (completa) segata dagli iperpiani (g_n^{r-1}), quindi vi è una ed una sola quadrica Q per la q contenente la curva C_π; in modo analogo può costruirsi un'altra quadrica Q' contenente la sezione C'_π della F con un altro S_{r-1} per lo S_{r-2}, e contenente pure la q; ora le due quadriche Q, Q' risp. appartenenti ai due S_{r-1} ed aventi comune la sezione q con un S_{r-2}, appartengono ad un fascio di quadriche Γ in S_r; la quadrica Γ del fascio contenente un punto fissato ad arbitrio sulla F, contiene quindi la F, poichè ne contiene già due sezioni iperpianali. Ora giacchè ogni quadrica per la F sega un S_{r-1} in una quadrica contenente la sua curva sezione, e vi è una quadrica determinata che contiene la F passante per una quadrica che contiene una sua sezione iperpianale, si conclude:

Il numero delle quadriche linearmente indipendenti, che contengono una superficie qualunque a sezioni normali di S_r, è uguale a quello delle quadriche in S_{r-1} che contengono una sua sezione iperpianale, o di quelle in S_{r-2}, che contengono il gruppo di punti sezione delle superficie.

6. - Curve fondamentali di genere 0.

Abbiamo già avuto occasione di notare (§ 4) che alle curve fondamentali di genere 0 d'un sistema lineare (C) corrispondono, sulla superficie F di S_3 di cui le ∞^3 sezioni piane sono curve C, punti multipli che non impongono condizioni alle superficie aggiunte e però non esercitano influenza sul genere; a questo fatto si collega l'altro che tali curve non hanno effetto sulla sovrabbondanza del sistema (C). Una analisi più minuta di siffatte curve fondamentali porta alla conseguenza che esse (a differenza delle curve fondamentali di genere > 0) sono più intimamente legate alla natura della superficie, che a quella del sistema (C) che su di essa si considera.

Il caso più semplice è quello delle curve fondamentali di grado 2, le quali vengono ad essere rappresentate da punti doppi isolati (non eccezionali) ([58]) sulla superficie F di S_3 (di cui le sezioni piane appartengono al sistema (C)), o sulla superficie normale F' ottenuta facendo segare dagli iperpiani d'un iperspazio tutte le curve C.

Se n è l'ordine della F, le superficie ψ_{n-4} d'ordine $n-4$ aggiunte alla F, segano su di essa il sistema canonico: non può darsi che tutte passino per un punto doppio della F non eccezionale, e però ad un tal punto doppio corrisponde un punto doppio della *superficie canonica* su cui le curve canoniche sono segate dagli iperpiani (supposto semplice il sistema canonico, $p > 3$).

Viceversa un punto doppio della superficie canonica dà una curva fondamentale di grado 2 per un sistema (C) che, su di essa, non ha il punto doppio come punto base.

Concludiamo:

Una superficie in S_3 può acquistare per trasformazione tanti punti doppi isolati non eccezionali quanti sono i punti doppi isolati della corrispondente superficie canonica. Il numero di questi punti doppi è un nuovo carattere invariantivo per le superficie di genere $p > 3$.

Il resultato precedente si esprime sotto forma invariantiva dicendo:

Sopra una superficie un sistema lineare (C) non può avere altre curve fondamentali di grado 2 tranne quelle che sono tali pel sistema canonico.

Consideriamo ora una curva fondamentale irreduttibile di genere 0 e di grado i pel sistema (C): si facciano segare ∞^3 curve C sulla superficie F dai piani di S_3, e supponiamo (per semplicità) che la F sia solo dotata di curva doppia. Alla curva fondamentale per (C) corrisponde sulla F un punto i-plo a cono osculatore razionale, per il quale passano quindi (come già abbiamo notato al § 4) $[(i-1)(i-2)]/2$ rami della curva doppia. Se n è l'ordine della F, le ψ_{n-4} (d'ordine $n-4$) aggiunte ad essa hanno il detto punto come $(i-2)$-plo, come conseguenza del contenere la curva doppia della F; una curva canonica ha dunque un tal punto come $(i-2)$-plo (essendo $i-2 = i(i-2)-(i-1)(i-2)$) ed ivi ha le $i-2$ tangenti variabili giacchè il sistema canonico non ha punti base. Dunque ad un tal punto corrisponde una curva razionale d'ordine $i-2$ sulla superficie canonica.

Concludiamo:

Le curve fondamentali di genere 0 e di grado i per il sistema lineare (C), corrispondono a curve d'ordine $i-2$ sulla superficie canonica.

Così si vede che ad una superficie appartengono 3 categorie di curve razionali che corrispondono ai punti doppi della superficie canonica, alle

([58]) Poichè è esclusa la considerazione delle curve fondamentali costituite da coppie di punti.

sue curve razionali, ed ai suoi punti (le curve eccezionali); le prime due categorie forniscono caratteri invariantivi della superficie; invece le curve della 3ª categoria sono in numero arbitrario poichè se ne crea quante si vuole con trasformazioni della superficie.

VI.

LE INVOLUZIONI

1. - Estensione d'un teorema di Castelnuovo. Relazione fra i secondi generi di due superficie in corrispondenza [1, *m*].

Rivolgiamoci ora ad un breve studio dei sistemi lineari (C) in cui il passaggio per un punto trae di conseguenza il passaggio per altri punti della superficie.

Lasciamo da parte, come non offrente interesse, il caso in cui le curve C (di (C)) si spezzino in quelle di un fascio; allora (cap. I, § 1) le curve C che passano per un punto O_1 passeranno in conseguenza per un numero finito di punti $O_2, O_3, \ldots, O_m$, ed i gruppi analoghi ad $O_1, O_2, \ldots, O_m$ formano un'*involuzione* I_m, cioè una serie ∞^2 di gruppi di m punti tale che un punto generico della superficie determina un gruppo della serie. Lo studio del sistema (C) (che abbiamo denominato *appartenente all'involuzione* I_m) si annoda strettamente allo studio dell'involuzione. Ad ogni involuzione appartengono sistemi (C) come ora facilmente vedremo.

Si riferiscano biunivocamente i gruppi della I_m (elementi di una varietà ∞^2) ai punti d'una superficie F'; ad un sistema (C') di F' corrisponde su F un sistema (C) appartenente all'involuzione I_m. La F' ossia *l'involuzione* I_m *abbia il genere geometrico* $p > 0$ (59); allora possiamo fissare come sistema (C') quello delle sezioni piane di F' che supponiamo avente curve fondamentali distinte come il suo corrispondente su F, e possiamo considerare una curva canonica K' (completata colle curve eccezionali della F') la quale è definita dal segare un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica di (C') ed un gruppo contenuto nella serie analoga sulla curva generica di ogni sistema ∞^2 contenuto in (C') (cap. II, § 2). Sia K la curva corrispondente alla K' sulla F,

(59) Non imponiamo nè per la F nè per la F' alcuna restrizione di uguaglianza del genere geometrico al numerico.

H la *curva di coincidenza* della involuzione I_m (luogo dei punti in cui ne coincidono due di un gruppo di I_m) e sieno le C le curve corrispondenti su F alle C' di F'. Una curva composta $K+C+H$ sega sopra una curva generica C un gruppo che è il trasformato di un gruppo canonico di C' aumentato del gruppo delle coincidenze dell'involuzione i cui gruppi corrispondono ai punti di C', quindi per un teorema di CASTELNUOVO ([60]) il detto gruppo è un gruppo canonico della C, ossia la curva $K+H$ sega sulla curva C un gruppo residuo della serie caratteristica di (C); parimente si prova che la $K+H$ gode l'analoga proprietà rispetto ad ogni sistema ∞^2 contenuto in (C) (come rispetto ad ogni altro sistema appartenente alla I_m), dunque sussiste il teorema:

Se le superficie F', F sono in corrispondenza $[1, m]$, alle curve canoniche della prima (supposta di genere > 0) corrispondono curve speciali della seconda, componenti curve canoniche insieme alla curva di coincidenza dell'involuzione I_m i cui gruppi corrispondono sulla F ai punti della F'.

È questa, come si vede, l'estensione del teorema già adoperato del signor CASTELNUOVO sulle involuzioni irrazionali appartenenti ad una curva, teorema che apparisce come fondamentale nella teoria appena avviata di quelle involuzioni.

Sia P il genere (geometrico) della F, e p il genere (geometrico) della F', ad ogni curva canonica della F' corrisponde una curva che insieme ad H costituisce una curva canonica di F, quindi $P \geqslant p$: in particolare non può essere $P = 0$ se non è anche $p = 0$.

Sia ora $p > 1$, e quindi anche $P > 1$, e indichiamo con $p^{(1)}$, $P^{(1)}$ *risp. i secondi generi delle F', F, con δ il numero dei punti d'incontro d'una curva canonica di F' colla curva di diramazione* (ossia quello delle intersezioni della curva di coincidenza H con una curva residua), *con τ il genere della curva di diramazione su F'* (o di quello di coincidenza H su F), sia infine π il genere delle curve corrispondenti sulla F a quelle canoniche di F'.

Per il teorema di CASTELNUOVO, o per la formula di ZEUTHEN, si ha:

$$2m(p^{(1)} - 1) + \delta = 2(\pi - 1) ;$$

per il teorema prima dimostrato si ha invece, in generale (adoperando la formula che dà il genere d'una curva spezzata)

$$P^{(1)} = \pi - 1 + \tau + \delta ,$$

quindi *sussiste in generale la relazione*

$$P^{(1)} = m(p^{(1)} - 1) + \tau + \frac{3}{2}\,\delta ,$$

([60]) *Alcune osservazioni sulle serie irrazionali*, ecc. (« Accad. dei Lincei », 1891).

la quale può considerarsi come un'estensione della nota formula di ZEUTHEN per le corrispondenze $[1.\ m]$ tra due curve.

In qualche caso può essere $P^{(1)}$ maggiore del numero indicato dalla formula scritta se le curve corrispondenti su F a quelle canoniche di F' aumentate della H non sono curve generiche (spezzate) del sistema canonico della F ossia una delle componenti ha qualche punto multiplo in un punto semplice della superficie (o qualche ipermolteplicità in un punto multiplo).

2. - Involuzioni razionali.

Diamo ora un breve cenno delle involuzioni I_m razionali; la superficie F sui punti della quale i gruppi della I_m sono rappresentati è un piano (superficie razionale) e ad ogni rete omaloidica di esso corrisponde sulla data superficie F una rete di curve di cui due s'intersecano in un gruppo della I_m; restringeremo a tali reti il nome di *reti appartenenti all'involuzione.*

Una rete (C) appartenente all'involuzione I_m sia di genere π (il grado è m) e possieda s curve fondamentali $C_1 \dots, C_h, \dots, C_s$ aventi come residui s fasci risp. di genere $\pi_1, \dots, \pi_h, \dots, \pi_s$; introdurremo i caratteri $\delta_1, \dots, \delta_h, \dots, \delta_s$ definiti dall'uguaglianza

$$\delta_h = \pi - \pi_h$$

e diremo δ_h la *valenza della curva fondamentale* C_h. Il carattere δ_h è legato semplicemente a quelli, altre volte introdotti, cioè il genere (virtuale) ϱ_h della C_h ed il suo grado i_h (numero delle intersezioni con una curva residua); infatti è

$$\pi = \pi_h + \varrho_h + i_h - 1$$

quindi

$$\delta_h = \varrho_h + i_h - 1 \, .$$

Si facciano ora segare le curve C della rete dai piani di una stella col centro O, sulla superficie F, e sieno $a_1, \dots, a_s$ le rette per O (multiple o contenenti punti multipli per la F) che corrispondono alle curve fondamentali $C_1, \dots, C_s$. Nell'involuzione I_m ci sieno α gruppi dotati di due coincidenze staccate (di due punti doppi), e τ gruppi dotati d'un punto triplo (dove ne coincidono 3): le α rette che proiettano da O i primi α gruppi sono corde per la curva di coincidenza di I_m, le τ che proiettano i τ gruppi secondi sono tangenti per essa.

Ora la curva di coincidenza sega un piano generico per O in $2(\pi+m-1)$ punti fuori di O ed un piano per a_h (fuori di a_h) in $2(\pi_h+m-1)$ punti, ossia la a_h ha colla curva δ_h intersezioni. Proiettando dunque la detta curva di coincidenza da O sopra un piano, si avrà il suo genere dato da

$$P=(2\pi+2m-3)(\pi+m-2)-\sum_1^s \delta_h(2\delta_h-1)-\alpha-\tau\,.$$

Si conclude che *la quantità*

$$(2\pi+2m-3)(\pi+m-2)-\sum \delta_h(2\delta_h-1) \qquad (=\alpha+\tau+P)$$

ha lo stesso valore per tutte le reti appartenenti all'involuzione I_m ed è quindi essenzialmente un carattere della I_m anzichè delle dette reti. Invero si osserverà che, prendendo nel piano multiplo rappresentativo della I_m una rete omaloidica le cui curve abbiano assai intersezioni con quella di diramazione, si avranno sulla F reti di genere grande quanto si vuole, appartenenti alla I_m, e quindi separatamente i caratteri π, δ_h non sono caratteri della I_m.

Esaminiamo brevemente il caso ($m=2$) di una involuzione razionale I_2 sopra una superficie F.

Le curve d'una rete (C) appartenente alla I_2 siano segate dai piani per O sulla F. Se n è l'ordine della F, le aggiunte d'ordine $n-4$ alla F sono coni col vertice in O (che è $(n-2)$-plo per la F), quindi:

Se sopra una superficie vi è un'involuzione I_2, *le curve canoniche che passano per un punto passano per il coniugato* ([61]).

Secondo la relazione precedentemente scritta il genere della curva di coincidenza della I_2 è

$$P=(2\pi-1)\pi-\sum_1^s \delta_h(2\delta_h-1)$$

dove π è il genere d'una rete appartenente alla I_2 (composta di curve iperellittiche) e δ_h è la valenza d'una sua curva fondamentale C_h $(h=1\dots s)$.

La rete (C) sia segata sulla F dai piani per O; una curva canonica sega una C in $2(\pi-1)-2$ $(m=2)$ punti, e quindi se n è l'ordine della F i coni aggiunti d'ordine $n-4$ si spezzano nel cono (fisso) proiettante la curva doppia della superficie, e in coni variabili d'ordine $\pi-2$.

([61]) Questa proprietà è nota; infatti il sig. CASTELNUOVO (« Istituto lombardo », l. c.) ha dimostrato che se vi è un fascio di curve iperellittiche sopra una superficie d'ordine n, le aggiunte d'ordine $n-4$ per un punto passano per il coniugato sulla curva iperellittica che lo contiene. Il tipo di superficie di cui stiamo trattando è stato considerato per la prima volta dal sig. NOETHER (« Mat. Ann. », 8, l. c.).

Se la a_h è una retta per O multipla secondo θ_h (o semplice) per la F contenente arbitrari punti multipli, un piano per la a_h è segato da una superficie d'ordine $n-4$ aggiunta alla F secondo una curva d'ordine $n-\theta_h-3$ aggiunta alla sezione d'ordine $n-\theta_h$ della F (tolta la a_h) (cfr. cap. II, § 1); questa sezione è dunque segata in $2(\pi_h-1)$ punti da una curva canonica (essendo π_h il genere di essa), e però il cono d'ordine $\pi-2$, facente parte d'una aggiunta d'ordine $n-4$ alla F, ha la retta a_h come multipla secondo $\pi-2-(\pi_h-1)=\delta_h-1$.

Ora ogni curva C_h fondamentale per la rete (C) viene rappresentata da una tal retta a_h, o da una retta per O contenente un punto doppio isolato per la F; in questo 2° caso il detto cono d'ordine $\pi-2$ non contiene in generale la retta congiungente il punto doppio, e quindi si può dire ancora che la contiene colla molteplicità $\delta_h-1=\pi-\pi_h-1$ poichè $\pi_h=\pi-1$. Dunque i coni d'ordine $\pi-2$ col vertice O seganti sulla F le curve canoniche sono assoggettati ad avere come (δ_h-1)-pla ogni retta per O che corrisponde ad una curva C_h fondamentale per la rete (C), di valenza δ_h.

Indicando con p il genere (geometrico uguale al numerico) della F *sussiste dunque la relazione*

$$p=\frac{\pi(\pi-1)}{2}-\sum\frac{\delta_h(\delta_h-1)}{2};$$

di qua si ricava

$$4p=2\pi(\pi-1)-\sum 2\delta_h(\delta_h-1)$$

e confrontando coll'altra relazione trovata

$$P=(2\pi-1)\pi-\sum(2\delta_h-1)\delta_h\,,$$

si ha

$$P-4p=\pi-\sum\delta_h$$

dove il secondo membro è uguale per tutte le reti che appartengono alla involuzione I_2.

VI.

SULLA MASSIMA DIMENSIONE DEI SISTEMI LINEARI DI CURVE DI DATO GENERE APPARTENENTI AD UNA SUPERFICIE ALGEBRICA

« Atti Acc. Torino », vol. XXIX (1893-1894),

pp. 275-296

Il signor CASTELNUOVO (*Massima dimensione dei sistemi lineari di curve piane di dato genere,* « Annali di Matematica », t. XVIII) ha risoluto completamente la questione di determinare la massima dimensione d'un sistema lineare di curve piane di genere $p > 1$, assegnando il massimo $r = 3p + 5$ per la nominata dimensione e classificando colla riduzione a *tipi* i sistemi per cui questo massimo è raggiunto [1]. Risulta poi dai lavori del signor GUCCIA (« Circolo Matematico di Palermo », to. I) che per $p = 0$ non si ha alcun massimo per la dimensione d'un sistema lineare di curve piane (razionali), e per $p = 1$ si ha il massimo $r = 9$ raggiunto dal sistema delle cubiche (e suoi trasformati).

In questa nota io mi propongo di risolvere la questione generale di determinare (ove esista) la massima dimensione di un sistema lineare di curve di genere p sopra una qualunque superficie algebrica. Il punto di partenza della ricerca è il successivo uso delle proiezioni di una superficie (in un iperspazio) da un piano tangente, cioè il metodo dei sigg. DEL PEZZO e CASTELNUOVO, il quale ultimo veramente (l. c.) impone alle curve del sistema lineare del piano un nuovo punto doppio, cosa equivalente alla proiezione da un piano tangente della superficie razionale rappresentata. Il resultato principale a cui giungo nei §§ 5 e 6 (in base ad alcuni lemmi stabiliti in principio) è il seguente:

Se sopra una superficie esiste un sistema lineare di genere $p \geqslant 0$ *e dimensione*

$$r \geqslant 3p + 5\,,$$

[1] Prima di lui il sig. JUNG assegnò il limite superiore $5p + 3$ per la dimensione d'un sistema di curve piane di genere $p > 1$. Cfr. CASTELNUOVO (l. c.).

1° *la superficie è riferibile biunivocamente ad una rigata di genere* p $(r \geqslant 3p+5)$,

2° *oppure* $r = 3p+5$ *od anche* $r = 9$ *per* $p = 1$, *e la superficie è razionale.*

Nel 2° caso il sistema lineare è uno di quelli indicati dal signor CASTELNUOVO (l. c.).

È poi chiaro che non si può assegnare un massimo di r se la superficie è riferibile ad una rigata di genere p, giacchè una rigata di dato genere p può essere proiezione di una rigata di ugual genere appartenente ad uno spazio di dimensione comunque elevata (SEGRE, « Math. Annalen », 34).

Il teorema prima enunciato risponde anche ad una questione di geometria sopra una superficie che mi si è presentata nelle mie *Ricerche di geometria sopra una superficie algebrica* (2) (cfr. il § 7 di questa nota). Ivi ho posto (come estensione del concetto di serie g_n^r *completa* sopra una curva) il concetto di sistema lineare *normale* di dato *grado* (cioè di sistema lineare di curve non contenuto in un sistema più vasto di ugual grado) ed il concetto di sistema lineare *completo* di dato *genere* (cioè di sistema lineare di curve di dato genere non contenuto, nemmeno parzialmente, in un sistema più ampio di ugual genere). Allora si presentano subito le questioni: 1) se un sistema (lineare) di dato grado appartenga sempre ad *un* sistema normale (di ugual grado); 2) se una curva (o un sistema) di dato genere appartenga sempre ad *un* sistema completo (di ugual genere).

La prima questione viene risoluta affermativamente nel cap. I delle *Ricerche*, e per i sistemi *semplici* conduce al teorema proiettivo:

« Una superficie di un dato spazio S_r $(r \geqslant 3)$ è sempre proiezione (da un certo numero $k \geqslant 0$ di punti esterni) di *una* superficie normale

---

(2) « Accademia di Torino, Memorie » [questo volume, V], 1893. Nel seguito citerò questo lavoro col titolo *Ricerche*.

Ricordo qui le poche nozioni di geometria sopra una superficie (debitamente citate a suo luogo) che ho occasione di invocare avanti l'ultimo § (cfr. *Ricerche*, cap. I, § 1). Se la curva generica di un sistema lineare si spezza, o si spezza in parti fisse ed in una componente variabile irreduttibile, o si compone (oltre eventuali componenti fisse) di più curve irreduttibili d'un *fascio* (sistema razionale o no di cui passa *una* curva per un punto generico). In un sistema lineare ∞^r, con $r > 1$, irreduttibile (a meno di parti fisse che s'immaginano tolte), dicesi *grado* il numero (> 0) delle intersezioni variabili di due curve. (Un sistema che si compone delle curve d'un fascio non ha un grado (> 0)). Dicesi *genere* il genere della curva irreduttibile del sistema.

Sopra una superficie F un sistema lineare irreduttibile di *dimensione* $r > 2$ (cioè ∞^r) è rappresentativo di una superficie semplice o multipla F' (trasformata della data F) ottenuta riferendo proiettivamente le curve del sistema agli iperpiani (S_{r-1}) di S_r. Se la F' è semplice il dato sistema dicesi *semplice*; in caso opposto si dice che *appartiene all'involuzione di grado* m, i cui gruppi corrispondono su F' ai punti di F'; il passaggio d'una curva generica del sistema per un punto di F trae allora il passaggio di essa per gli altri $m-1$ punti del gruppo della involuzione determinato dal dato punto.

dello stesso ordine (proiettivamente determinata) appartenente ad uno spazio con un conveniente numero di dimensioni ($\geqslant r$) » [3].

La seconda questione viene risoluta affermativamente nel cap. II delle *Ricerche* soltanto per le superficie di genere $P > 0$, e la sua risoluzione in ogni caso dipende (per i resultati del cap. I ricordati nel § 7 di questo lavoro) dalla determinazione di un massimo della dimensione pei sistemi di dato genere sopra una superficie. Come conseguenza del teorema di questa nota sopra enunciato si ricava dunque (§ 7):

« Sopra una superficie non riferibile biunivocamente ad una rigata di genere p, una curva (o un sistema lineare) di genere p appartiene sempre ad *un* sistema lineare completo di ugual genere (di dimensione $\geqslant 0$) ».

L'applicazione del teorema ai sistemi semplici dà il teorema proiettivo:

« Data una superficie non rigata in uno spazio S_r ($r \geqslant 3$) esiste *una* superficie (proiettivamente determinata) a sezioni iperplanari dello stesso genere in uno spazio $S_{r'}$ ($r' \geqslant r$) che dà come proiezione la superficie primitiva, mentre non può considerarsi come proiezione di una superficie a sezioni dello stesso genere appartenente ad uno spazio superiore ».

Le rigate fanno eccezione al teorema, perchè, come è stato già ricordato, una rigata può ottenersi come proiezione univoca di un'altra appartenente ad uno spazio elevato quanto si vuole (SEGRE, l. c.).

Osserverò che alla precedente proposizione si giungerebbe applicando un teorema del § 2, cap. I delle *Ricerche* (con qualche opportuna considerazione) ricordando che la proiezione di una superficie da un punto semplice possiede una retta, immagine del centro di proiezione. Ma è essenziale stabilire il teorema per ogni sistema semplice o no di dimensione $\geqslant 0$, a fine di poter affermare (ove è il caso) l'esistenza d'un sistema lineare completo data una sua curva.

Infine si giungerebbe per tal via a vedere l'esistenza d'un massimo per la dimensione d'un sistema semplice sopra una superficie (non rappresentativo d'una rigata), ma non alla determinazione di questo massimo.

1. – Poniamo a base della ricerca alcuni lemmi:

1° lemma. – *Se il piano tangente in un punto generico ad una superficie (algebrica) di S_r ($r > 3$) sega la superficie secondo una curva, la superficie è rigata* (enunciato dal sig. DEL PEZZO).

Sia F una superficie di S_r ($r > 3$) e supponiamo che essa non sia sviluppabile, giacchè in questo caso il teorema sarebbe senz'altro verificato.

In ogni punto O della F vi sono ∞^1 tangenti che generano il piano π

[3] Per le rigate questo teorema è dovuto al sig. SEGRE, « Rendiconti Lincei », 1887 e « Mathematische Annalen », Bd. 34.

tangente in esso punto alla F; un iperpiano (S_{r-1}) per il piano π tocca in O la F. La superficie può proiettarsi univocamente in una F' di un S_3 da punti esterni, cioè da un S_{r-4} che non la sega, ed allora gli iperpiani tangenti alla F per lo S_{r-4} segano lo S_3 secondo i piani tangenti della superficie proiezione F'. Un piano generico tangente alla F' (non sviluppabile) non può toccare la F' in un altro punto semplice variabile col primo e diverso da esso; ciò riesce chiaro pensando che dualmente non può darsi che ogni punto d'una superficie inviluppo sia multiplo senza che la superficie si riduca ad una contata più volte; ne segue che un iperpiano generico tangente alla F di S_r in un punto non la tocca in un altro punto diverso dal primo e variabile con esso.

Si supponga che il piano π tangente alla F nel punto generico O, seghi la F secondo una curva C: un iperpiano generico per π sega la F fuori della C secondo una curva K che incontra certo la C nel punto O (di contatto per l'iperpiano) se esso non è doppio per C, ma in ogni caso non incontra la C in altri punti variabili coll'iperpiano per π: variando l'iperpiano per π, varia la K descrivendo un sistema lineare ∞^{r-3}; se alla K si impone di contenere un qualunque ulteriore punto O' della C, dalla K si stacca la C e si ha come residuo di esso un sistema lineare ∞^{r-1}. Ciò è quanto dire che fra gli ∞^{r-3} iperpiani per π in S_r ve n'è ∞^{r-4}, passanti per uno spazio S_3, i quali toccano la F in tutti i punti della curva C, e quindi contengono tutti i piani π' tangenti alla F nei punti O' della C; ne segue che tutti questi piani π' stanno nel nominato S_3. Ma per ipotesi ogni piano π' tangente alla F in O' sega la F secondo una curva C'; questa curva C' appartiene allo S_3 tangente alla F in tutti i punti della C, onde (poichè la F non appartiene al detto S_3) la curva C' non può variare col punto O' e col piano π' e però deve esser comune a tutti i piani π' tangenti nei punti O' della C; d'altra parte i piani π' non possono tutti coincidere, cioè debbono variare con O', altrimenti la F sarebbe sviluppabile; dunque la curva C' sezione della F col piano tangente in O', ed in particolare la C sezione del piano tangente in O, è la retta comune ai piani π' (ed a π). Così risulta che la F è rigata c.d.d..

Il teorema inverso di quello ora stabilito è evidente.

2. – 2° lemma. – *Se una superficie F appartenente ad un S_r (dove $r > 4$) vien segata da un iperpiano tangente generico secondo una linea spezzata, la F è una rigata o una superficie di* VERONESE [4] *in S_5 (del quarto ordine).*

Questo lemma si può dimostrare fondandosi sul precedente e sulla

---

[4] Studiata dai signori VERONESE e SEGRE. Cfr. VERONESE, « Accad. dei Lincei Memorie », 1884, e SEGRE, « Atti accademici di Torino », 1885.

nota proprietà dei sistemi lineari di curve riduttibili di essere composti mediante i gruppi di curve variabili d'un fascio, o mediante componenti fisse e componenti variabili irreduttibili (5); si può infatti vedere che le componenti irreduttibili delle sezioni della F non rigata cogli iperpiani tangenti in un punto (che hanno per immagini le generatrici della rigata proiezione della F dal punto) generano, variando il punto, una rete omaloidica di curve piane e riferendo queste alle rette del piano si ottiene una rappresentazione della F in cui le immagini delle sezioni iperplanari sono coniche; ma ometteremo i dettagli della dimostrazione perchè il lemma enunciato è contenuto come caso particolare in un teorema recentemente stabilito dal sig. CASTELNUOVO secondo il quale una superficie non rigata di S_3 segata da ogni piano tangente secondo una curva spezzata, è una superficie (romana) di STEINER (6). Invero la F che soddisfa alle condizioni dell'enunciato può proiettarsi in modo univoco (da punti esterni) in una F' dello stesso ordine di S_3, e la F' risulta appunto segata da ogni piano tangente secondo una curva spezzata; poichè la F' (proiezione arbitraria della F) è rigata o è una superficie di STEINER, si deduce che la F è rigata o è una superficie di VERONESE (del 4° ordine in S_5).

3. – 3° lemma. – *Se sopra una superficie F esiste un sistema lineare di curve di genere p ($\geqslant 0$) appartenente ad una involuzione di grado m e rappresentativo di una rigata m-pla F' (di S_r), e se la dimensione del sistema vale*

$$r > 2p + 3 \qquad se\ m = 2$$
$$r > p + 4 \qquad se\ m > 2,$$

allora alle generatrici della F' corrispondono gruppi di m curve razionali d'un fascio sulla F, seganti in un punto (mobile) le curve del dato sistema; in conseguenza la F è riferibile biunivocamente ad una rigata di genere p avente come direttrici le immagini delle curve del sistema.

Fra la rigata (m-pla) F' di S_r, e la superficie F esista una corrispondenza $[1\, m]$. Ad un sistema lineare irreduttibile di dimensione $k > 1$ e quindi di un certo *grado* $D > 0$ su F', corrisponde su F un sistema lineare di ugual dimensione k e di grado mD (> 0), il quale (avendo un grado > 0) è necessariamente irreduttibile (a meno di componenti fisse che si possono immaginare tolte) (7). Così alle sezioni iperplanari della F'

(5) NOETHER, « Math. Ann. », Bd. 8; ENRIQUES, *Ricerche*, cap. I, § 1. Pei sistemi piani il teorema è stato dimostrato dal sig. BERTINI, « Istituto lombardo », 1882.

(6) « Accad. dei Lincei », gennaio 1894. Pare che questo teorema sia stato enunciato per la prima volta dal KRONECKER (« Accad. dei Lincei », 1886). Esso servirebbe a stabilire anche il nostro primo lemma.

(7) Cfr. la nota (3).

corrispondono sulla F le curve d'un sistema lineare irreduttibile ∞^r, avente un certo genere p, ed appartenente ad una involuzione di grado m (di cui i gruppi sono rappresentati dai punti di F'). Ad una generatrice generica corrisponde su F una curva la quale si potrà supporre spezzata in $m/\delta \geqslant 1$ componenti irreduttibili C, ciascuna riferita in modo δ-plo alla detta generatrice di F', essendo δ un divisore di m, e quindi

$$m \geqslant \delta \geqslant 1 .$$

Le linee C che così nascono dalle rette di F' compongono un *fascio* sulla F, cioè vi è *una* linea C per ogni punto della F.

Se $\delta=1$, ad ogni generatrice della F' corrispondono, sulla F, m curve C riferite ad essa biunivocamente e quindi razionali.

Le C segano in un sol punto variabile le curve del sistema ∞^r immagini delle sezioni di F', e quindi la F, con un noto procedimento del signor NOETHER (8), può riferirsi biunivocamente ad una rigata di genere p sulla quale le curve del nominato sistema vengono rappresentate da *direttrici* (9). L'affermazione contenuta nell'enunciato è quindi in tal caso verificata indipendentemente dal valore di r in confronto a p.

Perchè il teorema risulti dimostrato occorre e basta stabilire che nelle ipotesi del teorema è impossibile il caso $\delta > 1$, vale a dire che se $\delta > 1$ si ha:

$$r \leqslant 2p + 3 \qquad \text{quando } m = 2$$

$$r \leqslant p + 4 \qquad \text{quando } m > 2 .$$

Supponiamo dunque nel seguito

$$\delta > 1$$

cioè:

$$\delta \geqslant 2 \qquad \text{onde anche} \quad m \geqslant 2 .$$

Consideriamo su F' la curva di diramazione L della corrispondenza $[1\,m]$ tra la F' e la F. Il suo ordine è il numero dei punti di diramazione di una corrispondenza $[1\,m]$ tra una sezione della rigata F' di genere π, e la sua immagine di genere p su F, quindi (per la nota formula di ZEUTHEN) esso vale:

$$N = 2p - 2 - 2m(\pi - 1)$$

---

(8) « Mathem. Annalen », Bd. 3.

(9) Cioè (secondo una denominazione del sig. SEGRE) linee seganti in *un* punto le generatrici.

e perciò si ha intanto:

$$N \leqslant 2p - 2 + 2m .$$

Indicando con χ il genere delle curve C, ad una generatrice della F' appartengono $2(\delta + \chi - 1)$ punti di diramazione della corrispondenza $[1\ \delta]$ tra essa e una delle m/δ curve C che le corrispondono su F; in conseguenza sopra una generatrice di F' vi sono $2m(\delta+\chi-1)/\delta$ punti di diramazione della corrispondenza $[1\ m]$ con F, punti che sono intersezioni di quella generatrice colla curva L. Alcuni di questi punti possono forse coincidere, non però più di $m(\delta-1)/\delta$ in uno stesso punto, perchè notoriamente un punto di diramazione della corrispondenza $[1\ \delta]$ fra la retta ed una curva (irreduttibile) C, assorbe al più $\delta - 1$ punti di diramazione.

Ne segue che la curva L non può essere direttrice della rigata F', e se pure da essa si stacca una parte d'un certo ordine ν direttrice della F' (forse contata più volte), la parte residua incontra in $m(\delta+2\chi-1)/\delta \geqslant$ $\geqslant m(1-1/\delta)$ punti almeno le generatrici della F'. Ora avviene almeno uno di questi due casi: 1) la L contiene una parte irreduttibile non giacente in un S_{r-1}; allora l'ordine (di questa parte e quindi l'ordine) di tutta la L vale

$$N \geqslant r ;$$

2) la L contiene una parte irreduttibile d'ordine ν (necessariamente direttrice di F') giacente in un S_{r-1} (o spazio inferiore); allora un iperpiano per questa parte sega la F' di S_r (il cui ordine è $\geqslant r-1$) secondo $r-1-\nu$ generatrici almeno, e quindi contiene almeno altrettanti punti (di diramazione) della parte residua della L, sicchè l'ordine di tutta la L vale:

$$N \geqslant r - 1 .$$

Questa ultima disuguaglianza vale dunque in tutti i casi e (ricordando la $N \leqslant 2p - 2 + 2m$) dà:

$$2p - 2 + 2m \geqslant r - 1 ,$$

onde per $m = 2$ si deduce:

$$r \leqslant 2p + 3 .$$

L'enunciato è così stabilito per $m = 2$.

Supponiamo nel seguito: $m > 2$ onde (essendo $\delta > 1$) $m = 3$, $\delta = 3$, o $m \geqslant 4$, $\delta \geqslant 2$.

Si supponga dapprima che la F' sia un cono il quale, appartenendo ad S_r, ha l'ordine $\geqslant r-1$: dico che in tale ipotesi è $r \leqslant p+4$.

Un iperpiano pel vertice contiene almeno $r-1$ generatrici ciascuna delle quali ha almeno $m(\delta+2\chi-1)/\delta \geqslant m(1-1/\delta)$ punti di L fuori del vertice (che può assorbire al più $m(1-1/\delta)$ punti di diramazione); dunque un iperpiano pel vertice sega la L fuori del vertice in un numero di punti ($\leqslant N$) e

$$\geqslant (r-1)m\left(1-\frac{1}{\delta}\right).$$

Ricordando la $N \leqslant 2p-2+2m$, si deduce:

$$2p-2+2m \geqslant (r-1)m\left(1-\frac{1}{\delta}\right)$$

ossia

$$2p-2 \geqslant m\left\{(r-1)\left(1-\frac{1}{\delta}\right)-2\right\}.$$

Se $(r-1)(1-1/\delta)-2 \geqslant 0$ (il che possiamo supporre altrimenti si ha $r \leqslant 4$ e quindi $r \leqslant p+4$ come vogliamo dimostrare), il 2° membro della disuguaglianza è minimo per $m=3$, $\delta=3$ o per $m=4$, $\delta=2$ (essendo $m>2$, $\delta \geqslant 2$): per $m=3$, $\delta=3$ si ha:

$$r \leqslant p+3,$$

e per $m=4$, $\delta=2$ si ha invece:

$$r \leqslant p+4;$$

l'ultima disuguaglianza sussiste dunque in ogni caso ($m>2$, $\delta>1$) se F' è un cono.

Si supponga ora che la F' non sia un cono e (ferme stando le ipotesi $m>2$, $\delta>1$) si supponga inoltre che sia:

$$r > p+4;$$

la verità del teorema enunciato risulterà stabilita mostrando che le ipotesi fatte sono assurde. La sezione di una rigata F', che non è un cono, con un iperpiano generico passante per una sua generatrice generica a è, come è chiaro, una curva irreduttibile. Avendosi $r>4$ (perchè $p \geqslant 0$), alle ∞^{r-2} curve irreduttibili sezioni di F' cogli iperpiani per a fuori di a, corrispondono (per quanto abbiamo osservato in principio) le curve d'un sistema lineare irreduttibile di un certo genere p_1 su F (tolte forse componenti fisse) il quale appartiene (come il dato sistema ∞^r) alla involuzione di grado m considerata su F (e forse anche ad una di grado $> m$ composta coi gruppi della prima). Ora sulla retta a vi sono almeno $2m(1-1/\delta)$ punti d'intersezione colla curva di diramazione L di F', quindi (essendo $m=3$, $\delta=3$ o $m \geqslant 4$, $\delta \geqslant 2$) almeno 4 punti di L, e perciò sulla curva sezione d'un iperpiano per a fuori di a (la quale ha il genere π come la rigata F', ossia come una qualunque sezione iperplanare di F') vi sono al più $N-4$ punti di diramazione della corrispondenza $[1\ m]$ tra essa e la sua immagine su F di genere p_1. Adoperando la formula di ZEUTHEN si ha dunque:

$$N-4 \geqslant 2p_1-2-2m(\pi-1)\,,$$

mentre in modo analogo (come già abbiamo osservato) si ha:

$$N=2p-2-2m(\pi-1)\,.$$

Si deduce:

$$p_1 \leqslant p-2\,.$$

Dunque se sulla F esiste un sistema lineare irreduttibile ∞^r di genere p dove $r > p+4$, appartenente ad una involuzione di grado $m > 2$ e rappresentativo di una rigata F' che non sia un cono, e se ad ogni generatrice della F' corrispondono su F m/δ ($\geqslant 1$) curve C (essendo $\delta > 1$), si deduce l'esistenza su F di un sistema lineare irreduttibile di dimensione r_1 ($=r-2$) e di genere p_1 ($\leqslant p-2$) tale che $r_1 > p_1+4$ il quale appartiene pure alla data involuzione ed è rappresentativo della rigata F'' (semplice o multipla) ottenuta proiettando la F' (in S_{r-2}) da una sua generatrice. Se la F'' non è un cono potremo applicare nuovamente il procedimento già adoperato e così successivamente in modo da costruire su F (dopo un certo numero h di operazioni) un sistema lineare irreduttibile di dimensione $r_h=r-2h$ e di genere $p_h \leqslant p-2h$ appartenente sempre alla data involuzione di grado > 2, e tale che $r_h > p_h+4$. È chiaro che il numero h delle operazioni eseguibile è necessariamente finito, anzi $\leqslant p/2$, onde per h assai grande non dovrà più esser possibile ripetere l'operazione indicata, e però dovrà esistere un valore $h=k$ in corrispondenza al quale si abbia su F un sistema lineare appartenente alla data involuzione (o forse ad una composta coi gruppi della prima *a fortiori* di grado > 2) di genere p_k e dimensione $r_k > p_k+4$ rappresentativo di un cono F^{k+1} ottenuto proiettando F' successivamente da k generatrici; ad ogni generatrice di un tal cono corrispondono su F m/δ o più curve C, ciascuna riferita in modo δ-plo alla corrispondente generatrice, essendo $\delta > 1$; il fatto ottenuto come conseguenza delle ipotesi da cui siamo partiti è dunque assurdo perchè in contraddizione con ciò che è stato dimostrato innanzi pel caso in cui F' era un cono. Dunque per $m > 2$, $\delta > 1$, si ha (tanto se la F' è un cono come se non è un cono):

$$r \leqslant p + 4 \qquad \text{c.d.d.}$$

La discussione è completa ed il lemma enunciato rimane così stabilito.

4. – La questione di assegnare la massima dimensione dello spazio a cui può appartenere una superficie a sezioni (iperplanari) di genere 0, 1, 2 è da considerarsi come risoluta.

Notoriamente [10] una superficie a sezioni di genere 0 è razionale ed è rigata se $r > 5$, mentre può essere una superficie di VERONESE o una sua proiezione dello stesso ordine ($= 4$) per $r \leqslant 5$.

Una superficie a sezioni di genere 1 appartenente ad un S_r dove $r > 5$ è certo razionale o rigata, giacchè se essa non è rigata gli iperpiani tangenti in un punto la segano secondo curve razionali (irreduttibili per il 2° lemma, § 2) componenti un sistema lineare, e quindi la superficie è razionale per un noto teorema del signor NOETHER [11]. D'altra parte se la superficie è razionale notoriamente deve essere $r \leqslant 9$, se $r = 9$ la superficie può rappresentarsi sul piano mediante il sistema delle cubiche come immagini delle sezioni iperplanari.

Recentemente ho stabilito [12] che ogni superficie (a sezioni iperellittiche di genere > 1, ed in particolare) a sezioni di genere 2 è razionale o rigata: una tal superficie razionale contiene un fascio di coniche e non può appartenere ad uno spazio avente più di 11 dimensioni [13].

Nel successivo § faremo vedere come ai casi in cui $p = 0, 1, 2$, si riconduca la questione generale di assegnare la massima dimensione

---

[10] I resultati noti ricordati in questo § sono dovuti a PICARD, « Crelle C. »; GUCCIA, « Circolo Matematico di Palermo », t. I, 1887; DEL PEZZO, « Accad. di Napoli », 1885, « Circolo di Palermo », t. I. La connessione fra i due ordini di ricerche svolte nei citati lavori è dovuta alle feconde considerazioni del sig. SEGRE (« Circolo di Palermo », t. I) che sono contenute solo in embrione in un noto lavoro di CAPORALI. (Cfr. anche una nota del sig. SEGRE al lavoro del sig. CASTELNUOVO sulle superficie a sezioni iperellittiche, « Circolo di Palermo », t. IV).

[11] « Mathem. Annalen », Bd. 3.

[12] « Accad. dei Lincei », dicembre 1893 [questo volume, IV].

[13] Come risulta dai teoremi del sig. JUNG sui sistemi di curve piane di genere due, « Istituto lombardo », maggio 1888.

dello spazio a cui può appartenere una superficie a sezioni di genere $p > 2$ (14).

5. – Per il 2° lemma (§ 2) la proiezione di una superficie non rigata F di S_r (con $r > 5$) da un piano tangente, fornisce la rappresentazione semplice o multipla della F sulla superficie F' di S_{r-3} ottenuta colla proiezione. Inoltre la F essendo non rigata in S_r ($r > 5$), la curva irreduttibile sezione d'un iperpiano tangente generico della F ha certo il genere $\pi \leqslant p - 1$, se p è il genere delle sezioni iperplanari (non tangenti) della F. Se la F' è proiezione multipla della F, i punti delle sue curve sezioni sono riferiti ai gruppi di involuzioni appartenenti alle rispettive curve immagini di esse sulla F; se $p > 2$, una sezione tangente della F (di genere $\leqslant p - 1$) non può contenere una involuzione di genere $p - 1$ ma solo di genere minore, quindi se la F' è proiezione multipla della F a sezioni di genere $p > 2$, la F' ha le sezioni di genere $\pi < p - 1$ (mentre per $p \leqslant 2$ si ha soltanto $\pi \leqslant p - 1$). Dalle considerazioni precedenti si deduce che se la superficie F non rigata a sezioni di genere $p > 2$ appartiene ad un S_r di dimensione

$$r \geqslant 3p + h > 5$$

(dove h è un intero qualunque), proiettando la F da un suo piano tangente generico si ottiene una superficie F' a sezioni di genere π appartenente ad un S_ϱ (con $\varrho = r - 3$) e si ha in tutti i casi

$$\varrho \geqslant 3\pi + h .$$

Così la questione di determinare la massima dimensione r dello spazio (S_r) a cui appartiene una superficie non rigata a sezioni di genere $p > 2$ (cioè la questione di determinare il massimo di h) si riduce all'analoga questione per una superficie F' a sezioni di genere $< p$. Affinchè a questa si possa nuovamente applicare il processo di riduzione applicato alla F occorre stabilire che essa non è rigata; si giunge a questo resultato quando h supera un certo limite, per precisare quando $h \geqslant 5$, ossia $r \geqslant 3p + 5$.

Dico cioè che sussiste il seguente lemma:

Proiettando da un piano tangente generico (in un S_{r-3}) una superficie F non rigata a sezioni di genere p (> 0) appartenente ad uno spazio di di-

(14) L'applicazione del teorema che tutte le superficie a sezioni di genere due sono razionali o rigate non è qui strettamente necessaria, giacchè la cosa si potrebbe stabilire per le superficie a sezioni di genere 2 in S_{11}, colle considerazioni del § 3 relative alle superficie di S_{3p+5} a sezioni di genere $p > 2$ (con qualche lieve modificazione).

mensione

$$r \geqslant 3p + 5\,,$$

si ottiene una superficie F' non rigata.

La dimostrazione si farà per assurdo. Suppongasi dunque che la F', a sezioni di genere π in S_ϱ ($\varrho = r - 3$), sia rigata.

Se la F' è proiezione semplice della F alle sue generatrici corrispondono sulla F le curve razionali C d'un fascio, segate in un punto dagli iperpiani pel piano di proiezione. Dico che vi è su F un tal fascio di curve razionali C segate in un punto dai nominati iperpiani (di cui $m > 1$ corrispondono ad una generatrice di F'), anche se la F' è proiezione multipla (m-pla) di essa. Questo fatto è conseguenza del 3° lemma (§ 1); infatti se la F' è proiezione multipla della F (le sezioni tangenti alla F in un punto essendo di genere $p' \leqslant p - 1$), dall'essere $r \geqslant 3p+5$, $\varrho = r - 3$, si deduce $\varrho \geqslant 3p' + 5$, quindi in ogni caso

$$\varrho > p' + 4 \quad \text{e} \quad \varrho > 2p' + 3\;;$$

sussistendo tali disuguaglianze siamo appunto nel caso di applicare il citato lemma, e si deduce che ad ogni retta di F' corrispondono sulla F m curve C, ecc..

Dunque l'ipotesi che la superficie non rigata F a sezioni di genere p in S_r ($r \geqslant 3p + 5$) venga proiettata in una rigata (semplice o multipla) F' da un piano tangente generico, porta come conseguenza che esiste sulla F un fascio di curve razionali C segate in un punto variabile dagli iperpiani pel piano proiettante. Siamo condotti a distinguere le due ipotesi:

a) Il fascio delle C suppongasi razionale.

Allora la F è razionale ([15]), e, come il signor CASTELNUOVO ha stabilito, le sezioni tangenti generiche di essa sono proprio di genere $p - 1$ e non minore ([16]), ma le sezioni tangenti alla F pel piano proiettante (che è un piano tangente generico) segano in un punto (variabile) le curve C del fascio razionale e però sono razionali; in conseguenza è $p - 1 = 0$ ossia $p = 1$ contro l'ipotesi $p > 2$.

b) Il fascio delle C suppongasi irrazionale.

Allora mutando il piano tangente da cui vien proiettata la F, il fascio delle curve C non può mutare, perchè si avrebbe altrimenti sulla F una

---

([15]) NOETHER, « Math. Ann. », 3.
([16]) *Massima dimensione ecc.*, l. c.

infinità continua di fasci irrazionali e ciò contraddice ad un teorema del signor CASTELNUOVO ([17]).

Ora non può darsi che ogni piano tangente alla F incontri tutte le curve C, giacchè, la F non essendo rigata, occorrerebbe che ogni suo piano tangente (il quale pel lemma 1° (§ 1) non sega la F secondo una curva) passasse per un punto base (almeno) del fascio delle C, mentre se ogni piano tangente ad una superficie passa per un punto fisso, questa è un cono (come si vede proiettando arbitrariamente la superficie da punti esterni in una di S_3).

Dunque sulla superficie F, nelle nostre ipotesi, esiste un fascio di curve C, tali che ciascuna di esse viene incontrata in un sol punto variabile dagli iperpiani per un piano tangente che non la sega (cioè viene proiettata secondo una retta semplice da un piano tangente della F senza punti comuni con essa); queste curve C debbono in conseguenza essere rette, cioè la F deve esser rigata, contro l'ipotesi.

Così la proposizione enunciata risulta stabilita.

Essa conduce subito alla proposta determinazione della massima dimensione (r) dello S_r a cui appartiene la superficie non rigata F a sezioni del genere $p > 2$.

Per giungere a questo resultato osserviamo anzitutto che la proiezione da un piano tangente della F, se $r \geqslant 3p + 5$ e $p > 2$, non può mai condurre ad una superficie F' a sezioni di genere $\pi < 2$ in S_ϱ ($\varrho = r - 3$); infatti si ha ($p \geqslant 3$)

$$r \geqslant 14 , \qquad \varrho \geqslant 11 ,$$

ed abbiamo già visto (§ 4) che una superficie non rigata a sezioni di genere $\pi < 2$ (cioè $\pi \leqslant 1$) non può appartenere ad un S_ϱ con $\varrho > 9$. Ciò posto rimane stabilito che:

Proiettando da un piano tangente generico una superficie non rigata F a sezioni di genere $p > 2$ in S_r, dove $r \geqslant 3p+5$, si ottiene una superficie non rigata F' di S_ϱ ($\varrho = r - 3$) a sezioni di genere $\pi < p$ dove

$$\varrho \geqslant 3\pi + 5 \qquad \pi \geqslant 2 .$$

Se $\pi > 2$ applichiamo alla F' il procedimento applicato alla F e così di seguito finchè occorra.

Si giungerà certamente ad una superficie non rigata a sezioni di ge-

([17]) Invero si dedurrebbe l'esistenza d'una infinità continua di involuzioni irrazionali sopra una curva sezione della superficie, è questo è assurdo. Cfr. CASTELNUOVO, « Accad. di Torino », giugno 1893.

nere due, la quale apparterrà ad uno spazio di dimensione

$$11 + h \qquad (h \geqslant 0)$$

(essendo $11 = 3 \cdot 2 + 5$), se la F appartiene ad uno spazio di dimensione $r = 3p + 5 + h$.

Per quanto abbiam visto relativamente alle superficie a sezioni di genere due (§ 4) risulta $h = 0$, cioè:

Una superficie non rigata a sezioni di genere $p > 2$ non può appartenere ad uno spazio di dimensione $r > 3p + 5$.

Abbiamo visto che l'enunciato è pure soddisfatto per $p = 2$, $p = 0$, mentre per $p = 1$ una superficie non rigata a sezioni ellittiche non può appartenere ad uno spazio S_r di dimensione $r > 9$.

Alla domanda se il massimo di r che abbiamo stabilito (per $p > 1$) può esser raggiunto, si risponde affermativamente coll'esempio delle superficie razionali rappresentate sul piano da uno dei sistemi lineari (di curve iperellittiche o di quartiche piane di genere 3) considerati dal signor CASTELNUOVO [18], il quale ha ricondotto a tipi (e precisamente ai tipi nominati) tutti i sistemi lineari di curve piane di genere $p > 1$ e dimensione massima $3p + 5$.

Inversamente si può stabilire che ogni superficie non rigata a sezioni di genere $p > 2$ in S_{3p+5} è razionale (si è già visto per $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$), ed è quindi una di quelle di cui il signor CASTELNUOVO ha fatto implicitamente lo studio. Ciò risulta dall'osservare che le successive proiezioni da piani tangenti che conducono da una superficie F a sezioni di genere $p > 2$ in S_{3p+5} ad una (razionale) a sezioni di genere due in S_{11}, sono necessariamente univoche: infatti una proiezione multipla su S_{r-3} fatta da un piano tangente di una superficie a sezioni di genere $p > 2$ appartenente ad un S_r $(r > 5)$ conduce, per quanto abbiamo osservato in principio del §, ad una superficie F' a sezioni di genere $\pi < p - 1$; se è $r \geqslant 3p + 5$, si avrebbe allora una F' non rigata a sezioni di genere $\pi \geqslant 2$ appartenente ad un S_ϱ $(\varrho = r - 3)$ con $\varrho \geqslant 3\pi + 8 > 3\pi + 5$, e questo contraddirebbe il teorema dimostrato secondo cui il massimo di ϱ è $3\pi + 5$.

Riunendo i risultati ottenuti ed enunciando sotto forma proiettiva i ricordati teoremi del signor CASTELNUOVO relativi ai sistemi lineari di dimensione $3p + 5$ e di genere $p > 1$ nel piano, ed i teoremi del signor GUCCIA [19] relativi ai casi $p = 1$ e $p = 0$, perveniamo alla seguente conclusione:

---

(18) *Massima dimensione ecc.*, l. c..
(19) Cfr. le citazioni del § 2.

Se una superficie F a sezioni iperplanari del genere p ($\geqslant 0$) appartiene ad uno spazio S_r di dimensione

$$r \geqslant 3p + 5 ,$$

ha luogo uno dei seguenti casi:

1) *La superficie F è una rigata di genere p ($r \geqslant 3p + 5$).*

2) *La F è una superficie razionale ($r = 3p + 5$, o anche per $p = 1$, $r = 9$), e precisamente:*

a) *una superficie contenente un fascio razionale di coniche ($r = 3p + 5$);*

b) *la superficie del 16° ordine a sezioni del genere 3 in S_{14} rappresentata sul piano dal sistema delle quartiche ($r = 3p + 5$, $p = 3$);*

c) *la superficie del 9° ordine a sezioni ellittiche in S_9, rappresentata sul piano dal sistema delle cubiche, o una sua proiezione dello stesso ordine in S_8 ($r = 3p + 6$ o $r = 3p + 5$, $p = 1$).*

6. – La questione di determinare la massima dimensione dei sistemi lineari di curve del genere p sopra una superficie viene risoluta dal teorema del precedente § per i sistemi semplici, giacchè riferendo proiettivamente gli elementi (curve) del dato sistema ∞^r agli iperpiani di S_r si ottiene una superficie F' riferita punto per punto in modo semplice alla primitiva F, la quale superficie F' ha le sezioni di genere p ed appartiene allo S_r, onde se la F non è riferibile ad una rigata F' di genere p avente come direttrici le immagini delle curve del dato sistema (sezioni di F'), si ha $r \leqslant 3p + 5$, o per $p = 1$ anche $r = 9$.

Se si tratta di un sistema non semplice il quale *appartenga ad una involuzione I_m* (in modo che il passaggio della sua curva generica per un punto trae di conseguenza il passaggio di essa per gli altri $m - 1$ punti del gruppo della involuzione I_m che viene individuato dal primo punto), l'indicata trasformazione riesce invece multipla (m-voca) cioè conduce ad una superficie F' i cui punti corrispondono ai gruppi della I_m su F.

Indichiamo con π il genere delle sezioni della F' (appartenente ad S_r) riferite in corrispondenza $[1\ m]$ alle curve di genere p del sistema ∞^r considerato sulla F. Si ha allora, per la nota formula di Zeuthen,

$$p - 1 \geqslant m(\pi - 1) ,$$

quindi

$$\pi \leqslant \frac{p-1}{m} + 1$$

ossia (poichè $m \geqslant 2$),

$$\pi \leqslant \frac{p+1}{2} .$$

Ora secondo il teorema stabilito nel precedente § la F' è una rigata se è

$$r > 3\pi + 5 \quad \text{ed} \quad r > 9 \quad \text{se} \quad \pi = 1 ;$$

si soddisfa a queste due condizioni nell'ipotesi

$$p > 1 ,$$

quando

$$r > 3\,\frac{p+1}{2} + 5 .$$

Allora vi è fra la rigata F' e la superficie F una corrispondenza $[1\ m]$ in cui le immagini delle sezioni di F' compongono un sistema ∞^r di genere p; applicando il 3º lemma (§ 3) possiamo affermare che a ciascuna generatrice della F' corrispondono m curve razionali e la F è riferibile ad una rigata di genere p (su cui le curve del sistema dànno luogo a direttrici) se è $r > 2p + 3$ (onde $r > p + 4$, per $p \geqslant 1$).

La nominata deduzione per la F nell'ipotesi $p > 1$ è subordinata alle due disuguaglianze

$$r > 3\,\frac{p+1}{2} + 5 , \qquad r > 2p + 3 ;$$

di queste la condizione $r > 2p + 3$ assorbe l'altra per p assai alto ($p \geqslant 7$); osserviamo però che (essendo $p > 0$) le due condizioni sono sempre soddisfatte quando è

$$r > 2p + 6 .$$

Dunque un sistema lineare di genere $p > 1$ e dimensione

$$r > 2p + 6$$

sopra una superficie non riferibile ad una rigata di genere p è semplice.

Anzi tenendo conto del valore di m, per $m > 2$ si stabilisce che:

Sopra una superficie non riferibile ad una rigata di genere p un sistema lineare di genere $p > 1$ è certo semplice o appartenente ad una involuzione di grado 2, quando la sua dimensione vale

$$r > p + 7 .$$

Esaminiamo le ipotesi $p = 0$, $p = 1$ che per un momento avevamo lasciate da parte.

Se $p = 0$ la F è razionale; il sistema di curve razionali sulla F è immerso in un sistema normale (dello stesso grado) semplice; facendo segare dagli iperpiani di S_ϱ $(\varrho > r)$ le curve di questo sistema semplice sopra una superficie trasformata F', la F' risulta rigata quando $r > 4$ $(\varrho > 5)$, e su di essa le immagini delle curve del sistema sono direttrici.

Se $p = 1$ si ha $\pi = 0$ o $\pi = 1$. Se $\pi = 0$ la F' di S_r, superficie m-pla rappresentata dal sistema lineare ∞^r di genere $p = 1$ su F è certo rigata ove sia $r > 5$; inoltre per $r > 5$ è ancora (essendo $p = 1$) $r > 2p + 3$, $r > p + 4$, quindi si conclude come nel caso generale che la F è in tal caso riferibile ad una rigata ellittica avente come direttrici le immagini delle curve del sistema.

Suppongasi $\pi = 1$ e pure $p = 1$.

Si perviene ancora nello stesso modo alla precedente conclusione per la F quando $r > 5$ (cioè $r > 2p + 3$ ed $r > p + 4$) se la F' è rigata. Consideriamo l'ipotesi in cui questo non accada e sia $r \geqslant 8$. Allora la F' è razionale (cfr. § 4) e, come segue dalla sua rappresentazione piana, possiede una rete omaloidica di curve K (cubiche o quartiche) senza punti base o con un punto base semplice al più (ove le K sieno quartiche, $r = 8$). Sulla F' non vi è curva di diramazione della corrispondenza $[1\ m]$ con F (perchè un'involuzione ellittica non ha coincidenze), ma al più dei punti di diramazione isolati, quindi sopra una curva K generica non vi sono punti di diramazione della nominata corrispondenza con F, giacchè se ve ne fosse uno (base della rete), per un'osservazione già fatta nel § 3, si dedurrebbe che ve n'è almeno un altro distinto; si deduce che l'immagine di ogni curva K su F è spezzata in m curve (razionali); ciò è assurdo componendo le K un sistema lineare (rete) di dimensione > 1, come è stato osservato nella discussione del 3° lemma (§ 3).

Dall'esame dei casi $p = 0$ e $p = 1$, e dall'enunciato precedente segue che:

Un sistema lineare di genere $p \geqslant 0$ appartenente ad una superficie non riferibile ad una rigata di genere p, è certo semplice se ha la dimensione

$$r > 2p + 6 \quad ([20]) ;$$

è semplice o appartiene ad una involuzione di grado 2° se

$$r > p + 6 .$$

([20]) Così si ha un'estensione alle superficie del teorema del sig. Segre secondo cui è semplice un sistema lineare di curve piane di genere p e dimensione $r > p + 1$, *determinato dai punti base* (« Circolo di Palermo », t. I). Il limite che comparisce nel nostro enunciato è più alto, ma vi è una restrizione di meno.

Alla condizione $r > 2p + 6$ si può sostituire nella prima parte dell'enunciato la condizione

$$r \geqslant 3p + 5,$$

che comprende la $r > 2p + 6$ per $p > 1$, e per $p = 1$, $p = 0$ si riduce rispettivamente a $r \geqslant 8$, $r \geqslant 5$.

Allora riunendo insieme i resultati ottenuti in questo § con quelli del § precedente possiamo enunciare il teorema generale.

Se sopra una superficie esiste un sistema lineare di genere p e dimensione $r \geqslant 3p + 5$ *ha luogo uno dei seguenti casi*:

1) *la superficie è riferibile biunivocamente ad una rigata avente come direttrici le immagini delle curve del sistema* ($r \geqslant 3p + 5$);

2) *la superficie è razionale ed il sistema è semplice di dimensione* $r = 3p + 5$ *od anche* $r = 9$ *per* $p = 1$; *allora la superficie può trasformarsi birazionalmente in una di* S_r *su cui le immagini delle curve del sistema sieno le sezioni iperplanari*; *questa superficie così trasformata*:

a) *contiene un fascio di coniche, tranne se*,

b) *ha le sezioni di genere* 3 *non iperellittiche ed è di ordine* 16 *in* S_{14},

c) *o se è d'ordine* 9 (*a sezioni ellittiche*) *in* S_9 *o* S_8.

7. – Nel § 2 del cap. I delle mie *Ricerche* ho stabilito la definizione di sistema lineare *completo* di curve di genere p (sopra una superficie) indicando con questo nome un sistema non contenuto (nemmeno parzialmente) in un altro più vasto dello stesso genere.

Ho dimostrato quindi che se due sistemi lineari di curve di genere p hanno comune un sistema (o una curva) dello stesso genere essi sono contenuti in uno stesso sistema lineare di genere p; ne ho dedotto che una curva non appartiene a due sistemi completi (di ugual genere) ed appartiene certo ad un sistema completo (forse anche di dimensione zero) se esiste un massimo alla dimensione d'un sistema di genere p sulla superficie (da cui il teorema per le superficie di genere $P > 0$, sulle quali un sistema lineare di genere p ha la dimensione $\leqslant p$). In base ai resultati precedenti possiamo ora enunciare il seguente resultato generale:

Sopra una superficie, una curva di genere p ($\geqslant 0$) *appartiene ad un determinato sistema lineare completo di genere p* (*e dimensione* $\geqslant 0$), *purchè la superficie non sia riferibile ad una rigata di genere p avente come direttrice l'immagine della data curva. Le superficie riferibili a rigate di genere p, in quanto si considerano su di esse sistemi lineari di genere p, dànno effettive eccezioni al teorema, come è stato osservato nell'introduzione.*

Per le applicazioni del teorema stabilito (*Restsatz*, ecc.) rimando alle mie citate *Ricerche*.

VII.

SUI SISTEMI LINEARI DI SUPERFICIE ALGEBRICHE LE CUI INTERSEZIONI VARIABILI SONO CURVE ELLITTICHE

NOTA I.

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. III (1° sem., 1894),

pp. 481-487 (*)

In una mia Nota *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche* (¹) ho classificato i sistemi lineari *semplici* di superficie le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche di genere $p > 1$, assegnando il *tipo* a cui siffatti sistemi si possono ricondurre con trasformazioni cremoniane dello spazio.

I sistemi lineari di superficie le cui intersezioni variabili sono curve di genere $p = 0$, $p = 1$, non rientrano in generale in quel tipo (come ivi è osservato), ma per $p = 0$ la questione si risolve facilmente come è indicato in una nota di quel lavoro. Alla considerazione del caso $p = 1$ è dedicata la presente Nota, nella quale classifico appunto (riducendo a *tipi*) i sistemi lineari semplici di superficie ad intersezioni variabili ellittiche: vengono soltanto esclusi quei sistemi semplici (ad intersezioni variabili ellittiche) pei quali tre superficie generiche s'incontrano in 3 punti variabili (cioè sistemi di *grado* 3); la determinazione di essi dipende dalla risoluzione del problema *se la varietà cubica di S_4, senza punti doppi, sia rappresentabile punto per punto su S_3* (cioè sia *razionale*) (²). Mi propongo dunque di assegnare e ricondurre a tipi *tutti i sistemi lineari semplici di superficie ad intersezioni variabili ellittiche dove tre superficie*

(*) Nota presentata dal Socio L. CREMONA nella seduta del 20 maggio 1894.

(¹) « Rendic. Acc. dei Lincei », decembre 1893 [questo volume, IV].

(²) Tale questione rimane tuttora insoluta. È però notevole il fatto (che il sig. NOETHER ha segnalato al sig. SEGRE per $n = 3$) che l'equazione generale del 3° grado in $n + 1$ variabili può risolversi con funzioni razionali di n parametri non invertibili, cioè che si possono far corrispondere biunivocamente i punti di una varietà cubica V_n^3 di S_{n+1} ai gruppi (od anche alle coppie) di una involuzione in S_n.

generiche s'incontrano in $n > 3$ punti variabili (sistemi di grado $n > 3$): mostrerò come i nominati tipi vengono dati da sistemi di quadriche, di superficie cubiche e da un particolare sistema di superficie del 4° ordine.

Più in generale risolvo qui la questione dello studio delle varietà (a 3 dimensioni) a curve sezioni (cogli S_{n-2} in S_n) ellittiche, d'ordine > 3. Esse risultano tutte razionali o contengono un *fascio* ellittico di piani (ed in quest'ultimo caso non possono essere razionali) (3).

1. – Una qualunque varietà W a 3 dimensioni d'ordine > 2, di S_n, le cui superficie sezioni (iperplanari) cogli S_{n-1} sono rigate, contiene un fascio di piani. Per vederlo basta osservare che sulla W si hanno in tale ipotesi ∞^1 rette per un punto, ed il cono da esse generato ha *una* retta comune con un iperpiano (S_{n-1}) generico pel punto, e però è un piano.

Ciò vale in particolare se la varietà in questione è a curve sezioni ellittiche: perciò le varietà a curve sezioni ellittiche non contenenti un fascio (ellittico) di piani hanno le superficie sezioni non rigate, quindi razionali (4).

Consideriamo una varietà W^n d'ordine n a curve sezioni ellittiche ed escludiamo che essa contenga un fascio (ellittico) di piani. Supponiamo la W^n appartenente ad un S_4, dove eventualmente può supporsi proiettata da punti esterni.

Il procedimento indicato dal sig. CASTELNUOVO per le superficie non rigate a sezioni ellittiche (5), si estende subito a questo caso e permette di costruire un (anzi *il*) sistema lineare ∞^{n+1} di varietà d'ordine $n-2$ (*aggiunte* alla W^n) seganti ogni piano secondo una curva d'ordine $n-2$ aggiunta alla sezione d'ordine n della varietà (6).

Tali varietà aggiunte segano sulla W^n un sistema lineare ∞^{n+1} di superficie di cui tre generiche si segano in n punti variabili, al quale sistema appartengono le sezioni iperplanari di W^n. Riferendo proiettivamente gli elementi (superficie) del detto sistema agli iperpiani (S_n) di S_{n+1}, la W^n si trasforma in una varietà *normale* V^n, d'ordine n in S_{n+1}, a curve sezioni ellittiche: la V^n risulta così proiettivamente determinata, e per $n > 3$ la W^n è una sua proiezione da punti esterni, mentre per

(3) Giacchè dal teorema del sig. LÜROTH relativo alla razionalità delle involuzioni sulla retta (« Math. Ann. », Bd. 9), segue che un *fascio* di superficie in S_3 è razionale. (Per fascio di superficie in una varietà si deve intendere un sistema ∞^1 di superficie tale che per un punto generico della varietà passi *una* superficie del sistema).

(4) Per un teorema del sig. CASTELNUOVO, « Rendic. Acc. dei Lincei », gennaio 1894.

(5) L. c. La possibilità di questa estensione e quindi la possibilità di considerare le W^n come proiezioni delle varietà normali V^n di S_{n+1} fu vista dal sig. CASTELNUOVO che me ne suggerì lo studio.

(6) Si potrebbe vedere (ma qui non occorre) che le nominate varietà d'ordine $n-2$ sono effettivamente aggiunte alla W^n nel senso stabilito dal sig. NOETHER (« Math. Ann. », Bd. 2, 8).

$n = 3$ la W^n coincide colla V^n (a meno di trasformazioni proiettive).

Se $n > 3$ la V^n può proiettarsi successivamente, in modo univoco, da $n - 3$ suoi punti semplici sopra una varietà cubica di S_4 contenente piani (che non è un cono ellittico di 2ª specie), e però è razionale (7).

Dunque:

Ogni varietà (di 3 dimensioni) a curve sezioni ellittiche,

1) *o contiene un fascio (ellittico) di piani (ed è irrazionale);*

2) *o è rappresentabile punto per punto sulla varietà cubica di S_4, ed in questo caso è certo razionale se ha l'ordine > 3.*

Il teorema si estende alle varietà con più di 3 dimensioni.

2. – Data in S_n una varietà (di 3 dimensioni) W^n a curve sezioni ellittiche d'ordine $n > 3$, non contenente un fascio di piani, abbiam visto che essa può proiettarsi (da punti esterni) in una varietà di S_4 la quale è alla sua volta proiezione d'una varietà normale V^n d'ordine n di un S_{n+1}: pel nostro scopo occorre ancora stabilire che la W^n è essa pure proiezione della medesima varietà V^n o di una ad essa proiettiva (occorre cioè stabilire che la varietà normale V^n, di cui è data una proiezione, resta così proiettivamente determinata); invero è soltanto a questo patto che potremo affermare che un sistema lineare semplice di superficie ad intersezioni variabili ellittiche in S_3 rappresentativo di W^n, è contenuto in un sistema che rappresenta la varietà normale V^n. La questione di cui qui si tratta fa parte di una questione generale analoga a quella che è stata risoluta dal sig. SEGRE per le curve e per le superficie rigate (8), e da me per tutte le superficie (9). Non è qui il luogo di trattare la questione generale (che pure può risolversi affermativamente): basterà che trattiamo il caso che ci riguarda.

A tal fine occorre dimostrare che sopra una varietà W_1^n d'ordine n di S_4, proiezione della W_1, una superficie d'ordine n, la quale appartenga ad un sistema lineare di superficie contenente quello delle sezioni iperplanari di W_1^n, è la sezione di W_1^n (fuori della superficie multipla) con una varietà aggiunta d'ordine $n - 2$: infatti ciò significa che il sistema delle superficie sezioni iperplanari di W^n è contenuto in quello delle sezioni iperplanari della V^n costruita nel precedente §.

Ora si osservi che la nostra superficie F, per le condizioni poste, sega

(7) Cfr. SEGRE, *Sulle varietà cubiche dello spazio a 4 dimensioni ecc.* (« Accad. di Torino, Memorie », 1888). — Sulle varietà cubiche contenenti piani (e segnatamente su quella che ne contiene 10) cfr. anche SEGRE, « Atti Accad. di Torino », 1887 e CASTELNUOVO, « Atti Istituto Veneto », 1888-1891.

(8) « Math. Ann. », Bd. 33-34.

(9) *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche,* « Accad. di Torino, Memorie », 1893 [questo volume, V].

ogni curva C sezione piana di W_1^n in un gruppo di n punti intersezione di *una* curva d'ordine $n-2$ aggiunta alla C (giacchè le nominate curve aggiunte determinano sulla C la serie completa contenente quella segata dalle rette): facendo variare il piano della C per una retta generica di S_4, la nominata curva aggiunta descrive una varietà d'ordine $n-2$ aggiunta alla W_1^n, di cui la F è sezione ([10]) c.d.d..

3. – Ciò posto noi dobbiamo rivolgerci allo studio delle varietà normali V^n d'ordine $n>3$ di S_{n+1} a curve sezioni ellittiche (non contenenti un fascio di piani e però) razionali: rappresentandole sopra S_3 punto per punto, i sistemi di superficie rappresentativi (costituiti dalle immagini delle sezioni iperplanari di V^n), e quelli in essi contenuti, ci forniranno i tipi richiesti. Per brevità parlando di una V^n intenderemo che essa sia una varietà soddisfacente alle condizioni enunciate.

Sebbene il procedimento adoperato sia il medesimo, conviene tener distinto il caso delle varietà V^n d'ordine $n>4$ da quello delle V^4.

Per quest'ultime si noti anzitutto che esse sono intersezione completa di due quadriche (varietà base di un fascio di quadriche). Invero una quartica C sezione con un S_3 della V^4 è base per un fascio di superficie quadriche di S_3: un S_4 per lo S_3 sega V^4 secondo una superficie F (a sezioni normali) per la quale passano tante quadriche di 3 dimensioni quante superficie quadriche passano per una sezione ([11]), in altre parole vi è *una* quadrica di S_4 contenente tanto la F quanto una superficie quadrica per C in S_3; variando lo S_4 per S_3 il luogo delle nominate quadriche di 3 dimensioni passanti per una stessa superficie di 2° ordine di S_3 è *una* quadrica di S_5 passante per la medesima superficie del 2° ordine e contenente la V^4: la V^4 appartiene dunque alle quadriche d'un fascio in S_5 ([12]).

Se gli elementi (punti) di una di queste quadriche sono le rette dello spazio ordinario, la V^4 è un complesso quadratico di rette. La sua rappresentazione su S_3 è nota ([13]).

Per ottenerla nel modo più semplice si può notare che ad una super-

---

([10]) Cfr. le mie *Ricerche*, l. c., cap. II, § 1, pag. 22 [questo volume, pag. 54].

([11]) V. le mie *Ricerche*, l. c., cap. V, § 5, pag. 59 [questo volume, pag. 100].

([12]) Questa dimostrazione si estende e permette in generale di stabilire che per una varietà M_k di k dimensioni a curve sezioni normali (cogli S_{n-k+1} in S_n) passano tante quadriche di S_n (linearmente indipendenti) quante quadriche di S_{n-k+1} passano per una sua curva sezione generica. Pel caso della V^4 il fatto stabilito segue anche dall'osservazione che la V^4 vien proiettata da un punto in una V^3 di S_4 (SEGRE, « Accad. di Torino, Memorie », l. c.).

([13]) Si veda l'aggiunta del sig. KLEIN alla fine di una Nota *Zur Theorie der algebraischen Functionen mehrerer complexen Variabeln*, del sig. NOETHER (« Göttinger Nachrichten », 1869); cfr. pure CAPORALI, *Sui complessi e sulle congruenze di 2° grado*, « Memorie dell'Accad. dei Lincei », 1877-78.

ficie F sezione generica della V^4 (intersezione di due quadriche di S_4) appartiene sempre almeno una retta (anzi 16 rette distinte se F non ha punti doppi ed almeno 4 rette, distinte o no, per il punto doppio, se la F possiede un punto doppio): da una di queste rette a la F viene proiettata univocamente sopra un piano, giacchè due quadriche per la F segano un piano generico per a, fuori di a, in due rette non passanti per uno stesso punto di a, non essendo F rigata ([14]).

Perciò proiettando la V^4 di S_5 da una tale retta a sopra un S_3 (contenuto nel suo S_5) si ottiene la rappresentazione univoca della V^4 su S_3. In questa rappresentazione le immagini delle sezioni iperplanari della V^4 sono le superficie cubiche L proiezioni delle sezioni stesse dal punto comune ad a e al loro iperpiano; le immagini delle quartiche sezioni sono le quartiche proiezioni di esse da a; quindi le superficie cubiche L hanno comune una quintica base k. In luogo di proiettare la V^4 da a è lo stesso proiettarla prima da un punto O di a in una V^3 di S_4, e quindi proiettare V^3 su S_3 dal punto doppio corrispondente ad a. Si vede così come alla retta a corrisponda nello S_3 rappresentativo una quadrica Q contenente la quintica k base pel sistema delle L (la quale può eventualmente spezzarsi): si vede inoltre come al centro di proiezione O (che è un punto generico di a) corrisponda una retta di questa quadrica che insieme alla k costituisce una sestica intersezione della quadrica Q con le superficie cubiche non spezzate costituenti il sistema rappresentativo della V^3.

Dunque:

a) la V^4 può rappresentarsi su S_3 mediante il sistema lineare ∞^5 di superficie cubiche che ha una quintica base di genere *virtuale due*, intersezione parziale di una quadrica (spezzata o no) con una superficie cubica non spezzata. Una tale quintica base individua sempre da sola il sistema rappresentativo della V^5 (purchè per certe degenerazioni molto singolari di essa s'intenda convenientemente il passaggio per essa delle superficie cubiche.)

4. – Procediamo a considerare le varietà V^n d'ordine $n > 4$.

Una superficie F sezione della V^n con un iperpiano generico è razionale e può rappresentarsi sul piano

1) o con un sistema lineare di cubiche avente $9-n$ punti base ($n \leqslant 9$);

2) o, per $n = 8$, anche con un sistema lineare di quartiche con due punti base doppi ([15]).

([14]) Siffatta rappresentazione di una tale superficie F è stata data dal sig. SEGRE, « Math. Ann. », Bd. 24.

([15]) DEL PEZZO, *Sulle superficie dello n° ordine immerse nello spazio di n dimensioni*, « Cir-

Le due specie di superficie F corrispondenti ai due modi di rappresentazione indicati, dànno luogo a due specie di varietà V^n (dove $n \leqslant 9$) che diremo rispettivamente di 1ª e 2ª *specie*.

Consideriamo dapprima le V^n di 1ª specie. E osserviamo anzitutto che su V^n si può scegliere (in infiniti modi) una curva irreduttibile C d'ordine $n-3$, razionale normale in S_{n-3}, dalla quale la V^n viene proiettata univocamente sopra un S_3 (contenuto nello S_{n+1} di V^n); basta infatti considerare sopra una superficie F, sezione iperplanare generica di V^n, la curva C rappresentata da una delle ∞^{n-4} coniche del piano rappresentativo di F passanti pei $9-n$ punti base delle cubiche immagini delle sue curve sezioni; invero da una tale C la F viene proiettata univocamente sopra un piano, e quindi altrettanto avviene per ogni altra sezione iperplanare generica di V^n per essa. Si noti ancora che l'immagine della curva C sul piano rappresentativo di F, su cui F è rappresentata per proiezione (da C), deve essere una conica irreduttibile se $n > 6$ affinchè la C sia irreduttibile; invece per $n \leqslant 6$ ogni conica di quel piano pei $9-n$ punti base del sistema rappresentativo di F potrebbe essere spezzata in una retta fondamentale ed in un'altra retta qualunque, dove quest'ultima rappresenterebbe una C irreduttibile su F.

Proiettando la V^n sopra un S_3 di S_{n+1} dalla curva C scelta su di essa, si ottiene la rappresentazione punto per punto di V^n su S_3; le sezioni iperplanari di V^n per C vengono proiettate univocamente sui piani di S_3; le sezioni iperplanari generiche di V^n vengono proiettate (ciascuna dagli $n-3$ punti che essa ha su C) in superficie cubiche L; le curve sezioni di V^n, d'ordine n, vengono proiettate da C in curve d'ordine n intersezioni variabili delle superficie cubiche L; tutte le L hanno dunque comune una curva base k d'ordine $9-n$.

Nella stabilita rappresentazione di V^n su S_3, alla curva proiettante C corrisponde in S_3 una quadrica residua di ciascun piano rispetto al sistema delle L, la quale deve quindi contenere la curva base k del sistema; questa quadrica Q sega un piano generico di S_3 (rappresentativo di una sezione iperplanare per C) secondo una conica (immagine della C in quanto appartiene a tale sezione), perciò se $n > 6$ essa è certo irreduttibile tale essendosi supposta la C.

In un punto generico della C vi è un S_3 tangente alla V^n; per esso e per la C passa un S_{n-1} che sega secondo una retta lo S_3 rappresentativo: tali rette immagini dei punti generici di C appartengono alla quadrica Q, e la generano intieramente ove essa sia irreduttibile: se invece la Q si spezza in due piani ($n \leqslant 6$), uno di questi è il luogo delle nominate rette,

---

colo Matematico di Palermo », t. I. Cfr. anche GUCCIA, *Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche ecc.* (ibidem).

l'altro corrisponde invece ad un punto doppio di V^n su C, e poichè quest'ultimo piano è immagine di un punto su V^n, l'intersezione di esso colle superficie cubiche L è fissa, ossia è una linea di 3° ordine facente parte della curva base k, la quale adunque risulta d'ordine $\geqslant 3$. Questo fatto (che si verifica anche considerando la rappresentazione d'una sezione iperplanare di V^n sopra il piano corrispondente di S_3) prova nuovamente che se Q si spezza, mentre C è irreduttibile, deve essere $n \leqslant 6$. Il ragionamento va anche per $n = 4$.

Possiamo dunque affermare che:

proiettando una varietà V^n di 1ª specie ($n > 3$) su S_3 da una sua curva irreduttibile C razionale normale d'ordine $n - 3$, la varietà V^n viene rappresentata biunivocamente sullo S_3 mediante un sistema lineare di superficie cubiche L aventi in comune una curva base k d'ordine $9 - n$ appartenente ad una quadrica Q: la Q può spezzarsi soltanto per $n \leqslant 6$, ed in questo caso uno dei piani in cui si spezza contiene una linea di 3° ordine facente parte di k (cioè base pel sistema delle L).

Se e quando la nominata curva k determini da sola (come curva base) il sistema delle L, oppur no, e quali sieno i tipi di sistemi lineari di superficie cubiche L rappresentativi di varietà V^n, che ne derivano, è una questione che verrà trattata in una prossima Nota, dove sarà presa in esame anche la rappresentazione delle V^8 di 2ª specie.

NOTA II.

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. III (1° sem., 1894),

pp. 536-543 (*)

1. – **Procediamo alla determinazione di tutti i sistemi lineari di superficie cubiche L ad intersezioni variabili ellittiche, che nascono dalla rappresentazione delle varietà normali V^n d'ordine $n > 4$, e di 1ª specie,** ove la V^n sia rappresentata proiettandola da una sua curva irreduttibile razionale normale C d'ordine $n-3$: tali sistemi sono completamente definiti dal gruppo base perchè rappresentativi di varietà normali.

È opportuno avvertire che i nominati sistemi non saranno *tutti* i sistemi di superficie cubiche rappresentativi d'una V^n, ma ogni altro sistema di superficie cubiche (o d'ordine diverso) rappresentativo di una V^n dovrà ricondursi ad uno di essi con una trasformazione birazionale dello spazio.

Inoltre se vorremo ottenere veramente sistemi *tipici* irreducibili fra loro per una trasformazione birazionale dello spazio, dovremo vedere se le differenze nei sistemi ottenuti dalla proiezione indicata di varietà V^n, provengano da differenti proprietà proiettive delle V^n stesse, o dalla differente scelta della curva proiettante C su di esse. Nel 2° caso si dovrà considerare uno solo degli ottenuti sistemi di superficie L come il *tipo* di una *classe* di sistemi di superficie ad intersezioni ellittiche (di dimensione $n+1$ e grado n).

2. – Premettiamo alcuni lemmi.

1° lemma. Sopra la varietà di 1ª specie V^n, per una sua curva generica irreduttibile C razionale normale d'ordine $n-3$,

o non passa alcun S_{n-2} segante V^n secondo una superficie,

o passa *un* S_{n-2} segante V^n secondo una superficie d'ordine $n-3$.

(*) Nota presentata dal Socio L. CREMONA nella seduta del 2 giugno 1894.

Nel 2° caso gli iperpiani per lo S_{n-2} segano V^n (fuori di esso) secondo rigate cubiche normali (ciascuna in un S_4).

Invero poichè lo S_{n-3} della C non sega ulteriormente V^n, ove esista una superficie su V_n giacente in un S_{n-2} per C, essa sega lo S_{n-3} di C secondo la C e però ha l'ordine uguale ad $n-3$; altrimenti quest'ordine ($< n$) sarebbe multiplo di $n-3$ (dove $n > 4$), onde sarebbe $n = 5$ e gli iperpiani per lo S_{n-2} segherebbero su V^n infiniti piani (ciò che è assurdo). Analogamente si vede che per C non possono passare due S_{n-2} seganti V^n ciascuno secondo una superficie d'ordine $n-3$, perchè lo S_{n-1} da essi determinato segherebbe V^n secondo una superficie (composta) d'ordine ($< n$ uguale a) $2(n-3)$ (dove $n > 4$) onde $n = 5$, e su V^n si avrebbe un fascio di piani.

Infine se su V^n vi è una superficie d'ordine $n-3$ in un S_{n-2} per C, gli iperpiani per essa segano V^n (fuori dello S_{n-2}) secondo superficie cubiche ciascuna normale in un S_4 (quindi rigata): in caso opposto sopra una superficie sezione di V^n (superficie razionale normale a sezioni ellittiche in S_n) si avrebbero infinite cubiche piane, ciò che è assurdo (1).

3. – *2° lemma.* Proiettando una varietà V^n di 1ª specie da una sua curva C (irreduttibile, razionale normale d'ordine $n-3$) sopra un S_3, il sistema delle superficie cubiche L ottenute come immagini delle sezioni iperpianali di V^n

1) è determinato dalla curva base K (d'ordine $9-n$) e non ha punti base doppi, se per C non passa un S_{n-2} segante V^n secondo una superficie;

2) nel caso opposto ha, oltre la curva base K, un punto doppio O $(7-n+\varrho)$-plo per la K dove $\varrho = 0, 1, 2$: in ogni piano per O vi sono allora ϱ punti base per le L infinitamente vicini ad O.

Suppongasi che il sistema delle L non sia determinato dalla curva base K: (allora poichè esso è determinato dal gruppo base rappresentando una varietà normale), vi è almeno un punto base per le L che impone ad esse nuove condizioni non espresse dal passaggio per K: un tal punto può essere

1) un punto base (multiplo cioè) doppio per le L la cui molteplicità non risulti dal passaggio per esso della K;

2) un punto base per le L fuori di K;

3) un punto base semplice per le L e per K nel quale sia assegnata una tangente diversa dalla tangente in K e quindi sia fissato il piano tangente alle L;

(1) Invero si proietti la superficie in una del 4° ordine in S_4; e se su questa vi è una cubica piana, vi sono anche infinite rette sezioni degli S_3 per essa.

4) un punto base O doppio per le L la cui molteplicità risulti dal passaggio per esso di K, ma in cui sia assegnata una ulteriore tangente per le L (allora K avrà in O un punto triplo o quadruplo e nell'ultimo caso, possibile soltanto per $n=5$, l'ulteriore tangente fisserà il cono quadrico tangente in O alle L).

Allora i piani per O sono immagini di superficie sezioni parziali di V^n d'ordine $< n$, e quindi per C passa un S_{n-2}, ecc..

Alla stessa conclusione si perviene supponendo l'esistenza d'un punto O base doppio per le L che sia conseguenza della curva base K, osservando che un tal punto O deve esser triplo o quadruplo per la K e che l'ultimo caso (possibile solo per $n=5$) deve escludersi giacchè 4 rette per un punto non possono costituire la curva base K determinante da sola un sistema ∞^6 di L (passando per essa ∞^7 superficie cubiche).

Così è stabilita la 1ª parte dell'enunciato.

Per stabilire la 2ª si noti che lo S_{n-2} per C segante V^n secondo una superficie (supposto esistente) determina sullo S_3 rappresentativo un punto O siffatto che ogni piano per O è immagine d'una rigata cubica normale su V^n: sopra un tal piano le L segano dunque un sistema di cubiche avente un punto base doppio e due semplici; il punto base doppio (è fisso al variare del piano per O ossia) cade in O, infatti dall'ipotesi opposta si trarrebbe che esso descrive una retta base doppia per le L e ne seguirebbe che le intersezioni variabili di due L (immagini di curve sezioni di V^n) sarebbero razionali, non ellittiche come si suppone.

Segue che il punto O è doppio per le L e $(7-n+\varrho)$-plo per la curva base K dove ecc., come è stato enunciato.

Osservazione. – Giova inoltre notare che se $\varrho=1$, il punto O è biplanare per le L e si ha in esso un piano osculatore fisso; questo si stacca dalla quadrica Q residua di ciascun piano rispetto al sistema delle L, quindi (Nota I, § 4) uno dei piani componenti Q contiene una cubica piana facente parte di K, e si ha $n \leqslant 6$.

4. – I precedenti lemmi fissano i limiti della discussione che dobbiamo compiere: vi sono 4 casi da esaminare per ogni valore di n, cioè il caso in cui il sistema delle L è determinato dalla curva base K, e quello in cui vi è inoltre un punto base doppio per le L e $(7-n)$-plo, o $(8-n)$-plo, o $(9-n)$-plo per la K (d'ordine $9-n$).

Cominciamo dall'ultimo caso che dà luogo a soluzioni del problema per ogni valore di n $(\leqslant 9)$.

b) La curva base K si compone di $9-n$ rette per un punto base doppio O nel quale è assegnato il cono quadrico tangente alle superficie cubiche L.

Da questa condizione nasce effettivamente (per $n=3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$)

un sistema ∞^{n+1} di superficie cubiche L rappresentativo d'una V^n, e per $n > 3$ nasce dalla effettuata proiezione della V^n da una sua curva C: per $n = 4$ il sistema rientra come caso particolare in quello a) del § 3, Nota I. La varietà V^n così rappresentata è un *cono* cioè ha ∞^2 rette per un punto, aventi per immagini le rette per O dello S_3 rappresentativo: lo si verificherà osservando che la sezione con V^n di un iperpiano per una tal retta è un cono giacchè una L contenente una retta generica per O (nello S_3 rappresentativo) è un cono cubico. Parimenti è facile vedere che proiettando un cono V^n da una qualunque sua curva C (d'ordine $n-3$ ecc.) si ottiene sempre come sistema rappresentativo di V^n il sistema b) ([2]).

Infine si osservi che il cono quadrico tangente in O alle L è la quadrica Q residua di ciascun piano rispetto al sistema, quindi può supporsi irreduttibile (tale essendo la C) per $n > 6$ (Nota I, § 4).

5. – Escludendo le V^n che sono coni, restano ancora 3 casi da esaminare partitamente per ogni valore di n.

c) Sia $n = 5$. La curva base K si supponga una quartica *di 2ª specie* (genere 0).

Si ha così effettivamente l'unico sistema ∞^6 di L rappresentativo d'una V^5, che sia determinato dalla quartica base, giacchè questa deve appartenere ad *una* quadrica residua di ciascun piano rispetto al sistema: un tal sistema nasce effettivamente rappresentando V^n mediante una proiezione come è stato indicato.

Sotto la condizione di essere di 2ª specie la quartica K può degenerare, ma debbono escludersi (cioè non nascono dalla indicata proiezione di una tale V^5) i casi in cui la K porti l'esistenza d'un punto base doppio per le L (2º lemma, § 3) ([3]).

Le varietà V^5 rappresentate dal sistema c) non sono coni: dico che inversamente ogni V^5 che non è un cono può rappresentarsi con un sistema c).

Si consideri la rappresentazione di una V^5 che non è un cono mediante la proiezione indicata da una C.

Se il sistema rappresentativo di L non è quello c), le L avranno un punto base doppio O $(7-5+\varrho)$-plo per la curva base K, dove $\varrho = 0, 1$ (per $\varrho = 2$, V^n è un cono). Allora si consideri un piano generico per O, ed in esso una conica generica (irreduttibile) passante per O e per gli altri due punti base del sistema di L nel piano (uno dei quali è forse infinitamente vicino ad O).

([2]) **Donde segue subito la sua irreducibilità agli altri che verremo trovando.**

([3]) **Basta per ciò che la K si componga di 3 rette per un punto ed un'altra retta incidente ad una delle prime tre fuori del punto.**

Questa conica γ rappresenta una conica su V^n per la quale non passa una quadrica a due dimensioni (contenuta in V^n), giacchè la γ non appartiene ad una quadrica per K nè ad un particolare piano per O, cui corrisponda su V^5 una quadrica. Proiettando V^5 da una tale sua conica su S_3, si rappresenta dunque V^5 mediante un (particolare) sistema c) (2° lemma, § 3).

6. – Sia $n = 6$. Escludendo i coni V^6 (già esaminati), sul sistema rappresentativo della V^6 (proiettata da una sua curva C su S_3) si possono fare le tre ipotesi (§ 3):

d) La cubica base K determina da sola il sistema delle L, e però anche *una* quadrica Q residua di ciascun piano rispetto al sistema, quindi si compone di 3 rette sghembe.

Nasce così effettivamente un sistema ∞^7 di L rappresentativo d'una V^6, ove la V^6 sia stata proiettata ecc..

d') Il sistema delle L ha (oltre la curva base K) un punto base doppio O, che è *semplice* per la cubica base K. Allora questa K è una cubica gobba appartenente alle ∞^2 quadriche residue dei piani per O rispetto al sistema delle L (non ad ∞^3 quadriche).

Nasce così effettivamente un sistema ∞^7 rappresentativo d'una V^6 proiettata da una sua cubica C.

d'') Il sistema delle L ha (oltre la curva base K) un punto base doppio O, che è pure *doppio* per la cubica base K; ed inoltre le L hanno in O (punto biplanare) un piano osculatore fisso. Allora (§ 3, *Osservazione*) la K è una cubica piana (certo non appartenente al piano osculatore). Un siffatto gruppo base determina effettivamente un sistema ∞^7 di L rappresentativo d'una V^6, e nascente dalla proiezione di V^6 da una sua cubica C.

I sistemi *d*), *d'*), *d''*) sono irreducibili fra loro, perchè le V^6 rappresentate sono proiettivamente distinte. Per convincersene basta notare che nel 1° caso non si hanno mai reti (¹) di rigate cubiche su V^6; nel 2° esistono due reti, e una superficie rigata d'una rete compone una sezione iperplanare di V^6 insieme ad una superficie rigata dell'altra, non mai insieme ad una superficie della stessa rete; nel 3° caso la V^6 possiede una sola rete di rigate cubiche, dove due rigate compongono una sezione iperplanare di V^6.

7. – Sia $n > 6$. Notando che una curva base d'ordine < 3 non può *mai* individuare *una* quadrica che la contiene, nè quindi un sistema ∞^{n+1}

(¹) Col nome di *rete* di superficie designamo (come di solito) un sistema lineare ∞^2 di superficie sulla varietà (per due punti generici di questa passa una superficie della rete).

di L, e ricordando l'osservazione posta in fine al § 3, si ha che, escludendo i sistemi rappresentativi di coni, è da esaminare soltanto il caso dei sistemi di L con punto base doppio $(7-n)$-plo per la curva base K.

È quindi $n \leqslant 7$ ossia $n=7$.

e) Il sistema ∞^8 di superficie cubiche L con conica base e punto base doppio fuori di esso (unico sistema che nasce dall'ipotesi precedente), rappresenta effettivamente una V^7 che non è un cono, ove questa sia proiettata ecc.. In esso la conica base è irreduttibile tale essendo la curva proiettante C, perchè (per $n>6$) è irreduttibile la quadrica S residua di ciascun piano rispetto al sistema, cioè il cono quadrico proiettante da O la conica.

Il nominato sistema di L si riconduce con una trasformazione quadratica al sistema delle quadriche passanti per un punto.

Per $n>7$ le varietà V^n di 1ª specie sono coni.

Così è esaurito l'esame delle varietà normali V^n di 1ª specie.

8. – Rimane ora la considerazione delle varietà V^8 di 2ª specie, precedentemente escluse (5).

Ad una superficie sezione iperplanare generica di V^8 appartengono ∞^3 quartiche razionali normali da ciascuna delle quali la superficie può proiettarsi univocamente sopra una quadrica. Scegliamo sopra una sezione iperplanare generica della V^8 (di 2ª specie) una siffatta quartica irreduttibile C ed un punto P fuori di essa: lo S_5 determinato da P e da C non sega la V^8 fuori di C e di P, e da questo S_5 la V^8 può proiettarsi univocamente sopra un S_3. Con ciò si ottiene una rappresentazione della V^8 su S_3 nella quale le immagini delle sezioni iperplanari di V^8 sono superficie del 4° ordine L (ciascuna proiezione della corrispondente sezione generica dai 4 punti comuni ad essa sezione e a C) seganti sopra un piano generico un sistema di quartiche con due punti base doppi (rappresentativo di una superficie sezione di V^8 con un iperpiano per lo S_5 proiettante); il sistema delle L ha dunque una conica base doppia K (irreduttibile o no): le curve sezioni di V^8 vengono proiettate in curve dello stesso ordine 8, intersezioni variabili di due L, onde il sistema delle L non ha altre curve base. È poi facile vedere che il piano della conica K è il piano immagine del centro di proiezione P: invece alla quartica proiettante C corrisponde un cono quadrico irreduttibile Q,

(5) Nel citato lavoro del sig. DEL PEZZO (v. Nota I) si trova considerata la V^8 di 2ª specie rappresentata su S_3 dal sistema delle quadriche (e qualche altra V^n di 1ª specie costruita partendo da particolari sistemi di superficie cubiche compresi tra quelli da noi enumerati): ivi è pure enunciato (senza dimostrazione) che la V^8 di 2ª specie è sempre rappresentabile col sistema delle quadriche di S_3; questo fatto si troverà dimostrato in questo §, *escluso che la V^8 sia un cono*, restrizione che evidentemente il detto autore ha tacitamente supposta.

quello corrispondente alla C nella rappresentazione (mediante proiezione da C) della V^7 proiezione di V^8 da P su un S_8 (§ 7).

Se si stacca il piano della conica doppia dalle superficie quartiche L, si ha un sistema di superficie cubiche rappresentativo appunto della nominata V^7 (proiezione di V^8 da P su un S_8); questo sistema è costituito dalle superficie cubiche con un punto base doppio O e la conica base K, la quale o non passa per O ed è irreduttibile, o si spezza in due rette per O; in questo 2° caso il cono quadrico Q è il cono tangente nel punto doppio a tutte le superficie cubiche.

1ª *ipotesi.* Il punto O non appartiene alla conica K e quindi nemmeno al piano α di essa.

Allora esso è doppio per le L come pel sistema residuo rispetto al sistema di esse del piano α.

Si ha il tipo:

e') Per $n = 8$, il sistema delle superficie quartiche con conica base doppia e punto base doppio fuori di essa: questo sistema si riconduce con una trasformazione quadratica al sistema di tutte le quadriche, ed è effettivamente rappresentativo di una V^8 di 2ª specie (non cono).

2ª *ipotesi.* Il punto O appartiene alla conica K che è in tal caso spezzata in due rette per O. Il punto O è base triplo pel sistema delle superficie quartiche L, giacchè staccando il piano α per esso, risulta doppio per le superficie cubiche residue: in O tutte le L hanno (oltre al piano α) lo stesso cono quadrico tangente Q (irreduttibile). Si ha così il tipo:

e'') Per $n = 8$, il sistema delle supefircie quartiche L con punto base triplo, per esso due rette base doppie (distinte o no) ed in esso anche lo stesso cono quadrico tangente irreduttibile (oltre la piano delle due rette). Si determina così un effettivo sistema ∞^9 rappresentativo di una V^8 di 2ª specie contenente ∞^2 rette, che (colle considerazioni del § 4) si vede essere un cono (6).

4. – Esaurito così l'esame delle varietà normali V^n ($n > 3$) in ordine alla loro rappresentazione su S_3, riferendoci alle cose dette nei §§ 1, 2 della Nota I, possiamo enunciare il teorema:

I sistemi lineari semplici di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche, e dove tre superficie generiche s'incontrano in più di 3 *punti variabili* (*cioè sistemi di grado* > 3), *si possono ricondurre con una trasformazione birazionale dello spazio ad uno dei seguenti sistemi lineari tipici, di grado* n *e di dimensione* $n+1$, *o ad un sistema contenuto*

(6) Che ogni V^8 di 2ª specie, la quale non sia un cono, possa rappresentarsi col sistema delle quadriche e'), può anche vedersi considerando gli iperpiani per una sua quartica C tangenti ad essa in due punti di C: le sezioni si spezzano in superficie di Veronese ed (è facile provarlo) si ottiene un sistema omoloidico di tali superficie su V^8, onde ecc..

in uno di questi:

per $n = 4$,

1) *il sistema* ∞^5 *di superficie cubiche determinato da una quintica base di genere due* (*che può degenerare*) *intersezione parziale d'una quadrica e d'una superficie cubica*;

per $n = 5, 6, 7, 8, 9$,

2) *il sistema* ∞^{n+1} *di superficie cubiche determinato da un punto doppio base, in esso il cono quadrico tangente fisso* (*che può supporsi irreduttibile per* $n > 6$) *e su questo* $9 - n$ *rette base* (*questo sistema, rappresentativo d'un cono, per* $n = 4$ *rientra nel* 1° *tipo*);

oppure: per $n = 5$,

3) *il sistema* ∞^6 *di superficie cubiche senza punti base doppi determinato da una quartica di* 2ª *specie* (*che può spezzarsi*);

per $n = 6$,

4) *il sistema* ∞^7 *di superficie cubiche determinato da* 3 *rette base sghembe*;

5) *il sistema* ∞^7 *di superficie cubiche determinato da un punto base doppio e da una cubica gobba base passante semplicemente per esso* (cubica che può degenerare);

6) *il sistema* ∞^7 *di superficie cubiche determinato da un punto base biplanare, in esso un piano osculatore fisso, e una cubica piana base avente in esso un punto doppio* (cubica che può degenerare);

per $n = 7, 8$,

7) *il sistema* (∞^8 *o* ∞^9) *delle quadriche con un punto base semplice o senza punti base*;

per $n = 8$ *anche*

8) *il sistema* ∞^9 *delle superficie quartiche con punto triplo base, due rette base doppie per esso, ed in esso* (*oltre al piano delle due rette*) *lo stesso cono quadrico tangente irreduttibile* (*sistema rappresentativo d'un cono di* 2ª *specie*).

Questi sistemi tipici irreducibili fra loro sono nel caso generale i rappresentanti d'ordine minimo di ciascuna classe: racchiudono come casi particolari tutti i sistemi di quadriche con punti base semplici.

VIII.

SUI FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA PROJETTIVA

« Rend. Ist. Lomb. di sc., lett. ed arti », s. 2ª, vol. XXVII (1894), pp. 550-567

A fondamento della geometria projettiva stanno due ordini di concetti, cui si collegano due gruppi di postulati. Appartengono al primo gruppo i postulati relativi alla retta ed al piano necessari per poter parlare di projezioni e sezioni, ecc., cioè i postulati della geometria di posizione (intesa in senso ristretto). Essi sono stati ampiamente discussi, sia in quanto occorre alla geometria di posizione dello spazio ordinario (PASCH, PEANO, LINDEMANN (1)) sia (generalizzando) anche in quanto si riferisce a quella degli spazi S_n ad n dimensioni (VERONESE, AMODEO, FANO (2)); dimodochè le questioni che si riferiscono al nominato gruppo di postulati possono ritenersi esaurite.

Ma i postulati cui ho alluso non bastano a fondare tutta la geometria projettiva, bensì soltanto a stabilire dei teoremi relativi alle configurazioni, come quello dei triangoli omologici (supposto $n \geqslant 3$), a parlare di gruppi armonici, ecc.

Quel complesso di postulati che permette di passare dai teoremi precedentemente accennati al teorema fondamentale della projettività o, ciò che è lo stesso, alla rappresentabilità dei punti dello spazio mediante coordinate projettive, si riferisce ad un ordine di concetti essenzialmente distinto dal primo, ordine di concetti che (a mio avviso) deve considerarsi come il fondamento di una *teoria* della *connessione* intesa in un senso più generale. Non vi è qui differenza di procedimento pel caso in cui si vogliano estendere le considerazioni a spazi aventi più di tre dimen-

(1) PASCH, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, 1882; PEANO, *Principi di geometria logicamente esposti*, Torino, Bocca, 1889; CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie*, Leipzig, 1891.

(2) VERONESE, *Fondamenti di geometria a più dimensioni, ecc.*, Padova, 1891; AMODEO, « Accad. di Torino », 1891; FANO, « Giornale di Battaglini », 1891.

sioni, giacchè è essenzialmente della retta e della distribuzione dei punti su di essa che qui si tratta.

Di questo secondo gruppo di postulati e degli svolgimenti cui essi conducono si occupano anzitutto i lavori dei sigg. KLEIN, DARBOUX, DE PAOLIS, PASCH (3), i quali dànno dei fondamenti della geometria projettiva una trattazione pienamente rigorosa; in tali lavori però si fa uso del concetto (metrico) di grandezza di segmento, ciò che in un indirizzo puro sembrerebbe desiderabile evitare; d'altra parte (come si vedrà) si può ottenere con tale esclusione uno svolgimento più semplice e naturale del soggetto.

I sigg. AMODEO e FANO (4) occupandosi dei fondamenti della geometria projettiva negli iperspazi si sono proposti appunto l'esclusione di ogni concetto non projettivo; però l'indirizzo da essi seguito è alquanto diverso da quello a cui intendiamo di attenerci, specialmente per ciò che, mentre i due egregi autori si propongono di stabilire un qualunque sistema di ipotesi capace di definire uno spazio lineare al quale siano applicabili i resultati dell'ordinaria geometria, noi cerchiamo qui di stabilire i postulati desunti dall'intuizione sperimentale dello spazio che si presentano più semplici per definire l'oggetto della geometria projettiva (5).

In questo ordine di idee è chiaro che non sarebbe conveniente introdurre come postulato «l'esistenza sulla retta d'una serie armonica non rientrante in se stessa» seguendo la via indicata dal signor FANO, mentre possiamo accogliere i concetti relativi ai possibili ordinamenti naturali dei punti della retta (o degli elementi d'una forma di 1ª specie) che si sono presentati al signor AMODEO e (incidentalmente) anche al signor FANO. Non mi pare però che di tali ordinamenti si sieno enunciate *tutte* le proprietà occorrenti, cioè non è stato osservato come sieno legati l'uno coll'altro i vari ordini naturali dei punti d'una retta (mediante permutazioni circolari: cfr. i §§ 3, 7).

In questo lavoro, riassunte rapidamente le nozioni preliminari della geometria di posizione e dopo avere sviluppato i concetti relativi ai nominati ordini naturali e alla disposizione circolare naturale che essi for-

(3) KLEIN, «Math. Ann.», Bd. 6, 7; DARBOUX, «Math. Ann.», Bd. 17; DE PAOLIS, «Memorie Accademia dei Lincei», 1880-81; PASCH, l. c.

(4) Cfr. i lavori citati. Della trattazione del sig. VERONESE non è il luogo di parlare a questo proposito perchè in essa si consegue il fine più generale di stabilire i fondamenti di tutta la geometria e non soltanto della geometria projettiva.

(5) Non intendiamo per altro di introdurre di quei concetti intuitivi niente più che le loro relazioni logiche, sicchè la geometria così fondata può ancora ricevere una infinità di interpretazioni ove all'elemento «punto» di essa si attribuisca un arbitrario significato. Ci sembra soltanto che l'origine sperimentale della geometria non debba essere dimenticata nella ricerca delle ipotesi su cui essa è fondata.

mano (§§ 3, 4, 5, 6), ammetto che ad esse competa il carattere projettivo (e basta introdurre un postulato più limitato: cfr. § 7) e deduco che « in una forma di 1ª specie il quarto armonico D dopo 3 elementi ABC è distinto da essi e insieme a C separa AB ». La prima parte di tale proposizione (che si suppone generalmente nella dimostrazione della seconda) non segue dal gruppo dei postulati della geometria di posizione [6].

Successivamente introduco il postulato della continuità (equivalente a quello di DEDEKIND) e ne traggo la dimostrazione d'un teorema relativo agli elementi uniti d'una corrispondenza biunivoca ordinata in una forma di 1ª specie. Su questo teorema si fonda la dimostrazione del teorema fondamentale della projettività fatta secondo il concetto di STAUDT [7]. Un corollario del detto teorema permette anche di stabilire le note proprietà delle projettività ed involuzioni concordi e discordi, ecc.

Infine espongo alcune considerazioni (che credo nuove) relative alla dimostrazione a priori della legge di dualità nelle forme di 2ª specie.

Prime proposizioni della geometria projettiva.

1. – I postulati relativi al piano e alla retta conducono alle seguenti proposizioni fondamentali che enunciamo, raggruppate, facendo uso delle denominazioni ordinarie di forme di 1ª, 2ª e 3ª specie.

I. In una forma di 3ª specie due elementi determinano *una* forma di 1ª specie cui appartengono.

II. In una forma di 3ª specie un elemento ed una forma di 1ª specie che non si appartengono determinano *una* forma di 2ª specie a cui appartengono.

III. A questa forma di 2ª specie appartiene sempre la forma di 1ª specie determinata da due elementi di essa.

IV. In una certa forma di 1ª specie vi sono infiniti elementi.

Segue che: In ogni forma di 1ª specie vi sono infiniti elementi, in ogni forma di 2ª specie infinite forme di 1ª specie, ecc.

La proposizione IV non è subito necessaria perchè (come ha avvertito il signor FANO) lo sviluppo dalla prima parte della geometria di posizione è indipendente da tale ipotesi; ma occorrendo essa in seguito l'abbiamo posta subito per semplicità.

---

(6) Spetta al sig. FANO (l. c.) l'acuta osservazione di tale lacuna nelle ordinarie trattazioni dei fondamenti della geometria projettiva, tantochè l'autore propone di introdurre come postulato « l'esistenza di un gruppo armonico composto di 4 punti distinti »: questo diventa per noi un teorema dopo avere introdotto i postulati relativi agli ordini naturali dei punti d'una retta.

(7) Cfr. in particolare le note aggiuntive del sig. PIERI alla traduzione italiana della *Geometrie der Lage*.

Dalle proposizioni enunciate segue la possibilità di parlare di projezioni e sezioni, il teorema dei triangoli omologici, ecc., dal quale si deduce la definizione di gruppo armonico in una forma di 1ª specie (col quadrangolo o quadrilatero, ecc.) in modo che sussistono i:

Teoremi. Tre elementi ABC di una forma di 1ª specie determinano *un* quarto elemento D (che può forse coincidere con uno dei tre) il quale compone con essi un gruppo armonico $(ABCD)$.

Ogni projezione o sezione di un gruppo armonico è un gruppo armonico.

La questione « se in un gruppo armonico il quarto armonico sia distinto dai primi tre » equivale all'altra « se i tre punti diagonali di un quadrangolo completo appartengano ad una retta o no ». La questione resta per ora insoluta sebbene la cosa rimanga decisa appena si sappia quello che avviene in un caso particolare (cfr. FANO, l. c.). La soluzione verrà data nel § 8.

2. – Due forme si diranno *riferite* fra loro se gli elementi dell'una si pensano associati a quelli dell'altra in una corrispondenza biunivoca. Se due forme di 1ª specie vengono riferite fra loro *mediante un numero finito di projezioni e sezioni* esse si diranno *projettive.*

Si ha pel 2° teorema del precedente paragrafo:

Se due forme di 1ª specie sono projettive, ad ogni gruppo armonico dell'una corrisponde un gruppo armonico dell'altra.

Inversamente sorge la questione:

Se due forme di 1ª specie sono riferite fra loro in modo che ad ogni gruppo armonico dell'una corrisponda un gruppo armonico dell'altra, saranno esse projettive?

Adottiamo provvisoriamente il nome di corrispondenza biunivoca *armonica* per quella (tra due forme di 1ª specie) che conserva i gruppi armonici. Allora la soluzione affermativa della questione dipende, come è noto, dal teorema fondamentale: « Una corrispondenza biunivoca armonica tra due forme di 1ª specie sovrapposte, avente tre elementi *uniti* (coincidenti cogli omologhi), è *identica* ». Infatti di qui segue che « esiste al più una corrispondenza armonica tra due forme di 1ª specie in cui a tre elementi dell'una corrispondono tre elementi dell'altra » e, poichè si costruisce facilmente una projettività soddisfacente a tali condizioni, segue che « tale projettività è unica, ossia è *la* corrispondenza armonica individuata dalle tre coppie di elementi omologhi », ecc.

Dovremo dunque occuparci di stabilire il teorema fondamentale sotto la forma sopra enunciata. Ma per questo occorre invocare nuovi concetti ed i relativi postulati.

La disposizione circolare degli elementi d'una forma di 1ª specie. - Ordini, segmenti, ecc.

3. – *Postulato V.* In una (certa) forma di 1ª specie a si può stabilire un *ordine* degli elementi in modo che:

1) dati due elementi B, C, l'uno dei due p. es. B *precede* l'altro C (ed allora C *segue* B);

2) se B, C, D sono tre elementi della forma tali che nel dato ordine B precede C e C precede D, sempre B precede D;

3) esiste un *primo* elemento A che precede ogni altro;

4) tra due elementi B, C che si susseguono nel dato ordine esiste sempre un elemento *intermedio* cioè precedente a C e conseguente a B (esistono quindi infiniti elementi intermedi fra B, C);

5) non esiste alcun *ultimo* elemento che consegua ad ogni altro nel dato ordine [8].

Il post. V comprende il IV.

Indichiamo con (A) l'ordine degli elementi che si suppone stabilito in una data forma di 1ª specie a.

Possiamo dedurre l'esistenza di un altro ordine (A') in a soddisfacente alle medesime condizioni enunciate ed avente ancora A come primo elemento: tale ordine si ottiene da (A) ove si convenga di dire:

1) che un elemento B diverso da A segue C in (A') se lo precede in (A) [e quindi C precede B in (A')];

2) che A precede in (A') [come in (A)] ogni elemento della forma.

L'ordine (A') così costruito si dirà *inverso* di (A): parimente (A) è inverso di (A').

In un altro modo possiamo dedurre da (A) (e analogamente da (A')) infiniti altri ordini della forma a soddisfacenti alle condizioni poste, ed in ciascuno assumere ad arbitrio un elemento B diverso da A come primo elemento. Basta infatti considerare l'ordine (B) di a che nasce colla convenzione seguente:

1) si chiami B primo elemento di (B);

2) se C, D sono due elementi ambedue seguenti B in (A) si dica che C precede D in (B) (o viceversa) se così avviene in (A);

3) se C, D sono due elementi ambedue precedenti a B in (A) si dica che C precede D in (B) (o viceversa) se così avviene in (A);

---

[8] Tale postulato si può desumere dal concetto intuitivo dell'ordine in cui si succedono i punti d'una retta ove si consideri come generata in uno dei due sensi da un punto mobile che la descrive partendo dal punto all'infinito; questo punto si considererà quindi come il *primo* nel detto ordine.

4) se C, D sono due elementi di cui l'uno precede B in (A) e l'altro lo segue, si dica che C segue D in (B) se lo precede in (A) (e viceversa).

L'ordine (B) che nasce da (A) nel modo indicato si dirà *dedotto da* (A) *mediante la permutazione circolare che porta* A *in* B. Analogamente da (B) si deduce (A) colla permutazione circolare che porta B in A.

Allora si può dimostrare:

1° *Lemma*. Se B, C sono due elementi di a diversi da A, operando su (A) la permutazione circolare che porta A in B, e sul nuovo ordine (B) la permutazione circolare che porta B in C, si ottiene in a l'ordine (C) che nasce da (A) colla permutazione circolare che porta A in C.

2° *Lemma*. Se B è un elemento di a diverso da A, mediante la permutazione circolare che porta A in B applicata all'ordine (A') inverso di (A), si deduce da questo l'ordine (B') inverso di (B).

Si considerino *tutti* gli ordini che nascono da (A) colle permutazioni circolari che portano A in un qualunque elemento di a, diremo che essi formano un *senso di disposizione circolare* della forma a, *generato* dall'ordine (A); diremo ancora che ognuno degli ordini così ottenuti *appartiene* al detto senso (oppure ha il detto senso, è *contenuto* in esso).

In forza del 1° lemma il senso di disposizione circolare è generato egualmente partendo da ognuno degli ordini che gli appartiene.

In forza del 2° lemma tutti gli ordini *inversi* a quello del detto senso formano il senso di disposizione circolare generato dall'ordine (A') inverso di (A); tale senso si dirà *inverso* dell'altro.

L'insieme di tutti gli ordini componenti i due sensi della forma a si denominerà *disposizione circolare* di a. Così si può enunciare il

Teorema. Nella forma di 1ª specie a esiste una disposizione circolare degli elementi che *ha due sensi*, l'uno *inverso* dell'altro, in modo che:

1) dato un qualunque elemento B di a esiste *un* ordine appartenente ad uno dei due sensi ed avente B come primo elemento, il quale ordine soddisfa alle condizioni enunciate nel postulato V;

2) due ordini degli elementi della forma aventi lo stesso senso si deducono l'uno dall'altro con la permutazione circolare che porta il primo elemento dell'uno al posto del primo elemento dell'altro;

3) i due ordini aventi senso inverso e lo stesso primo elemento sono l'uno inverso dell'altro.

4. – Per brevità designeremo col nome di « ordine della forma a » uno qualunque degli ordini appartenenti ad una *fissata* disposizione circolare che gode le proprietà enunciate nel teorema del precedente paragrafo, la quale è possibile stabilire in forza del postulato V: inoltre con (A) designeremo uno degli ordini avente A come primo elemento.

Sieno $ABCD$... tanti elementi della forma a. In un ordine (P) di questa, essi si susseguono secondo una certa permutazione $ABCD$.... Eseguendo una permutazione circolare su (P), gli elementi $ABCD$... o si susseguono ancora nello stesso modo, o si permutano circolarmente (come segue dalla definizione): invertendo l'ordine (P) s'inverte soltanto la permutazione degli elementi $ABCD$... o si inverte e si eseguisce su di essa una permutazione circolare (essendo P uno degli elementi del gruppo).

Diremo che più elementi $ABCD$... *si susseguono* nell'ordine scritto (o costituiscono un gruppo di elementi *susseguentisi*) se esiste un ordine di a nel quale essi si susseguono nel modo indicato. Allora segue:

Tre elementi ABC della forma di 1ª specie a in un ordine arbitrario si susseguono sempre.

Dicendo *senso* della terna ABC quello appartenente ad un ordine in cui ABC si susseguono si ha pure:

Le terne ABC, BCA, CAB hanno lo stesso senso e senso inverso alle terne, ACB, CBA, BAC.

Un senso della forma di 1ª specie a può individuarsi mediante il senso di una terna di elementi: parimente con (ABC) può designarsi l'ordine di a in cui A è il primo elemento ed avente il senso della terna ABC, ossia quello dei due ordini (A) in cui B precede C.

Se $A_1A_2 \ldots A_n$ nell'ordine scritto costituiscono un gruppo di elementi susseguentisi, si susseguono anche negli ordini $A_2 \ldots A_nA_1, \ldots, A_nA_1 \ldots A_2$, $A_n \ldots A_2A_1, \ldots, A_1A_n \ldots A_2$.

Se $ABCD$ sono quattro elementi susseguentisi si dirà che A, C *separano* B, D: in forza del lemma precedente anche B, D separano allora C, A, ecc., cioè la relazione del separarsi è una relazione reciproca fra le *coppie* AC, BD (o CA, DB o CA, BD, ecc.). E si ha il

Teorema. Un gruppo di 4 elementi $ABCD$ della forma di 1ª specie a può distribuirsi in *un* modo in due coppie che si separano.

5. – Sia fissato il senso (di disposizione circolare) della forma di 1ª specie a, e sieno fissati due elementi A, B, di essa; vi è un ordine (A) di a avente il detto senso; gli elementi che in esso non seguono B costituiscono una successione ordinata che si designerà col nome di *segmento ordinato* $\overline{AB}$ *avente il detto senso*: A e B si diranno gli *estremi* (*primo* e *secondo*) del segmento ordinato. Un elemento del segmento diverso dagli estremi si dirà *interno* ad esso.

Due elementi qualunque A, B della forma di 1ª specie a sono gli estremi di due segmenti ordinati $\overline{AB}$ aventi senso inverso, ciascuno dei quali contiene infiniti elementi interni (post. V).

Un elemento C di uno dei due segmenti diverso da A, B (ossia interno al segmento) appartiene ad *uno* dei due segmenti: pertanto il segmento

$\overline{AB}$ che contiene C potrà designarsi con $\overline{ACB}$; esso è quello avente il senso della terna ACB (§ 4).

Accanto ai due segmenti ordinati $\overline{AB}$ si possono considerare i due segmenti ordinati $\overline{BA}$: si ha allora:

I segmenti $\overline{ACB}$, $\overline{BCA}$, di cui l'uno ha come primo estremo il secondo estremo dell'altro e viceversa, contengono gli stessi elementi disposti in ordine inverso.

Dunque prescindendo dall'ordine si ha:

Due elementi A, B della forma di 1ª specie a sono gli estremi di *due* segmenti AB (*complementari*). Un elemento diverso da A, B in a appartiene ad uno dei due segmenti.

Inoltre segue dalla definizione:

Due elementi H, K di a diversi da A, B, appartengono o no ad uno stesso segmento AB, secondochè non separano o separano la coppia A, B.

6. – Un elemento non appartenente ad un segmento AB dicesi *esterno* ad esso. Si ha il

Teorema. Se C è un elemento esterno ad un segmento AB in a, gli elementi interni del segmento sono quelli intermedi fra A, B, nell'ordine (CAB) o (CBA).

Infatti gli elementi intermedi ad A, B nell'ordine (CAB) sono gli stessi intermedi ad A, B nell'ordine (ABC) nascente da (CAB) colla permutazione circolare che porta C in A.

Seguono i corollari:

1° *Corollario.* Due elementi C, D appartenenti ad un dato segmento AB, sono gli estremi di *un* segmento contenuto in AB.

2° *Corollario.* Se AB, CD sono due segmenti senza estremi comuni:

a) o le coppie AB, CD si separano ed allora i due segmenti hanno comuni infiniti elementi interni;

b) o le coppie AB, CD non si separano ed allora i due segmenti non hanno elementi comuni, oppure tutti gli elementi dell'uno sono interni all'altro: nel primo caso ciascun segmento è contenuto nel complementare dell'altro.

3° *Corollario.* Se AB, AC sono due segmenti con un estremo comune A, essi non hanno elementi interni comuni, oppure l'uno dei due segmenti è contenuto nell'altro.

Carattere projettivo della disposizione circolare naturale di una forma di prima specie. - Applicazione ai gruppi armonici.

7. – Se tra due forme di 1ª specie a, b è stabilita una corrispondenza *biunivoca*, ossia se le due forme sono *riferite* fra loro, ad ogni ordine degli elementi supposto stabilito in a *corrisponde* un analogo ordine in b. Ogni forma di 1ª specie b può essere riferita projettivamente alla particolare forma di 1ª specie a per cui abbiamo ammesso il postulato V: segue che (come in a) anche in ogni altra forma di 1ª specie b si può considerare (come corrispondente di un ordine (A) di a) un ordine soddisfacente alle condizioni del postulato V, e generatore di una disposizione circolare (corrispondente di quella generata da (A)). Però può darsi (o almeno si può pensare) che mutando la projettività posta tra a, b, nascano in b due diverse disposizioni circolari corrispondenti ad una stessa di a: in tale ipotesi ponendo tra b ed a una projettività, si otterranno su a *due* disposizioni circolari, una delle quali può coincidere con quella Ω da cui siamo partiti, ciascuna delle quali corrisponde alla Ω in una projettività su a.

Ora introduciamo il seguente:

Postulato VI. Fra le disposizioni circolari soddisfacenti alla condizioni del § 3, che si possono porre nella forma di 1ª specie a, ne esiste una che diremo *naturale* la quale viene trasformata in se stessa da ogni projettività su a.

In altre parole: In a si può scegliere un ordine (naturale) soddisfacente al postulato V, il quale per una projettività posta in a subisca una permutazione circolare, o una permutazione circolare congiunta ad una inversione (9).

Non è strettamente necessario che la disposizione circolare naturale Ω in a debba essere unica, ma una volta fissata deve rimanere tale, ed in essa si considereranno gli ordini (naturali), i segmenti, ecc.

Allora per le precedenti considerazioni si ha il

Teorema. – Sopra ogni forma di 1ª specie b esiste *una* disposizione circolare *naturale* soddisfacente alle stesse condizioni ammesse per quella supposta in a, e corrispondente a questa in ogni projettività che interceda tra a, b.

Osservazione. – Ove sembri più semplice (e forse presenta un vantaggio didattico) si può ammettere il postulato per *ogni* forma di 1ª specie ed ammettere, sempre per ogni forma, l'esistenza di *una* disposizione

---

(9) Appunto a tale condizione soddisfa l'ordine dei punti della retta di cui si è parlato nella nota relativa al post. V, secondo si desume dall'intuizione.

naturale avente carattere invariantivo rispetto ad ogni projezione o sezione.

Si osserverà come il postulato VI colleghi il V col gruppo dei postulati I, II, III, attribuendo ad una (certa) disposizione circolare in a il carattere projettivo.

8. – *Teorema.* Se A, B, C sono *tre* elementi di una forma, u, di 1ª specie, il quarto armonico D dopo di essi è distinto da C e insieme a C separa A, B (10).

Suppongasi che u sia una retta, e quindi ABC tre punti di essa; in modo analogo (correlativo) si darà la dimostrazione per gli altri casi, la quale potrà anche desumersi da questa mediante projezione.

In un piano per u si conducano per A, B rispettivamente due rette a, b, diverse da u, e sia E il loro punto comune. Per C si conduca una retta diversa da u, CE, la quale seghi in F, F', rispettivamente a, b: sia M il punto comune alle rette AF', BF: i punti fin qui designati sono tutti distinti fra loro.

Ora su a si prenda un punto H che insieme ad F separi la coppia AE; sia H' la projezione di H su b da C, allora H', F' separano B, E: sia N il punto comune alle rette FH', HF'. I tre punti M, E, N appartengono ad una retta, giacchè i triangoli AHF', $BH'F$ (senza elementi comuni) sono omologici concorrendo in C le rette AB, HH', FF'. Segue che il punto D di u, quarto armonico dopo A, B, C, è l'intersezione di u colla retta NE: si deve provare che tale punto D insieme a C separa A, B.

Anzitutto se N appartiene ad u è $N \equiv D$; allora, projettando la u da H' sulla retta a, si ha

$$ABCD \barwedge AEHF ,$$

onde C, D sono (in questo caso) distinti e separano AB.

Escluso il caso precedente si projetti dal punto N il gruppo $AEHF$ su u, e sieno X, X' le projezioni di H, F rispettivamente; si ha

$$AEHF \barwedge ADXX' ;$$

parimenti projettando da N su u il gruppo $BEH'F'$ si ha

$$BEH'F' \barwedge BDX'X :$$

(10) Che D sia distinto da A, B segue subito dalla definizione.

segue che la coppia XX' separa le coppie AD, BD, onde $AXDX'B$ o $BXDX'A$ sono punti susseguentisi.

Ora dal punto F si projetti su u il gruppo $BEH'F'$; si avrà

$$BEH'F' \,\overline{\wedge}\, BAX'C\,,$$

onde X', C separano A, B: segue che C, E separano A, B (e sono distinti) c.d.d.

Corollario. – Si noti che la dimostrazione nel caso particolare in cui si faccia cadere N in D (che sappiamo ora distinto da C) prova che, se $ABCD$ è un gruppo armonico, è armonico anche $CDAB$ (cfr. STAUDT).

Il postulato della continuità.
Teorema sulle corrispondenze ordinate.

9. – Si abbia in una forma di 1ª specie un segmento ordinato $\overline{AB}$; un elemento C interno ad esso determina due segmenti $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ contenuti in $\overline{AB}$; attribuendo C ad uno solo di questi, nasce una *divisione* del segmento $\overline{AB}$ *in due parti* la quale gode delle seguenti proprietà:

1) Ogni elemento del segmento $\overline{AB}$ appartiene ad *una* delle due parti.

2) L'elemento A appartiene ad una parte (che può dirsi *prima*), B all'altra (*seconda*).

3) Ogni elemento della prima parte precede ogni elemento della seconda (in $\overline{AB}$).

Per generalità si può considerare anche la divisione in parti godente le proprietà enunciate, cui dà luogo l'estremo A (o B) del segmento ove si consideri A (o B) come appartenente ad una parte e tutti gli altri elementi del segmento all'altra parte.

Alla divisione in parti del segmento $\overline{AB}$ operata mediante un suo elemento C (interno od estremo) nel modo indicato, spetta la proprietà peculiare seguente:

Esiste un elemento (che può appartenere all'una o all'altra parte) tale che ogni elemento precedente C appartiene alla prima parte, ogni elemento conseguente a C appartiene alla seconda.

Introduciamo ora il seguente:

Postulato VII (*della continuità*). – Se un segmento ordinato $\overline{AB}$ di una forma di 1ª specie è diviso in due parti in guisa che

1) ogni elemento del segmento $\overline{AB}$ appartenga ad *una* delle due parti;

2) l'estremo A appartenga alla *prima* parte, B alla *seconda*;

3) ogni elemento della prima parte preceda (in $\overline{AB}$) ad ogni elemento della seconda,

esiste *un* elemento C del segmento $\overline{AB}$ (che può appartenere all'una o all'altra parte) tale che ogni elemento di $\overline{AB}$ precedente a C (ove esista) appartiene alla prima parte, ed ogni elemento di $\overline{AB}$ conseguente a C (ove esista) appartiene alla seconda.

Osservazione. – Ammessa l'esistenza di un siffatto elemento C, segue che esso è unico.

Basta ammettere il postulato per la retta e si deduce (mediante projezione) per le altre forme di 1ª specie.

10. – Una corrispondenza biunivoca tra due forme di 1ª specie (distinte o sovrapposte) si dirà *ordinata* quando alla disposizione circolare naturale dell'una fa corrispondere la disposizione circolare naturale dell'altra, e quindi ad ogni segmento un segmento, ecc.

La projettività è una corrispondenza biunivoca ordinata.

Una corrispondenza biunivoca ordinata in una forma di 1ª specie dicesi *concorde* o *discorde* secondochè fa corrispondere a se stesso ognuno dei due sensi della forma o li scambia tra loro. Nel primo caso essa fa subire una permutazione circolare ad ogni ordine naturale (o lo lascia immutato); nel secondo gli fa subire una permutazione circolare congiunta ad una inversione o soltanto una inversione.

In una corrispondenza biunivoca in una forma di 1ª specie dicesi *unito* un elemento che coincide col corrispondente. Un elemento unito per una corrispondenza è unito anche per l'inversa.

Teorema. – Se in una forma di 1ª specie è data una corrispondenza biunivoca ordinata in cui ad un segmento AB corrisponda un segmento $A'B'$ contenuto nel primo, esiste in questo segmento $A'B'$ (e quindi in AB) un elemento unito M siffatto che ad esso non preceda alcun elemento unito nel segmento ordinato $\overline{AB}$.

Trattandosi qui costantemente di segmenti contenuti nel dato segmento AB li designeremo denotandone solo gli estremi.

Escludiamo che l'elemento A coincida con A' (sia unito): in tale ipotesi, l'enunciato sarebbe senz'altro verificato ponendo $M \equiv A$.

Distinguiamo due casi.

1º *caso.* – La data corrispondenza biunivoca sia concorde, ossia A' preceda B' in $\overline{AB}$.

Consideriamo la seguente partizione del segmento ordinato $\overline{AB}$.

a) Poniamo nella prima parte un elemento H se esso ed ogni altro elemento che lo precede in $\overline{AB}$, precede al corrispondente. Almeno A appartiene alla prima parte.

b) Poniamo nella 2ª parte ogni altro elemento K, cioè ogni elemento estremo d'un segmento $\overline{AK}$ al quale appartenga qualche elemento (diverso o no da K) non precedente l'omologo (ossia unito o conseguente ad esso). Almeno B appartiene a tale seconda parte.

L'indicata partizione soddisfa alle tre ipotesi richieste per l'applicabilità del postulato VII: esiste dunque in $\overline{AB}$ un elemento M a cui ogni H precede ed ogni K consegue. Ad M non precedono elementi uniti; dico che esso è unito, ciò che (pel 1° caso) dimostra il teorema.

Sia M' l'omologo di M e suppongasi dapprima che esso preceda M (in $\overline{AB}$). Poichè la corrispondenza considerata è concorde, ogni elemento H interno al segmento MM' consegue al corrispondente H', ciò che contrasta all'ipotesi a).

All'opposto, M' consegua ad M.

Ogni elemento interno al segmento MM', come l'estremo M, precede l'omologo (poichè questo segue ad M'); poichè altrettanto avviene per gli elementi precedenti ad M, ogni elemento interno al segmento MM' è un elemento H contro l'ipotesi.

2° *caso*. – La data corrispondenza sia discorde, ossia A' segua B' in $\overline{AB}$.

Consideriamo la seguente partizione del segmento ordinato $\overline{AB}$:

a) Poniamo nella 1ª parte un elemento H se precede l'omologo H' (in $\overline{AB}$). Almeno A è un elemento H.

b) Poniamo nella 2ª parte un elemento K se non precede l'omologo K', e quindi è unito o segue K' (in $\overline{AB}$). Almeno B è un elemento K.

Allora (poichè la data corrispondenza è discorde) la partizione del segmento $\overline{AB}$ soddisfa alle condizioni richieste per l'applicabilità del postulato VII.

Esiste un elemento M in $\overline{AB}$ tale che ogni elemento precedente M è un H, ogni elemento conseguente ad M è un K. Ad M non precedono elementi uniti. Dico che M è unito, donde segue il teorema.

Anzitutto si osservi che ogni elemento M (di $\overline{AB}$) precedente ad M ha l'omologo H' nel segmento $\overline{MB}$: infatti, se H_1 è un elemento intermedio ad H, M (in $\overline{AB}$), ed H_1' è l'omologo di H_1, deve H' seguire H_1' e quindi H_1, onde H' consegue a tutti gli elementi che precedono M. Analogamente si prova che ogni elemento K seguente ad M (in $\overline{AB}$) ha l'omologo K' nel segmento $\overline{AM}$.

Ora sia M' l'omologo di M e suppongasi precedente ad M. Allora M è distinto da A e quindi A' da M': il segmento $A'M'$ avendo l'estremo M' interno ad AM ha con esso infiniti elementi interni comuni (§ 6), uno di questi H' (precedente ad M) è l'omologo di un elemento H di AM, ciò che è assurdo.

Parimente si prova l'assurdità che M' segua M. Risulta così dimostrato il teorema.

11. – Riferendoci alla dimostrazione del 2° caso del teorema contenuto nel paragrafo precedente (corrispondenza discorde), l'elemento unito

M, costruito nel segmento $\overline{AB}$, appartiene pure al segmento $A'B'$ ed è interno ad esso, poichè A', B' non sono elementi uniti: inoltre non vi sono in $\overline{AB}$ altri elementi uniti per la corrispondenza, giacchè un elemento che precede M in $\overline{AB}$ ha l'omologo dopo M e viceversa.

Il teorema si può anche applicare al segmento ordinato $\overline{A'ABB'}$ complementare di quello $\overline{A'B'}$ contenuto nel dato $\overline{AB}$; si prova così l'esistenza di *un* elemento unito interno a tale segmento, ed interno al segmento $\overline{AB}$ contenuto in esso.

La data corrispondenza discorde ha dunque *due* elementi uniti se esiste in essa un segmento (che può considerarsi ordinato) cui corrisponda un segmento interno. Ma questo fatto è sempre possibile di realizzare per ogni corrispondenza ordinata discorde in una forma di 1ª specie. Invero si noti anzitutto che una tale corrispondenza non è *identica* e quindi si può considerare un elemento A distinto dal suo omologo A'. Ad A' corrisponderà un elemento A'' che può coincidere con A, ma non con A': in ogni caso esiste una segmento $\overline{AA'}$ contenente A'' che contiene il segmento corrispondente $\overline{A'A''}$, giacchè i due segmenti debbono avere senso inverso.

Si deduce il

Teorema. – In una corrispondenza biunivoca discorde in una forma di 1ª specie, esistono *due* elementi uniti.

Osservazione. – Se M, N sono i due elementi uniti, a ciascun segmento MN corrisponde il complementare. Accadrebbe l'opposto se M, N fossero due elementi uniti di una corrispondenza concorde.

Il teorema fondamentale della projettività.

12. – In una forma di 1ª specie si consideri la corrispondenza biunivoca che intercede fra i conjugati armonici rispetto a due elementi fissi, uniti, M, N. Tale corrispondenza è projettiva, come si prova eseguendo opportunamente la costruzione dell'omologo di un elemento mediante il quadrangolo o quadrilatero, ecc. Poichè due elementi conjugati armonici rispetto ad M,N separano MN (§ 8), nella projettività nominata ad un segmento MN corrisponde il complementare, onde la projettività stessa è discorde (§ 11, *Osservazione*).

Se quindi AA', BB' sono due coppie di elementi conjugati armonici rispetto ad MN, esse non si separano. Segue il:

Teorema. – Date in una forma di 1ª specie due coppie di elementi che si separano, non esiste alcuna coppia che le separi armonicamente entrambe.

13. – In una forma di 1ª specie u si abbiano due coppie di elementi AB, CD che non si separino: esiste allora un segmento $ACB \equiv ADB$ che contiene C, D. Nella forma u si consideri la corrispondenza biunivoca che intercede fra i conjugati armonici Y, Y' di uno stesso elemento X rispetto alle coppie AB, CD: tale corrispondenza è il prodotto di due projettività e quindi è una projettività, onde è ordinata. In essa al segmento ACB corrisponde un segmento interno, giacchè mentre Y varia nel segmento ACB il conjugato X rispetto ad AB è fuori di esso, e quindi Y' conjugato di X rispetto a CD appartiene al segmento CD contenuto in ACB. Si può dunque applicare il teorema del § 10 e si deduce l'esistenza d'un elemento Y interno al segmento ACB (ed a CD) che coincide coll'omologo Y', ossia che ha lo stesso conjugato armonico rispetto alle coppie AB, CD.

Si può dunque enunciare il

Teorema. – Date in una forma di 1ª specie due coppie di elementi che non si separano, esiste una coppia (almeno) che le separa armonicamente entrambe.

Seguirà poi che tale coppia è unica.

14. – Possiamo ora stabilire il seguente *teorema fondamentale* (cfr. il § 2).

In una forma di 1ª specie una corrispondenza biunivoca armonica dotata di tre elementi uniti è identica.

La dimostrazione si farà per assurdo. Suppongasi dunque che in una forma di 1ª specie u esista una corrispondenza biunivoca armonica dotata di tre elementi uniti A, B, C, nella quale ad un certo elemento P corrisponda un diverso elemento P'.

Anzitutto si può stabilire che la corrispondenza armonica è ordinata, cioè che se due elementi H, K di u si susseguono nell'ordine naturale (ABC) lo stesso avviene per gli elementi omologhi H', K'. Infatti nell'ipotesi opposta si troverebbero due coppie di elementi che non si separano (come p. es. AH, BK) cui corrispondono due coppie (p. es. AH' BK') che si separano; ma allora (§ 13) vi sarebbe una coppia di elementi che separa armonicamente entrambe le prime due coppie, mentre non avverrebbe lo stesso per le coppie corrispondenti: ciò contrasta all'ipotesi che la data corrispondenza sia armonica.

Stabilito questo punto, si ha che ad ogni segmento di u corrisponde un segmento; così se p. es. P cade nel segmento $\overline{AB}$ che non contiene C, allo stesso segmento appartiene anche P'. Suppongasi che P' segua P nell'ordine $\overline{AB}$ del segmento. (Queste ipotesi non limitano la generalità della dimostrazione). Al segmento $\overline{PB}$ (nel dato $\overline{AB}$) corrisponde il segmento $\overline{P'B}$ interno ad esso, quindi (§ 10) vi è in esso un elemento unito M

(che può anche coincidere con B) tale che in $\overline{PM}$ non vi sono elementi uniti interni.

Analogamente considerando la corrispondenza inversa si prova l'esistenza entro PA d'un elemento unito N (che può essere anche A) tale che in $P'A$ non cadono elementi uniti.

Segue l'esistenza d'un segmento MN non contenente C i cui estremi sono uniti, al quale non appartengono elementi uniti interni. Invece dovrebbe essere unito il conjugato armonico di C rispetto ad MN. Così si ottiene l'assurdo, come si era enunciato.

Considerazioni sulla legge di dualità.

15. – Le proposizioni fondamentali I, II, III, IV, V, VI, VII bastano a fondare tutta l'ordinaria geometria projettiva; esse sono state enunciate sotto tal forma da fare apparire immediatamente la *legge di dualità nello spazio*. Essa segue dall'osservare che in quelle proposizioni si parla soltanto di elementi e di forme, e di questi elementi si può fissare indifferentemente che sieno punti o piani.

Non così immediatamente si può dedurre la dimostrazione della *legge di dualità nel piano* (o nelle forme di 2ª specie).

Questa legge si suole in generale stabilire enunciando esplicitamente le proposizioni fondamentali della geometria piana (le quali seguono dalle nominate) ed osservando che in queste è possibile lo scambio dell'elemento «punto» coll'elemento «retta»: tra queste proposizioni occorre allora porre il teorema dei triangoli e dei trilateri omologici (poichè esso si dimostra ricorrendo ad una costruzione nello spazio).

Ma, così facendo, la geometria projettiva del piano dovrebbe svolgersi nel seguito senza più far uso di costruzioni dello spazio, le quali (quando pure non necessarie) riescono, come è noto, utilissime. Perciò è conveniente di stabilire la legge di dualità nel piano seguendo un'altra via. Bastano per ciò le considerazioni seguenti:

Tutte le proprietà di figure geometriche piane, dedotte dai postulati I, II, III, IV, V, VI, VII (postulati della geometria projettiva), hanno *carattere projettivo* cioè si traducono in proprietà delle figure projezioni di esse in una stella (prospettiva al piano). Infatti un siffatto carattere compete ai detti postulati e quindi anche ad ogni teorema dedotto da essi, equivalente ad una trasformazione logica dei postulati stessi.

Allora mediante una projezione ogni teorema concernente una figura piana si traduce in un teorema della geometria nella stella; all'elemento punto del piano viene a corrispondere l'elemento «retta» della stella.

D'altra parte dalla geometria della stella di raggi si può passare, per dualità nello spazio, alla geometria nel piano rigato: si ottiene così il passaggio dalla geometria del piano punteggiato a quella del piano rigato.

Si può dunque enunciare la legge di dualità seguente:

Insieme ad ogni teorema della geometria piana fondato sui postulati I, II, III, IV, V, VI, VII, sussiste un teorema *correlativo nel piano* che si deduce dal primo collo scambio delle parole «punto» e «retta» e cogli scambi di parole che ne derivano di conseguenza.

CORRISPONDENZA

« Rend. del Circolo Matematico di Palermo », to. IX (1895),

pp. 79-85.

I.

(Lettera del Dr. G. Fano al Dr. F. Enriques).

. . . .

La sua pregevolissima Nota *Sui fondamenti della Geometria Projettiva* (« Rend. Ist. Lomb. », s. II, vol. XXVII) (*) mi suggerisce alcune osservazioni, anche in relazione al mio lavoro sullo stesso argomento escito due anni or sono (« Giorn. di Battaglini », vol. XXX).

Dopo quei primi postulati sulle forme fondamentali di prima e seconda specie, postulati che si riducono in sostanza a *tre* distinti e necessari (¹), e che bastano a stabilire, com'Ella osserva, i teoremi sulle *configurazioni*, due vie mi si erano presentate per procedere innanzi, e costruire una Geometria che fosse applicabile allo spazio quale i sensi ce lo presentano. La prima delle due (cfr. §§ 4-13), essendo completamente nuova, fu da me più ampiamente sviluppata, mentre invece assai meno mi sono fermato sulla seconda (§ 14), che già prima era stata seguita dal sig. AMODEO (« Atti R. Accademia di Torino », vol. XXVI) — per quanto nella pregevole Nota di lui qualche punto restasse ancora da completare. A questa seconda via Lei pure si è attenuto (²). Infatti i suoi post. V e VI (tolte le due ultime condizioni del V) corrispondono *press'a poco* ai miei V*a* e VI*a* del n. 14. Ciò che io ho chiamato *ordine* non è precisamente ciò che Lei ora indica con questo stesso nome, ma qualcosa che si avvicinerebbe piuttosto alle Sue *disposizioni circolari*, o meglio al Suo *senso di disposizione circolare*, e perciò appunto nel *carattere projettivo degli*

(*) Questo volume, VIII.

(¹) Vale a dire: *Due punti determinano una retta che li contiene*; *ogni piano contiene tutta la retta determinata da due suoi punti qualunque*; *due rette in un piano hanno sempre un punto a comune.*

(²) È infatti la più semplice e la più naturale, per quanto la prima, quella delle *serie armoniche rientranti*, possa forse riescire più interessante. Ma di queste *serie armoniche* non si potrebbe certo parlare p. es. in un corso elementare!

ordini naturali potevano essere per me ed erano infatti ritenute implicite quelle *permutazioni circolari*, sulle quali Lei è stato così dettagliatamente preciso ([3]).

A Lei è però riescito più avanti di sopprimere il mio postulato VII*a*: « *Esiste un gruppo armonico formato da quattro elementi distinti* ». E la ragione di questo mi sembra stare nell'aver Lei ammesso fin da principio col post. IV (e anche implicitamente, come Lei pure osserva, nelle due ultime condizioni del post. V) *che i punti della retta siano in numero infinito*. In ogni modo però vedo ora con piacere risolta la questione, che era per me allora rimasta insoluta (l. c. pag. 22), se cioè, aggiungendo alle condizioni precedenti questa degli infiniti punti sulla retta, si potesse sopprimere quel mio ultimo postulato. E vedo dunque che (in questo caso) si può effettivamente sopprimerlo.

Ma v'ha di più. Non è nemmeno necessario di ammettere che i punti della retta siano in numero infinito; basta ammettere che siano in numero superiore a *tre*. Lei vedrà infatti senza difficoltà che sopra una retta contenente un numero di punti finito ma non inferiore a *quattro* il Suo post. VI non potrebbe in alcun modo sussistere. Come mai si potrebbero allora portare due o, peggio ancora, tre punti dati in altri assegnati ad arbitrio, e ciò con una semplice *permutazione circolare*, più, forse, un'inversione? ([4]). Nel solo caso di *tre* punti, le permutazioni cicliche colle loro inverse — *sei* in tutto — soddisfano precisamente alle condizioni richieste da quel postulato.

Ammesso pertanto il Suo post. VI, e, per di più, l'esistenza di almeno quattro punti sulla retta, rimane come solo caso possibile quello degli infiniti punti, e si può applicare di nuovo tutto il Suo ragionamento. Certo che, volendo togliere *ab initio* l'ipotesi degli infiniti punti sulla retta, bisogna anche togliere le condizioni 4ª e 5ª del Suo post. V, nelle quali detta ipotesi è implicitamente contenuta. Ma di queste due condizioni ([5]) si fa uso in un solo punto del Suo lavoro, nel quale anche (come Lei stesso ebbe a intravedere) un'osservazione semplicissima basta per farne a meno ([6]).

([3]) *L'ordine* era per me una specie di *anello* o *catena rientrante*, secondo la quale immaginavo disposti i punti di una retta, senza tuttavia accennare ad un particolare *primo elemento*. E il restare inalterato di un ordine così concepito, senza, ben inteso, che ogni punto rimanga fisso, conduce di necessità alle permutazioni circolari.

([4]) Le Sue *permutazioni circolari* si riducono in questo caso a quelle stesse permutazioni di un numero finito di elementi — qui *punti* — che di solito si indicano con questo nome. Le mie configurazioni — e prima fra queste il *piano di* 13 *punti*, di cui al n. 8 — dànno facili esempi di projettività che non conserverebbero gli ordini naturali secondo la data definizione.

([5]) E più specialmente della 4ª; la 5ª è quasi un complemento della 4ª, ma complemento necessario per poter poi concludere che quest'ultima rimane verificata per tutti i diversi ordini *derivati* (con permutazioni circolari e inversioni).

([6]) Alludo alla dimostrazione del teorema, che due coppie armoniche devono sempre sepa-

Mentre dunque il Suo lavoro completa effettivamente il mio (in certi punti), non sarà forse male l'osservare ancora che i postulati in esso veramente necessari si possono ridurre ai primi tre, alle prime tre condizioni del V, e al VI; più la condizione che la retta contenga almeno quattro punti. D'altra parte anche i primi tre postulati del mio lavoro coincidono completamente con quelli del Suo; il IV dice che su ogni retta stanno più di due punti; il V*a* e il VI*a* corrispondono ai Suoi V e VI (nei quali tuttavia gli stessi concetti sono forse meglio precisati), e infine il VII*a* dice che « *Esiste un gruppo armonico formato da quattro elementi distinti* ». Quest'ultimo postulato porta con sè, naturalmente, l'esistenza di un quarto punto sulla retta, ma dice anche di più; questo *di più* è ora provato essere già una conseguenza delle cose precedenti... (7) (8).

Colognola ai Colli (Verona), settembre 1894.

G. FANO

II.

(Lettera del Dr. F. Enriques al Dr. G. Fano).

. . . .

Leggo con piacere nella sua lettera le acute osservazioni suggeritele dalla mia Nota *Sui fondamenti della Geometria Projettiva.* In quella Nota io (ispirandomi al concetto intuitivo sperimentale dello spazio) ho fondato la Geometria projettiva sopra sei postulati (9) (composti), il 6° dei quali (riguardante la continuità) non comparisce in quella che Ella chiama la Geometria dei punti razionali.

---

rarsi, e tanto meno quindi l'una di esse può essere costituita da elementi coincidenti, a meno che questi non coincidano tutti e due in uno dei limiti comuni. — Basta infatti dimostrare che questa proprietà sussiste per *un* gruppo armonico, perchè da quest'unico caso essa seguirà per ogni altro. E appunto per questo è anche permesso di scegliere i punti A, B, C (cfr. p. 11 della Sua Nota [questo volume, p. 150]) in modo particolare; e conviene precisamente scegliere A e B in modo che siano separati da C e da un quarto punto della retta u, supposto esistente. Questo quarto punto si proietterà allora da F' sulla retta a in un punto che potremo assumere come H. E accertata così l'esistenza di questo punto H che con F separa la coppia AE, si può ripetere parola per parola tutto il Suo ragionamento, basato esclusivamente sopra successive proiezioni.

(7) E il piano di 7 punti, al quale a pag. 21 del mio lav. cit. io ero ricorso come *esempio* per mostrare la necessità del post. VII*a*, è anche il solo caso *logicamente possibile* di un gruppo armonico $ABCC$ (dove A, B, C sono distinti).)

(8) Non ho bisogno di aggiungere che i postulati di cui qui ho discorso conducono soltanto a una *Geometria projettiva lineare*, e a uno spazio (di punti razionali) che ancora non corrisponde del tutto a ciò che i sensi ci dicono (o a quello che noi crediamo ci dicano). L'ultimo passo che rimane da fare è quello appunto della *continuità* (§§ 9 e seg. del Suo lav.).

(9) I postulati ivi menzionati sono 7, ma il IV che afferma l'esistenza di infiniti punti su una retta è incluso nel V (come ivi pure è osservato) ed ammesso provvisoriamente innanzi per semplicità.

Ora Ella opportunamente osserva che l'esistenza di infiniti punti sulla retta segue dal mio post. VI (concernente l'esistenza sulla retta d'una disposizione circolare *naturale* avente carattere proiettivo) *ammessa l'esistenza di almeno* 4 *punti sopra una retta*, e quindi introdotta questa ipotesi si possono sopprimere le due ultime condizioni del mio post. V [10] (le quali invero contengono anche qualcosa di più) e stabilire ugualmente che il quarto armonico D dopo *tre* punti A, B, C (sopra una retta) è distinto da essi ed insieme a C separa A, B [11].

Ciò basta, secondo Lei, a svolgere tutta la Geometria proiettiva dei punti razionali, e sta bene: ma nel seguito (cioè nella Geometria proiettiva dove si considera la retta continua) quelle due condizioni (fondamento del concetto di segmento) debbono essere invocate. Ora (ed è su questo che mi permetto di richiamare la sua attenzione perchè in un certo senso completa la sua osservazione), dopo avere dimostrato quel teorema sulla separazione delle coppie armoniche si può anche *dimostrare* che per gli ordini naturali dei punti d'una retta vengono soddisfatte le due ultime condizioni del mio post. V.

Invero si consideri sopra una retta un ordine naturale (ABC); l'esistenza d'un punto intermedio a B, C nel detto ordine, vien data dal fatto che il coniugato armonico di A rispetto a B, C, insieme ad A separa B, C. Parimente si deduce che non può esservi un punto (ad es. C) *ultimo* nel detto ordine; basta considerare il quarto armonico dopo ABC che segue C in (ABC).

Con questo siamo d'accordo nel ritenere stabilito che tutta la Geometria projettiva può fondarsi sui primi 3 postulati della mia Nota, sulla ipotesi che *sopra una retta vi sieno più di* 3 *punti*, e sui post. V, VI, VII, della detta Nota, omesse le due ultime condizioni del V le quali *in base alla detta ipotesi* ed al post. VI *possono dimostrarsi.*

Questa è certo, dal punto di vista scientifico, una semplificazione, la quale per altro non sarebbe forse opportuna ove (come nella mia Nota) si volesse tener conto anche delle esigenze didattiche, e seguire la via indicata dall'intuizione sperimentale....

Castiglione dei Pepoli (Bologna), settembre 1894.

F. ENRIQUES

---

[10] Queste condizioni enunciate per gli ordini naturali d'una retta dicono:

In un ordine naturale sopra una (certa) retta, tra due punti ve n'è sempre uno (e quindi infiniti) intermedio.

Questo ordine naturale non possiede un *ultimo* elemento.

[11] Con una lieve modificazione del ragionamento a pag. 11 della mia Nota [questo volume, p. 150].

III.

(Lettera del Dr. G. Fano al Dr. F. Enriques.)

. . . .

A complemento della mia lettera dello scorso Settembre potrei aggiungere un'altra osservazione, che al momento non mi si era presentata, e che ora si collega anzi con quanto è detto nella Sua Risposta.

Se fra due punti A e B di una retta a non esistesse che un numero finito n ($\geqslant 0$) di punti *intermedi* (riferita quest'espressione a uno dei due sensi di disposizione *naturale*), è chiaro che una projettività qualsiasi su a, nella quale ad A e B corrispondessero due punti A' e B' con un numero qualunque diverso da n di punti intermedi (nell'uno e nell'altro senso di disposizione naturale), sarebbe in contraddizione col post. VI della Sua Nota. E siccome una projettività così fatta si può sempre costruire (se la retta contiene più di tre punti) così possiamo anche concludere subito che (in questa stessa ipotesi) *non solo l'intiera retta deve contenere infiniti punti, ma infiniti devono pure esservene in ogni segmento* (definito il segmento nella disposizione circolare naturale, che ha carattere projettivo).

Anche le condizioni 4ª e 5ª del Suo post. V, *in quanto si riferiscono agli ordini naturali caratterizzati dal post. VI*, seguono dunque *immediatamente* da questo stesso postulato (ammessa l'esistenza di almeno quattro punti sulla retta); e siccome è in questo caso soltanto che la prima di esse occorre più avanti, per dimostrare la separazione delle coppie armoniche, mi sembra così rimediato anche all'inconveniente didattico, che giustamente Ella aveva scorto nella semplificazione propostale....

Colognola ai Colli (Verona), 3 ottobre 1894.

G. Fano

IX.

SULLE IRRAZIONALITÀ DA CUI PUÒ DIPENDERE LA RISOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE ALGEBRICA $f(xyz) = 0$ MEDIANTE FUNZIONI RAZIONALI DI DUE PARAMETRI

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. IV (2º sem., 1895),

pp. 311-316 (*)

1. – Se $f(xy) = 0$ è un'equazione di genere 0, essa può *risolversi* ponendo x, y funzioni razionali d'un parametro t colle formule

$$x = \varphi_1(t) , \qquad y = \varphi_2(t) . \tag{1}$$

Le funzioni razionali φ_1, φ_2 possono contenere delle irrazionalità nei coefficienti, e si può porre la questione di assegnare le irrazionalità più semplici che occorre introdurre per effettuare la risoluzione della $f = 0$ colle formule (1), considerato come *campo di razionalità* (nel senso di KRONECKER) quello dato dai coefficienti del polinomio f.

A tale questione ha risposto il sig. NOETHER (« Mathem. Annalen », Bd. III) dimostrando che « *nella risoluzione di una equazione di genere* 0 $f(xy) = 0$ *mediante funzioni razionali d'un parametro occorre* (al più) *di estrarre un radicale quadratico* ».

Io ho preso in esame la questione analoga relativa alle equazioni in 3 variabili

$$f(xyz) = 0 .$$

Supposto che una tale equazione (sia quella d'una superficie razionale, ossia) possa risolversi mediante funzioni razionali di due parametri (¹)

(*) Nota presentata dal Socio L. CREMONA nella seduta del 15 dicembre 1895.

(¹) E ciò si può ormai riconoscere dall'annullarsi di certi caratteri invariantivi (genere geometrico e numerico e bigenere) dell'equazione, come si vedrà stabilito in un lavoro del sig. CASTELNUOVO.

colle formule

$$x = \varphi_1(uv)\,, \qquad y = \varphi_2(uv)\,, \qquad z = \varphi_3(uv)\,, \tag{2}$$

si vuole « assegnare le irrazionalità più semplici (che debbono comparire nei coefficienti di φ_1, φ_2, φ_3) da cui può farsi dipendere la effettiva risoluzione anzidetta ».

Mi limiterò in questa Nota ad enunciare i principali resultati ottenuti, rimandando ad un altro lavoro per le dimostrazioni diffuse e per la bibliografia (*).

Anzitutto debbo fare una osservazione.

Allorchè la $f(xyz) = 0$ è risolubile colle formule (2) si può sempre esprimere x, y, z mediante funzioni razionali di due parametri con *invertibilità*, cioè in modo che questi parametri risultino alla lor volta funzioni razionali di x, y, z (CASTELNUOVO); ma tale condizione (verificata per la risoluzione più generale) può non esser soddisfatta da una particolare risoluzione (2) della $f = 0$.

In tal caso per passare dalla (2) ad una risoluzione della $f = 0$ mediante funzioni razionali invertibili di due parametri, occorrerà in generale introdurre nuove irrazionalità. Perciò il problema proposto comporta una soluzione più semplice se si vuole una risoluzione mediante funzioni razionali dell'equazione $f = 0$ senza imporre la condizione di invertibilità.

Io tratto la questione imponendo la condizione d'invertibilità anzidetta, e faccio soltanto cenno d'una semplificazione che può aversi in un punto ove si prescinda da quella condizione.

Ecco il resultato ottenuto:

La risoluzione dell'equazione

$$f(xyz) = 0$$

mediante funzioni razionali invertibili di due parametri (supposta possibile) *può sempre effettuarsi con operazioni razionali* (*di eliminazione*), *con estrazioni di radicali quadratici e cubici e colla risoluzione di una delle equazioni per la bisezione dell'argomento*:

1) *delle funzioni abeliane di genere* 3;

2) *o delle funzioni abeliane di genere* 4;

3) *o delle funzioni iperellittiche di genere* p $(p = 1, 2, \ldots)$.

È superfluo avvertire che insieme ai tipi menzionati di equazioni debbono considerarsi i loro casi di degenerazione.

(*) Questo volume, XVIII.

Allorchè la risoluzione dell'equazione

$$f(xyz) = 0$$

mediante funzioni razionali invertibili di due parametri viene a dipendere dall'equazione 1), *si può ottenere una risoluzione di essa mediante funzioni razionali* *non invertibili*, *con sole estrazioni di radicali quadratici e cubici.*

2. – Un cenno della dimostrazione. Il concetto fondamentale consiste nel trasformare successivamente la superficie razionale

$$f(xyz) = 0$$

(supposta d'ordine n a sezioni non iperellittiche di genere >2) mediante i polinomi d'ordine $n-3$ *aggiunti* ad f. Si ha così un procedimento di esaustione che ricorre frequentemente in varie questioni nei recenti lavori del sig. CASTELNUOVO e miei.

Questo procedimento, completato con qualche osservazione complementare, permette di trasformare ogni superficie razionale senza l'aggiunta di irrazionalità numeriche (cioè *razionalmente*) in una delle seguenti:

I) superficie a sezioni razionali (rigata o superficie di STEINER del 4° ordine);

II) superficie a sezioni ellittiche (d'ordine $n \leqslant 9$), incluso il piano doppio con quartica limite C_4 $(n = 2)$;

III) piano doppio con sestica limite C_6 dotata di due punti tripli infinitamente vicini, o cono quadrico doppio con sestica limite sezione d'una superficie cubica (che con proiezione da un punto si riduce al nominato piano doppio);

IV) superficie con un fascio (razionale) di coniche.

Si possono distribuire sotto questo aspetto le superficie razionali in quattro famiglie, ma quelle della famiglia II) dànno luogo a più classi.

I. – Nel caso I) si ha la rappresentazione piana della superficie (risoluzione razionale dell'equazione $f = 0$ con invertibilità), o razionalmente, o colla semplice estrazione d'un radicale quadratico.

II. – Nel caso II) si hanno da considerare le superficie di tutti gli ordini $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Ma per $n = 2$ (piano doppio con quartica limite) la questione è risoluta (CLEBSCH) e si sa appunto che basta determinare le tangenti doppie della quartica limite, ciò che porta alla bisezione dell'argomento delle funzioni abeliane di genere 3.

Per $n = 3$ la questione si collega allo studio della configurazione delle rette della superficie di 3° ordine, e si riporta alla precedente (GEISER) per proiezione da un punto (risoluzione d'un'equazione di 3° grado).

Per $n = 4$ si ha la superficie del 4° ordine con conica doppia che per proiezione da un punto della conica (estrazione d'un radicale quadratico) si rappresenta sul piano doppio con quartica limite, onde, ecc.

Per $n = 5$ la superficie ha una curva doppia del 5° ordine con punto triplo (CAPORALI) dal quale viene proiettata (razionalmente) sul piano doppio con quartica limite.

Così ai casi $n = 2, 3, 4, 5$ corrisponde il caso 1) dell'enunciato del numero precedente. Ma fondandosi su un procedimento del sig. CASTELNUOVO (« Rend. Acc. dei Lincei », (5)2 $(1893)_2$) si può in tutti questi casi rappresentare razionalmente la superficie sopra una involuzione piana, allorchè è dato un punto.

Per $n = 7, 8$ si può dar sempre razionalmente la rappresentazione piana della superficie.

Restano da esaminare i casi $n = 6$, $n = 9$, nei quali la questione si riconduce alla determinazione di un punto qualsiasi della superficie (perchè le corrispondenti superficie normali d'ordine 6, 9 rispettivamente in S_6, S_9 vengono proiettate da un piano tangente in superficie a sezioni razionali). Ciò sembrerebbe importare la risoluzione di equazioni del 6° e del 9° grado, rispettivamente, ma il problema si può ridurre mediante speciali considerazioni alla risoluzione di un'equazione di 3° e una di 2° grado nel primo caso, ed alla risoluzione di un'equazione di 4° e di una di 3° grado nel secondo caso.

Per $n = 6$, $n = 9$, si ha dunque la rappresentazione piana della corrispondente superficie, effettuando soltanto estrazioni di radicali quadratici e cubici.

III. – Nel caso III) la rappresentazione del piano doppio con sestica limite C_6 con 2 punti 3-pli infinitamente vicini sul piano semplice, è data dal sig. NOETHER mediante la determinazione delle coniche tritangenti a C_6 passanti pei suoi due punti tripli (equazione per la bisezione dell'argomento delle funzioni abeliane di genere 4 inerenti a C_6).

IV. – La rappresentazione piana delle superficie con un fascio razionale di coniche è data dal sig. NOETHER costruendo una unisecante del fascio, con un metodo che non lascia subito vedere da quali irrazionalità dipenda la rappresentazione; ma si può notare che la superficie si rappresenta (con una conveniente proiezione) sul piano doppio con curva limite C_{2n} d'ordine $2n$ dotata di punto $(2n - 2)$-plo, ed allora la costruzione di quella unisecante (e quindi la rappresentazione della superficie sul piano semplice) si può far dipendere dalla determinazione di curve aggiunte a C_{2n} che la tocchino in ogni punto ove la segano, e quindi dall'equazione per la bisezione dell'argomento delle funzioni iperellittiche inerenti a C_{2n}.

3. – Si abbia ora l'equazione in 4 variabili

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$$

e suppongasi che le equazioni

$$f(x_1 x_2 x_3 a) = 0$$

ottenute dando ad x_4 un valore costante sieno risolubili con funzioni razionali di due parametri; nei coefficienti di queste funzioni entrano in generale delle irrazionalità che vengono a dipendere da x_4.

I resultati ottenuti (n. 1) ci permettono di precisare la natura di queste irrazionalità. Ma pensando alla riduzione del n. 2 si può anche enunciare il teorema:

Se le equazioni

$$f(x_1 x_2 x_3 a) = 0$$

(dove a è una costante arbitraria) possono risolversi con funzioni razionali di due parametri, si può sempre risolvere la

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$$

ponendo x_1, x_2, x_3 funzioni razionali di due parametri u, v e di x_4, dove la irrazionalità dipende soltanto da estrazioni di radicali quadratici e cubici.

Geometricamente (coll'uso di considerazioni complementari) si ha:

Se una varietà algebrica V di tre dimensioni contiene un fascio lineare di superficie razionali, essa può rappresentarsi punto per punto:

1) *sullo S_3 in modo che le immagini delle superficie razionali del fascio sieno i piani per una retta*;

2) *o sullo spazio doppio (S_3) con superficie limite F d'ordine $2n$ in modo che le superficie del fascio su V abbiano per immagini i piani (doppi) passanti per una retta*:

a) $(2n - 4)$-pla *per F*,

b) *o* $(2n - 6)$-pla *per F contenente due punti* $(2n - 3)$-pli *infinitamente vicini di F*,

c) *o contenente un punto* $(2n - 2)$-plo *per F*;

3) *o sopra una varietà con un fascio di sezioni iperpiane normali immagini delle superficie razionali date su V, superficie*:

a) *d'ordine 3 in S_3*,

b) *o d'ordine 6 in S_6*,

c) *o d'ordine 9 in S_9*.

Non è escluso che si possa avere una riduzione ulteriore; ma si può escludere (con esempi) che si possa sempre rappresentare la varietà V su S_3 nel modo 1): ciò lascia impregiudicata la questione della razionalità di V, la quale questione viene risoluta affermativamente solo in alcuni casi.

4. – Non sarà inutile accennare a riduzioni ulteriori che possono ottenersi in un caso notevole.

Allorchè si possono determinare tre funzioni razionali $x_1 = x_1(x_4)$, $x_2 = x_2(x_4)$, $x_3 = x_3(x_4)$ del parametro x_4, che soddisfino identicamente all'equazione

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0 \,, \tag{1}$$

si può sempre (nella precedente ipotesi che le equazioni $f(x_1 x_2 x_3 a) = 0$ sieno risolubili per funzioni razionali di due parametri) *risolvere* la (1) ponendo x_1, x_2, x_3 funzioni razionali invertibili di due parametri u, v, di x_4, e di un radicale $\sqrt{\varphi(u v x_4)}$ portante sopra un polinomio (di particolar forma) in u, v, x_4. Si ha infatti in questo caso che la varietà V di equazione (1) possiede una curva unisecante le superficie razionali del fascio

$$f(x_1 x_2 x_3 a) = 0 \,,$$

ed allora i casi 3b), 3c) del numero precedente si riconducono al caso 1), mentre il caso 3a) si riconduce al caso 2a).

È interessante notare che (sebbene non si sappia decidere se sempre potranno determinarsi nel modo anzidetto le funzioni $x_1(x_4)$, $x_2(x_4)$, $x_3(x_4)$) ci troviamo nel caso di applicare l'osservazione precedente, *quando sono risolubili per funzioni razionali di due parametri le equazioni in* x_1, x_2, x_3

$$f(x_1, x_2, x_3, ax_3 + b) = 0$$

(*dove* a, b *sono costanti arbitrarie*): *allora si può* (*dunque*) *risolvere l'equazione*

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$$

ponendo x_1, x_2, x_3 *funzioni razionali invertibili di due parametri* u, v, *di* x_4 *e di una* $\sqrt{\varphi(u v x_4)}$, *dove* φ *è un polinomio di* 2^o *grado in* u, *o un polinomio di* 4^o *grado in* u, v, *o un* (*particolare*) *polinomio di* 6^o *grado in* u, v.

D'altra parte nel caso detto innanzi si riesce per altra via, sotto qualche restrizione, a risolvere la

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$$

ponendo x_1, x_2, x_3, x_4 funzioni razionali non invertibili di tre parametri u, v, w.

Ma lascio per ora di indicare i resultati precisi ottenuti e le successive applicazioni che se ne possono fare al caso in cui sieno risolubili per funzioni razionali tutte le equazioni

$$f(x_1, x_2, x_3, ax_2+bx_3+c) = 0$$

(a, b, c costanti).

Come si vede queste ricerche portano un primo, sebbene modesto, contributo alle difficili questioni inerenti alla razionalità delle varietà di tre dimensioni, questioni che non sono state ancora accostate.

X.

SUI SISTEMI LINEARI DI SUPERFICIE ALGEBRICHE AD INTERSEZIONI VARIABILI IPERELLITTICHE (1)

« Math. Ann. », Bd. XLVI (1895),

pp. 179-199.

1. – Lo studio dei sistemi lineari di curve piane ha richiamato molte volte l'attenzione dei geometri; a questo infatti si collegano importanti teorie come la teoria delle trasformazioni cremoniane e dei loro gruppi, quella delle superficie razionali, delle involuzioni, ecc.

Appunto dall'uso delle trasformazioni cremoniane e dalla loro decomponibilità in fattori quadratici viene caratterizzata una serie di ricerche inaugurate con un noto procedimento del sig. NOETHER, e proseguite dai signori BERTINI, GUCCIA, JUNG, MARTINETTI (2), le quali ricerche hanno per iscopo di *classificare* i sistemi lineari di curve piane di genere 0, 1, 2, riconducendoli a *tipi* (d'ordine minimo) irriducibili per trasformazioni birazionali del piano. I resultati ottenuti in tal modo si traducono in teoremi di natura proiettiva relativi alle superficie razionali a sezioni di genere 0, 1, 2 e s'incontrano così con quelli cui giungevano quasi contemporaneamente i signori PICARD (3) e DEL PEZZO (4). Spetta al sig. SEGRE di aver rilevato in tutta la sua estensione questo fecondo legame per il quale « la geometria proiettiva delle superficie razionali in un S_n equivale alla geometria dei sistemi lineari di curve piane (rap-

---

(1) Questo lavoro è un rifacimento di tre note inserite nei « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei » (decembre 1893, maggio-giugno 1894) con aggiunte tratte anche da recenti lavori del sig. CASTELNUOVO.

(2) NOETHER, *Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen* (« Math. Ann. », Bd. 5); BERTINI, *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano* (« Annali di Mat». serie II^a, t. 8); GUCCIA, *Generalizzazione di un teorema di* NOETHER; *Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche* (« Circolo di Palermo », t. I); JUNG (« Istituto lombardo », marzo 1887 e maggio 1888, e « Annali di Mat. », serie II, t. 15 e 16); MARTINETTI (« Ist. lomb. », marzo 1887, e « Circolo di Palermo », t. I).

(3) « Cr. J. », Bd. 100 Cfr. anche GUCCIA (« Circolo di Palermo », t. I, 13 giugno 1886).

(4) *Sulle superficie dell'n° ordine immerse nello spazio di n dimensioni* (« Circolo di Palermo », t. I).

presentativi) rispetto al gruppo delle trasformazioni birazionali del piano »; e poco dopo il sig. CASTELNUOVO ne faceva delle applicazioni allo studio dei sistemi lineari di curve piane iperellittiche e di genere tre ([5]).

2. – Volendo iniziare per i sistemi lineari di superficie ricerche analoghe a quelle (di geometria piana) di cui ho parlato, ho fissato la mia attenzione sopra i sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche, e mi sono proposto di classificarli riconducendoli a *tipi* (mediante trasformazioni birazionali dello spazio).

Non potevo qui trarre grandi aiuti dalla teoria delle trasformazioni, nella quale (nonostante i classici lavori dei signori CREMONA e NOETHER) rimangono ancora insoluti capitali problemi; era dunque naturale che cercassi invece un ausilio nello studio proiettivo delle varietà (di 3 dimensioni) a curve sezioni (cogli S_{n-2} in S_n) iperellittiche, escludendo così quei sistemi di superficie (a intersezioni iperellittiche) pei quali il passaggio di una superficie per un punto generico trae il passaggio di essa per altri punti variabili col primo; limitandomi cioè ai sistemi *semplici* per cui ciò non accade.

3. – « Classificare dal punto di vista proiettivo le varietà V (di 3 dimensioni appartenenti ad un S_n, $n > 3$) a curve sezioni iperellittiche, e stabilire (ove sia possibile) la loro rappresentazione punto per punto sullo spazio S_3 »: ecco un problema per un lato più generale di quello proposto (in quanto concerne anche le V non razionali), dalla cui risoluzione dipende la determinazione dei tipi di sistemi semplici di superficie ad intersezioni variabili iperellittiche; infatti due tali sistemi saranno o no trasformabili l'uno nell'altro birazionalmente secondochè sono rappresentativi di varietà V proiettive o no.

([5]) Cfr. SEGRE (« Circolo Matematico di Palermo », t. I) e CASTELNUOVO (« Circolo Matematico di Palermo », t. IV; « Accad. d. Scienze di Torino, Atti », 1890): nel penultimo lavoro citato trovasi anche una nota del sig. SEGRE contenente più esplicitamente l'osservazione indicata. Cfr. anche SEGRE, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (« Annali di Matematica », 1894). Nel cap. I (§§ 3, 4, 6) della citata memoria del sig. SEGRE si troveranno sviluppate molte considerazioni utili per l'intelligenza di questo lavoro. In particolare mi limito a ricordare il seguente principio di frequentissima applicazione. « Dato un sistema lineare ∞^n ($n > 2$) di curve piane [generalmente irriducibili] (ed analogamente si dica per un sistema di superficie nello spazio, ecc.), esiste sempre in S_n una superficie razionale semplice o multipla che può ritenersi *rappresentata* sul piano dal detto sistema (essendo le curve del sistema immagini delle sezioni iperplanari della superficie): la detta superficie è semplice se il passaggio per un punto delle curve del sistema non trae il loro passaggio per altri punti variabili con esso; inoltre essa è *normale* (cioè non proiezione di un'altra dello stesso ordine appartenente ad uno spazio più elevato) se il sistema di curve piane è determinato completamente dai punti base (e viceversa). Una superficie proiezione in uno spazio inferiore di una data superficie normale, viene rappresentata sul piano da un sistema lineare di curve contenuto in quello rappresentativo della superficie normale, ecc. ».

Lo studio delle varietà V è intimamente legato a quello delle superficie sezioni iperplanari di esse; così la questione proposta viene a riannodarsi a quelle relative alle superficie a sezioni iperellittiche (di cui ho fatto cenno). Ma una questione preliminare mi si imponeva innanzi di poter applicare quei resultati relativi a superficie (a sezioni iperellittiche) razionali, la questione cioè di decidere « quando le superficie a sezioni iperellittiche sieno razionali ».

Ho potuto risolvere tale questione pel caso generale in cui il genere delle nominate sezioni è > 1, e poco dopo il sig. CASTELNUOVO estendeva (per altra via) il mio resultato alle superficie a sezioni ellittiche, dimodochè resta stabilito che « tutte le superficie non rigate a sezioni iperellittiche di genere p ($\geqslant 0$) sono razionali ».

Il lettore troverà dimostrato questo teorema nel § I del presente lavoro ed in esso troverà pure la classificazione e lo studio delle superficie razionali a sezioni iperellittiche, ellittiche e razionali; resultati noti che vengono qui presentati in una trattazione semplice ed uniforme, atta a servire d'introduzione al successivo studio delle varietà di 3 dimensioni a curve sezioni iperellittiche (6).

Questo studio riempie i tre §§ successivi dove si distinguono i tre casi delle varietà V a curve sezioni razionali, di quelle a curve sezioni ellittiche, e di quelle a curve sezioni iperellittiche di genere $p > 1$. « Tali varietà sono razionali o contengono un fascio (serie semplice ∞^1) di piani, ad eccezione (forse) della varietà cubica di S_4 ».

Dalla rappresentazione delle V razionali in S_3 scaturiscono tutti i tipi di sistemi lineari semplici di superficie ad intersezioni iperellittiche, ellittiche e razionali; nella enumerazione dei quali manca forse il sistema che eventualmente rappresenta la varietà cubica di S_4 senza punti doppi (ove questa sia razionale): la varietà cubica di S_4 con un punto doppio viene notoriamente rappresentata (per proiezione) dal sistema delle superficie cubiche con sestica base sopra una quadrica (7).

I. - Le superficie a sezioni iperellittiche.

4. *Superficie a sezioni razionali.* – A base dello studio delle superficie a sezioni razionali o ellittiche, che rientrano come caso particolare nella

(6) Nel n. 8 (§ I) ho creduto far cenno di altri resultati importanti recentemente conseguiti dal sig. CASTELNUOVO relativi alle superficie che contengono un sistema lineare ∞^2 (rete) di curve iperellittiche perchè esse si collegano all'argomento, sebbene non ne comparisca applicazione nel seguito.

(7) Cfr. SEGRE, *Sulla varietà cubica dello spazio a 4 dimensioni, ecc.* (« Accademia di Torino, Memorie », 1888).

famiglia delle superficie a sezioni iperellittiche, poniamo il seguente *teorema di* KRONECKER [8]:

Una superficie (di S_3) contenente ∞^2 sezioni piane riduttibili è rigata o è la superficie di STEINER (del 4° ordine con 3 rette doppie passanti per un punto triplo).

Da questo teorema segue subito il

Teorema di PICARD [9]. – *Una superficie (di S_3) a sezioni razionali è una rigata (razionale) o la superficie di* STEINER.

Infatti una superficie a sezioni razionali viene segata secondo una curva riduttibile da ogni piano tangente.

5. *Superficie a sezioni ellittiche* [10]. – Sia F una superficie d'ordine $n > 3$ (in S_3) le cui sezioni piane generiche sono ellittiche: in ciascun piano generico vi è allora *una* curva C d'ordine $n-3$ aggiunta alla sezione K di F, la quale non incontra la K fuori dei punti multipli; ciò vale anche per un piano tangente ad F ma segante F secondo una curva irreduttibile, purchè (volendo ancora considerare K come avente il genere *virtuale* 1) si consideri come aggiunta alla K la curva C d'ordine $n-3$ che ha un punto $(i-1)$-plo in ogni punto i-plo di K tranne nel punto (doppio) di contatto del piano. Ora le ∞^3 curve C o sono le sezioni piane d'una superficie φ_{n-3} d'ordine $n-3$ (aggiunta ad F) o invadono coi loro punti tutto lo spazio: in quest'ultimo caso (per ogni punto ed in particolare) per un punto O su F vi sono ∞^1 curve C, le quali incontrano in O le corrispondenti sezioni di F; queste debbono dunque essere spezzate, e perciò la F ha ∞^2 sezioni riduttibili, quindi (non essendo la superficie di STEINER la quale ha le sezioni razionali) la F è una rigata ellittica.

Dunque se la F non è rigata le ∞^3 curve C d'ordine $n-3$ aggiunte alle sezioni piane di F sono le sezioni piane d'una superficie (aggiunta) φ_{n-3}.

Ciò posto, si consideri una retta generica r e su questa si fissino $n-2$ punti $A_1 \dots A_{n-2}$ di cui A_1 almeno fuori di φ_{n-3}. In un piano generico

---

(8) La dimostrazione che il KRONECKER diede di questo teorema non fu pubblicata; l'illustre geometra si riserbava di ritoccarla quando la morte lo colse. Una dimostrazione del teorema fondata probabilmente su concetti diversi fu data dal sig. CASTELNUOVO (*Sulle superficie algebriche che ammettono un sistema doppiamente infinito di sezioni piane riduttibili*, « Rendic. Accad. Lincei », genn. 1894). Questi anzi mi prega di aggiungere alle notizie che egli diede sul teorema di KRONECKER quella qui contenuta, che egli deve alla cortesia del prof. G. LORIA.

(9) *Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales* (« Crelle J. », Bd. 100). Cfr. anche GUCCIA, « Circolo di Palermo », t. I.

(10) Il ragionamento e la conclusione di questo n. sono tolti dalla nota del sig. CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve ellittiche* (« Rendic. Acc. dei Lincei », genn. 1894).

per r vi sono ∞^1 curve d'ordine $n-2$ aggiunte alla sezione di F, passanti per $A_1 \dots A_{n-2}$; si può tra queste fissarne una, C', colla condizione che essa sia tangente ad un piano generico α per A_1; allora il luogo delle C', variando il piano per r, è una superficie d'ordine $\geqslant n-2$. Se però l'ordine di essa superficie superasse $n-2$, ad essa apparterrebbe r e vi sarebbe qualche piano che la toccherebbe secondo r, nel quale piano la C' sarebbe spezzata in r ed in una C (aggiunta d'ordine $n-3$) passante per A_1; ma ciò è assurdo perchè A_1 non appartiene a φ_{n-3}. Si conclude che il luogo della C' è una superficie φ_{n-2} d'ordine $n-2$, aggiunta ad F. E si deduce che esiste (almeno) una superficie irreduttibile φ_{n-2} aggiunta ad F, segante sopra un piano generico (come è un piano per r) una data curva C' d'ordine $n-2$ aggiunta alla sezione di F; ma per questa C' passa ancora la φ_{n-2} composta del piano di C' e della φ_{n-3}, onde per C' passa un fascio di φ_{n-2}. Quindi le superficie φ_{n-2} d'ordine $n-2$ aggiunte ad F, compongono un sistema lineare ∞^{n-1}, nè possono essere di più giacchè vi è una sola φ_{n-3}.

Le intersezioni variabili di F colle φ_{n-2} sono curve d'ordine n, componenti un sistema lineare cui appartengono le sezioni piane di F; due di esse s'incontrano in n punti (variabili): perciò se queste curve (considerate come elementi di un sistema lineare) si riferiscono *proiettivamente* ([11]) agli iperpiani di un S_{n-1}, si otterrà in S_{n-1} una superficie Φ d'ordine n di cui la F può considerarsi come proiezione (da punti esterni). Le sezioni iperplanari della Φ essendo *normali* (come curve ellittiche d'ordine $n-1$ in S_{n-1}) anche la Φ sarà *normale*, cioè non potrà ottenersi come proiezione d'un'altra superficie dello stesso ordine appartenente ad uno spazio più elevato.

6. – Rivolgiamoci ora allo studio delle superficie Φ (non rigate) a sezioni ellittiche d'ordine $n > 3$, appartenenti ad S_n (e non ad uno spazio inferiore) ([12]).

a) Per $n = 4$ la Φ è intersezione di due quadriche di S_4 (superficie base d'un fascio).

Infatti per una quartica sezione di Φ con un S_3 passano ∞^1 superficie del 2° ordine: se φ è una di queste, per φ passano ∞^5 quadriche di S_4, le quali segano su Φ le ∞^4 quartiche sezioni iperplanari (il cui sistema normale non è contenuto in un sistema più ampio di quartiche, perchè è completa la serie g_4^3 che gli iperpiani di S_4 segano sopra una

([11]) In modo che alle curve d'un sistema lineare ∞^{n-2} contenuto nel dato corrispondano gli iperpiani per un punto in S_{n-1}.

([12]) I resultati di questo n. sono dovuti al sig. Del Pezzo (*Sulle superficie dell'n° ordine immerse nello spazio di n dimensioni*, « Circolo di Palermo », t. I) che li dedusse servendosi della proiezione da punti della Φ sopra una superficie cubica di S_3: qui essi vengono stabiliti direttamente con metodo estendibile alle varietà (a curve sezioni ellittiche) di più dimensioni.

delle nominate quartiche sezioni); per ciascuna quartica sezione iperplanare di Φ, e per la φ, passano dunque ∞^1 quadriche di S_4, e quindi vi è una quadrica di S_4 passante per φ e contenente la Φ: segue che Φ è base per un fascio di quadriche, c.d.d.

La Φ è dunque la nota superficie studiata dal sig. SEGRE [13], la quale (in ogni caso) contiene delle rette. Proiettando Φ da una sua retta a, essa viene rappresentata univocamente sopra un piano, e le immagini delle sue quartiche sezioni sono le ∞^4 cubiche (con 5 punti base) proiezioni di queste ciascuna dal punto su a.

b) Per $n > 4$ alla Φ appartengono delle cubiche gobbe o delle quartiche razionali normali in S_4.

A stabilire il fatto enunciato bastano le considerazioni seguenti.

Anzitutto, se una sezione iperplanare di Φ si spezza, le sue componenti sono curve razionali normali: infatti se vi fosse una curva C d'ordine $r < n$ sezione iperplanare parziale di Φ la quale appartenesse ad uno spazio S_ϱ di dimensione $\varrho < r$, le intersezioni residue degli iperpiani per S_ϱ con Φ costituirebbero su Φ un sistema lineare di curve d'ordine $n - r$, di dimensione $n - \varrho - 1 \geqslant n - r$, il che è assurdo perchè le sezioni (ellittiche) di Φ non possono contenere una serie g_{n-r} di dimensione $> n - r - 1$.

Essendo $n > 4$ vi sono infiniti iperpiani bitangenti a Φ che la toccano in un dato punto generico O: le sezioni di questi sono spezzate in due curve razionali normali passanti per O ed aventi *un* altro punto comune; nessuna di queste è una retta perchè Φ non è rigata. Ogni iperpiano passante per una C di tali curve incontra Φ in un'altra curva C' che ha con C *due* punti comuni (è bitangente a Φ). Quindi se r è l'ordine di una C di queste curve, $r - 1$ è la dimensione del sistema lineare cui appartiene su Φ. E parimente se s è l'ordine dell'altra componente C', è $s - 1$ la dimensione del sistema lineare cui C' appartiene su Φ.

I due sistemi lineari di curve cui C, C' appartengono su Φ possono essere contenuti l'uno nell'altro o coincidere; ma poichè una C incontra una C' in *due* punti, uno dei due sistemi ha la dimensione $\leqslant 3$ e quindi una delle due curve C, C' ha l'ordine $\leqslant 4$. Perciò se nessuna delle due curve è una conica, una di esse è una cubica o una quartica razionale normale. Nel caso opposto si proverà l'esistenza d'una cubica o d'una quartica razionale normale su Φ nel seguente modo.

Sia C' una conica e C abbia l'ordine > 4 ed appartenga quindi ad un sistema lineare di dimensione > 3. In questo sistema vi sono delle curve aventi un punto doppio in un punto generico di Φ le quali si spezzano in due curve razionali normali d'ordine $\geqslant 2$ aventi (soltanto) il detto

---

[13] « Math. Annalen », Bd. 24.

punto comune. Ciascuna di queste due componenti ha *un* punto comune con C' altrimenti una di esse incontrerebbe C' in due punti e l'altra apparterrebbe ad un sistema lineare di dimensione uguale al suo ordine. Ora poichè le due curve d'ordini r', s' s'incontrano in un punto e appartengono a sistemi risp. $\infty^{r'-1}$, $\infty^{s'-1}$, *uno* almeno dei due numeri r', s' è $\leqslant 3$. Se poi una delle due curve nominate è una conica, un iperpiano speciale passante per l'altra (C'') sega Φ secondo due coniche (quella nominata e la C') onde un iperpiano generico per C'' sega Φ secondo una quartica razionale normale.

Rimane così effettivamente provata l'esistenza su Φ di una cubica gobba o d'una quartica razionale normale segante in due punti l'intersezione iperplanare residua.

Se su Φ vi è una cubica gobba, l'intersezione residua di Φ con un iperpiano generico è una curva irreduttibile C_{n-3} razionale normale d'ordine $n-3$ in S_{n-3}, dalla quale la Φ viene proiettata univocamente sopra un piano, poichè la C_{n-3} ha colla cubica due punti comuni e quindi la cubica stessa viene incontrata in *un* punto da un iperpiano per C_{n-3}. In tal caso la Φ viene rappresentata sul piano mediante un sistema lineare di cubiche proiezioni (dalle intersezioni con C_{n-3}) delle sezioni iperplanari di Φ.

Se su Φ vi è una quartica razionale normale di S_4, l'intersezione residua di Φ con un iperpiano generico per essa quartica è una curva irreduttibile C_{n-4} razionale normale d'ordine $n-4$ in S_{n-4}, dalla quale la Φ viene proiettata univocamente sopra una quadrica Q di S_3: in questa rappresentazione le immagini delle sezioni iperplanari di Φ (proiezioni di queste dalle intersezioni con C_{n-4}) sono quartiche ellittiche. Ma allora certo $n \leqslant 8$, e se $n < 8$ queste quartiche (sezioni di Q con altre quadriche di S_3) hanno qualche punto comune: se da un tal punto si proietta Q sopra un piano si ottiene la rappresentazione di Φ sul piano, dove immagini delle sezioni iperplanari sono cubiche: questo caso non conduce dunque ad un resultato diverso dal precedente tranne per $n=8$. Per $n < 8$ si desumerà dalla rappresentazione di Φ mediante cubiche piane, l'esistenza su di essa di una C_{n-3} dalla quale Φ viene proiettata univocamente sopra un piano, ecc.

Si noti poi che dovrà aversi in ogni caso $n \leqslant 9$, poichè ∞^9 sono tutte le cubiche del piano.

Riepilogando le cose dette ed includendo anche il caso noto $n=3$ ([14]), possiamo dunque enunciare il

Teorema di CASTELNUOVO-DEL PEZZO ([15]). – *Ogni superficie algebrica*

([14]) Cfr. CREMONA, « Cr. J. », Bd. 68.
([15]) CASTELNUOVO, « Accad. dei Lincei », gennaio 1894.

d'ordine n a sezioni ellittiche, non rigata, è razionale e può rappresentarsi sul piano:

1) *o con un sistema lineare di cubiche con $9-n$ punti base* ($n \leqslant 9$),

2) *o con un sistema lineare di quartiche con due punti base doppi* ($n=8$) ([16]) (rappresentazione equivalente a quella sopra una quadrica mediante un sistema di quartiche ellittiche senza punti base).

Possiamo aggiungere che ove la superficie in questione Φ sia normale ed $n>3$ la rappresentazione viene data:

1) nel 1° caso proiettando la Φ sopra un piano da una sua curva irreduttibile C_{n-3} razionale normale d'ordine $n-3$ (in S_{n-3}),

2) nel 2° caso proiettando la Φ sopra un piano da una sua quartica irreduttibile di S_4 e da un punto.

7. *Superficie a sezioni iperellittiche di genere* $p>1$ ([17]). – Rivolgiamoci allo studio delle superficie a sezioni iperellittiche (di genere $p>1$): sia F una tal superficie che può supporsi appartenente ad S_3 (ove in caso opposto si proietterebbe da punti esterni).

Anzitutto si supponga che F sia razionale. Nella rappresentazione piana le immagini delle sezioni di F sono curve iperellittiche C di genere p e d'un certo ordine n: vi sono ∞^{p-1} curve K d'ordine $n-3$ aggiunte alle nominate d'ordine n; una K sega ogni C in coppie di punti coniugati (sulla curva iperellittica C); perciò della K passante per un punto O del piano fa parte il luogo dei punti coniugati di O sulle curve C passanti per O; segue che le curve K si compongono di $p-1$ curve d'un fascio ciascuna delle quali sega in *due* punti coniugati le C: in conseguenza su F vi è un fascio (lineare) di coniche e la conica del fascio passante per un punto è il luogo dei punti coniugati di esso sulle sezioni di F ([18]).

Prescindiamo ora dalla ipotesi della razionalità di F. Allora possono farsi due ipotesi:

1) i coniugati d'un punto generico O di F sulle sezioni per esso invadono tutta la superficie;

2) i coniugati d'un punto generico O di F sulle sezioni per esso descrivono una linea.

Nella 1ª ipotesi mentre in ogni piano generico per O vi è *un* coniugato di O sulla curva sezione di F, inversamente ogni punto di F è il coniugato di O sopra un certo numero finito m di sezioni piane per O: in tal guisa i punti della superficie F vengono a corrispondere ai gruppi d'una involuzione (di grado m) nella stella di centro O, e poichè una tale

([16]) DEL PEZZO, « Circolo di Palermo », t. I.

([17]) Cfr. la mia Nota, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche*, (« Accad. dei Lincei », dec. 1893) [questo volume, IV], n. 2.

([18]) Cfr. CASTELNUOVO, « Circolo Matematico di Palermo », 1890.

involuzione (come ogni involuzione in un ente algebrico razionale ∞^2) è razionale ([19]), così la F è una superficie razionale. Ma tale conclusione, per quanto è stato innanzi osservato, contrasta all'ipotesi che i coniugati di O sulle sezioni di F invadano tutta la superficie. Pertanto la 1ª delle ipotesi fatte deve scartarsi.

Discutiamo la 2ª ipotesi.

I coniugati d'un punto generico O di F sulle sezioni per O descrivono una linea C d'un certo ordine n: il punto O con ogni punto della linea C dà una coppia di punti coniugati sopra ogni sezione di F, sicchè questa è incontrata in *un* punto fuori di O dai piani per O e quindi ha il punto O come $(n-1)$-plo; la C è dunque una linea piana o si compone d'una linea piana e di rette per O, ma queste possono (eventualmente) non computarsi come facenti parte della C. Ad ogni punto O della F corrisponde una siffatta curva C, e sussiste la proprietà fondamentale che se la curva C corrispondente ad O passa per il punto O' di F, la curva C' corrispondente ad O' passa per O. Da questa proprietà si deduce che deve essere $n=1$ o $n=2$: altrimenti (per $n>2$) la curva piana C' avrebbe in O' almeno un punto doppio, e però tutti i piani tangenti ad F nei punti della curva piana C passerebbero per O; ciò è assurdo perchè la C (d'ordine n) ha O come $(n-1)$-plo e non si compone (interamente) di rette per O.

Ciò posto distinguiamo i due casi:

1) $n=1$. La curva C corrispondente ad un punto generico O di F è una retta: ogni punto O' di C ha come corrispondente una retta C' per O la quale è fissa al variare di O' su C' (altrimenti F sarebbe un cono col vertice nel punto generico O). In questo caso la F è dunque una rigata iperellittica di genere p, e su di essa le rette C, C' sono rette coniugate.

2) $n=2$. Ogni punto O di F ha come corrispondente una conica C su F passante per esso. Dico che ogni punto O' di C ha come corrispondente la stessa conica C, di guisa che le coniche C formano un fascio lineare su F e perciò la F è razionale (per un noto teorema del signor Noether) ([20]).

Suppongasi invero il contrario: ai punti O' di C corrispondono allora (nel senso indicato) ∞^1 coniche C' su F passanti per O. Due coniche C' (non giacendo in uno stesso piano) hanno comune al più un sol punto variabile e quindi o formano un fascio (razionale) ed allora la F è razionale pel citato teorema di Noether, oppure s'incontrano due a due in *un* punto fuori di O, e per ogni punto di F ne passa un certo numero

---

([19]) Castelnuovo, *Sulla razionalità delle involuzioni piane* («Math. Ann.», Bd. 44, 1893).

([20]) *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen* («Math. Ann.», Bd. 3).

$\nu > 1$, ed ancora la F è razionale perchè i suoi punti vengono riferiti ai gruppi d'una involuzione ∞^2 g_ν^2 sopra un sostegno razionale (la ∞^1 delle coniche) [21]. In tutti i casi dunque si conclude che la F è razionale, onde, per ciò che è stato osservato in principio, sulla F le coniche C formano un fascio.

Possiamo ora enunciare il seguente teorema generale nel quale sotto la denominazione di curve iperellittiche includiamo anche le curve razionali ed ellittiche (casi particolari della famiglia):

Ogni superficie algebrica le cui sezioni (piane o iperplanari) sono curve iperellittiche di genere p ($\geqslant 0$):

1) *è una rigata di genere* p,

2) *oppure una superficie razionale, ed in questo 2° caso per* $p > 1$ *contiene un fascio lineare di coniche.*

8. *Cenno di ulteriori risultati.* – Sebbene non necessario pel seguito, credo possa riuscire interessante per il lettore un breve cenno di ulteriori resultati, conseguiti dal signor CASTELNUOVO [22], che si collegano all'argomento di cui stiamo trattando.

Il teorema concernente la razionalità delle superficie non rigate a sezioni iperellittiche (ellittiche o razionali) può essere riguardato dal punto di vista della così detta *geometria sopra una superficie* (geometria delle trasformazioni birazionali) come una proprietà delle superficie contenenti un sistema lineare ∞^3 di curve iperellittiche. Allora si può cercare un teorema analogo per le superficie contenenti un sistema più ristretto di curve iperellittiche: esso è stato dato appunto dal sig. CASTELNUOVO sotto la forma seguente:

Una superficie contenente una rete di curve iperellittiche di genere p ($\geqslant 0$) *a serie caratteristica non speciale* [23] *è razionale o riferibile ad una rigata di genere* p, *o ad una rigata ellittica.*

La dimostrazione ricorre ancora al concetto di utilizzare il teorema della razionalità delle involuzioni piane che mi ha servito nel n° 7: ma esso compare qui sotto altra forma. Il sig. CASTELNUOVO nota che quel

---

[21] La razionalità delle involuzioni sopra un sostegno razionale ∞^1 è stata stabilita dal sig. LÜROTH (« Math. Ann. », Bd. 9). Secondo un teorema più generale di CASTELNUOVO sono anche razionali le involuzioni più volte infinite, non composte, sopra una curva di genere qualunque (« Atti dell'Accad. di Torino », giugno 1893). Il sig. HUMBERT (« Journ. de Math. », 1893) è giunto contemporaneamente allo stesso resultato.

[22] *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche* (« Rend. Accad. dei Lincei », maggio 1894).

[23] Serie caratteristica della rete (sistema lineare ∞^2) è quella serie segata dalle curve del sistema sopra una curva generica di esso: la denominazione di *non speciale* va intesa nel senso dei signori BRILL-NOETHER (« Math. Ann. », Bd. 7), (serie non contenuta nella g_{2p-2}^{p-1} appartenente alla curva di genere p).

suo teorema può enunciarsi dicendo: « Una superficie φ contenente una qualsiasi serie ∞^1 razionale di curve razionali è razionale ».

Infatti, se si riferiscono biunivocamente le curve della serie ai piani d'un fascio e si proietta ogni curva della serie sul corrispondente piano, nasce una superficie F contenente un fascio di sezioni piane razionali e quindi ([24]) razionale, la quale è in corrispondenza [m, 1] colla φ (dove $m \geqslant 1$), onde i punti della φ vengono a corrispondere biunivocamente ai gruppi d'una involuzione su F, o ai punti di F, e però la φ è razionale.

Ciò posto, si abbia una superficie contenente una rete (sistema lineare ∞^2) di curve iperellittiche di genere p, a serie caratteristica non speciale. Sia dapprima $p > 1$. Sono da distinguere due casi:

1° *caso*. Le curve della rete passanti per un punto di una curva iperellittica non passano pel coniugato (allora la serie caratteristica della rete non è composta colla g_2^1 della sua curva generica e quindi è certo non speciale).

I punti coniugati d'un punto O della superficie sulle curve iperellittiche della rete descrivono una curva razionale C; variando il punto O sopra una di queste curve C ha luogo (come è facile vedere) uno dei seguenti casi:

a) o la curva luogo dei coniugati di O non varia, e coincide colla C stessa, oppure è da essa distinta; allora sulla superficie vi è un *fascio* di curve razionali, fascio lineare nel primo caso sicchè la superficie è razionale, fascio di genere p nel secondo caso nel quale la superficie può trasformarsi in una rigata di genere p (essendo le curve della rete unisecanti le C);

b) o al variare di O su C varia la curva coniugata ad O e descrive una serie razionale di curve razionali ed allora la superficie è razionale (questo caso *b*) non può in realtà presentarsi).

2° *caso*. La serie caratteristica della rete di curve iperellittiche sulla data superficie F è composta colla g_2^1 sulla curva generica della rete. Allora (poichè tale serie caratteristica è non speciale) due curve della rete si segano in più che $2(p-1)$ punti. La F risulta riferibile ad un piano doppio, ed una discussione più minuta ([25]) prova che i piani doppi che così nascono sono quelli razionali di Clebsch-Noether ([26]) e loro degenerazioni.

Sia ora $p = 1$ (e quindi certo non speciale la serie caratteristica della rete). Due curve generiche della rete si seghino in n punti.

Un punto O della data superficie F, contato come $(n-1)$-plo sopra ciascuna curva ellittica della rete per O, individua un gruppo di n punti

---

([24]) Noether, « Math. Ann. », Bd. 3.

([25]) Cfr. Castelnuovo, l. c.

([26]) Clebsch, *Ueber den Zusammenhang...*, « Math. Ann. », Bd. 3; Noether, *Ueber die einzweideutigen Ebenentransformationen*, « Sitzungsberichte d. ph. med. Soc. zu Erlangen », 1878.

appartenente alla g_n^{n-1} completa contenente la g_n^1 caratteristica; questo gruppo contiene un punto fuori di O, che variando la curva per O descrive una linea razionale C. Ora si faccia variare O su C, la linea corrispondente (nel senso indicato) può essere fissa o variabile: nel 1° caso le C formano un fascio (ellittico) e si è condotti alla trasformabilità di F in una rigata ellittica; nel 2° caso si ha su F una serie razionale ∞^1 di curve razionali, quindi F è razionale.

Così risulta stabilito il teorema.

II. - I sistemi lineari di superficie ad intersezioni variabili razionali.

9. Lo studio dei sistemi lineari semplici di superficie le cui intersezioni variabili sono curve razionali si riconduce a quello delle varietà V (di 3 dimensioni) a curve sezioni razionali (cogli S_{n-2} in S_n) di cui i detti sistemi sono rappresentativi.

Si supponga la V (ove occorra) proiettata da punti esterni in un S_4.

Le superficie sezioni iperplanari della V, avendo le sezioni razionali, sono rigate o superficie di STEINER (n. 4); e nel 1° caso sono quadriche o rigate non quadriche.

1° *caso.* Le superficie sezioni di V sono quadriche. Allora la V è una quadrica di S_4.

2° *caso.* Le superficie sezioni di V sono rigate non quadriche. Allora la V contiene un fascio (serie semplice ∞^1) di piani. Infatti per ogni punto di V passano ∞^1 rette di essa formanti un cono; questo cono è un piano avendo comune *una* generatrice con ogni iperpiano pel punto. Poichè le curve sezioni di V sono razionali, anche il fascio di piani su V è razionale.

3° *caso.* Le superficie sezioni di V sono superficie di STEINER del 4° ordine con 3 rette doppie passanti per un punto triplo. Intanto la V è del 4° ordine.

Poichè sono ∞^4 le superficie sezioni di V, vi sono su V dei punti ciascuno dei quali è triplo per infinite superficie sezioni di V e quindi per V: i punti tripli di V formano una retta (essendovi *un* punto triplo sopra ogni sezione) e per questa retta passano tre piani doppi luogo delle rette doppie delle superficie sezioni. Alla V appartiene una congruenza di (∞^2) rette sezioni dei piani per la retta tripla a; ciascuna di queste rette incontra la a in un punto; dico che questo punto è fisso per le nominate rette ed è quadruplo per la V. Infatti in un punto generico della retta tripla a vi è un cono cubico osculatore costituito dai tre S_3 individuati dalle coppie di piani doppi, ed i piani doppi costituiscono la completa intersezione di V col nominato cono osculatore: un punto O di a

pel quale passi una retta di V fuori dei piani doppi (la qual retta deve appartenere al cono osculatore in O) è dunque un punto speciale di a quadruplo per V, c.d.d.

Segue che la V è un cono proiettante dal vertice una superficie di STEINER: esso può ritenersi come proiezione (da punti esterni) di un cono normale del 4° ordine in S_6 proiettante da un punto una superficie di VERONESE ([27]). Dopo ciò si può enunciare il

Teorema. – Una varietà (di 3 dimensioni) a curve sezioni razionali è

1) *una quadrica*;

2) *o una serie semplicemente infinita di piani*;

3) *o un cono del* 4° *ordine proiettante dal vertice una superficie di* VERONESE *o una sua proiezione.*

10. – Le varietà V a curve sezioni razionali sono tutte razionali, come è agevole vedere. Come si rappresenteranno esse su S_3?

1° *caso.* La V è una quadrica. Rappresentandola su S_3 mediante proiezione da un suo punto si hanno come immagini delle superficie sezioni [iperpiane] le ∞^4 superficie di 2° ordine passanti per una conica.

2° *caso.* La V contiene un fascio lineare di piani. Allora (come ha dimostrato il sig. SEGRE ([28])) essa può ritenersi proiezione (da punti esterni) d'una varietà normale W dello stesso ordine n appartenente ad un S_{n+2}, e rappresentarsi quindi su S_3 (mediante successive proiezioni da punti della varietà normale W); si hanno allora come immagini delle superficie sezioni iperplanari di V (o di W) superficie d'ordine n con una stessa retta $(n-1)$-pla (ed altri elementi base). Il sig. SEGRE nel lavoro citato ha considerato più da vicino tali sistemi lineari di superficie, il cui ordine può in generale abbassarsi con trasformazioni cremoniane dello spazio.

3° *caso.* Per rappresentare su S_3 il cono W del 4° ordine (normale in S_6) proiettante da un punto una superficie di VERONESE (cono che insieme alle sue proiezioni dello stesso ordine costituisce il 3° tipo delle varietà considerate), basta anche qui ricorrere a successive proiezioni da punti semplici di W. Con ciò le immagini delle sezioni iperplanari di W

([27]) Dicesi di VERONESE la superficie normale del 4° ordine in S_5 rappresentabile sul piano mediante il sistema lineare delle coniche. Questa bella superficie (le cui proiezioni dello stesso ordine in S_3 sono superficie di STEINER) si trova già accennata dal CAYLEY, *On the Curves which satisfy given conditions* (« Phil. Trans. », 1868), ed è stata studiata diffusamente dal sig. VERONESE (« Accad. dei Lincei, Memorie »; 1883-84) e dal sig. SEGRE, *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche* (« Atti Accad. di Torino », 1885). Cfr. anche STUDY, *Ueber die Geometrie der Kegelschnitte* (« Math. Ann. », Bd. 27).

([28]) *Sulle varietà normali a* 3 *dimensioni composte di una serie semplice razionale di piani* (« Atti Accad. di Torino », 1885).

riescono del 4° ordine; ma l'ordine di tali superficie può essere abbassato con una trasformazione cremoniana dello spazio S_3.

Per vederlo nel modo più semplice basta considerare che tutti i coni W (di S_6) sono proiettivi fra di loro e quindi due sistemi lineari di superficie in S_3 rappresentativi di coni W debbono potersi trasformare birazionalmente l'uno nell'altro; in altre parole un qualunque sistema di superficie in S_3 rappresentativo d'un cono W può essere assunto come tipo della famiglia che stiamo considerando; allora si potrà assumere come tipo il sistema ∞^6 delle quadriche che toccano un piano in un dato punto di esso (sistema evidentemente rappresentativo d'un cono W).

Dopo ciò possiamo enunciare il

Teorema. – I sistemi lineari semplici di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve razionali possono trasformarsi birazionalmente in uno dei seguenti tipi:

1) *sistema delle quadriche per una conica*;

2) *sistema di quadriche tangenti in un punto ad un piano*;

3) *sistema di superficie d'un certo ordine n con retta base $(n-1)$-pla, e (forse) altri elementi base.*

III. - I sistemi lineari di superficie ad intersezioni ellittiche.

11. ([29]) – Si consideri una varietà W (di 3 dimensioni) a curve sezioni ellittiche in S_4. Le superficie sezioni iperplanari di essa sono rigate o razionali.

Nel 1° caso la varietà contiene un fascio ellittico di piani (cfr. n. 9, 2° caso). Nel 2° caso col ragionamento del n. 5 si prova che le curve d'ordine $n-2$ aggiunte alle sezioni piane di W, supposte d'ordine n, generano ∞^{n+1} varietà d'ordine $n-2$ (aggiunte a W), mediante le quali (riferite proiettivamente agli iperpiani di S_{n+1}) la W si trasforma in una varietà V dello stesso ordine n normale in S_{n+1} di cui W può ritenersi come proiezione.

Escludendo le varietà contenenti un fascio ellittico di piani (certo non razionali), rivolgiamoci a considerare le varietà normali V d'ordine n in S_{n+1}, a curve sezioni ellittiche.

Dimostreremo che per $n > 3$ esse sono razionali e ne troveremo la effettiva rappresentazione: rimane il dubbio sul caso $n = 3$, rimane cioè dubbia la razionalità delle varietà cubiche di S_4 prive di punti doppi.

([29]) Cfr. le mie Note *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche* (« Rendic. Accad. dei Lincei », maggio-giugno 1894) [questo volume, VII, nota I e II].

12. – Anzitutto si noti che le superficie sezioni iperplanari di V sono normali d'ordine n in S_n; quindi per $n > 3$ esiste sopra una superficie sezione iperpiana generica di V una curva irreduttibile C, d'ordine $n-3$ o d'ordine $n-4$, dalla quale la superficie viene proiettata univocamente sopra un piano o sopra una quadrica (di S_3) ([30]): proiettando V da una tale curva C si ha la rappresentazione univoca di essa sopra un S_3 o risp. sopra una quadrica di S_4 e così resta intanto provato che: *Una varietà di* 3 *dimensioni a curve sezioni ellittiche d'ordine* > 3 *o contiene un fascio ellittico di piani* (*ed è irrazionale*), *o è razionale*. Dobbiamo ora distinguere il caso in cui la C possa assumersi d'ordine $n-3$ ($n > 3$) da quello (possibile soltanto per $n = 8$) in cui sulla superficie sezione di V non esista una curva d'ordine $n-3$. Chiameremo risp. di 1ª e di 2ª *specie* le varietà V che così nascono, come le relative superficie sezioni.

13. – Cominciamo ad occuparci delle varietà V di 1ª specie, d'ordine $n > 3$. La curva proiettante C incontra le superficie sezioni d'ordine n in $n-3$ punti, dai quali queste superficie vengono proiettate in superficie cubiche dello S_3 rappresentativo: le V di 1ª specie vengono dunque rappresentate su S_3 mediante sistemi lineari di superficie cubiche L. Le intersezioni variabili di due L sono curve d'ordine n proiezioni da C delle curve sezioni di W (dello stesso ordine), onde il sistema delle L possiede una curva base K d'ordine $9-n$: questa è intersezione parziale di una superficie cubica L con una quadrica fissa Q, residua di ciascun piano rispetto al sistema delle L.

a) Per $n = 4$ la quintica base K, intersezione parziale di una quadrica con una superficie cubica irreduttibile, individua sempre da sola un sistema ∞^5 di superficie cubiche ad intersezioni quartiche ellittiche, rappresentativo d'una varietà V del 4° ordine in S_5 ([31]) (intersezione completa di due quadriche di S_5).

Per $n > 4$ la curva base K può non individuare più da sola il sistema delle L e quindi possono aversi più tipi di sistemi di L rappresentativi di varietà V.

È ciò che dobbiamo indagare più da vicino.

14. – Premettiamo il seguente lemma. Proiettando la varietà di 1ª specie V (d'ordine $n > 4$ in S_{n+1}) da una sua curva irreduttibile C

([30]) Cfr. n. 6.

([31]) La varietà V del 4° ordine di S_5 può considerarsi come un complesso quadratico di rette (chiamando punti [di una quadrica] le rette di S_3). La data rappresentazione di V coincide con quella data dal sig. KLEIN in un'aggiunta alla nota del sig. NOETHER, *Zur Theorie der algebraischen Functionen mehrerer complexer Variabeln* (« Göttinger Nachrichten », 1869), Cfr. anche CAPORALI, *Sui complessi e sulle congruenze di* 2° *grado* (« Memorie dell'Accad. dei Lincei », 1877-78).

d'ordine $n-3$ in S_{n-3}, si ottiene un sistema di superficie cubiche L, immagini delle sezioni iperplanari, che

1) è determinato dalla curva base K d'ordine $9-n$ e non ha punti base doppi, se per C non passa alcun S_{n-2} segante V secondo una superficie;

2) nel caso opposto ha, oltre la curva base K, un punto base O doppio per le L e $(7-n+\varrho)$-plo per la K, dove $\varrho = 0, 1, 2$.

La dimostrazione del lemma si fonda sull'osservazione seguente ([32]). Se esiste un punto O base per le L che impone ad esse nuove condizioni non espresse dal passaggio delle L per K, i piani per O rappresentano sezioni iperplanari parziali di V, d'ordine $< n$; perciò vi è per C uno S_{n-2} segante V secondo una superficie d'ordine $n-3$ (come la C sua sezione) e gli iperpiani per esso segano ulteriormente V secondo rigate cubiche. I piani per O sono immagini delle nominate rigate cubiche, e quindi O è doppio per le L le quali hanno in ogni piano per O altri due punti base semplici. Questi possono essere ambedue distinti da O, che è in tal caso $(7-n)$-plo per K; oppure uno solo di essi è distinto da O $\{(8-n)$-plo per $K\}$, e l'altro descrive l'intorno di O sopra un piano osculatore fisso per le L; o infine ambedue sono infinitamente vicini ad O, che è allora $(9-n)$-plo per la K (composta di $9-n$ rette), ed in tal caso le L hanno in O lo stesso cono quadrico tangente.

Osservazione. – Giova inoltre osservare che il secondo dei casi precedenti può presentarsi soltanto per $n \leqslant 6$: infatti in tal caso proiettando da C sopra un piano una sezione iperplanare di V per C, si ha come immagine di C una conica spezzata (essendochè dalla quadrica Q residua di ciascun piano rispetto al sistema delle L si stacchi il piano osculatore in O); una delle rette componenti la nominata conica contiene allora tre punti (di K) base per le L, onde la K contiene una cubica (piana), e si ha appunto $n \leqslant 6$.

15. – Il precedente lemma fissa i limiti della discussione che dobbiamo compiere. Vi sono 4 casi da esaminare per ogni valore di n, cioè il caso in cui il sistema delle L è determinato dalla curva base K, e quello in cui vi è inoltre un punto base doppio per le L e $(7-n+\varrho)$-plo per la K (d'ordine $9-n$) dove $\varrho = 0, 1, 2$. Cominciamo dall'ultimo, a cui corrispondono soluzioni per ogni valore di n $(\leqslant 9)$.

b) La curva base K si compone di $9-n$ rette per un punto base doppio O nel quale è fissato il cono quadrico tangente alle superficie cubiche L.

([32]) Il lettore troverà svolti i dettagli della dimostrazione nella 2ª delle mie citate Note dell'Accad. dei Lincei.

Da questa condizione nasce effettivamente (per $n=3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$) un sistema ∞^{n+1} di superficie cubiche L rappresentativo d'una V, e per $n > 3$ nasce dalla effettuata projezione della V da una sua curva C (razionale normale d'ordine $n-3$); per $n=4$ il sistema rientra come caso particolare nel tipo *a*) (n. 13). La varietà V così rappresentata è un *cono* (cono ottenuto proiettando dal vertice una superficie non rigata d'ordine n in S_n a sezioni ellittiche) ossia ha ∞^2 rette per un punto aventi per imagini nello S_3 rappresentativo le rette per O. Inoltre si vede facilmente che la projezione di un tal cono da una sua curva C (razionale normale d'ordine $n-3$) dà sempre come sistema rappresentativo di L quello *b*) considerato; segue la sua irreducibilità agli altri che verremo trovando.

16. – Escludiamo le V che sono coni: restano 3 casi da esaminare per ogni valore di n.

c) Sia $n=5$. La curva base K sia una *quartica di* 2^a *specie* (genere 0).

Si ha così l'unico sistema di L corrispondente alla 1^a ipotesi: invero soltanto una quartica di 2^a specie appartiene ad *una* quadrica (residua di ciascun piano rispetto al sistema delle L) e quindi soltanto una siffatta quartica determina da sola un sistema ∞^6 di L rappresentativo d'una V. Sotto la condizione di essere di 2^a specie la quartica K può degenerare (appartenendo sempre ad *una* quadrica).

Le varietà V rappresentate dal sistema *c*) non sono coni. Dico che ogni altra V del 5^o ordine che non è un cono può rappresentarsi col sistema *c*), mediante proiezione su S_3 da una conica C opportunamente scelta su di essa. Invero la V del 5^o ordine che non è un cono, ove sia rappresentata su S_3 mediante proiezione da una conica C, non dal sistema *c*), ha come sistema rappresentativo un sistema ∞^6 di L con un punto base doppio O che è doppio o triplo per la quartica base K; allora si consideri (in S_3) un piano generico per O ed in esso una conica generica γ passante per O e per gli altri due punti base per le L nel detto piano (uno dei quali al più è infinitamente vicino ad O); alla γ corrisponde su V una conica C per la quale non passa alcuna superficie del 2^o ordine; proiettando la V su S_3 dalla C si ha dunque (n. 14) come sistema rappresentativo di V un sistema *c*).

17. – Sia $n=6$. Esclusi i coni V si hanno i 3 casi:

d) La cubica base K determina da sola il sistema delle L e però anche *una* quadrica Q residua di ciascun piano rispetto al sistema, quindi la K si compone di 3 rette sghembe. Effettivamente esiste un sistema ∞^7 di L determinato da 3 rette base sghembe rappresentativo d'una V del 6^o ordine.

d') Il sistema delle L ha oltre la cubica base K un punto doppio O, semplice per K. Allora K è una cubica gobba appartenente ad ∞^2 (e non ∞^3) quadriche residue dei piani per O rispetto al sistema delle L.

Nasce così effettivamente un sistema ∞^7 rappresentativo di una V proiettata su S_3 da una sua cubica C.

d'') Il sistema delle L ha oltre la curva base K un punto base doppio O che è doppio anche per K, ed inoltre le L hanno in O un punto biplanare con un piano osculatore fisso (cfr. l'Osservazione del n. 14). Allora la K è una cubica piana. Un siffatto gruppo base individua effettivamente un sistema ∞^7 di L rappresentativo di una V e nascente dalla proiezione di essa da una sua cubica C.

I sistemi *d*), *d'*), *d''*) sono irreducibili fra loro, perchè le V rappresentate sono proiettivamente distinte: per verificare l'asserto basta considerare i sistemi di rigate cubiche che possono appartenere alle V dei tre tipi.

18. – Sia $n = 7$. Esclusi i coni e rammentando l'osservazione del n. 14, non vi sono da esaminare che i sistemi di L determinati completamente dalla curva base K, o quelli aventi anche un punto base doppio per le L e $(7 - n)$-plo per K: la 1ª ipotesi è da scartare, giacchè una linea d'ordine < 3 non individua mai da sola *una* quadrica residua di ciascun piano rispetto al sistema delle L; la 2ª ipotesi conduce soltanto al caso:

e) Per $n = 7$; il sistema ∞^8 di L con conica base e punto base doppio fuori di esso. Questo sistema si può trasformare quadraticamente in un sistema di quadriche per un punto.

E non potendosi andar oltre, si conclude che per $n > 7$ le varietà V di 1ª specie sono coni.

19. – Passiamo alle V, normali di 2ª specie. Queste sono di ordine 8: la loro rappresentazione su S_3 si ottiene proiettandole da una quartica razionale normale C e da un punto fuori di essa. Proiettiamo anzitutto la V da una sua quartica C sopra una quadrica Q di S_4: le immagini delle sezioni iperplanari di V su Q sono superficie di 4° ordine L intersezioni di Q con quadriche di S_4 ed aventi come intersezioni variabili curve d'ordine 8. Sopra V vi è *una* superficie del 4° ordine passante per C (giacente in un S_5); per ottenerla basta considerare un iperpiano per C tangente a V in due punti di C, la cui superficie sezione (di 2ª specie con due punti doppi) si spezza staccandosi da essa una superficie del 4° ordine φ di S_5 passante per C. Ciò posto, sulla quadrica Q, proiezione di V da C, le L (immagini delle sezioni iperplanari di V) hanno *un* punto base O immagine della φ (superficie su V passante per C

e contenuta in un S_5): e poichè le L non hanno curva base intersecandosi due a due secondo curve di 8° ordine, e poichè inoltre tre L han comuni 8 punti variabili, il punto O è doppio per le L. Ora, se la Q non è un cono col vertice in O, si può scegliere il punto O (immagine di un punto di V su φ) per proiettare la Q su un S_3: si ha allora la rappresentazione di V su S_3 dove le immagini delle sezioni iperplanari sono le ∞^9 superficie di 2° ordine. Effettivamente:

f) il sistema di tutte le quadriche di S_3 è rappresentativo di una V normale di 2ª specie (che non è un cono).

Si supponga invece che Q sia un cono col vertice in O: allora le L sono intersezioni di Q con quadriche passanti per O, e quindi le generatrici di Q sono immagini di rette su V; siccome poi ad una superficie sezione generica di V non appartengono rette (di guisa che la superficie diviene un cono se contiene una retta), la V stessa è un cono, proiettante dal vertice una superficie di 2ª specie. Proiettando V da una sua quartica C e da un punto, su S_3, si ha come sistema rappresentativo:

f') il sistema delle superficie di 4° ordine con punto base triplo, due rette doppie per esso e in esso lo stesso cono tangente. Un siffatto sistema rappresenta effettivamente un cono V di 2ª specie.

20. – Riassumendo i resultati ottenuti sui sistemi lineari di superficie ad intersezioni ellittiche, possiamo enunciare il teorema:

I sistemi lineari semplici di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche, e dove tre superficie generiche s'incontrano in più di tre punti (sistemi di grado > 3*), si possono ricondurre con una trasformazione birazionale dello spazio ad uno dei seguenti sistemi lineari tipici di grado* n *e dimensione* $n+1$*, o ad un sistema contenuto in uno di questi:*

per $n = 4$

1) *il sistema di superficie cubiche determinato da una quintica intersezione parziale di una quadrica (che può degenerare);*

per $n = 5, 6, 7, 8, 9$

2) *il sistema* ∞^{n+1} *di superficie cubiche con punto base doppio,* $9-n$ *rette base per esso, ed in esso lo stesso cono quadrico tangente (questo sistema, rappresentativo d'un cono, per* $n = 4$ *rientra nel* 1° *tipo);*

oppure: per $n = 5$

3) *il sistema* ∞^6 *di superficie cubiche determinato da una quartica*

di 2^a *specie* (*che può degenerare*);

per $n = 6$

4) *il sistema* ∞^7 *delle superficie cubiche passanti per* 3 *rette sghembe*;

5) *il sistema* ∞^7 *delle superficie cubiche aventi un punto base doppio e contenenti una cubica gobba* (*che può degenerare*) *passante semplicemente per esso*;

6) *il sistema* ∞^7 *delle superficie cubiche con un punto base biplanare ed in esso un piano osculatore fisso, passanti per una cubica piana di cui il nominato punto è doppio*;

per $n = 7, 8$

7) *il sistema* ∞^8 *o* ∞^9 *delle quadriche con un punto base o risp. di tutte le quadriche*;

per $n = 8$ *anche*:

8) *il sistema delle superficie di* 4° *ordine con punto triplo, due rette base doppie per esso, ed in esso lo stesso cono tangente.*

IV. - I sistemi lineari di superficie ad intersezioni iperellittiche.

21. ([33]) – Rivolgiamoci ora a considerare i sistemi lineari semplici di superficie le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche propriamente dette (di genere $p > 1$). Occorre per ciò considerare le varietà V a curve sezioni iperellittiche. Supporremo V proiettata (ove occorra) in una dello stesso ordine in S_4.

La varietà V di S_4 a sezioni piane iperellittiche può avere le superficie sezioni iperplanari rigate o pur no: nel 2° caso le nominate superficie sono razionali e contengono un fascio di coniche.

Se le sezioni iperplanari di V sono rigate, la V contiene un fascio di piani del genere p (cfr. il n. 9) ed è certo irrazionale.

Supponiamo l'opposto. Allora sopra ogni superficie F sezione di V vi è un fascio (lineare) di coniche, e queste segano le coppie della g^1_2 sopra una sezione piana di F. In conseguenza per una coppia di tale g^1_2 vi sono ∞^1 coniche su V, una conica appartenendo ad un fascio di iperpiani: le ∞^1 coniche stanno in un S_3 e generano una superficie non con-

([33]) Cfr. la mia Nota *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche* (« Rendic. Accad. d. Lincei », decembre 1894) [questo volume, IV].

tenente la retta congiungente i due punti della coppia della g_2^1 considerata, e però di 2° ordine: analogamente si costruiscono ∞^1 quadriche su V partendo dalle altre coppie della g_2^1 sopra una sezione piana iperellittica di V. La serie razionale delle quadriche così ottenuta su V è un fascio (ossia per un punto di V ne passa *una*) giacchè sopra una sezione piana iperellittica di V (di genere $p > 1$) non esiste altra serie razionale di coppie di punti che la g_2^1 ([34]).

Ora, se si considera una superficie sezione iperplanare generica di V, le quadriche del fascio nominato segano su questa un fascio (razionale) di coniche il quale ammette quantesivogliano curve unisecanti ([35]): una di tali curve C sega in un punto ciascuna quadrica del fascio su V.

Si può supporre che le quadriche del fascio su V appartengano ciascuna ad un S_3 di un fascio, giacchè nell'ipotesi opposta basta trasformare la varietà in una W riferendo proiettivamente gli elementi (quadriche) del fascio agli iperpiani per un piano in S_4, e proiettare (da un punto fisso) ciascuna quadrica sul corrispondente iperpiano.

Ciò posto si proietti ciascuna quadrica del fascio su V (o su W) dal punto di C sopra un S_3: si otterrà una rappresentazione di V punto per punto su S_3, in modo che alle quadriche di V vengano a corrispondere i piani d'un fascio in S_3. Dunque:

Una varietà (di 3 dimensioni) a curve sezioni iperellittiche di genere p (>1):

1) *o contiene un fascio di piani del genere p ed è irrazionale*;

2) *o è razionale e contiene un fascio di quadriche.*

22. – Le varietà razionali V a curve sezioni iperellittiche ci forniscono colla loro rappresentazione su S_3 tutti i sistemi lineari semplici di superficie ad intersezioni iperellittiche. Ponendo mente al modo com'è stata ottenuta la rappresentazione delle V su S_3, si perviene al teorema:

Ogni sistema lineare semplice di superficie le cui intersezioni variabili sono iperellittiche (di genere >1) può trasformarsi birazionalmente in un sistema di superficie d'un certo ordine n con retta base $(n-2)$-pla, altra curva base segante in due punti fuori della retta i piani per essa, e (forse) altri elementi base.

Viceversa un tal sistema rappresenta sempre una V contenente un fascio di quadriche e quindi a curve sezioni iperellittiche.

Si noti infine che nell'enunciato precedente si deve intendere che la curva base bisecante i piani immagini delle quadriche su V può ridursi (tutta o in parte) a punti della retta.

([34]) Cfr. la nota a pag. 72 della citata memoria del sig. SEGRE (« Annali di Matematica », 1894).

([35]) NOETHER, « Math. Ann. », Bd. 3.

XI.

SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES ADMETTANT UN GROUPE CONTINU DE TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES EN ELLES-MÊMES

Par GUIDO CASTELNUOVO et FEDERIGO ENRIQUES

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », to. CXXI (1895), pp. 242-244.

C'est à M. PICARD que l'on doit la théorie générale des surfaces qui admettent des transformations birationnelles en elles-mêmes (¹).

Ce savant a considéré en particulier le cas où le groupe de transformations se compose de ∞^2 transformations deux à deux échangeables, et il est parvenu à la classe si intéressante des surfaces *hyperelliptiques*, dont les travaux de MM. PICARD et HUMBERT nous on fait connaître les remarquables propriétés. Dans les autres cas, M. PICARD a montré que la surface contient un (ou plus qu'un) faisceau de courbes rationnelles ou elliptiques, et il en a profité pour étudier la représentation paramétrique de la surface par les fonctions abéliennes. C'est précisément ce dernier cas que nous nous proposons d'approfondir au point de vue géométrique.

Nous parlons toujours, dans la suite, de groupes *algébriques* de transformations; ce n'est pas là une restriction que nous imposons à notre surface; en effet, on démontre aisément que si un groupe continu de transformations birationnelles d'une surface algébrique en elle-même n'est pas algébrique, il est cependant contenu dans un groupe algébrique plus ample, auquel nous pouvons toujours nous rapporter. L'on voit aussi que le groupe plus ample de transformations (de la surface) deux à deux échangeables, auquel appartient une transformation donnée, est lui-même algébrique.

Cela posé, nous avons plusieurs cas à distinguer par rapport aux groupes continus de transformations birationnelles d'une surface en elle-même.

(¹) *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques* (« Journal de Math. », 1889); « Comptes rendus », mars 1895; « Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo », giugno 1895.

I. *Le groupe* (*algébrique*) *dépend d'un seul paramètre.* – Les ∞^1 transformations forment alors une série algébrique qui admet ∞^1 transformations birationnelles en elle-même, car le produit d'un élément (transformation) de la série par une transformation du groupe donné est un nouvel élément de la série; donc, d'après un théorème de M. SCHWARZ, la série (le groupe) a le genre zéro ou un. En correspondance, on a sur la surface un faisceau de courbes de genre zéro ou un (toutes du même module), courbes décrites par les points de la surface lorsqu'on les transforme par les transformations du groupe; par chaque point de la surface, il passe une courbe de ce faisceau.

Or ces courbes sont toutes de genre zéro si telle est une entre elles qui soit lieu d'un point mobile (alors même qu'il y aurait plus d'une transformation permettant de passer d'un point à un autre sur cette courbe; car, dans tous les cas, on voit que la série des transformations doit être rationnelle).

On parvient à la même conclusion, si l'on connait un point simple de la surface qui reste fixe dans toutes les transformations, car on peut toujours choisir une série rationnelle d'éléments infiniment petits autour de ce point, série que le groupe change en elle-même. On a donc ce théorème:

Si une surface algébrique admet un groupe (*algébrique*) *dépendant d'un seul paramètre de transformations birationnelles en elle-même, la surface*:

a) *contient un faisceau de courbes de genre un, toutes ayant le même module, et n'a pas de points simples fixes*;

b) *ou bien elle contient un faisceau de courbes de genre zéro, et* (*d'après* M. NOETHER) *elle peut être transformée en une surface réglée ou en une surface ayant un faisceau de coniques.*

II. *Le groupe de transformations dépend de $m > 1$ paramètres, mais il est une seule fois transitif* (c'est-à-dire qu'il ne permet pas de passer d'un point quelconque de la surface à un autre point donné).

En fixant alors sur la surface $m-1$ points, on déduit du groupe un sous-groupe à un seul paramètre qui est rationnel, d'après le théorème précédent. Donc:

Une surface algébrique admettant un groupe algébrique de transformations birationnelles en elle-même, groupe qui dépend de plusieurs paramètres et qui est une seule fois transitif, peut être transformée en une surface réglée ou en une surface avec un faisceau de coniques.

III. *Le groupe de transformations dépend de deux paramètres et il est deux fois transitif.* – Si les transformations sont deux à deux échangeables, on a, comme nous l'avons dit, les surfaces que M. PICARD a spécialement étudiées. Ce cas excepté, chaque sous-groupe du groupe donné est formé par ∞^1 transformations qui sont échangeables deux à deux, et il est par suite algébrique. En correspondance avec les ∞^1 sous-groupes, on a sur la surface ∞^1 faisceaux de courbes algébriques C.

Or s'il y a une seule transformation du groupe qui change un point donné sur la surface en un autre point donné, alors par deux points quelconques de la surface il passe une seule courbe C; d'où l'on déduit aisément que les courbes C ont le genre zéro, et que leur système ∞^2 est linéaire; la surface elle-même est par suite rationnelle (unicursale). Si, au contraire, on peut passer d'un point donné sur la surface à un autre point par plusieurs transformations, on n'a qu'à répéter le même raisonnement, non plus sur la surface, mais sur la variété algébrique formée par les ∞^2 transformations, puisqu'il y a une seule transformation qui permet de passer (par multiplication) d'un élément donné de cette variété à un autre élément. On voit ainsi que le groupe ∞^2 des transformations est rationnel, et chaque sous-groupe ∞^1 est de même rationnel; on conclut donc, en revenant à notre surface, que les courbes C (correspondant à ces sous-groupes) sont rationnelles, et se divisent en ∞^1 faisceaux rationnels; enfin (d'après M. NOETHER), la surface est encore unicursale.

Si une surface algébrique admet un groupe algébrique, dépendant de deux paramètres et deux fois transitif, de transformations birationnelles en elle-même:

a) *ou les transformations sont deux à deux échangeables, et la surface appartient à la classe des surfaces hyperelliptiques (et dégénérations);*

b) *ou bien c'est le contraire qui arrive, et la surface est rationnelle.*

IV. *Le groupe de transformations dépend de $m \geqslant 3$ paramètres, et il est plus qu'une fois transitif.* – En fixant sur la surface un nombre convenable de points et (s'il le faut) de directions partant de ces points, on déduit toujours du groupe un sous-groupe algébrique à un seul paramètre; en correspondance (cas I), on a sur la surface un faisceau de courbes rationnelles. Or si le faisceau change en changeant les points fixes, on déduit, comme ci-dessus, que la surface est rationnelle; si, au contraire, le faisceau ne change pas, les courbes dont il est formé sont permutées entre elles par les transformations du groupe, et le faisceau doit être de genre zéro ou un; dans le premier cas la surface est encore rationnelle. Enfin, on a le théorème:

Si une surface algébrique admet un groupe (fini, continu), dépendant de $m \geqslant 3$ paramètres et plus qu'une fois transitif, de transformations birationnelles en elle-même, la surface est rationnelle, ou peut être transformée en une surface réglée de genre un, ou en une surface contenant un faisceau elliptique de coniques.

(29 juillet 1895).

XII.

SOPRA LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL 4° ORDINE CHE DIVENGONO INTEGRABILI QUANDO È NOTO UN LORO INTEGRALE PARTICOLARE

« Rend. Ist. Lomb. di sc., lett. ed arti », s. 2ª, vol. XXIX (1896), pp. 257-269.

1. – È noto che i signori PICARD (¹) e VESSIOT (²) hanno stabilito una teoria delle equazioni differenziali lineari (omogenee) intieramente analoga a quella di GALOIS delle equazioni algebriche. La detta teoria si basa sulla introduzione d'un gruppo continuo di trasformazioni lineari sugli integrali dell'equazione differenziale, gruppo che gode delle due proprietà caratteristiche seguenti (³):

1) ogni funzione razionale degli integrali e delle loro derivate che rimanga invariata per le trasformazioni del gruppo è esprimibile algebricamente per i coefficienti dell'equazione;

2) ogni funzione razionale degli integrali e delle loro derivate che si possa esprimere algebricamente per i coefficienti della equazione, rimane invariata per le trasformazioni del gruppo.

Applicazioni concrete della teoria così fondata allo studio delle equazioni lineari (specialmente dal punto di vista della classificazione) ne sono state già fatte dal sig. VESSIOT, il quale ha indicato in particolare la condizione perchè una data equazione sia *integrabile* mediante quadrature, cioè si possa integrare con operazioni algebriche e colla risoluzione successiva di equazioni del 1° ordine.

In questa Nota io mi propongo di mostrare come la teoria di PICARD-VESSIOT si possa applicare alla soluzione del problema di « determinare le equazioni lineari di 3° e 4° ordine, non integrabili, che divengono integrabili quando è noto un loro integrale particolare generico ».

(¹) « Comptes rendus », 1883 e 1894; « Annales de Toulouse », 1887; « Mathematische Annalen », 1895.

(²) *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires*, « Annales de l'École normale », 1892.

(³) Cfr. VESSIOT, op. cit., pag. 234-236.

Non è il caso di porre la questione analoga per le equazioni del 2° ordine, che godono tutte della proprietà sopra indicata. Quanto alle equazioni del 3° ordine mi limiterò a brevissimi cenni, perchè il risultato che le concerne può riguardarsi come implicitamente contenuto nella analisi che il sig. VESSIOT ha fatto di tutti i casi particolari che le equazioni del 3° ordine possono presentare (analisi che, all'infuori di casi ovvii, conduce soltanto alle equazioni già incontrate da LAGUERRE e HALPHEN).

Infine noterò che la questione cui la presente Nota è rivolta, può esser posta relativamente alle equazioni lineari d'ordine $n = 5, 6, \ldots$; ma il suo interesse è collegato alla piccolezza del numero n, perchè, se il valore di questo numero si lascia indeterminato, si possono avere equazioni lineari di natura comunque elevata, le quali divengono integrabili appena sia noto un loro integrale particolare.

Ora ecco il risultato ottenuto:

I. Se un'equazione lineare, non integrabile,

$$Ay + By' + Cy'' + Dy''' = 0$$

diviene integrabile quando è noto un suo integrale particolare generico, avviene uno dei seguenti casi:

1) esiste un integrale della forma

$$y_1 = a\, e^{\int_0^x \varphi dx}$$

dove a è una costante e φ una funzione algebrica di A, B, C, D;

2) fra tre integrali y_1, y_2, y_3 convenientemente scelti, d'un sistema fondamentale, sussiste una relazione della forma

$$y_2^2 - y_1 y_3 = a\, e^{\int_0^x \varphi dx} \quad (^1)$$

(a costante, φ funzione algebrica di A, B, C, D).

(Le funzioni della forma $a\, e^{\int_0^x \varphi dx}$ che qui compariscono possono dirsi brevemente funzioni *moltiplicative* dei coefficienti dell'equazione, poichè per tutte le trasformazioni del relativo gruppo di PICARD-VESSIOT, in particolare per le sostituzioni del gruppo di monodromia, subiscono soltanto una moltiplicazione per una costante).

(1) Cfr. per questo caso LAGUERRE, « Comptes rendus », 1879; HALPHEN, ibid., 1885; VESSIOT, op. cit., pag. 274.

II. *Se un'equazione lineare non integrabile*

$$Ay + By' + Cy'' + Dy''' + Ey^{\text{IV}} = 0$$

diviene integrabile quando è noto un suo integrale particolare generico, avviene uno dei seguenti casi:

1) *Esiste un integrale (moltiplicativo) della forma*

$$y_1 = a\, e^{\int_0^x \varphi dx}$$

ed un 2° *integrale della forma*

$$y_2 = a y_1 + b \int_0^x e^{\int_0^x \psi dx}$$

(dove a, b sono costanti e φ, ψ funzioni algebriche di A, B, C, D, E).

2) *L'aggiunta di* Lagrange *dell'equazione proposta ammette tre integrali* z_1, z_2, z_3 *di un'equazione lineare omogenea del* 3° *ordine formabile algebricamente, legati da un'equazione*

$$z_2^2 - z_1 z_3 = a\, e^{\int_0^x \varphi dx}$$

(a costante e φ funzione algebrica di A, B, C, D, E): questa equazione risolvente lineare di 3° ordine in z è dunque del tipo I, 2.

3) *L'integrale generale* y *è la somma degli integrali di due equazioni lineari del* 2° *ordine formabili algebricamente.*

4) *L'equazione si può considerare come dedotta da un'equazione del* 2° *ordine*

$$Lz + Mz' + Nz'' = 0$$

formabile algebricamente, colla sostituzione

$$z = Ly + My' + Ny'' .$$

5) *Fra* 4 *integrali convenientemente scelti* y_1, y_2, y_3, y_4, *costituenti un sistema fondamentale dell'equazione, sussiste una relazione della forma*

$$(y_1 y_4 - y_2 y_3)^2 - 4(y_1 y_3 - y_2^2)(y_2 y_4 - y_3^2) = a\, e^{\int_0^x \varphi dx}$$

(a costante e φ funzione algebrica di A, B, C, D, E).

I 5 casi che così si ottengono dànno luogo a problemi d'integrazione che possono riguardarsi come risoluti in quanto l'integrazione stessa viene a dipendere da quadrature e da equazioni di RICCATI.

L'ultimo caso è il più notevole, essendo il solo in cui l'equazione proposta deve considerarsi come *irriducibile* (nel senso di KÖNIGSBERGER).

Secondo la teoria di VESSIOT questo caso non differisce sostanzialmente da quello in cui si abbia

$$(y_1y_4 - y_2y_3)^2 - 4(y_1y_3 - y_2^2)(y_2y_4 - y_3^2) = 0\,,$$

caso già trattato dal GOURSAT (5).

2. – Sia data un'equazione lineare, d'un certo ordine n,

$$(1) \qquad A_0y + A_1y' + \dots + A_ny^{(n)} = 0\ :$$

consideriamo gli integrali $y_1, y_2, \dots, y_n$ d'un sistema fondamentale come coordinate projettive omogenee di un iperpiano in S_{n-1}: allora ad ogni integrale

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$$

della (1), corrisponde il punto

$$y = 0$$

di S_{n-1}.

Le trasformazioni del gruppo di PICARD-VESSIOT della (1) vengono rappresentate (a meno d'un fattore) dalle omografie di un certo gruppo continuo in S_{n-1}. L'equazione (1) è integrabile se è integrabile questo gruppo d'omografie (VESSIOT), ossia [LIE (6)] se le omografie del gruppo lasciano fermo (almeno) un punto di S_{n-1}, una retta per questo punto, un piano per la retta, ecc.

Noi supponiamo che la (1) non sia integrabile, ma che lo divenga quando è noto un suo integrale particolare generico.

Ora dare un integrale particolare y della (1) significa *aggiungerlo* al campo di razionalità dell'equazione secondo il signor VESSIOT (7); ciò riduce il suo gruppo di trasformazioni al sottogruppo delle trasformazioni che lasciano invariato quell'integrale.

Dunque, dato un punto generico P di equazione $y = 0$ in S_{n-1}, le

(5) « Comptes rendus », 1885. Cfr. anche LUDWIG SCHLESINGER, « Diss. Berlin », 1887; FANO, « Rendic. Lincei », 1895.

(6) *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. 3, pag. 262.

(7) Op. cit., pag. 235.

omografie del gruppo della (1) che lo lasciano fermo debbono costituire un sottogruppo integrabile.

Allora si vede subito che vi dovrà essere almeno una retta per P unita per tutte le omografie del nominato sottogruppo, e similmente un piano unito per questa retta, ecc.

Il problema di assegnare le equazioni (1) che godono della proprietà sopra supposta, viene dunque ricondotto alla questione geometrica di « determinare i gruppi d'omografie di S_{n-1} tali che, fissando un punto generico, resti ferma in conseguenza una retta (almeno) per questo punto, un piano per la retta, ecc. ».

Cominciamo dal risolvere per $n = 3, 4$ tale questione geometrica: poi interpreteremo analiticamente i risultati.

3. – Il sig. Lie (op. cit.) ha più volte notato che i gruppi d'omografie di S_{n-1} i quali godono della proprietà che, fissando un punto, resti ferma una retta per esso, sono certo gruppi imprimitivi: si tratta del resto di un'osservazione ovvia.

I gruppi che formano oggetto della nostra ricerca essendo imprimitivi, ci potremmo valere dei metodi generali dati dal sig. Lie per la determinazione dei gruppi projettivi imprimitivi; ma si renderebbe così la nostra analisi molto più lunga del bisogno. Noi adopereremo invece considerazioni dirette e ci varremo di risultati già ottenuti dal sig. Lie (op. cit.).

Cominciamo dal caso « $n = 3$ » in cui la questione è già risoluta: si vogliono i gruppi di omografie piane non integrabili (e però di dimensione $\geqslant 3$) tali che, fissando un punto generico, resti fissa una retta per esso; in altre parole si vogliono i gruppi imprimitivi di omografie piane. Seguendo il Lie, questi gruppi si ottengono subito, osservando che vi è (almeno) una serie ∞^1 di curve scambiate fra loro dalle omografie del gruppo: ciascuna curva di una tal serie ammette almeno ∞^2 trasformazioni projettive in sè, e però è una retta o una conica. Ora la nominata serie ∞^1 di curve (rette o coniche) è un fascio dotato di qualche punto base unito, oppure inviluppa una curva d'ordine > 1 trasformata in se stessa dalle omografie del gruppo.

In corrispondenza alle due ipotesi si ottengono rispettivamente i due tipi di gruppi seguenti:

1) gruppo di omografie piane che lasciano fermo un punto;

2) gruppo di omografie piane che trasformano in se stessa una conica.

Questi due tipi di gruppi rispondono effettivamente alle condizioni del problema e sono i soli casi possibili ([8]).

([8]) Cfr. la tabella a pag. 106 dell'op. cit. del sig. Lie.

4. – Sia ora

$$n = 4\ ;$$

si vogliono i gruppi d'omografie (non integrabili e però ∞^3 almeno) nello spazio S_3, tali che, fissando un punto generico, resti fissa una retta (almeno) per il punto, e resti fissato un piano per la retta.

Questi gruppi sono imprimitivi; dunque le omografie di un tal gruppo lasciano fermo (almeno) un punto, o una retta, o un piano, o una cubica gobba (9).

Discutiamo partitamente le varie ipotesi.

a) Vi sia un punto unito fisso O.

Fissando un altro qualsiasi punto P, resta fissa la retta PO ed un piano per essa: in particolare ciò deve valere se si prende P infinitamente vicino ad O. Dunque il gruppo d'omografie ternarie nella stella O è tale che, fissando una retta, resta fermo un piano per la retta; segue (§ 3) che:

vi è una retta unita fissa per O,

oppure vi è un cono quadrico unito fisso col vertice in O.

b) Vi sia una retta unita fissa p. Possiamo aggiungere l'ipotesi che non vi sia alcun punto unito fisso, altrimenti si ricadrebbe nel caso *a*).

Fissando un punto generico P, deve restare fissa (almeno) una retta nel piano Pp: usufruendo del risultato del § 3, se ne trae che le omografie del gruppo lascianti fermo un qualsiasi piano per p, lasciano fermo in conseguenza un punto (almeno) del piano. Ora debbono distinguersi due ipotesi, secondochè vi è in ciascun piano per p un punto unito su p, o non vi è.

Poniamoci nella 1ª ipotesi.

Si potrebbe supporre che in un piano generico per p restasse fermo *un* punto di p o restassero fermi *due* punti o *tutti*: in realtà le due ultime supposizioni sono da scartare perchè condurrebbero all'esistenza di qualche punto unito fisso per le omografie del gruppo. Nella ipotesi che stiamo trattando si avrà dunque in ogni piano generico per p *un* punto di p che resta fermo quando è fissato il piano. Potrà il punto così ottenuto corrispondere a più di un piano per p? È facile escluderlo, osservando che si avrebbe nel fascio di piani per p una involuzione mutata in se stessa dalle omografie del gruppo; questa involuzione avrebbe dei piani uniti su ciascuno dei quali si troverebbe un punto unito fisso per le omografie del gruppo (caso scartato). La corrispondenza che si ha tra un piano per p, ed il punto di p che resta fermo quando è fissato il piano, è dunque una corrispondenza projettiva.

Si conclude che le omografie del nostro gruppo lasciano ferma p e

---

(9) Lie, op. cit., pag. 234-236.

trasformano in se stessa una projettività tra punti di p e piani per p; si può dire, più brevemente, che:

le omografie del gruppo lasciano fissa la retta p ed una retta infinitamente vicina sghemba con essa.

Passiamo ora alla 2ª ipotesi della nostra discussione.

In ogni piano fissato per p, resta fisso un punto fuori di p, e (possiamo aggiungere) un punto solo, chè altrimenti si ricadrebbe nella 1ª ipotesi. Questo punto, variando il piano per p, descrive una curva C mutata in sè dalle omografie del gruppo: ma la C non può appoggiarsi alla retta p, altrimenti si avrebbe qualche punto unito fisso: la C è dunque una retta sghemba a p.

Si conclude che nella 2ª ipotesi del nostro ragionamento:

le omografie del gruppo lasciano ferme due rette sghembe (distinte).

c) Vi sia un piano unito fisso π.

Si può vedere che le omografie del gruppo debbono lasciar fermo anche un punto o una retta, ciò che ci riconduce ai casi *a*), *b*).

Cominciamo ad escludere l'esistenza d'un punto o d'una retta unita su π. Trattandosi di un gruppo imprimitivo si avrà allora su π una conica unita (§ 3).

Possiamo immaginare che la conica sia il cerchio immaginario all'infinito delle sfere: il nostro gruppo è allora composto di similitudini (o movimenti): ora i sottogruppi del gruppo delle similitudini sono tutti determinati dal Lie (10): all'infuori del gruppo totale e del sottogruppo dei movimenti che sono primitivi, essi posseggono un punto unito fisso.

Resta così esaurito l'esame dell'ipotesi *c*).

Riuniamo in un quadro i risultati della precedente analisi, tenendo conto dell'ipotesi *d*) che definisce da sola un gruppo ∞^3 d'omografie soddisfacente alle condizioni proposte; avremo allora da menzionare 5 tipi di gruppi d'omografie, caratterizzati dal lasciare fisso risp.:

1) un punto e una retta per esso;
2) un cono quadrico;
3) due rette sghembe distinte;
4) due rette sghembe infinitamente vicine;
5) una cubica gobba.

Gruppi siffatti divengono integrabili allorchè si fissa un punto generico, e sono i soli gruppi che godono di questa proprietà.

5. – Dobbiamo interpretare analiticamente i risultati ottenuti.

Premettiamo la seguente osservazione generale.

Supponghasi che il gruppo d'omografie (di Picard-Vessiot) relativo

(10) Op. cit., pag. 240-241, 243.

ad un'equazione lineare

$$A_0 y + A_1 y' + \dots + A_n y^{(n)} = 0 \tag{1}$$

lasci fermo un S_r $(r < n-1)$ nello S_{n-1} rappresentativo. Sieno

$$y_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, r+1)$$

le equazioni di $r+1$ punti indipendenti dello S_{n-1}: allora l'equazione

$$\Delta(y) = \begin{vmatrix} y & y_1 & \dots & y_{r+1} \\ y' & y_1' & \dots & y_{r+1}' \\ y^{(r+1)} & y_1^{(r+1)} & \dots & y_{r+1}^{(r+1)} \end{vmatrix} = 0$$

viene trasformata in se stessa dalle omografie del gruppo, ossia il determinante Δ è una funzione moltiplicativa (per le trasformazioni del gruppo di PICARD-VESSIOT). Segue che il rapporto di due coefficienti qualunque dell'equazione lineare $\Delta(y) = 0$ resta invariato per le trasformazioni del gruppo di PICARD-VESSIOT, e quindi è funzione algebrica dei coefficienti della (1). Dunque $r+1$ integrali indipendenti della (1) (rappresentanti $r+1$ punti dello S_r fisso) soddisfano ad una equazione lineare omogenea d'ordine $r+1$ formabile algebricamente.

Questa osservazione permette di vedere subito quali equazioni si otterranno in corrispondenza al gruppo del tipo 1) $(n = 3)$ del § 3, e ai gruppi dei tipi 1), 3) $(n = 4)$ del § 4.

$n = 3$, caso 1). – Nel piano rappresentativo resta fisso (per le omografie del gruppo) un punto (cioè un S_r « $r = 0$ »). La (1) ammette dunque un integrale moltiplicativo

$$y_1 = a\, e^{\int_0^x \varphi dx},$$

integrale di un'equazione lineare omogenea del 1° ordine formabile algebricamente (cfr. I, 1, § 1).

$n = 4$, caso 1). – Nello S_3 rappresentativo resta fisso un punto $(r = 0)$: si ha dunque un primo integrale moltiplicativo

$$y_1 = a\, e^{\int_0^x \varphi dx}.$$

Inoltre vi è una retta fissa pel punto (cioè un S_r « $r = 1$ »). Per conseguenza un 2° integrale y_2 della (1) soddisfa ad un'equazione lineare omogenea del 2° ordine formabile algebricamente; e poichè questa equazione ammette già l'integrale y_1, la derivata

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'$$

del rapporto y_2/y_1 è una funzione moltiplicativa, e si ha

$$y_2 = ay_1 + b\int_0^x e^{\int_0^x \psi dx}$$

(cfr. II, 1).

$n = 4$, caso 3). – Nello S_3 rappresentativo vi sono due rette fisse sghembe (cioè due S_r fissi « $r = 1$ »). La (1) ammette dunque gli integrali di due equazioni lineari omogenee del 2° ordine (senza integrali comuni), formabili algebricamente (cfr. II, 3).

6. – Riferiamoci ancora in generale all'equazione d'ordine n

$$A_0y + A_1y' + \dots + A_ny^{(n)} = 0\,, \tag{1}$$

e supponiamo che il suo gruppo d'omografie nello S_{n-1} rappresentativo degli integrali lasci ferma una varietà algebrica (inviluppo)

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0\,.$$

La forma f è moltiplicativa, e però i suoi coefficienti possono esprimersi algebricamente per A_0, A_1, ... a meno d'un fattore. Si avrà quindi (denotando con a una costante e con φ una opportuna funzione algebrica di A_0, $A_1, \dots, A_n$):

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = a\, e^{\int_0^x \varphi dx}\,.$$

Applichiamo questa osservazione ai casi relativi ai gruppi 2) ($n = 3$) del § 3, e 2), 4) ($n = 4$) del § 4: potremo subito dedurre le equazioni corrispondenti a questi casi.

$n = 3$, caso 2). – Nel piano rappresentativo vi è una conica (inviluppo) fissa, di cui possiamo porre l'equazione sotto la forma

$$y_2^2 - y_1y_3 = 0\,:$$

dunque fra i tre integrali y_1, y_2, y_3 della (1) passa la relazione

$$y_2^2 - y_1 y_3 = a\, e^{\int_0^x \varphi dx}$$

(cfr. I, 2).

$n = 4$, caso 2). – Nello S_3 rappresentativo vi è un cono quadrico fisso. Dunque per l'aggiunta di LAGRANGE dell'equazione proposta il gruppo corrispondente (duale del primo) ([11]) lascia ferma una conica inviluppo di piani.

In primo luogo, essendo fisso il piano della conica, tre integrali z_1, z_2, z_3 di questa equazione aggiunta soddisfano ad un'equazione lineare omogenea di 3° ordine, formabile algebricamente (§ 5): in secondo luogo, tra di essi passa una relazione che (per scelta conveniente dei medesimi) è della forma

$$z_1^2 - z_1 z_3 = a\, e^{\int_0^x \varphi dx}$$

(cfr. II, 2).

$n = 5$, caso 4). – Nello S_3 rappresentativo vi è una cubica gobba fissa. La sua equazione come inviluppo di piani può scriversi sotto la forma

$$(y_1 y_4 - y_2 y_3)^2 - 4(y_1 y_3 - y_2^2)(y_2 y_4 - y_3^2) = 0 :$$

dunque fra i 4 integrali y_1, y_2, y_3, y_4 passa una relazione della forma

$$(y_1 y_4 - y_2 y_3)^2 - 4(y_1 y_3 - y_2^2)(y_2 y_4 - y_3^2) = a\, e^{\int_0^x \varphi dx}$$

(cfr. II, 5).

7. – Resta da cercare quale tipo di equazione lineare corrisponda al gruppo 4) ($n = 4$) del § 4.

Questo caso si può considerare come limite del caso 2) (II).

Si abbia un'equazione lineare del 4° ordine la quale ammetta le soluzioni di due equazioni lineari di 2° ordine indipendenti (formabili algebricamente). Dette

$$z_1, z_2; \qquad u_1, u_2$$

([11]) Cfr. VESSIOT, op. cit., pag. 249, e BOREL, *Sur l'équation adjointe, etc.*, « Annales de l'École normale », 1892.

due coppie di integrali indipendenti di queste equazioni del 2° ordine, l'equazione del 4° ammette dunque come integrali d'un sistema fondamentale z_1, z_2, u_1, u_2, e però è

$$\Delta(y) = \begin{vmatrix} y & z_1 & z_2 & u_1 & u_2 \\ y' & z_1' & z_2' & u_1' & u_2' \\ y'' & z_1'' & z_2'' & u_1'' & u_2'' \\ y''' & z_1''' & z_2''' & u_1''' & u_2''' \\ y^{IV} & z_1^{IV} & z_2^{IV} & u_1^{IV} & u_2^{IV} \end{vmatrix} = 0 \ (^{12}).$$

Si deve sostituire in questa equazione u_1, u_2, con

$$z_1 + \mu z_1 , \qquad z_2 + \mu z_2 ,$$

e fare le conseguenti sostituzioni sulle derivate; supporre quindi $\mu (= \mu(x))$ tendente a 0 in tutto un cerchio determinato, e vedere verso quale forma limite tende l'equazione $\Delta(y) = 0$. Indicheremo con $\bar{\Delta}(y) = 0$ questa equazione limite che dovrà avere come gruppo d'omografie in S_3 il gruppo 4) (equazione limite della cui esistenza si potrebbe a priori convincersi).

Senza effettuare calcoli, possiamo prevedere che cosa dovrà essere tale equazione $\bar{\Delta}(y) = 0$ nel modo seguente.

Sia

$$\pi(z) = Lz + Mz' + Nz'' = 0$$

l'equazione del 2° ordine che ha per integrali z_1, z_2, e

$$T(z) = 0$$

l'equazione analoga che ha per integrali

$$u_1 = z_1 + \mu z_1 , \qquad u_2 = z_2 + \mu z_2 .$$

Supponiamo che la funzione $\mu(x)$, di forma variabile, si possa far divenire in tutti i punti d'un cerchio determinato minore in modulo d'un numero positivo σ piccolo ad arbitrio.

---

(12) La formazione effettiva di questa equazione è data dal LIBRI, *Mémoire sur la résolution des équations algébriques dont les racines ont entre elles un rapport donné, et sur l'intégration des équations différentielles linéaires dont les intégrales particulières peuvent s'exprimer les unes par les autres*, « Crelle J. », Bd. X, pag. 167 (anno 1833).

Consideriamo π, T come operazioni funzionali distributive applicate alla funzione $z(x)$.

Il prodotto

$$T\pi(z)$$

differisce da $\pi^2(z)$ e da $\pi T(z)$ per una quantità infinitesima (in tutti i punti del cerchio) all'impicciolire di σ.

Per conseguenza, a meno di infinitesimi, possiamo considerare come radici indipendenti dell'equazione funzionale

$$T\pi(z) = 0$$

le

$$z_1\,, \quad z_2\,, \quad z_1 + \mu z_1\,, \quad z_2 + \mu z_2 \quad ({}^{13}).$$

Dunque l'equazione

$$T\pi(z) = 0$$

differisce per infinitesimi dalla

$$\varDelta(z) = 0$$

in tutto il cerchio fissato.

Al limite, per $\sigma = 0$, si avrà dunque l'equazione

$$\varDelta = \pi^2(z) = 0 :$$

vale a dire l'equazione limite

$$\varDelta(y) = 0$$

si deduce dalla

$$Lz + Mz' + Nz'' = 0$$

colla sostituzione

$$z = Ly + My' + Ny''$$

(cfr. II, 4).

8. – Resterebbe da parlare del problema d'integrazione a cui dànno luogo le equazioni lineari del 3° e 4° ordine considerate in questa nota

(13) Tali sarebbero infatti le radici di $T\pi(z) = 0$ se fosse $T\pi = \pi T$. È questo un caso particolarissimo (evidente) di un teorema del sig. Pincherle, *Sulle operazioni funzionali distributive commutabili con una data*, « Atti Accad. di Torino », 1895.

(cfr. § 1). Ma per quelle del 3° ordine l'analisi è già stata fatta: il 3° dei casi incontrati (il solo notevole) è dovuto a LAGUERRE e HALPHEN (l. c.).

Similmente il problema d'integrazione delle equazioni del 4° ordine corrispondente ai casi 1), 2), 3), 4) si può riguardare come risoluto immediatamente.

Tutti questi casi portano solo a quadrature e ad una o a due equazioni di RICCATI.

Il caso 5) non è stato veramente considerato in tutta la sua generalità: è stato solo considerato (da GOURSAT) il caso in cui fra 4 integrali y_1, y_2, y_3, y_4 di un'equazione (lineare omogenea) del 4° ordine sussista una relazione

$$(y_1 y_4 - y_2 y_3)^2 - 4(y_1 y_3 - y_2^2)(y_2 y_4 - y_3^2) = 0 \ :$$

ma risulta dalla teoria di VESSIOT che il nostro caso più generale non differisce sostanzialmente da questo caso particolare, e da un altro più particolare ancora, quello dell'equazione soddisfatta dai cubi d'una equazione lineare del 2° ordine; il sig. GOURSAT riduce il suo caso a quest'ultimo con una sostituzione della forma

$$z = ay + by' \ :$$

qui occorrerebbe una sostituzione della forma

$$z = ay + by' + cy'' \ :$$

ma lo sviluppo dei calcoli a ciò occorrenti ci condurrebbe fuori dei limiti imposti alla presente nota e non avrebbe interesse in ordine alla questione che ne forma l'oggetto.

XIII.

INTRODUZIONE ALLA GEOMETRIA SOPRA LE SUPERFICIE ALGEBRICHE

« Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta "dei XL") », s. 3ª, to. X (1896),

pp. 1-81.

I. – La Geometria sopra una superficie algebrica in seguito ai classici lavori di CLEBSCH e CREMONA è venuta prendendo sistematicamente ad oggetto lo studio delle proprietà delle superficie che sono invariantive per trasformazioni birazionali di essa; questa tendenza si congiunge d'altra parte all'indirizzo della Geometria sopra una curva collegato alla teoria degli integrali abeliani.

In questo senso fra i lavori che hanno cooperato a porre le basi della Geometria sopra una superficie debbono annoverarsi primi di tutti quelli fondamentali del sig. NOETHER (¹), dopo i quali la teoria che ci occupa ha ricevuto poco incremento fino a questi ultimi anni.

Ma recentemente lo studio di essa è stato ripreso secondo due indirizzi che, mentre si connettono da un lato ai citati lavori del sig. NOETHER, approfittano felicemente di idee e di metodi nuovi: questi sono, « l'indirizzo trascendente coltivato specialmente in Francia (PICARD, HUMBERT, ecc.) in cui è caratteristica la feconda considerazione degli integrali di differenziali totali (del sig. PICARD) accanto a quella degli integrali doppi di CLEBSCH-NOETHER », « l'indirizzo algebrico-geometrico seguito principalmente nei lavori italiani, dove si coltiva lo studio dei sistemi lineari di curve sopra una superficie seguendo un ordine di concetti che può dirsi preparato dalle precedenti ricerche dei sig. SEGRE e CASTELNUOVO nella Geometria sopra una curva e nella teoria dei sistemi lineari di curve piane ».

Appunto appigliandomi ad un tale ordine di concetti, io mi proposi, due anni or sono, nelle *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche* (²), di porre le basi di una teoria generale dei sistemi lineari di curve sopra

(¹) *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde* (« Math. Ann. », 2, 8).
(²) « Memorie dell'Accademia di Torino », 1893 [questo volume, V].

una superficie, fondandomi sui concetti di sistema *normale* o *completo*, di *sistema aggiunto* ad un sistema lineare irreducibile sopra una superficie (segante la serie canonica sulla curva del dato sistema, ecc.), di *serie caratteristica* d'un sistema lineare irreducibile (segata sopra una curva del sistema dalle altre del medesimo).

Mi accorsi allora che la causa delle principali difficoltà che compariscono nello studio d'un sistema lineare sta nel fatto che le serie (serie segata dal sistema aggiunto e serie caratteristica) collegate ad un sistema lineare normale o completo, possono essere incomplete. Io cercai di ricondurre questo fatto ad un carattere della superficie (indipendente dal particolare sistema cui tale deficienza si riferisce) e mostrai quindi come si possano imporre alle superficie di genere > 0 alcune restrizioni, che possono riguardarsi come caratteristiche della classe più generale delle superficie *regolari*, per le quali l'inconveniente accennato si elimini; giungevo così pei sistemi lineari su tali superficie regolari ad una serie di resultati assai semplici fra i quali mi limiterò a menzionare l'estensione del teorema di Riemann-Roch ed i teoremi sulle curve fondamentali.

Negli sviluppi delle « Ricerche » i sistemi stessi venivano altresì assoggettati qua e là a talune restrizioni che si rispecchiano in restrizioni di natura *proiettiva* relative alle superficie atte a rappresentare quei sistemi (superficie trasformate della data aventi come sezioni piane o iperpiane le curve del sistema); sebbene vi fosse in alcuni punti la tendenza ad eliminare siffatte restrizioni.

Dopo la pubblicazione delle « Ricerche » vari fatti mi convincevano dell'importanza di prescindere da ogni restrizione per le superficie e vedere tutto ciò che di assolutamente generale potesse dirsi, abbracciando insieme superficie di genere > 0, e di genere 0, regolari o no. Giacchè p. e. (trattandosi appunto di superficie di genere 0) non si poteva trarre profitto dai resultati generali delle « Ricerche » nella dimostrazione della razionalità delle involuzioni piane (data dal sig. Castelnuovo) o nei successivi studî, compiuti dal sig. Castelnuovo e da me sulle superficie a sezioni ellittiche ed iperellittiche: nè invero si sarebbero incontrate a questo proposito minori difficoltà ove la teoria generale avesse abbracciato anche le superficie *regolari* di genere 0, perchè appunto la verifica di questa regolarità è nei casi pratici la somma difficoltà.

D'altra parte anche nel campo delle superficie di genere > 0 gli esempî di superficie irregolari (ad es. aventi il genere geometrico diverso dal genere numerico) divenivano sempre più numerosi: ai primi esempî dati dal sig. Castelnuovo ([3]) (oltre le rigate), si aggiungevano quelli

([3]) « Rendic. Istituto lombardo », 1891.

offerti dalle così dette superficie iperellittiche di cui il sig. HUMBERT ([4]) ha messo in luce le belle proprietà, e si veniva formando la convinzione che intiere classi di superficie (superficie con un fascio irrazionale, superficie rappresentanti le coppie di punti d'una curva, superficie possedenti integrali di PICARD) ([5]) dovessero ritenersi al di fuori del campo delimitato nelle mie « Ricerche ».

In conseguenza *mi sono proposto di porre gli elementi di una teoria assolutamente generale dei sistemi lineari sopra una superficie prescindendo da ogni restrizione per la superficie* e abbracciando così le superficie (regolari o no) di genere > 0 e di genere 0, in particolare le superficie razionali, le rigate ecc.

Nel presente lavoro il proposito si vedrà per una parte realizzato, ed unendo a questo i lavori del sig. CASTELNUOVO ([6]) che gli si accompagnano, il lettore avrà un quadro completo dei più essenziali resultati conseguiti fino ad ora in questa teoria secondo il nostro indirizzo.

Tantochè nel presente lavoro restano inclusi come caso particolare gli sviluppi delle « Ricerche » fino al cap. IV: la questione se sia completa la serie caratteristica d'un sistema lineare (normale o completo), questione ivi trattata nel cap. IV, rientra come caso particolare nel teorema del sig. CASTELNUOVO (cfr. il 1° dei citati lavori), e si può quindi affermare che vale l'estensione del teorema di RIEMANN-ROCH (del cap. IV) con una restrizione di meno. Del resto si troverà qui in fine del lavoro una breve Appendice che ha appunto per scopo di collegare questa Memoria alle « Ricerche » permettendo al lettore di passare immediatamente ai cap. IV, V, di quelle, ove sono dati sviluppi inerenti alle sole superficie regolari.

II. – I concetti che mi hanno guidato in questo studio, sebbene lungo ne sia riuscito lo svolgimento, sono molto semplici: li espongo qui brevemente presentando un quadro succinto dei principali resultati; ciò anche allo scopo di additare quali sono le parti essenziali della Memoria, e quali possono essere omesse in una prima lettura senza nuocere all'intelligenza del resto.

III. – È noto come nella Geometria sopra una curva sia fondamentale il concetto di serie g_n^r *completa* (di gruppi di n punti), cioè di serie non contenuta in un'altra serie più ampia di gruppi di n punti. Il teorema che un gruppo appartiene ad *una* serie completa (di dimensione $\geqslant 0$) permette di operare sulle serie per *somma* e *sottrazione*, denotando col

---

([4]) *Théorie générale des surfaces hypérelliptiques* (« Journal de Mathém. », 4ª série, t. IX, 1893).

([5]) *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (« Journal de Liouville », 1889).

([6]) *Alcuni resultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie*; *Sulle superficie di genere zero.*

nome di serie completa somma di una g_n e di una $g_{n'}$ sopra una data curva, la serie $g_{n+n'}$ completa contenente tutti i gruppi composti di un gruppo di g_n e di un gruppo di $g_{n'}$ (e la g_n come serie residua di $g_{n'}$ rispetto a $g_{n+n'}$ o differenza delle due serie).

Una estensione del concetto di serie completa alle superficie fu da me iniziata in due sensi nelle « Ricerche » considerando i sistemi lineari irreducibili di dato grado *normali* o *completi rispetto al grado*, ed i sistemi lineari irreducibili *completi rispetto al genere* (o soltanto *completi*).

La convenienza di conservare l'uno o l'altro di questi due caratteri d'un sistema irreducibile nel suo successivo ampliamento appare ormai collegata al campo di superficie cui si vogliono riferire le ricerche. La seconda estensione mi appariva preferibile due anni or sono, e tale era infatti nel campo delle superficie di genere > 0 per le quali ammettevo la trasformabilità in una superficie senza curve *eccezionali* (immagini di punti semplici).

Ma se si vuole eliminare qualsiasi restrizione per le superficie conviene attenersi specialmente al concetto di sistema normale o completo rispetto al grado, perchè *sempre* sussiste il teorema che « un sistema lineare irreducibile di dato grado è contenuto in *un* sistema normale dello stesso grado », mentre l'analogo teorema che si riferisce ai sistemi completi rispetto al genere va subordinato ad una restrizione (cfr. l'Appendice in fine al lavoro).

Tuttavia il concetto di sistema normale così limitato ai sistemi irreducibili aventi un grado (e quindi di dimensione > 1) non è sufficiente ad una teoria generale dei sistemi lineari: si è necessariamente condotti ad estenderlo ai sistemi riducibili, ciò che esige considerazioni assai delicate sulla connessione delle superficie di RIEMANN (curve) contenute in uno spazio di RIEMANN a 4 dimensioni (superficie). Mediante tali considerazioni si riesce a precisare sotto forma invariantiva che cosa s'intenda dicendo che una curva è contenuta *totalmente* in un dato sistema, e quindi a stabilire che *ogni curva comunque riducibile* (sopra una superficie) *è contenuta totalmente in un sistema lineare di dimensione* $\geqslant 0$ (*normale*) *non contenuto totalmente in altri più ampi*: soltanto dopo questa estensione può esser posto l'algoritmo generale e fecondo consistente nell'operare sui sistemi lineari normali mediante *somma* e *sottrazione*; giacchè con tale procedimento (ed a maggior ragione in seguito coll'operazione di *aggiunzione*) si giunge necessariamente a sistemi riducibili anche partendo da sistemi irreducibili (come soglio fare generalmente nel seguito per ragione di semplicità).

Il lettore confrontando i §§ 9-13, potrà acquistare le nozioni fondamentali poste a questo proposito nei due primi capitoli del lavoro, necessarie a proseguire nel seguito.

IV. – La somma e la sottrazione costituiscono il modo più semplice di operare sui sistemi lineari normali, modo rappresentato da un opportuno simbolismo: successivamente si studia una operazione più elevata che conduce in generale da un sistema lineare (normale) ad un altro (pure normale): questa operazione è l'*aggiunzione*.

L'importanza del considerare operazioni siffatte nella Geometria sopra una superficie può essere avvertita a priori, pensando appunto che uno degli scopi di essa è di costruire altri sistemi lineari partendo da sistemi dati sulla superficie, in particolare giungendo a sistemi lineari collegati invariantivamente alla superficie, ecc.

Le curve (C_a) *aggiunte* ad un sistema lineare (irreducibile) $|C|$ sopra una superficie, si presentano come analoghe alle curve d'ordine $n-3$ aggiunte ad un sistema lineare di curve d'ordine n nel piano. La loro prima proprietà consiste nel segare gruppi della serie canonica (g^{p-1}_{2p-2}) sulla curva generica C (di genere p). Ma questa proprietà presa relativamente ad un sistema piano d'ordine n, non basta in generale a caratterizzare le curve aggiunte d'ordine $n-3$, quando il sistema ammetta delle curve fondamentali *proprie* (che staccate diminuiscono il genere delle curve residue). Si può allora notare come le C_a si comportino in un dato modo rispetto ai sistemi residui delle curve fondamentali, ed introdurre questo comportamento come una seconda condizione nella definizione delle curve aggiunte. Questa via ho seguito nelle « Ricerche »: essa conduce a porre alcune restrizioni relative alla natura delle curve fondamentali d'un sistema lineare, sotto le quali le curve aggiunte riescono definite dalle condizioni accennate in guisa che:

a) esse competono al sistema lineare normale contenente il dato sistema;

b) formano esse pure (se esistono) un sistema lineare normale (*aggiunto* al dato);

c) hanno il significato ordinario di curve aggiunte d'ordine $n-3$, se il sistema proposto è un sistema di curve piane d'ordine n.

Qui il lettore può domandarsi se effettivamente convenga nella estensione del concetto di curve aggiunte ad un sistema lineare $|C|$, di tener conto del modo di comportarsi di esse rispetto ai sistemi residui delle curve fondamentali in $|C|$, o se non si potrebbe invece assumere come definizione soltanto la prima proprietà (di segare gruppi canonici sulla curva C) abbandonando in parte l'analogia col piano: tanto più che le curve (che denominiamo *subaggiunte*) soddisfacenti a quella prima proprietà formano, già per questa condizione, un sistema lineare. A questo dubbio si può rispondere che effettivamente in molte ricerche (e p. e. nella dimostrazione di CASTELNUOVO della razionalità delle involuzioni piane) si tien conto soltanto delle curve subaggiunte non occupandosi della ulteriore condizione più complicata, ma invece in altre questioni appare inevitabile la ulteriore limitazione: anzi deve essere osservato che la considerazione delle curve subaggiunte basta essenzialmente in quei casi in cui (i sistemi con cui si ha a che fare riuscendo privi di curve fondamentali proprie) le curve subaggiunte si confondono colle aggiunte.

Queste considerazioni si renderanno chiare al lettore se egli pensa alla interpretazione proiettiva delle curve aggiunte. Si trasformi la superficie in una F di S_3 avente per sezioni piane le curve C del sistema proposto (supposto ∞^3 almeno ecc.): allora le curve C_a aggiunte a $|C|$ vengono segate su F da superficie aggiunte; le curve subaggiunte da superficie (*subaggiunte* ad F) che si comportano come le aggiunte lungo la curva multipla, ma non nei punti multipli isolati di F.

La considerazione delle curve aggiunte al sistema $|C|$ come sezioni di una superficie opportuna trasformata F con superficie aggiunte (d'ordine $n-3$ se n è l'ordine di F), permette di riconoscere subito le difficoltà inerenti alla definizione delle curve aggiunte a $|C|$ a cagione del complicarsi delle curve fondamentali di $|C|$ che ha un riscontro nel complicarsi della natura delle singolarità di F: tale considerazione mostra dunque che la difficoltà che qui si incontra nella teoria delle curve aggiunte è in sostanza la difficoltà inerente allo studio *proiettivo* delle singolarità d'una superficie ([7]).

Distinguo appositamente la questione proiettiva delle singolarità di una superficie, dalla questione della loro riducibilità, cioè della trasformabilità di una superficie in una dotata soltanto di singolarità ordinarie (se si vuole « curva doppia e punti tripli »): questa ultima questione se pure non definitivamente risoluta in modo rigoroso si prevede ormai debba avere una risposta affermativa; ad ogni modo tale risposta affermativa si suppone generalmente come una ipotesi (eventualmente limitativa) e tale ipotesi figura anche qui.

Ma questa ipotesi (si noti) non basta a superare la difficoltà inerente alle singolarità d'una superficie; vi è sempre la difficoltà del loro studio proiettivo, ed ove si escludano in questo senso le singolarità superiori si viene ad ammettere una restrizione *certamente limitativa* nella teoria dei sistemi lineari sopra una superficie (restrizione relativa non più alle superficie ma ai sistemi su di esse). Rimuovere questa restrizione è essenziale nella Geometria sopra una superficie ove si voglia operare in modo asso-

---

([7]) A questo proposito deve esser notato che, sebbene manchi finora una definizione assolutamente generale di superficie aggiunte ad una data il sig. NOETHER ha dato in alcuni casi il modo di comportarsi di tali superficie aggiunte in un punto multiplo non ordinario (« Göttinger Nachrichten », 1871).

Una definizione di superficie aggiunte ad una data più generale di quella relativa al caso di singolarità ordinarie, ma tuttavia non assolutamente generale, è data nelle mie *Ricerche*.

lutamente generale sui sistemi lineari, non bastando in tal caso di assoggettare a restrizioni i sistemi da cui primitivamente si parte.

In luogo di abbordare la questione diretta, dirò come sono riuscito per altra via a porre la definizione assolutamente generale delle curve aggiunte ad un sistema lineare (e quindi delle superficie aggiunte ad una data di S_3) superando quindi indirettamente la difficoltà dello studio proiettivo delle singolarità delle superficie. Ma per questo occorre premettere un'altra considerazione.

V. – Nel caso delle superficie di genere >0 che ammettono una superficie trasformata F senza curve eccezionali (immagini di punti semplici) io notai nelle « Ricerche » come il sistema aggiunto $|C_a|$ ad un sistema lineare $|C|$ è nel caso più semplice il sistema somma di $|C|$ e del sistema *canonico* $|K|$ (segato su una superficie d'ordine n di S_3 dalle superficie d'ordine $n-4$ aggiunte ad essa); a tale sistema somma possono doversi ulteriormente sommare delle curve eccezionali immagini di (eventuali) punti base di $|C|$ su F. Limitandoci dunque al caso più semplice si ha per due sistemi $|C|\,|C'|$, (aventi gli stessi punti base su F),

$$|C_a + C'| = |C + C'_a| \qquad (= |K + C + C' + \ldots|)\,.$$

Pensai che un teorema siffatto dovesse valere indipendentemente dall'esistenza del sistema canonico, cioè anche per superficie di genere $p=0$; e me ne convinsi tosto osservando la cosa nel piano. Poco dopo riuscivo a stabilirlo in generale per una superficie qualunque, ammesse pei sistemi lineari di cui si tratta convenienti limitazioni alla natura delle curve fondamentali (necessarie alla definizione diretta delle curve aggiunte). Mi accorsi quindi che tale teorema è caratteristico per l'operazione di *aggiunzione*, e mi proposi di porlo a base della definizione delle curve aggiunte ad un sistema lineare $|C|$ in tutti i casi in cui per il complicarsi delle curve fondamentali di $|C|$ riesce difficile una definizione diretta.

Per tal modo riuscivo dunque ad eliminare la questione dello studio proiettivo delle singolarità delle superficie, pur ammettendo la trasformabilità della superficie in una dotata soltanto di singolarità ordinarie o (ciò che è lo stesso) in superficie senza singolarità in un iperspazio, vale a dire ammettendo l'esistenza sopra la superficie di sistemi lineari (*non singolari*) non aventi curve fondamentali all'infuori dei punti semplici della superficie. Ecco in breve lo svolgimento della teoria delle curve aggiunte ad un sistema lineare $|C|$, cui mi ha condotto il concetto sopra esposto.

1) Ho cominciato ad occuparmi delle curve (subaggiunte a $|C|$) soggette soltanto alla condizione di segare gruppi canonici sulle curve generiche C. Queste curve subaggiunte restano definite a meno di parti

fisse fondamentali per $|C|$; prescindendo da queste o fissandole convenientemente si ha che

a) le curve subaggiunte a $|C|$ (se esistono) competono al sistema normale $|C|$ e formano un sistema lineare normale (*subaggiunto* a $|C|$);

b) se staccando da $|C|$ una curva C'' e imponendo dei punti base di molteplicità $i_1, i_2 \dots$ (> 1) alle curve residue si ottiene un nuovo sistema irreducibile $|C'|$ le curve subaggiunte a questo $|C'|$ si otterranno staccando C'' dal sistema subaggiunto a $|C|$ e imponendo alle curve residue i detti punti base colle molteplicità $i_1 - 1$, $i_2 - 1 \dots$;

c) la proprietà inversa della *b*) non è vera in generale; essa sussiste però se $|C'|$ è un sistema non singolare (ed anche se ha soltanto curve fondamentali proprie); in questo caso dunque sommando alle curve subaggiunte a $|C'|$ la C'' si ottengono curve contenute nel sistema subaggiunto a $|C|$.

2) Pei sistemi lineari non singolari le curve subaggiunte si confondono colle aggiunte: per esse sussistono la relazione fondamentale *b*) e l'inversa *c*) 1). Dato un sistema qualunque $|C'|$ sulla superficie si può paragonarlo ad un sistema non singolare $|C|$ che lo contenga, e quindi delimitare tra le curve subaggiunte a $|C'|$ quelle particolari (supposte esistenti) che in rapporto a $|C|$ verificano la relazione *c*) 1): queste curve riescono indipendenti dalla particolare scelta del sistema non singolare $|C|$, e si possono quindi denominare curve *aggiunte* a $|C|$.

Le relazioni *b*), *c*) che legano le curve aggiunte di un sistema lineare $|C'|$ a quelle d'un altro $|C|$ che lo contenga restano ora stabilite quando uno qualunque dei due sistemi $|C|\,|C'|$ sia non singolare: un ulteriore passo ci libera da questa restrizione stabilendo in ogni caso quelle relazioni le quali vengono a costituire il *teorema fondamentale della teoria delle curve aggiunte.*

3) Dato sopra una superficie un sistema lineare irreducibile $|C|$, sotto le necessarie limitazioni per le curve fondamentali di $|C|$, si deduce la definizione diretta delle curve aggiunte a $|C|$ cui si è innanzi accennato.

4) Interpretando proiettivamente i resultati ottenuti si pone la definizione generale di superficie aggiunte ad una data di S_3, si stabilisce il teorema del resto generalizzato, il teorema di NOETHER sulle superficie aggiunte alle curve gobbe e la sua inversione ecc.

VI. – Dalla teoria delle curve aggiunte e dal relativo teorema fondamentale si possono fare scaturire sistemi di curve collegati invariantivamente alle superficie: in primo luogo le curve *canoniche* (sezioni d'una superficie d'ordine n colle superficie aggiunte d'ordine $n-4$). Se $|C|\,|C'|$ sono due sistemi lineari si ha, nel caso più semplice, $|C_a + C'| = |C + C'_a| = |(C+C')_a|$, da cui segue (se $|C_a|$ contiene $|C|$) $|C_a - C| = |C'_a - C'|$.

Questo è in sostanza il teorema d'invariantività delle curve canoniche, teorema che (per le superficie di genere $p > 0$) si può dire equivalente al teorema fondamentale della teoria delle curve aggiunte.

Ma anche sulle superficie di genere $p = 0$ si possono avere curve legate invariantivamente alla superficie: può darsi che un sistema $|C|$ non sia contenuto nel proprio aggiunto $|C_a|$ (onde $p = 0$), ma invece il doppio di esso $|2C|$ sia contenuto in $|2C_a|$: risultano allora invariantive le curve (*bicanoniche*) del sistema $|2C_a - 2C|$ (indipendente dalla scelta di $|C|$): se si tratta di una superficie d'ordine n di S_3 tali curve vengono segate da certe superficie *biaggiunte* d'ordine $2n - 8$ che (nel caso delle singolarità più semplici) passano doppiamente per la curva doppia della superficie. È superfluo notare che questo resultato non dice nulla per $p > 0$, ma ha invece un interesse per $p = 0$; si hanno in proposito alcuni opportuni esempî. Ed il progresso ottenuto così nella Geometria sopra le superficie può (in un certo senso) riguardarsi come appartenente all'ordine d'idee del lavoro del sig. NOETHER («Mathem. Annalen», 17).

VII. – Alla determinazione delle curve (canoniche e bicanoniche) d'una superficie legate invariantivamente ad essa, si connette la determinazione di caratteri numerici invariantivi della superficie stessa: accanto ai due generi introdotti dal sig. NOETHER (*Flächen* e *Curvengeschlecht*) appare qui il *bigenere* o [numero] delle curve bicanoniche [linearmente indipendenti]: e questi caratteri restano definiti anche nei casi più elevati di riducibilità del sistema canonico (o bicanonico) di cui si hanno esempî, e che erano sfuggiti fin qui.

Il sig. NOETHER ha notato («Mathem. Annalen», 8) che alla determinazione di caratteri numerici d'una superficie si perviene anche (secondo l'indirizzo del sig. ZEUTHEN [8]) partendo dalle singolarità della superficie supposta in S_3 d'un certo ordine n; essenzialmente si giunge così ad un numero che è l'espressione del numero delle superficie aggiunte d'ordine $n - 4$ (linearmente indipendenti) desunto dalle formule di postulazione di NOETHER [9]. Che questo numero p_n (detto *genere numerico* o virtuale) rappresenti sempre anche il genere effettivo (o *geometrico*) p_g della superficie (all'infuori del caso delle rigate) si suppose dapprima, finchè gli esempi addotti dal CASTELNUOVO e da HUMBERT non mostrarono il contrario: ma ad ogni modo il carattere invariantivo del genere numerico restava stabilito indipendentemente (da ZEUTHEN e NOETHER) con quelle limitazioni alla natura delle singolarità della superficie che pur occorrevano per la sua stessa definizione.

---

(8) *Études géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent un à un* («Mathem. Annalen», 4).

(9) «Annali di Matematica», serie II, t. 5.

Importava non solo di togliere quelle restrizioni nella definizione e nella dimostrazione di invariantività del genere numerico p_n, ma altresì di assegnare il significato *funzionale* di tale carattere, cioè di collegare le due vie conducenti ai caratteri invariantivi delle superficie.

Già nelle « Ricerche » io mi occupai di delimitare il caso $p_g = p_n$ (> 0) (superficie *regolari*), mostrando che esso ha luogo corrispondentemente al fatto che le curve aggiunte ad ogni sistema lineare irreducibile $|C|$ seghino sulla curva generica C la serie canonica *completa*, e dando condizioni che permettano di concludere questo fatto. Intravidi fin d'allora la possibilità di definire in generale il p_n, e più precisamente la differenza $p_g - p_n$, legandola alla deficienza della serie segata sulla curva generica d'un sistema lineare $|C|$ dalle curve aggiunte C_a: ciò ho potuto ottenere oggi prescindendo dalle formule di postulazione di NOETHER (ed eliminando quindi le restrizioni inerenti alle singolarità delle superficie), e comprendendo anche il caso $p_g = 0$, grazie al teorema fondamentale.

VIII. – Il pensiero che conduce alla considerazione del genere numerico p_n, mi ha fatto nascere l'idea di proseguire una analoga ricerca pel genere lineare (*Curven-geschlecht*) $p^{(1)}$. Si può dare un'espressione del $p^{(1)}$ la quale coincide sempre col genere (virtuale) delle curve canoniche per $p_g > 0$; ma è notevole che essa non si riduce sempre a 0 per $p_g = 0$. Si vede dunque come le idee del sig. NOETHER relative ai caratteri virtuali nella Geometria sopra le superficie, trovino col progresso della teoria un'applicazione sempre più larga e feconda.

I.

GENERALITÀ SULL' ENTE ALGEBRICO DOPPIAMENTE INFINITO E SUI SISTEMI LINEARI SOPRA DI ESSO

1. - Ente algebrico doppiamente infinito.

Le proprietà delle superficie algebriche che qui vengono studiate sono quelle che competono alla così detta *Geometria sopra la superficie*, ossia che hanno carattere invariantivo rispetto alle trasformazioni birazionali delle superficie stesse. Enunciando queste proprietà sotto forma proiettiva si ha l'inconveniente che per particolari superficie trasformate della data non si potrebbe attribuire ad esse il medesimo significato proiettivo:

ciò essenzialmente in conseguenza del fatto che in una siffatta trasformazione ad un punto della primitiva superficie può venir sostituita una curva della nuova e viceversa. Si è quindi condotti a stabilire delle convenzioni atte a rimuovere l'inconveniente accennato.

Giova per ciò adattare anche il linguaggio all'ordine di proprietà che si indagano, e considerare insieme tutte le superficie di una intera *classe* (trasformate l'una dall'altra). Parlando di *ente algebrico doppiamente infinito* (e la dimensione si sottintenderà spesso nel discorso) intenderemo di riferirci indifferentemente ad una qualunque superficie della classe, che si dirà alla sua volta una *immagine proiettiva* dell'ente.

Col nome di *punto dell'ente algebrico* designeremo un punto semplice di una qualunque superficie della classe; vi sono però superficie particolari, immagini proiettive dell'ente su cui ad un qualche punto dell'ente corrisponde una curva (*curva eccezionale sulla superficie*). Pensando a tali immagini si potrà riguardare indifferentemente un punto dell'ente anche come una curva (*eccezionale*) dell'ente stesso. Parlando di una curva comunque riducibile dell'ente considereremo quindi in generale che in essa possano essere incluse delle componenti eccezionali, cioè dei punti: ma si riserberà alla parola « curva » il significato più restrittivo di curva *propriamente detta* (senza componenti « punti »), ove (parlando di curve composte) si pongano in opposizione nel discorso le componenti « curve » e le componenti « punti ».

Il vantaggio delle locuzioni introdotte si comprende subito: noi possiamo parlare contemporaneamente di più punti dell'ente algebrico in numero finito o infinito e pensarli come punti semplici d'una superficie benchè possa avvenire che non esista di fatto una immagine proiettiva dell'ente su cui a ciascuno di quei punti corrisponda un punto semplice: cioè sebbene non sempre esista una superficie immagine dell'ente, senza curve eccezionali.

Ma appunto per ciò si deve avere l'avvertenza di non introdurre mai quelle relazioni tra più punti d'un ente algebrico che si fondino sulla ipotesi che ad essi corrispondano tanti punti semplici d'una *stessa* superficie, immagine, se non è nota l'esistenza d'una immagine siffatta: cioè nel ragionamento che si riferisce a punti dell'ente algebrico, ciascun punto deve considerarsi isolatamente, in guisa che il ragionamento stesso possa tradursi nel linguaggio ordinario (proiettivo) prendendo per ciascun punto una opportuna immagine dell'ente.

2. - Curve e sistemi di curve sopra l'ente algebrico ∞^2.

Allorchè si parla di una curva come *data sopra un ente algebrico* ∞^2 intendiamo di considerare di essa soltanto le proprietà invariantive, e intendiamo che sia perfettamente determinato ciò che le corrisponde sopra una qualsiasi superficie immagine dell'ente.

Occorre a tale proposito qualche osservazione a cagione degli elementi eccezionali che compariscono nelle trasformazioni d'una superficie.

Giova qui riferirci ad una superficie F immagine dell'ente (in un certo S_n) la quale non abbia alcuna singolarità ([10]), e riguardarla (come luogo dei suoi punti reali ed immaginarî cioè) come uno *spazio di* RIEMANN *a 4 dimensioni* dell'ente: tale spazio di RIEMANN (poichè F non ha singolarità) è *perfetto* (nel senso di CANTOR), ossia ogni punto limite di punti di F è su F e viceversa ogni punto di F è limite di punti di essa.

Allora una curva C *data sull'ente* deve essere concepita su F come una *superficie di* RIEMANN della quale è stabilita la *connessione*, e dove in particolare sono fissati i punti di diramazione delle eventuali componenti multiple ecc. Un punto dell'ente che appartenga a C è rappresentato su F da un punto di C oppure da una curva eccezionale componente di C. Un punto dell'ente che non appartenga a C è rappresentato su F da un punto fuori di C, o da un *buco* in C, o da una curva eccezionale che non fa parte di C.

La curva C su F (concepita come una superficie di RIEMANN) può dunque non essere un insieme perfetto su F (e quindi in S_n) per la presenza di qualche buco in essa. Ove si voglia considerare la curva C data sull'ente non si può prescindere dalla (eventuale) presenza di buchi in essa sopra una superficie immagine.

Un punto O di F, o se si vuole il suo intorno su F, può essere riguardato come una curva (o una superficie di RIEMANN) su F; in questo senso si può parlare di «sommare *un punto* O (un certo numero ϱ di volte) *ad una curva* C *come componente*». Che cosa si debba intendere con questa locuzione riesce più chiaro se (anzichè ad F) ci si riferisce ad una superficie (trasformata) F' immagine dell'ente, su cui O venga rappresentato da una curva eccezionale X; allora, se a C corrisponde C', la curva $C+O^\varrho$ (O^ϱ denota O contato ϱ volte) ha come corrispondente su F' la $C'+X^\varrho$. In particolare se la curva C di F ha un buco nel punto semplice O, la $C+O$ si ottiene da C prescindendo da tale buco.

Se O è un punto dell'ente o di F multiplo secondo i per la curva C

([10]) A proposito della questione della singolarità d'una superficie si cfr. la nota nel 1° dei citati lavori di CASTELNUOVO.

conveniamo di riguardare la curva $C+O^{\varrho}$ come avente in O la molteplicità $i-\varrho$. Questa convenzione può essere giustificata nel seguente modo: si immagini che in O sia praticato un buco; allora è rotta in O la connessione fra gli i rami di C, connessione che sarebbe invece posta nel massimo modo stabilendo $i(i-1)/2$ *ponti* di connessione fra le varie coppie di rami: se si aggiunge O a C come componente, si viene ad aggiungere alla superficie di RIEMANN C un foglio connesso in i punti agli i rami di C per O (un punto per ciascun ramo), onde nel punto multiplo O di $C+O$ vengono ora interrotti soltanto $i(i-1)/2-i=(i-1)(i-2)/2$ ponti di connessione, tanti cioè quanti ne vengono rotti da un buco praticato in un punto $(i-1)$-plo di una data curva.

La curva C può avere su F delle singolarità superiori, ma poichè tutti i punti di F (in S_n) sono punti semplici, ogni loro intorno è da riguardarsi come piano: pertanto le singolarità di C su F possono ritenersi come equivalenti a più punti multipli ordinarî (in numero finito) alcuni dei quali infinitamente vicini fra loro ([11]).

Fintanto che si parla di *una* curva d'una superficie e si vuol riguardarla come *data sull'ente*, è in nostro arbitrio di fissare la sua connessione (in particolare i buchi ecc.), sopra la superficie di partenza. Non si potrebbe qui porre una convenzione fissa in modo che fosse indifferente la scelta di una o di un'altra superficie immagine dell'ente. Ma una tale convenzione può invece farsi opportunamente ove si tratti di un *sistema continuo di curve senza parti fisse.*

Basta perciò *convenire* che *un punto base per un tale sistema sopra una qualunque superficie debba considerarsi come un buco per la curva generica del sistema.*

Allora la curva generica del sistema resta *data sull'ente* partendo indifferentemente da una qualunque superficie immagine di esso.

Ma può anche considerarsi come data sull'ente ogni particolare *curva totale* C' del sistema ove si consideri come *limite* d'una curva variabile del sistema stesso, in modo che ogni punto di una tal curva variabile abbia come punto limite un punto di C', mentre viceversa ogni punto di C' possa riguardarsi come limite di un punto della curva variabile nel sistema.

Ad un sistema continuo di curve senza parti fisse sopra un ente algebrico ∞^2 può essere sommata qualche componente fissa stabilendo opportunamente la sua connessione con una curva generica del sistema: una tale componente fissa deve allora sommarsi ugualmente ad ogni curva totale del sistema connettendola secondo risulta dalla legge di continuità.

Una curva C' si dirà *curva parziale* d'un sistema continuo di curve C

([11]) Cfr. per le curve piane NÖETHER, *Ueber die singulären Werthsysteme...*, « Mathem. Annalen », 9; *Rationale Ausführung...*, « Math. Annalen », 23.

(o contenuta parzialmente in esso) se essa fa parte (almeno) di una C ma non è una curva totale; vi è quindi almeno una curva C'' *residua* di C' rispetto al sistema (curva che può avere come componenti dei punti dell'ente) la quale insieme a C' costituisce una curva totale $C'+C''$ del sistema. Data sull'ente una curva parziale C' d'un sistema continuo restano date sull'ente tutte le sue curve residue, resultando fissata la connessione di ciascuna di esse sopra una superficie immagine. Dato sull'ente un sistema continuo di cui O non sia punto base, le curve del sistema aventi O come ϱ-plo (supposte esistenti), e dove O è sostituito da un buco, sono le curve residue di O^ϱ rispetto al sistema. Ciò giustifica nuovamente la convenzione posta di considerare come avente la molteplicità $i-\varrho$ nel punto O la curva $C+O^\varrho$ se C ha O come i-plo.

Dalle cose dette appare che:

Una curva data sopra una superficie è data anche sull'ente se ne è fissata la connessione in ogni punto.

Soltanto le curve d'un sistema continuo senza parti fisse possono riguardarsi come date indifferentemente sull'ente o sopra una superficie immagine.

Data una curva sull'ente sono pure date sull'ente tutte le curve residue di essa rispetto ad un dato sistema continuo che la contenga parzialmente.

Segue che ove si voglia prescindere da una particolare superficie immagine dell'ente preventivamente scelta si deve operare su sistemi continui senza parti fisse, e sulle curve e sistemi che ne derivano mediante operazioni di staccamento di date curve ecc. Così appunto faremo nel seguito.

Si noti pure che nell'interpretazione proiettiva dei resultati ottenuti (riferendoci ad una superficie immagine) occorrono speciali riguardi ove si tratti di singole curve o sistemi con parti fisse dati sull'ente, mentre s'interpretano senz'altro i resultati relativi a sistemi senza parti fisse. Ma pure volendosi limitare allo studio di questi che hanno un interesse più spiccato interviene la considerazione di singole curve e sistemi con parti fisse provenienti da operazioni che sarebbero altrimenti impossibili; e l'avere fin da principio allargato la cerchia dei sistemi considerati gioverà a fondare un algoritmo applicabile in ogni caso, di uso spedito e fecondo.

3. - Generalità sui sistemi lineari.

Si dice *sistema lineare* ∞^r *di curve* (algebriche) sopra una superficie (algebrica) e sul relativo ente algebrico, un sistema di curve tale che

1) per un gruppo generico di r punti della superficie passi *una* curva del sistema;

2) gli elementi (curve) del sistema possano riferirsi *proiettivamente* agli elementi generatori (punti o iperpiani S_{r-1}) di uno spazio lineare S_r:

s'intende con ciò che per $r > 1$ ad un S_{r-1} o ad un punto di S_r corrisponda un sistema lineare ∞^{r-1} contenuto nel primo, e per $r = 1$ gli elementi (curve) del sistema ∞^1 costituiscano una serie *razionale*.

Convenzionalmente denoteremo talvolta una curva col nome di sistema lineare ∞^0, ma ove non si avverta il contrario parlando d'un *sistema lineare si sottintenderà* ∞^1 *almeno*. I sistemi lineari ∞^1 e ∞^2 si diranno rispettivamente *fasci razionali* e *reti*. Un sistema lineare venendo indicato con $|C|$, designeremo con C una curva generica di esso.

In ciò che precede non è detto che le curve generiche del sistema lineare sieno irriducibili; ove questo avvenga il sistema si dirà *irriducibile*; *riducibile* nel caso opposto. Per la definizione di un sistema lineare irriducibile di dimensione $r > 1$ sopra una superficie, basta la prima proprietà sopra enunciata; la seconda si deduce come conseguenza ([12]).

Non così per $r = 1$: si possono avere sistemi soddisfacenti alla 1ª condizione ma non alla 2ª (*fasci irrazionali*).

In un sistema lineare ∞^r $(r > 0)$ due curve determinano un fascio razionale ecc.

Punto base d'un sistema lineare *irriducibile*, o riducibile senza parti fisse, è un punto comune a tutte le curve del sistema: un tal punto deve essere riguardato come un *buco* per le curve del sistema sopra ogni superficie immagine.

Un punto base *multiplo secondo* i (> 0) per le curve d'un sistema lineare senza parti fisse sopra una superficie immagine, si dirà anche un *punto base* i-plo del sistema *sull'ente* (è chiaro che è indifferente la scelta della superficie immagine di partenza, purchè su di essa il punto che si considera non venga sostituito da una curva eccezionale).

Allorchè ad un sistema lineare $|C|$ senza parti fisse si somma qualche componente fissa C', ogni punto base di $|C|$ si dirà anche un punto base di $C'+|C|$. Se, sopra una superficie immagine, si ha che un tal punto base O è i-plo per $|C|$ ed è ϱ-plo per C' e se inoltre anche per C' O si considera come un buco (di guisa che O costituisce un buco per la curva generica $C'+C$ che lo ha come $(i+\varrho)$-plo) si dirà che O è un punto base $(i+\varrho)$-plo per $C'+|C|$ sull'ente.

Se ulteriormente si somma a $C'+|C|$ il punto O contato un certo numero σ di volte, si dirà che il sistema ottenuto

$$O^\sigma + C' + |C|$$

ha il punto O (dell'ente) come un *punto base* $(i+\varrho-\sigma)$-plo: se $i+\varrho=\sigma$ si riguarderà anche O come un punto non base pel sistema.

([12]) Cfr. la mia Nota, *Una questione sulla linearità ecc.*, « Accad. dei Lincei », giugno 1893 [questo volume, III].

Con ciò resta fissato in ogni caso che cosa debba intendersi col nome di *punto base i-plo d'un sistema lineare sull'ente*: invero assunta una superficie immagine (dove il punto non sia sostituito da una curva eccezionale), si possono realizzare su di essa le condizioni di connessione spettanti alle curve del sistema nel punto, immaginando prima di effettuare in esso un buco e poi di sommare alle curve del sistema il punto stesso un certo numero di volte. Occorre per altro aver riguardo al caso di punti base infinitamente vicini nel senso avvertito innanzi.

Sopra una superficie (e sul relativo ente algebrico) si consideri un sistema lineare ∞^r $(r \geqslant 1)$. Per $r = 1$ esso è un fascio (razionale). Un punto della superficie comune a due curve di un fascio è comune a tutte ossia è base pel fascio o appartiene ad una componente fissa del fascio (poichè per esso passa più di una curva del sistema).

Sia $r > 1$. Se due curve generiche del sistema hanno sempre (infiniti punti comuni e quindi) una curva componente comune, questa è fissa: infatti facendo variare una sola delle due curve questa ha sempre una curva componente comune colla prima, e tale componente non può variare con continuità e perciò è fissa.

Si consideri il gruppo di punti intersezioni variabili di due curve generiche del sistema (supposto esistente). Al variare delle curve, mentre esse descrivono l'intiero sistema, non può darsi che alcuni di quei punti descrivano una curva C: si supponga l'opposto: sulla C (che per ipotesi non è una componente fissa del sistema) le curve del sistema debbono segare una serie lineare, e se in questi due gruppi generici hanno sempre comune un punto, il punto è fisso; dunque se due curve generiche del dato sistema hanno sempre comune un punto di C, questo punto è fisso, e non variabile come si era supposto.

Si supponga che nel dato sistema ∞^r $(r > 1)$ su F, due curve generiche non abbiano intersezioni variabili. Per un punto generico di F passano ∞^{r-1} curve del dato sistema componenti un nuovo sistema lineare; due di esse avendo comune un punto variabile, hanno comune una linea variabile (cioè diversa dalla eventuale componente fissa) passante per il punto, e questa è una nuova componente fissa del nominato sistema ∞^{r-1} e però nasce ugualmente da ogni punto della curva stessa: variando il punto su F si hanno ∞^1 curve generanti un fascio (razionale o no) ognuna delle quali si stacca da tutte le curve del dato sistema che ne contengono un punto generico: dunque le curve del sistema si compongono, oltrechè di eventuali componenti fisse, di gruppi d'un certo numero $m > 1$ di curve del fascio (generatori d'una serie lineare g_m^r sopra l'ente ∞^1 che ha per elementi le curve del fascio).

Concludiamo:

In un sistema lineare ∞^r $(r > 0)$ *di curve sopra una superficie*:

1) *due curve generiche non hanno intersezioni variabili se ciascuna componente variabile è costituita di una o più curve d'un fascio* (razionale o no);

2) *nel caso opposto due curve generiche hanno un numero finito* $n > 0$ *di intersezioni variabili e questi punti descrivono tutta la superficie al variare delle curve.*

Il numero $n \geqslant 0$ delle intersezioni variabili di due curve del sistema si dirà il *grado effettivo* del sistema.

In un sistema lineare di grado effettivo n senza componenti fisse, due curve totali che non abbiano una componente comune (nemmeno eccezionale) hanno n intersezioni, ciascuna di queste essendo debitamente contata: è chiaro che in tale computo non deve tenersi conto di un punto appartenente ad una delle due curve che costituisca un buco per l'altra.

Il grado n d'un sistema lineare di curve costituisce un primo carattere di esso sull'ente (carattere invariantivo per trasformazioni birazionali della superficie immagine). Un secondo carattere è la *dimensione* r (infinità) del sistema. Un terzo carattere è il *genere* del sistema che definiamo per ora nell'ipotesi che il sistema stesso sia irriducibile, come il genere delle sue componenti variabili irriducibili.

Di fondamentale importanza nello studio d'un sistema lineare irriducibile è la serie g_n^{r-1} segata sulla curva generica del sistema (di grado n e dimensione r), dalle altre curve del sistema stesso: essa si dirà la *serie caratteristica* del sistema. Dalla considerazione di essa si ricava *la disuguaglianza*

$$n \geqslant r-1 ,$$

che lega il grado e la dimensione d'un qualunque sistema lineare irriducibile.

4. - Significato proiettivo della geometria dei sistemi lineari.

Sopra un ente algebrico F si abbia un sistema lineare $|C|$ di dimensione r (> 0) e grado n $(\geqslant 0)$: consideriamo il sistema lineare ∞^{r-1} costituito dalle curve del primo che passano per un dato punto *generico* di F (punto *base* del nuovo sistema ∞^{r-1}); possono avvenire 3 casi:

1) Il sistema ∞^{r-1} ha una nuova componente fissa non comune al dato sistema $|C|$ (in altre parole le curve C di $|C|$ che passano per un punto generico di F hanno in conseguenza infiniti punti variabili comuni); allora le componenti variabili di $|C|$ sono formate colle curve d'un fascio (razionale o no), e si ha $n=0$ (e viceversa); ciò avviene sempre (in particolare) per $r=1$.

2) Essendo $r > 1$ ed $n > 0$, il considerato sistema ∞^{r-1} ha il grado $n - 1$ (in altre parole le curve di $|C|$ aventi comune un dato punto non hanno in conseguenza altri punti variabili comuni); allora il sistema $|C|$ si dirà *semplice*. Se F non è razionale si ha in tal caso $r > 2$.

3) Essendo $r > 1$ ed $n > 0$, il nominato sistema ∞^{r-1} ha il grado $n - m$, dove $m > 1$; allora le curve C di $|C|$ passanti per un punto generico di F hanno in conseguenza altri $m-1$ punti variabili comuni; questi insieme al dato costituiscono un gruppo di m punti che presenta *una* condizione alle curve C di $|C|$ le quali debbono contenerlo e viene determinato ugualmente partendo da un altro dei suoi punti. In tal caso si hanno su F ∞^2 gruppi analoghi a quello (presentanti *una* condizione alle curve di $|C|$) ed un punto generico di F individua un gruppo, si ha quindi quella che si chiama una *involuzione I_m di grado m* (di gruppi di m punti): due curve generiche di $|C|$ hanno comune un certo numero s ($\geqslant 1$) di gruppi della I_m, per modo che

$$n = ms\,.$$

In questo caso si dice che il sistema $|C|$ *appartiene all'involuzione I_m*. Il fatto si presenta sempre per $r = 2$ ($n > 0$) se F non è razionale: si ha allora $n > 1$ e la rete $|C|$ appartiene ad una involuzione I_n.

Sopra una superficie F immagine dell'ente sia dato un sistema lineare *semplice* $|C|$ di dimensione r (> 1) e grado n (> 0).

Si riferiscano proiettivamente gli elementi (curve) di $|C|$ agli iperpiani S_{r-1} di uno spazio ad r dimensioni S_r: ad un punto generico di F base per un sistema ∞^{r-1} di curve C (di $|C|$) corrispondono in S_r gli iperpiani per un punto P, ed un punto P così ottenuto nasce da un solo punto di F fuori della eventuale componente fissa di $|C|$: il luogo dei punti P è dunque una superficie F' di S_r riferita punto per punto alla data F, sulla quale le (parti variabili delle) trasformate delle curve C di $|C|$ vengono segate dagli iperpiani di S_r. Diremo, per brevità, che *la F' è la superficie immagine dell'ente algebrico* (F) *che ha per sezioni* (iperpiane) *le curve C di* $|C|$: è importante notare che le proprietà (invariantive) del sistema $|C|$ sull'ente, si traducono in proprietà proiettive della superficie F' e viceversa. L'ordine della F' è il grado n di $|C|$.

La trasformazione indicata può ancora effettuarsi se il sistema lineare $|C|$ di dimensione r (> 1) e grado n (> 0) non è semplice ma appartiene ad una involuzione I_m: soltanto allora la immagine F' dell'ente non risulta più riferita biunivocamente alla F, ma risulta invece una superficie (m-pla) riferita in corrispondenza $[1, m]$ alla F; il suo ordine è n/m. Vi è un'altra trasformazione che si applica partendo da sistemi $|C|$ (di grado $n > 0$) semplici o no, e riesce sempre biunivoca per la superficie F: occorre averla presente.

Si può sempre considerare sulla F un fascio razionale di curve (segate da un fascio di piani o iperpiani) siffatto che una curva di esso passante per un punto generico non debba contenere di conseguenza nessuno degli altri punti variabili che resultano eventualmente comuni alle curve di $|C|$ per quel punto: ciò posto riferiamo proiettivamente gli elementi (curve) di $|C|$ agli iperpiani per un punto O in S_{r+1}, e le curve del nominato fascio agli iperpiani per un S_{r-1} non contenente O in S_r: un punto generico della superficie F è base per un sistema ∞^{r-1} di curve C ed appartiene ad *una* curva del fascio; gli corrisponde quindi in S_{r+1} un punto P (in corrispondenza biunivoca col piano) determinato come intersezione di una retta per O e di un iperpiano per lo S_{r-1}. Nasce così in S_{r+1} una superficie F' riferita punto per punto alla F, sulla quale F' le trasformate delle curve del sistema $|C|$ sono segate dagli iperpiani per O, ossia si ha una *superficie F' immagine dell'ente algebrico in S_{r+1} avente come sezioni cogli iperpiani S_r di una stella le curve C*: un S_{r-1} per O sega la F' in n punti variabili, se n è il grado di $|C|$. Si noti che ove il grado di $|C|$ fosse nullo (e la sua dimensione $r > 1$) la F' sarebbe in generale un cono multiplo di vertice O.

In fine l'indicato procedimento (ricorrendo ad un sistema ∞^r ausiliario) permette di ottenere una superficie immagine d'un ente algebrico sulla quale le curve d'un fascio razionale vengono segate dagli S_r per un S_{r-1} in un S_{r+1}.

Più in generale dati sull'ente due o più sistemi lineari si potrà sempre assumere una superficie immagine proiettiva dell'ente in un S_r su cui le curve di questi vengano segate dagli iperpiani di forme lineari in S_r, ove queste forme abbiano due a due tanti iperpiani comuni quante sono le curve comuni ai corrispondenti sistemi (cfr. § 7).

5. - Sistemi lineari riducibili.

Ecco subito alcune applicazioni delle trasformazioni indicate nel precedente §.

TEOREMA. – *In un sistema lineare riducibile sopra un ente algebrico ∞^2:*

1) *o la componente variabile della curva generica è irriducibile* (cioè il sistema è costituito da un sistema irriducibile cui si è aggiunta una componente fissa);

2) *oppure la detta parte variabile della curva generica si compone di curve d'un fascio* (cioè il grado è 0) ([13]).

([13]) Cfr. pei sistemi lineari nel piano, BERTINI, «Istituto lombardo», 1882; l'osservazione pel caso generale della superficie si trova in NOETHER, «Math. Annalen», 8, pag. 524. La dimostrazione data qui della proposizione riproduce il concetto di quella delle mie *Ricerche*, I.

Si escluda la 2ª ipotesi, quindi (3) il grado del sistema riducibile sia $n > 0$: dico che è assurdo che le parti variabili delle curve del sistema sieno riducibili.

Anzitutto essendo $n > 0$ la dimensione del sistema vale $r > 1$, e perciò si può considerare in esso una rete dello stesso grado individuata da tre curve generiche. Si assuma come immagine dell'ente algebrico una superficie F in S_3 avente come sezioni piane d'una stella le curve della rete (4): essendo $n > 0$ il centro O della stella non è n-plo per la F, ossia la F non è un cono di vertice O. Nell'ipotesi che le parti variabili delle curve C sieno riducibili, le sezioni piane della F per O debbono resultare tutte spezzate; è ciò che dimostreremo assurdo ([14]).

Si consideri una retta generica a per O ed il fascio delle sezioni piane di F per O. Ognuna di queste sezioni piane spezzandosi, deve essere composta di un certo numero $m > 1$ di curve irriducibili che variano necessariamente in un fascio (razionale o no): invero sopra un piano per a vi è soltanto un numero finito di punti comuni a due tali componenti irriducibili, quindi per un punto generico di F' passa una sola di tali componenti. Inoltre i gruppi di m curve del fascio irriducibile $|K|$ costituenti le sezioni piane di F' per a sono i gruppi d'una serie g^1_m sopra l'ente ∞^1 che ha per elementi le curve di $|K|$. Questa g^1_m ha almeno uno o più gruppi dotati d'una o più coincidenze: ciò vuol dire che per la retta a passano dei piani toccanti la F' lungo una linea. La conclusione è stata tratta per una qualunque retta a passante per O; al variare di questa si hanno dunque almeno ∞^1 piani toccanti la F secondo curve. Segue che la F è una sviluppabile, e poichè i suoi piani tangenti passano per O essa è un cono di vertice O. Ciò contraddice all'ipotesi $n > 0$ come abbiamo osservato.

Il teorema è dunque stabilito.

Sussiste ancora il

TEOREMA. – *In un sistema lineare di curve irriducibili sopra una superficie, la curva generica non può avere punti multipli variabili (fuori dei punti base) non appartenenti alla linea multipla della superficie.*

Si supponga il contrario. Nel dato sistema irriducibile si può considerare un fascio generico (razionale); per ipotesi le curve di esso posseggono dei punti multipli variabili descriventi una linea C semplice per la superficie F.

Si trasformi la F in una F' facendo segare le curve del detto fascio dai piani per una retta a (3) in modo che la curva C' corrispondente alla C

([14]) Tale assurdo può anche farsi scaturire dal teorema di KRONECKER-CASTELNUOVO. Cfr. CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche che ammettono un sistema doppiamente infinito di sezioni piane riduttibili*, « Rendic. Acc. dei Lincei », 1894.

risulti semplice per F': ciò può sempre farsi scegliendo una rete ausiliaria (di cui le curve vengano segate dai piani di una stella col centro fuori di a) siffatta che le ∞^1 linee della rete passanti per un punto della C non abbiano comuni in conseguenza altri punti di essa (e questa condizione si può realizzare in infiniti modi, ad es. anche partendo da una rete già determinata da una non particolare stella di piani). Ciò posto in conseguenza dell'ipotesi fatta le sezioni piane della F' per a debbono avere punti multipli variabili sulla curva semplice C'. Ma ciò è assurdo, come si vede facilmente: infatti un punto generico P della C' essendo multiplo per una sezione piana di F' per a, ha come piano tangente il piano Pa; ma fuori di questo sta la tangente alla linea C' (non giacente nel detto piano) la quale è una tangente alla F', dunque P è almeno doppio per la superficie F' contro l'ipotesi.

Con ciò il teorema è stabilito.

Per ciò che è stato dimostrato innanzi esso è pure applicabile alle parti variabili delle curve d'un sistema riducibile, e può enunciarsi sotto forma invariantiva dicendo:

Sopra un ente algebrico ∞^2 le componenti variabili delle curve d'un sistema lineare non hanno punti multipli fuori dei punti base del sistema ([15]).

6. - Curve e sistemi lineari contenuti in altri.

Richiamiamo le definizioni poste nel § 2 e la loro applicazione ai sistemi lineari.

Sopra un ente algebrico ∞^2 sia dato un sistema lineare $|C|$: una curva C' che fa parte di una C ma non è una curva totale del sistema, dicesi una *curva parziale* (o contenuta parzialmente) in $|C|$: allora vi è almeno una curva *residua* C'' tale che la $C'+C''$ costituisce una curva totale di $|C|$.

Suppongasi che $|C|$ sia un sistema irriducibile, e $|C'|$ un altro sistema irriducibile siffatto che la curva generica C' sia contenuta parzialmente in $|C|$. Allora $|C'|$ dicesi *contenuto parzialmente* in $|C|$.

Il sistema $|C'|$ sia contenuto parzialmente nel sistema $|C|$; esiste allora un *sistema lineare* (di dimensione $\geqslant 0$) *residuo* di una C' generica, (costituito di tutte le curve residue di C'); questo si può denotare con

$$|C|-C'=|C''|.$$

Se $|C|\,|C'|$ sono irriducibili il sistema $|C''|$ contiene come componenti

([15]) Per sistemi lineari nel piano, cfr. BERTINI, « Istituto lombardo », 1882.

fisse i punti base per $|C'|$ e non per $|C|$, anzi un tal punto base i-plo ($i>0$) per $|C'|$ compare contato i volte tra le componenti fisse di $|C''|$: effettivamente un tal punto costituisce un buco per le curve C' (cfr. 3) ma non per le curve $C'+C''$.

7. - Disuguaglianza fra i gradi di due sistemi lineari di cui uno è contenuto parzialmente nell'altro.

Dimostriamo il teorema:

Se sopra un ente algebrico ∞^2 un sistema lineare irriducibile $|C|$ è contenuto parzialmente in un sistema irriducibile $|C'|$, il grado di $|C'|$ supera il grado di $|C|$.

Anzitutto si noti che, per la irriducibilità di $|C|$ e $|C'|$, la dimensione di $|C'|$ supera quella di $|C|$ (altrimenti i due sistemi coinciderebbero). Dopo ciò se $|C|$ è un fascio l'enunciato è stabilito senz'altro (3). Si può dunque supporre che $|C|$ sia ∞^r con $r>1$.

Si può anche supporre che la curva C_1' residua di una C rispetto a $|C'|$ sia fissa al variare di C in $|C|$, giacchè se essa contenesse una parte variabile, questa segherebbe in qualche punto una C' ed allora una curva $C+C_1'$ segherebbe una C' in un numero di punti maggiore di quello dei punti comuni ad una C e ad una C'; ma quest'ultimo numero essendo a sua volta almeno uguale al grado di $|C|$ l'enunciato resterebbe senz'altro stabilito.

Nelle dette ipotesi si consideri il sistema ∞^{r+1} determinato in $|C'|$ da una C' irriducibile e dal sistema $C_1'+|C|$ ottenuto sommando la C_1' alle curve C; sia F la superficie (semplice o multipla), immagine dell'ente, che ha per sezioni le curve del sistema. Su F alla C_1' corrisponde un punto O (in generale multiplo): le C sono le sezioni di F cogli iperpiani per O: il grado di $|C|$ è dunque il numero delle intersezioni di F (fuori di O) con un S_{r-1} generico condotto per O (ciascuna intersezione valutata secondo il suo indice di molteplicità), mentre il grado di $|C'|$ è l'ordine di F. Ora proiettando la F da O si ottiene sempre una superficie d'ordine minore: dunque il grado di $|C|$ è minore del grado di $|C'|$ c.d.d.

8. - Curve fondamentali d'un sistema lineare.

Poniamo in questo cap. tra le generalità sui sistemi lineari un cenno sulle curve fondamentali sebbene tali nozioni debbano essere invocate soltanto più tardi (IV).

Sia $|C|$ un sistema lineare irreducibile di dimensione $r>1$ sopra un ente algebrico, e sia π il *genere* di $|C|$.

Diremo *curve fondamentali* per $|C|$ le curve che presentano *una* condizione alle C che debbono contenerle: in una curva K fondamentale per $|C|$ *riterremo sempre incluse* le eventuali componenti fisse del sistema ∞^{r-1} residuo di K rispetto a $|C|$, sicchè tale sistema residuo sarà irreducibile o le curve si comporranno di quelle di un fascio. Come curve fondamentali di $|C|$ bisogna considerare anche i *punti* dell'ente algebrico *non base* per $|C|$ (punti semplici sopra una opportuna immagine dell'ente): siffatti punti che diventino base per il sistema residuo d'una curva fondamentale K rispetto a $|C|$, saranno pure da includersi in K.

Una curva K fondamentale per $|C|$ si dirà *propria* o *impropria* secondochè il sistema residuo di essa rispetto a $|C|$ (di genere π) ha il genere (effettivo) $<\pi$ o il genere π; perchè ciò abbia un significato si deve supporre (per ora) l'irreducibilità di tale sistema residuo.

Se si assume come immagine dell'ente algebrico una superficie F (semplice o multipla) avente per sezioni le curve C, una curva fondamentale per $|C|$ viene rappresentata da un punto di F in generale multiplo. Questo punto all'infuori del caso che F sia un cono col vertice in esso corrisponde *ad una curva* fondamentale di $|C|$ il cui sistema residuo è irreducibile: allora esso si dice un *punto multiplo isolato* o *proprio* se corrisponde ad una curva fondamentale propria per $|C|$ (per esso potrà passare più volte la curva multipla); si dice un punto multiplo *improprio* nel caso opposto: è dunque *proprio* un punto multiplo O di F quando le sezioni iperpiane per O hanno un genere inferiore a quello delle sezioni iperpiane generiche: i punti generici di una curva multipla di F sono improprî, ed in generale si può dire che la molteplicità di un punto improprio (nel caso in cui F sia in S_3) risulta soltanto dal passaggio per esso della curva multipla (ma ciò esigerebbe considerazioni minute pel caso di singolarità superiori).

Se come immagine dell'ente algebrico si assume invece una superficie di un S_{r+1} avente come sezioni iperpiane per un punto O le C, le curve fondamentali di $|C|$ vengono rappresentate da rette semplici o multiple per O, o da gruppi di punti (semplici o multipli) sopra rette per O, o da gruppi siffatti unitamente alle rette cui appartengono (supposte sopra la superficie).

Tra i sistemi lineari sopra un ente algebrico sono i più facili a studiarsi *i sistemi lineari irreducibili semplici che non posseggono altre curve fondamentali che punti dell'ente algebrico* (e nemmeno gruppi di punti). *Esistono sempre sull'ente sistemi siffatti*: è questa una conseguenza immediata della ammessa possibilità di trasformare una data superficie algebrica in una senza singolarità (cioè senza nessun punto multiplo) in un iperspazio ([16]).

Ai sistemi che godono della proprietà nominata daremo il nome di *sistemi non singolari.*

Dato sopra un ente algebrico un qualunque sistema lineare (irreducibile ∞^2 almeno) $|C|$, si può sempre considerare sull'ente stesso un sistema non singolare $|K|$ contenente $|C|$; basta infatti assumere come immagine dell'ente una superficie F senza singolarità di un certo S_r e considerare il sistema $|K|$ segato su questa dalle varietà di S_r d'ordine abbastanza elevato. Assumendo in $|K|$ un sistema generico ∞^3 contenente una rete generica di curve C, si può costruire una superficie φ di S_3 (trasformata di F ottenuta facendo segare dai piani le curve K del sistema ∞^3) la quale non abbia punti multipli isolati all'infuori di un punto P centro di una stella di piani seganti su φ curve C: allora tutte le curve fondamentali di $|C|$ non composte di punti, vengono rappresentate da rette (semplici o multiple per φ) passanti per P ([17]): se si può costruire una superficie φ cosiffatta in modo che *le rette che essa contiene per P sieno distinte* si dirà che $|C|$ ha *curve fondamentali distinte.*

Quando $|C|$ sia semplice la definizione si trasporta alla superficie Φ immagine dell'ente algebrico (in un S_r) avente per sezioni (iperpiane) le C, dicendo che la Φ ha *punti multipli isolati distinti,* ossia che *nessuno dei suoi punti multipli isolati ha degli altri punti multipli isolati infinitamente vicini.*

Questo concetto può esser posto direttamente come segue. Sia O un punto multiplo isolato della superficie Φ di S_r: si consideri il sistema di tutte le varietà di un certo ordine $n > 1$ passanti per O, e si trasformi la F in una φ su cui vengano segate dagli iperpiani di un certo S_t le ∞^t curve che così sono determinate su F: ad O (cioè al suo intorno su F) corrisponde una certa curva L (semplice o multipla) su F; se su questa L vi sono punti multipli isolati di φ, a questi corrispondono *punti multipli isolati di F infinitamente vicini ad O*: la mancanza di punti multipli isolati infinitamente vicini per ciascuno dei punti multipli isolati di F, equivale alla condizione che F abbia solo punti multipli isolati distinti nel senso definito innanzi. L'identità tra i due concetti è di natura intuitiva: tuttavia non sembra difficile il darne una dimostrazione rigorosa, sebbene si tratti di argomento un po' delicato.

([16]) Cfr. la nota ([10]).

([17]) Il dubbio che ad una tal curva fondamentale corrisponda invece un punto multiplo di φ infinitamente vicino a P si elimina, perchè allora una componente irreducibile di quella curva (che non è composta di punti dell'ente), non avendo intersezioni variabili colle curve K sarebbe fondamentale per $|K|$ (che non ha curve fondamentali all'infuori dei punti non base dell'ente).

II.

SISTEMI LINEARI NORMALI ED OPERAZIONI ELEMENTARI SOPRA DI ESSI

9. - Sistemi lineari normali.

Una curva, una superficie, in generale una varietà a più dimensioni si dice *normale* in un dato spazio S_r a cui *appartiene* (senza esser contenuta in un S_{r-1}) quando non può riguardarsi come proiezione di una varietà dello stesso ordine appartenente ad uno spazio più elevato. Questo concetto di natura proiettiva si traduce in un concetto di natura invariantiva per i sistemi lineari irreducibili sopra un ente algebrico (4) (e più generalmente, in modo analogo, per i sistemi lineari irreducibili di varietà M_{h-1} a $h-1$ dimensioni sopra una varietà M_h a h dimensioni).

Sopra una superficie e sul relativo ente algebrico:

Un sistema lineare irriducibile avente un certo grado $n>0$ *si dirà* normale (*o completo rispetto al grado*) *quando esso non è contenuto in un sistema lineare irriducibile più ampio avente lo stesso grado.*

Un fascio irriducibile ($n=0$) *è sempre* da considerarsi come *normale.*

Qui è indifferente intendere la parola « contenere » nel senso più largo di contenere parzialmente o nel senso più ristretto, a cagione del teorema (7).

Come nello studio proiettivo delle superficie è utile di considerare una superficie come proiezione di una superficie normale, così nello studio invariantivo dei sistemi lineari di curve sopra una superficie è utile di sostituire la considerazione di un dato sistema lineare avente un grado, con quella di un sistema normale che lo contiene.

E si noti che la disuguaglianza

$$n \geqslant r-1$$

legante il grado n (supposto >0) e la dimensione r d'un sistema lineare (3) mostra già che ampliando successivamente (ove sia possibile) un sistema lineare (irriducibile) conservandone il grado (>0), si deve giungere ad un sistema normale, e ciò almeno quando la dimensione dell'ultimo sistema ottenuto raggiunga il valore $n+1$ (nel qual caso le curve del sistema son razionali ed è razionale l'ente algebrico). Ma la questione fondamentale che importa risolvere affinchè la considerazione dei sistemi normali sia veramente utile, è la seguente:

Il sistema lineare normale nel quale è contenuto un sistema lineare di dato grado è *unico*?

Dal punto di vista proiettivo (per i sistemi semplici) la questione si enuncia così:

La superficie normale di cui una data superficie è proiezione dello stesso ordine, è proiettivamente determinata (cioè determinata a meno di trasformazioni proiettive)?

La risposta affermativa che si dà all'analoga questione per le curve, lascia prevedere che la risposta sarà affermativa anche in questo caso: la dimostrazione di ciò è stata data dal sig. Segre per le rigate ed è nota da lungo tempo per altre superficie particolari: in generale il teorema è stabilito nelle mie « Ricerche » (I, 2) col metodo che viene qui sostanzialmente riprodotto: deve però avvertirsi il fatto che il sig. Segre nella sua *Introduzione alla Geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* ([18]) (n. 54) nota come la dimostrazione da lui data per le curve (differente da questa) sia estendibile a tutti i casi di varietà a più dimensioni. Altrettanto potrebbe dirsi di questa.

Qui si vedrà nel modo più semplice come effettivamente la questione enunciata (nel caso più generale dell'enunciato sotto forma invariantiva) comporti *sempre* una risposta affermativa.

A tal fine occorre premettere il lemma:

Sopra un ente algebrico ∞^2 *due sistemi irriducibili lineari* ∞^r, ∞^s, *dello stesso grado* $n (> 0)$, *aventi comune un sistema lineare* ∞^σ *pure di grado* n $(r > \sigma,\ s > \sigma,\ \sigma > 1)$ *sono contenuti in un sistema lineare irriducibile* $\infty^{r+s-\sigma}$ *pure di grado* n.

In un $S_{r+s-\sigma}$ si fissino un $S_{r-\sigma-1}$ ed un $S_{s-\sigma-1}$ indipendenti (appartenenti quindi ad un $S_{r+s-2\sigma-1}$ e non ad uno spazio più basso), e si riferiscano proiettivamente gli elementi (curve) dei due sistemi risp. agli iperpiani per $S_{s-\sigma-1}$, $S_{r-\sigma-1}$ colla condizione che a ciascun elemento (curva) del sistema ∞^σ comune ai due dati, corrisponda sempre lo stesso iperpiano per $S_{r+s-2\sigma-1}$, tanto che quell'elemento si consideri appartenente all'uno come all'altro dei due sistemi ∞^r, ∞^s che lo contengono. Allora nasce una superficie F di $S_{r+s-\sigma}$ immagine dell'ente algebrico, sulla quale le curve dei nominati sistemi ∞^r, ∞^s vengono segate risp. dagli iperpiani per $S_{s-\sigma-1}$, $S_{r-\sigma-1}$: la F sarà una superficie semplice o multipla secondochè i due detti sistemi non appartengono od appartengono ad una stessa involuzione I_m; ci riferiremo alla 1ª ipotesi, poichè senza difficoltà si ripeterebbe il ragionamento nella seconda ipotesi sostituendo m/n ad n.

La F avrà un certo ordine $n' \geqslant n$; essa vien segata in n punti varia-

---

([18]) « Annali di Matematica », 1894.

bili dagli $S_{r+s-\sigma-2}$ per $S_{r-\sigma-1}$, o per $S_{s-\sigma-1}$, o per $S_{r+s-2\sigma-1}$: si vuol provare che deve essere $n'=n$, ossia che il sistema $\infty^{r+s-\sigma}$ segato su F da tutti gli iperpiani, e contenente i due dati, ha il grado n, ciò che serve a stabilire il teorema.

Si supponga $n'=n+\delta$ dove $\delta>0$.

Allora sopra $S_{r-\sigma-1}$ (e parimente sopra $S_{s-\sigma-1}$) vi sono almeno δ punti (distinti o coincidenti) di F, anzi precisamente δ punti, o infiniti punti. In ogni caso dunque il sistema segato su F dagli iperpiani per $S_{r+s-2\sigma-1}$ è contenuto parzialmente in quello segato dagli iperpiani per $S_{r-\sigma-1}$ e però deve avere il grado minore del grado n di questo (7) contro l'ipotesi.

Premesso il lemma precedente, sopra un dato ente algebrico si supponga che un sistema lineare irriducibile ∞^r $(r>1)$ sia contenuto in due altri sistemi normali dello stesso grado ciascuno dei quali (stante la irriducibilità) di dimensione $>r$: questi due sistemi o sono tali che l'uno contiene l'altro, o sono contenuti in un medesimo sistema dello stesso grado: ma ambedue le cose sono in contraddizione coll'ipotesi che i nominati sistemi sieno normali; dunque un sistema lineare non può esser contenuto in due diversi sistemi normali (irriducibili) dello stesso grado.

Ora abbiamo già notato che partendo da un sistema lineare irriducibile ed ampliandolo successivamente conservandone il grado, si perviene necessariamente ad un sistema normale la cui dimensione non può superare il grado (di esso e) del dato sistema aumentato di una unità; si può dunque concludere il teorema:

Sopra un ente algebrico ∞^2 un sistema lineare irriducibile o è normale, o è contenuto in un determinato sistema lineare irriducibile normale dello stesso grado.

Viene qui incluso il caso di fasci che abbiam detto doversi sempre considerare come sistemi normali. Sotto altra forma (equivalente alla prima ove s'includano le superficie multiple colle risp. curve di diramazione), si ha:

Una superficie di dato ordine o è normale, o è proiezione di una superficie normale dello stesso ordine (appartenente ad uno spazio più elevato) *proiettivamente determinata.*

10. - Sistema normale somma di due dati.

Sopra una superficie e sul relativo ente algebrico si considerino due sistemi lineari irriducibili normali $|C_1|\,|C_2|$: escludiamo dapprima che essi abbiano comuni delle curve totali. Sieno $r_1\, r_2$ $(\geqslant 1)$ le loro risp. dimensioni. Si assuma come immagine dell'ente una superficie (semplice) F di $S_{r_1+r_2+1}$ sulla quale le C_1 vengano segate dagli iperpiani per un S_{r_2} e le C_2 dagli iperpiani per un S_{r_1} senza punti comuni (è noto che ciò può farsi adoprando ancora un fascio ausiliario — § 4). Allora le quadriche di $S_{r_1+r_2+1}$ passanti per lo S_{r_1} e per lo S_{r_2} segano su F un sistema lineare irriducibile contenente totalmente tutte le curve composte C_1+C_2.

La conclusione sussiste ancora se $|C_1|\,|C_2|$ hanno delle curve totali comuni ed anche se coincidono, purchè in questo caso non sieno due fasci: solo occorre qui prendere lo S_{r_1} e lo S_{r_2} in $S_{r_1+r_2+1}$ in modo che essi abbiano comune un $S_{\delta-1}$ il quale debba esser doppio per le nominate quadriche.

Dunque anche in queste ipotesi più generali si ottiene un sistema lineare irriducibile contenente totalmente tutte le curve C_1+C_2: Se n_1, n_2 sono i risp. gradi di $|C_1|\,|C_2|$ ed i è il numero delle intersezioni variabili di una C_1 con una C_2, il grado di tale sistema vale

$$n = n_1 + n_2 + 2i$$

(essendo dato dal numero dei punti variabili comuni a due curve C_1+C_2).

Il detto sistema è contenuto in un sistema normale $|C|$ dello stesso grado n, che dico essere indipendente dall'arbitrarietà che compare nella costruzione eseguita. Occorre per ciò far vedere che non possono esistere due sistemi normali (irriducibili) $|C|\,|C'|$ (di grado n) contenenti totalmente tutte le curve C_1+C_2. Ciò segue infatti dall'osservare che $|C|\,|C|'$ avendo comuni infinite curve totali avrebbero comune il minimo sistema lineare (irriducibile di grado n) da esse determinato (7). Si può dunque affermare che:

Se sopra un ente algebrico ∞^2 sono dati due sistemi lineari irriducibili normali $|C_1|\,|C_2|$, che non sieno due fasci coincidenti, esiste sempre un determinato sistema irriducibile normale $|C|$ contenente totalmente tutte le curve composte C_1+C_2.

Si dirà che $|C|$ è il sistema normale *somma* $|C_1+C_2|$.

Si osservi come *lo stesso resultato si estende* subito al caso che $|C_1|\,|C_2|$ sieno riducibili senza parti fisse purchè non composti colle curve dello stesso fascio (la dimostrazione va ugualmente).

Se poi $|C_1|\,|C_2|$ senza parti fisse sono composti colle curve d'uno stesso fascio, si ha ancora un sistema $|C_1+C_2|$ contenente tutte le curve C_1+C_2 ma non più irriducibile: s'intenderà in tal caso che $|C_1+C_2|$ sia il sistema più ampio contenente totalmente le C_1+C_2, composto di tutti i gruppi d'una serie completa sopra l'ente algebrico ∞^1 che ha per elementi le curve del fascio.

Come abbiamo notato il grado di $|C|=|C_1+C_2|$ vale:

$$n = n_1 + n_2 + 2i\,,$$

essendo n_1, n_2 i risp. gradi di $|C_1|\,|C_2|$ ($\geqslant 0$) ed i il numero delle intersezioni variabili di una C_1 e d'una C_2.

Un punto dell'ente base ϱ_1-plo per $|C_1|$ e base ϱ_2-plo per $|C_2|$ è base $(\varrho_1+\varrho_2)$-plo per $|C|$. Se $|C|$ è un sistema senza parti fisse, il sistema $|C+C|=|2C|$ si dirà il *doppio* di $|C|$ ecc.

Notevole è la relazione in cui si trovano i due sistemi $|C_1|\,|C_2|$ entro il sistema $|C|=|C_1+C_2|$. Ciascuno di essi è (tutto) il residuo di una curva generica dell'altro rispetto a $|C|$, di guisa che sono contenuti totalmente in $|C|$ tutti i sistemi riducibili

$$C_1+|C_2| \quad \text{e} \quad C_2+|C_1|$$

composti di una curva fissa dell'uno e di una variabile dell'altro.

Questa relazione si esprime dicendo che $|C_1|\,|C_2|$ sono *due sistemi residui l'uno dell'altro rispetto a* $|C|$.

11. - Estensione del concetto di sistema normale ai sistemi riducibili.

Estendiamo il concetto di sistema lineare normale sopra un ente algebrico.

Un *sistema lineare comunque riducibile* (di dimensione $\geqslant 0$) si dirà *normale* se *non è contenuto totalmente in un altro* (diverso e quindi) *più ampio*.

Applicata ai sistemi irriducibili (∞^1 almeno) questa definizione equivale a quella del § 9 (per il § 7).

Si tratta ora di dimostrare il teorema (estensione di quello dato pei sistemi irreducibili nel § 9):

Sopra un ente algebrico ∞^2 *una curva comunque riducibile è sempre contenuta totalmente in un determinato sistema lineare normale* (riducibile o no, di dimensione $\geqslant 0$).

Anzitutto l'enunciato è soddisfatto se la curva in questione non è contenuta totalmente in alcun sistema ∞^1 o soltanto in un fascio.

Basta dunque dimostrare il lemma «se due sistemi lineari contengono totalmente una curva comunque riducibile, essi sono contenuti totalmente in un medesimo»: dopo ciò si osserverà che un sistema dato non potrà essere contenuto totalmente in uno di dimensione arbitrariamente grande, perchè la dimensione di un tale sistema spogliato delle parti fisse ha un limite in funzione del suo grado, ed il sistema dato contiene un numero finito di parti fisse (cfr. 9).

Per stabilire il lemma nelle ipotesi più generali riferiamoci ad una curva C e supponiamo che essa sia contenuta totalmente in due sistemi

$$C''' + C' + |C_1| , \qquad C''' + C'' + |C_2|$$

dove $|C_1|\,|C_2|$ non contengono parti fisse e $C'C''$ non hanno componenti comuni. Osserviamo subito che C', C'', C''', sono componenti di C sicchè si avrà in generale

$$C = C' + C'' + C''' + X$$

(dove qualcuna di queste componenti può anche mancare). Allora

$$\begin{array}{lccc} |C_1| & \text{contiene totalmente} & & C'' + X \\ |C_2| & \text{»} & \text{»} & C' + X . \end{array}$$

Sappiamo (10) che esiste un sistema

$$|C_1 + C_2|$$

che contiene totalmente tutte le curve composte $C_1 + C_2$: questo contiene dunque totalmente i sistemi

$$X + C'' + |C_2| \qquad \text{e} \qquad X + C' + |C_1| ;$$

quindi il residuo di X rispetto ad esso, che può denotarsi con

$$|C_1 + C_2| - X$$

contiene totalmente

$$C' + |C_1| \qquad \text{e} \qquad C'' + |C_2| .$$

Segue che il sistema

$$|C| = C''' + |C_1 + C_2| - X$$

contiene totalmente

$$C''' + C' + |C_1| \qquad \text{e} \qquad C''' + C'' + |C_2|$$

ciò che dimostra il teorema.

12. - Estensione del concetto di sistema somma.

Dopo il teorema del precedente § possiamo estendere a tutti i sistemi lineari normali comunque riducibili (di dimensione $\geqslant 0$) sopra un ente algebrico il significato del concetto di somma posto nel § 10, pei sistemi irriducibili.

Si designino con $|C_1|\,|C_2|$ *due sistemi lineari normali* (*di dimensione* $\geqslant 0$) *comunque riducibili sopra un ente algebrico*; *esiste un sistema lineare normale*

$$|C_1 + C_2|$$

$$(\textit{di dimensione} \geqslant 0)\,,$$

contenente totalmente tutte le curve composte $C_1 + C_2$.

Per provarne l'esistenza basta mostrare che esiste un sistema lineare contenente totalmente le $C_1 + C_2$, esso sarà contenuto in un sistema normale e questo sarà unico pel § precedente.

Ora un sistema contenente le $C_1 + C_2$ si ottiene sommando i sistemi composti delle parti variabili di $|C_1|\,|C_2|$ e aggiungendo le parti fisse.

Si noti che se $|C_1| = C_1$ ha la dimensione 0, sono in generale diversi i sistemi

$$|C_1 + C_2| \qquad \text{e} \qquad C_1 + |C_2|\ ;$$

il primo potrà essere irriducibile mentre il secondo ha come parte fissa C_1.

In particolare se C_1 è una curva eccezionale ossia un punto O dell'ente, base i-plo per $|C_2|$

$$(C_1 = O)\,, \qquad \text{il sistema}$$

$$|C_2 + O|$$

è il più ampio sistema contenente totalmente $|C_2| + O$ (avente O come $(i-1)$-plo).

13. - Teorema del resto.

Sopra un ente algebrico ∞^2 *sieno dati due sistemi lineari comunque riducibili* $|C_2|$ e $|C_1|$ *il secondo dei quali potrà anche aver la dimensione* 0 (ossia essere una curva C_1).

Stabiliamo allora gli enunciati che seguono:

1) *Se* $|C_2|$ *contiene una curva* C_1 *il sistema residuo di essa*

$$|C|=|C_2|-C_1\,,$$

è normale.

Infatti se $|C|$ non fosse normale ma contenuto totalmente in un sistema più ampio $|C'|$, i due sistemi

$$C_1+|C'| \qquad \text{e} \qquad |C_2|$$

conterrebbero totalmente

$$C_1+|C|$$

e però sarebbero contenuti totalmente in un medesimo sistema contro l'ipotesi che $|C_2|$ sia normale.

2) *Supposto* $|C_1|$ (∞^1 *almeno*), *e* $|C_2|$ (∞^2 *almeno*) *contenente* $|C_1|$, *il sistema*

$$|C|=|C_2|-C_1$$

(*di dimensione* $\geqslant 0$) *residuo di una* C_1 *non varia al mutare di* C_1 *in* $|C_1|$, *e quindi è tale che*

$$|C_1+C|=|C_2|\;:$$

tale sistema $|C|$ potrà designarsi con

$$|C_2-C_1|\,.$$

Sia

$$|C|=|C_2|-C_1'$$

il residuo di una particolare C_1' di $|C_1|$; si deve mostrare che $|C_2|$ contiene totalmente tutte le curve $C+C_1$ ossia tutti i sistemi

$$C+|C_1|\,.$$

Per questo si consideri che il sistema normale

$$|C_1+C_2|-C_1'$$

contiene totalmente $|C_2|$ e però (entrambi i sistemi essendo normali)

$$|C_1+C_2|-C_1'=|C_2|\;;$$

d'altra parte in $|C_2|$ sono contenute totalmente tutte le curve composte

$$C + C_1',$$

e però in $|C_1 + C_2|$ sono contenute totalmente tutte le curve

$$C_1 + C + C_1',$$

ossia tutti i sistemi

$$C_1' + C + |C_1| \; ;$$

ma

$$|C_1 + C_2| - C_1' = |C_2| \, ,$$

dunque in $|C_2|$ è contenuto totalmente ogni sistema

$$C + |C_1| \qquad \text{c. d. d.}$$

Il resultato ottenuto si può enunciare diffusamente in parole dicendo:

Sopra un ente algebrico si abbia un sistema lineare normale (∞^2 *almeno*) $|C_2|$ *ed in esso sia contenuto un sistema lineare normale* $|C_1|$: *se una curva* C_1 *ha come residuo rispetto a* $|C_2|$ *un sistema* $|C|$, $|C_1|$ *è a sua volta il sistema residuo di una qualsiasi curva* C *rispetto a* $|C_2|$; *i due sistemi* $|C|\,|C_1|$ *sono quindi residui l'uno dell'altro rispetto a* $|C_2|$.

Questo enunciato costituisce la prima parte del così detto *teorema del resto*: la seconda parte di natura proiettiva sarà stabilita più tardi (cfr. il § 35).

Corollario proiettivo. – Il primo enunciato dà luogo al corollario proiettivo.

Proiettando una superficie normale in uno spazio inferiore da una sua curva o da suoi punti, si ottiene una superficie normale.

14. - Modo di dedurre ogni sistema lineare da un sistema irriducibile.

Sopra un ente algebrico si abbia un sistema lineare normale $|C_1|$. Si assuma come immagine dell'ente una superficie F in un S_r. Ogni curva C_1 (compresi i punti che essa può avere come componente) può venire segata (parzialmente) su F da una varietà V_n d'ordine n assai elevato.

Dunque il sistema $|C_1|$ è contenuto in quello irriducibile $|C|$ segato su F da tutte le V_n. Se inoltre n è stato scelto assai alto, il sistema residuo $|C - C_1|$ è irriducibile a meno di punti (i punti base di $|C_1|$), che possono comparire come componenti fisse di esso: designando con $|C_2|$ questo sistema irriducibile costituito dalle curve variabili di $|C - C_1|$, e designati inoltre con $O_1 \dots O_s$ i punti base di $|C_1|$ sull'ente, di risp. molteplicità $\varrho_1 \dots \varrho_s$ ($\geqslant 1$), si avrà:

$$|C_1| = |C - C_2 - O_1^{\varrho_1} - \dots - O_s^{\varrho_s}| :$$

ciò si può esprimere dicendo che $|C_1|$ *può esser dedotto da un sistema irriducibile semplice* $|C|$ *staccando la curva generica d'un sistema irriducibile* $|C_2|$ *e imponendo dei punti base* $O_1^{\varrho_1} \dots$ *al sistema residuo.*

Si noti che, se si è assunta F senza singolarità, $|C|$ è *un sistema non singolare.*

Si avverta ancora che per n assai elevato si può imporre al sistema $|C|$, segato su F dalle V_n, di possedere i punti base $O_1^{\varrho_1} \dots$ deducendo così da $|C|$ un sistema irriducibile che (reso normale) sarà il sistema somma $|C_1 + C_2|$.

Dunque *dato sull'ente algebrico un qualunque sistema lineare normale* $|C_1|$ *si può sempre considerare* (in infiniti modi) *un sistema irriducibile* $|C_2|$ *tale che il sistema normale somma* $|C_1 + C_2|$ *sia irriducibile.*

Queste osservazioni saranno utili nel seguito.

15. - Grado virtuale d'un sistema lineare.

Sopra un ente algebrico ∞^2 si abbia un sistema irriducibile $|C_1|$: se $|C_2|$ è un altro sistema irriducibile e $|C_1|$ $|C_2|$ non sono fasci coincidenti, è anche irriducibile $|C| = |C_1 + C_2|$. Allora detti n_1, n_2, N, i risp. gradi di $|C_1|$, $|C_2|$, $|C|$, e designato con i il numero delle intersezioni variabili di una C_1 e una C_2 generiche si ha (10)

$$N = n_1 + n_2 + 2i ,$$

sicchè si può dire che n_1 è definito dall'equazione

$$N = x + n_2 + 2i .$$

Suppongasi ora che $|C_1|$ sia comunque riducibile (di dimensione $\geqslant 0$) e si costruisca sull'ente un sistema irriducibile $|C_2|$ tale che

$$|C| = |C_1 + C_2|$$

sia irriducibile (14): designati ancora con n_2 N i risp. gradi di $|C_2|$ $|C|$ e con i il numero delle intersezioni di una C_1 con una C_2, si potrà definire un numero $x = n_1$ mediante l'equazione

$$N = x + n_2 + 2i$$

e chiamare questo numero il *grado virtuale* di $|C_1|$. Occorre però di stabilire che tale numero n_1 è indipendente dall'arbitrarietà che compare nella scelta di $|C_2|$, ossia è proprio inerente a $|C_1|$.

Si prenda dunque sull'ente un altro qualsiasi sistema irriducibile $|C_2'|$ tale che $|C'|=|C_1+C_2'|$ sia irriducibile, e designati con n_2' N' i risp. gradi di $|C_2'|$ $|C'|$, con i' il numero delle intersezioni di una C_1 con una C_2', mostriamo che le due equazioni

$$N = x + n_2 + 2i$$

$$N' = x + n_2' + 2i'$$

definiscono lo stesso numero $x = n_1$, cioè che si ha

$$N - n_2 - 2i = N' - n_2' - 2i' .$$

A tal fine consideriamo il sistema irriducibile

$$|K| = |C_1 + C_2 + C_2'| = |C + C_2'| = |C_2 + C'|$$

e valutiamone il grado riguardandolo una volta come somma di $|C|$ $|C_2'|$, un'altra volta come somma di $|C_2|$ $|C'|$. Detto j il numero delle intersezioni di una C_2 con una C_2', avremo che una C e una C_2' si segano in $i'+j$ punti, mentre una C_2 ed una C' si segano in $i+j$ punti; in conseguenza il grado di $|K|$ vale

$$N + n_2' + 2(i + j) = N' + n_2 + 2(i + j) ;$$

da questa uguaglianza si trae appunto

$$N - n_2 - 2i = N' - n_2' - 2i' \qquad \text{c. d. d.}$$

Dopo ciò se $|C_1|$ $|C_2|$ sono due sistemi comunque riducibili sull'ente algebrico, ed n_1, n_2 sono i loro gradi virtuali, i il numero delle intersezioni (fuori dei buchi) di una C_1 con una C_2, il grado virtuale n_{12} di $|C_1+C_2|$ vale

$$n_{12} = n_1 + n_2 + 2i .$$

Per provarlo introduciamo un sistema ausiliario irriducibile $|C|$ siffatto che i sistemi

$$|C'| = |C_1 + C| , \qquad |C''| = |C_2 + C| , \qquad |C'''| = |C_1 + C_2 + C|$$

sieno tutti e tre irriducibili, il che può sempre esser fatto scegliendo dapprima $|C|$ in guisa che riesca irriducibile $|C'''|$ e considerando (ove occorra) in luogo di $|C|$ il sistema $|mC''' - C_1 - C_2|$ dove m è assai elevato.

Ciò posto designamo risp. con

$$n' \quad n'' \quad n''' \quad n$$

i gradi (effettivi = virtuali) dei sistemi $|C'|$, $|C''|$, $|C'''|$, $|C|$, e con i_1, i_2 risp. le intersezioni di una C con una C_1 e con una C_2. Valutando il grado di $|C'''|$ avremo

$$n''' = n_{12} + n + 2i_1 + 2i_2 \qquad (\text{perchè } |C'''| = |(C_1 + C_2) + C|)$$

$$n''' = n_1 + n'' + 2i + 2i_1 \qquad (\text{perchè } |C'''| = |C_1 + C''|)$$

$$n''' = n_2 + n' + 2i + 2i_2 \qquad (\text{perchè } |C'''| = |C_2 + C'|)\ ;$$

siccome poi

$$n' = n_1 + n + 2i_1\,, \qquad n'' = n_2 + n + 2i_2\,,$$

si deduce

$$n_{12} = n_1 + n_2 + 2i \qquad \text{c. d. d.}$$

Possiamo dunque concludere che: *Per ogni sistema lineare comunque riducibile (di dimensione $\geqslant 0$) dato sopra un ente algebrico ∞^2, resta definito un numero intero detto il suo grado virtuale, mediante le condizioni seguenti:*

1) *il grado virtuale coincide col grado effettivo per ogni sistema irriducibile;*

2) *se $|C_1|\,|C_2|$ sono due qualunque sistemi lineari sull'ente, di gradi virtuali risp. n_1, n_2, e se i è il numero delle intersezioni di una C_1 e una C_2 il grado virtuale di $|C_1 + C_2|$ vale*

$$n_1 + n_2 + 2i\,.$$

Corollario. – Un punto O dell'ente algebrico contato i volte può riguardarsi come un sistema lineare (di dimensione 0) $|O^i|$: il suo grado virtuale può quindi essere valutato considerando due sistemi lineari irriducibili $|C|$, $|C - O^i|$, il primo dei quali non abbia O come punto base; si trova allora che il detto grado vale $i(i-2)$ (perchè i gradi di $|C|\,|C - O^i|$ differiscono di i^2): in conseguenza l'imposizione d'un nuovo punto base i-plo alle curve d'un sistema lineare sull'ente, diminuirà sempre di i^2 il grado virtuale del sistema, indipendentemente dalla irriducibilità di esso e del residuo. Segue anche che il grado virtuale d'un sistema lineare $|C|$ sopra un ente algebrico può essere valutato nel seguente modo: si prenda un sistema irriducibile $|C'|$ che contenga $|C|$ e tale che $|C'-C|$ sia irriducibile all'infuori di punti componenti fissi $O_1^{i_1} O_2^{i_2} \dots$ (base per $|C|$ e non per $|C'|$); designati con n', n'' i risp. gradi (effettivi) di $|C'|$ e $|C''| = |C' - C - O_1^{i_1} - \dots|$ e con i il numero delle intersezioni di una C' con una C'', il grado virtuale di $|C|$ vale

$$n = n' - n'' - 2i - i_1^2 - i_2^2 - \dots .$$

Osservazione. – Un sistema lineare normale (comunque riducibile) non è contenuto in altro dello stesso grado virtuale: tale proprietà è caratteristica pei sistemi normali, e pei sistemi irriducibili fu posta in principio come definizione.

16. - Genere (virtuale) delle curve riducibili di un sistema lineare.

Un sistema lineare $|C|$ sopra un ente algebrico si dirà *connesso* se ogni sua curva generica C è connessa; vale a dire (considerata la C come una superficie di RIEMANN) si può stabilire un cammino continuo fra due punti qualunque di essa: allora è connessa ogni particolare curva totale del sistema, perchè limite d'una C connessa.

Se sulla C generica vi sono $2p$ famiglie di tagli chiusi irreducibili che la riducono semplicemente connessa, se quindi è p il *genere* della C, sopra ogni curva totale C' di $|C|$ si hanno $2p$ tagli chiusi irreducibili che la riducono semplicemente connessa limiti di quelli considerati su C, e quindi C' concepita come curva totale di $|C|$ ha il genere p: può bensì avvenire che la C' abbia qualche punto multiplo O che non sia tale per le C (o abbia per C' una molteplicità maggiore), ma O è in tal caso da riguardarsi come un ponte di connessione della C' e precisamente se O è i-plo per C' e non base per $|C|$ si devono considerare in O $i(i-1)/2$ ponti di connessione (semplici) colleganti le coppie di rami di C'; diciamo che vi è un ponte di connessione tra due rami di C' in un punto quando in esso si riguardano attaccate le due falde della corrispondente superficie di RIEMANN; sopprimere un ponte siffatto deve riguardarsi come l'eseguire due tagli chiusi sulla (superficie di RIEMANN) C', uno su ciascun ramo; in O dunque vengono assorbiti $i(i-1)$ tagli chiusi irreducibili limiti di corrispondenti tagli chiusi su C, che si perderebbero rompendo la connessione di C' in esso: per questo il punto O si dirà un *ponte di connessione d'ordine* $i(i-1)$ per la C'. Quanto ai rami di C' che passano per O non è detto che essi debbano appartenere ad una stessa componente irriducibile di C'.

Consideriamo dunque per generalità (sull'ente algebrico) una particolare curva composta

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_s$$

entro un sistema lineare irriducibile $|C|$, e supponiamo che essa sia connessa ed abbia ϱ punti multipli di connessione di ordini risp. $i_1, i_2, \ldots, i_\varrho$; *il genere di* C *vale*

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_s + i_1 + i_2 + \ldots + i_\varrho - s + 1 .$$

Infatti sulla C si possono eseguire successivamente

$2\pi_1$	tagli	chiusi	irriducibili	su C_1
$2\pi_2$	»	»	»	su C_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$2\pi_s$	»	»	»	su C_s ;

dopo ciò si possono ancora tagliare opportunamente $i_1+i_2+\ldots+i_s-s+1$ ponti di connessione fra le varie parti di C (ciò che equivale a compiere

$$2\{i_1 + i_2 + \ldots + i_s - s + 1\}$$

tagli chiusi) lasciandone $s-1$ sufficienti a stabilire la connessione fra le s componenti: allora la C dopo questi 2π tagli è semplicemente connessa.

La precedente formula è quella di NOETHER [19] salvo che in essa non si tien conto di tutti i punti comuni alle varie parti di C come ponti di connessione.

Secondo la detta formula si valuterà il genere di ogni curva d'un sistema lineare connesso (se riducibile); questo è il genere di ogni curva totale del sistema e si dirà *genere virtuale del sistema. Per i sistemi irriducibili il genere virtuale coincide col genere effettivo* (3).

La formula precedente si può anche applicare alle curve ed ai sistemi non connessi: invero data una curva composta di h parti non connesse, essa si riduce connessa con $h-1$ ponti di connessione che sono da riguardarsi come $-2(h-1)$ tagli chiusi.

La formula stessa si applica alla valutazione del genere di una curva totale riducibile in un sistema lineare irriducibile $|C|$ di genere π: se

---

(19) *Ueber die reductiblen algebraischen Curven*, « Acta Mathem. », 8.

una C si spezza in due parti C_1, C_2 di generi π_1, π_2 con i punti comuni fuori dei punti base (ciascun punto essendo contato debitamente), questi i punti e questi soli sono ponti di connessione per la C_1+C_2 curva totale di $|C|$ (§ 3) e però si ha

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1 .$$

In particolare:

Se (sopra un ente algebrico) si hanno due sistemi lineari irriducibili $|C_1|\,|C_2|$ *di generi risp.* π_1, π_2, *ed una* C_1 *ha con una* C_2 i *punti comuni variabili il genere di* $|C_1+C_2|$ *vale*

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1 .$$

Il genere virtuale π_1 d'un sistema lineare $|C_1|$ sopra un ente algebrico ha un altro significato notevole.

Si assuma sull'ente un sistema irriducibile $|C|$ (p. e. non singolare) da cui $|C_1|$ sia dedotto staccando una curva C_2 (curva di $|C - C_1|$ spogliata di parti fisse, che preso $|C|$ opportunamente può anche supporsi irriducibile) e imponendo dei nuovi punti base $O_1^{\varrho_1}$, $O_2^{\varrho_2}$, ..., $O_r^{\varrho_r}$ ([20]).

Sia π il genere di $|C|$, π_2 il genere di C_2, ed i il numero dei punti non base per $|C|$ comuni ad una C_1, C_2.

Si ha

$$|C| = |C_2 + C_1 + O_1^{\varrho_1} + O_2^{\varrho_2} \dots + O_r^{\varrho_r}|$$

e quindi

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + \sum_1^r \frac{\varrho_s(\varrho_s - 1)}{2} + i - 1 :$$

questa formula definisce il genere virtuale π_1 del sistema lineare $|C_1|$ e dà per questo un valore indipendente dalla particolare scelta del sistema irriducibile $|C|$ che contiene $|C_1|$.

([20]) Si avverte che ove un punto base O_s di $|C_1|$ figura un certo numero di volte tra le componenti fisse di $|C_1|$ ciò influisce sulla molteplicità del punto per $|C_1|$ secondo il § 2.

III.

CURVE SUBAGGIUNTE

17. - Superficie subaggiunte ad una data di S_3.

Agli sviluppi ulteriori della nostra teoria, innanzi di studiare un modo di operare sui sistemi lineari diverso da quello di somma e di sottrazione considerato, dobbiamo premettere alcuni lemmi di natura proiettiva.

Data una superficie F_n, d'ordine n in S_3, diremo *superficie subaggiunta* ad essa, ed indicheremo con ψ_r una superficie d'ordine r la quale seghi un piano generico secondo una curva aggiunta alla sezione piana di F_n.

Esistono certo delle ψ_r per $r \geqslant n - 1$, poichè tali sono le superficie polari dei punti dello spazio rispetto ad F_n, unite a superficie d'ordine $r - (n - 1)$.

Le superficie di un dato ordine subaggiunte ad F_n (se esistono) *formano un sistema lineare* (di dimensione $\geqslant 0$). Infatti la superficie generica di un fascio determinato da due ψ_r soddisfa alle stesse condizioni imposte alla ψ_r e quindi è una ψ_r.

Dopo ciò stabiliamo il

LEMMA. - *Se F_n è una superficie d'ordine n in S_3 ed* a *una retta generica che l'incontra in n punti semplici, una superficie φ la quale seghi un piano generico per* a *secondo una curva aggiunta alla sezione di F_n è subaggiunta ad F_n* ([21]).

Si supponga dapprima che φ abbia l'ordine $n - 3 + \varrho \geqslant 1$; allora esistono certo (come abbiamo notato) delle superficie ψ dello stesso ordine $n - 3 + \varrho$ soddisfacenti alle condizioni che vogliamo mostrare verificate per φ. Ciò posto s'indichino con ψ tutte le superficie d'ordine $n - 3 + \varrho$ subaggiunte ad F_n, cioè seganti i piani α secondo curve d'ordine $n - 3 + \varrho$ aggiunte alla sezione di F_n, e con φ tutte le superficie analoghe alla data che godono di questa proprietà rispetto ai piani del fascio di asse a (tra le quali superficie stanno le ψ).

Le curve γ intersezioni di F_n con una φ od una ψ *fuori della curva multipla* ([22]), hanno lo stesso ordine perchè incontrate nello stesso numero di punti dai piani per a (tale numero è $2\pi - 2 + \varrho n$ se π è il genere delle sezioni di F_n con un piano α, genere uguale per ipotesi a quello di una

([21]) La dimostrazione di questo lemma è stata composta sopra un cenno comunicatomi dal sig. CASTELNUOVO.

([22]) Con questa locuzione intendiamo che debba computarsi come facente parte di una tal curva γ in un piano generico, non solo ogni punto comune ad F_n e a φ (o a ψ) semplice per F_n, ma anche (debitamente) ogni punto multiplo per F_n che eventualmente avesse per φ (o per ψ) una molteplicità maggiore di quella che ivi compete ad una curva aggiunta.

sezione con un piano per a); ora tutte le φ (come le ψ) formano un sistema lineare (e lo si prova analogamente), quindi le sezioni delle superficie φ col piano α sono curve d'ordine $n-3+\varrho$ appartenenti ad un sistema lineare; questo sistema contiene in sè quello delle sezioni delle ψ (aggiunte alla sezione K di F_n) e le sue curve incontrano la K nello stesso numero $2\pi-2+\varrho n$ di punti; tali curve sezioni di F_n colle φ, sono dunque aggiunte alla K c.d.d.

Resta a stabilire la cosa quando l'ordine delle φ sia $< n-1$ e quindi cada dubbio sull'esistenza delle ψ; per ciò basterà aggiungere a φ un numero sufficiente di piani arbitrarî affinchè diventi d'ordine $\geqslant n-1$ e ripetere il ragionamento per la superficie composta.

18. - Curve subaggiunte sopra una superficie di S_3.

Data una superficie F_n d'ordine n in S_3, una curva K di F_n, si dirà una *curva subaggiunta di rango* r sulla superficie se ne sega la sezione piana generica C_n (di genere π) in un gruppo della serie $g_{2\pi-2+rn}$ determinata su C_n dalle curve ad essa aggiunte d'ordine $n-3+r$: l'intero r può avere qui un valore qualunque $\gtreqless 0$: parlando di curve K subaggiunte sulla superficie, ove non si aggiunga altro, si sottintenderà di rango $r=0$.

Si osservi che: *L'intersezione di F_n con una superficie subaggiunta ψ_{n-3+r}, fuori della curva multipla, è una curva subaggiunta di rango r su F_n.*

Ciò è una conseguenza immediata della definizione.

Viceversa si ha:

Una curva K subaggiunta di rango r sopra una superficie F_n non rigata, a sezioni di genere >0, d'ordine n in S_3, è la sezione di questa, fuori della curva multipla, con una superficie subaggiunta ψ_{n-3+r} d'ordine $n-3+r$.

Anzitutto si supponga $r<3$. Si prenda una retta generica a ed in un piano generico per essa si fissi quella curva C_{n-3+r} d'ordine $n-3+r$ che è aggiunta alla sezione piana di F_n, e passa pel gruppo comune a questa e a K: variando il piano la C_{n-3+r} descrive una superficie ψ che (pel § precedente) è subaggiunta ad F_n: essa ha l'ordine $\geqslant n-3+r$: dico che tale ordine non supera $n-3+r$. Invero nell'ipotesi opposta la retta a appartiene un certo numero di volte alla ψ, quindi gli n punti (semplici) comuni ad a e F_n appartengono alla intersezione di ψ con F_n (fuori della curva multipla) e poichè essi non stanno su K (essendo a retta generica) la nominata intersezione contiene oltre K qualche altra parte che deve comporsi di linee piane per a, ciascuna d'ordine $<n$; segue che vi sono per a (retta generica) delle sezioni piane spezzate di F_n

e quindi (pel teorema di KRONECKER-CASTELNUOVO) ([23]) la F_n è rigata o è la superficie di STEINER del 4° ordine a sezioni razionali: ciò contrasta all'ipotesi dell'enunciato. Il teorema resta dunque stabilito per $r < 3$.

Suppongasi $r = 3$.

Si può fissare *una* C_n aggiunta alla sezione piana di F_n in un piano generico per a e passante pel gruppo comune al piano e a K, colla condizione che essa debba passare per un punto fisso di a fuori di F_n. Allora variando il piano per a la C_n genera una ψ che si prova (analogamente al caso $r < 3$) avere l'ordine n e non maggiore.

Supposto $r > 3$ fissiamo su a $r - 2$ punti generici $B_1 B_2 \ldots B_{r-2}$ fuori di F_n; fissiamo inoltre $r - 3$ piani $\beta_2 \beta_3 \ldots \beta_{r-2}$ passanti risp. per $B_2 B_3 \ldots B_{r-2}$ e non per a: esiste in ogni piano α contenente a *una* tra le $\infty^{(r-1)(r-2)/2}$ curve C_{n-3+r} aggiunte alla sezione di F_n e passanti per il gruppo comune a K ed alla sezione piana C di F_n, che soddisfa alla condizione di contenere $B_1 B_2 \ldots B_{r-2}$, di toccare il piano β_2 in B_2, di avere un contatto 3-punto con β_3 in $B_3, \ldots$, un contatto $(r - 2)$-punto con β_{r-2} in B_{r-2}; questa C_{n-3+r} così definita non può essere spezzata (nemmeno su piani particolari per a) nella sezione C di F_n (la quale sotto le ipotesi poste è irriducibile in ogni piano per a, come già si è avvertito) ed in una residua curva d'ordine $r - 3$ passante per $B_1 B_2 \ldots B_{r-2}$, toccante β_2 in B_2, avente un contatto 3-punto con β_3 in B_3, ecc., perchè una siffatta curva non esiste. Ora variando α per a la C_{n-3+r} così definita genera una superficie φ d'ordine $\geqslant n - 3 + r$ subaggiunta a F_n (cfr. il precedente lemma); che questa φ abbia proprio l'ordine $n - 3 + r$ e non maggiore segue analogamente al caso trattato in cui $r < 3$.

Così è provato che la K è in ogni caso sezione di F_n (fuori della curva multipla) con una superficie subaggiunta d'ordine $n - 3 + r$ e quindi è stabilito il teorema.

19. - Curve subaggiunte ad un sistema lineare.

Sia $|C|$ un sistema lineare irriducibile di genere π e grado n, sopra un ente algebrico ∞^2.

Col nome di *serie* $g_{2\pi-2+rn}$ denotiamo (ove esista) la serie completa di gruppi di $2\pi - 2 + rn$ punti che si ottiene su una C generica nel seguente modo:

1) se $\pi > 0$ ed $r \geqslant 0$, sommando ([24]) la serie canonica $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ di C

([23]) Cfr. CASTELNUOVO, « Rendic. Lincei », gennaio 1894.

([24]) Ricordiamo dagli elementi della geometria sopra una curva che date su una curva C due serie complete g_m g_n esiste *una serie completa* g_{m+n} *somma* di g_m g_n la quale contiene tutti i con quella r-pla della serie *caratteristica* (g_n) segata su C dalle altre curve del sistema $|C|$ (se $|C|$ è un fascio si ha $n = 0$, e la detta serie si riduce, come per $r = 0$, alla $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$);

2) se $\pi > 0$ ed $r = -\varrho < 0$, staccando dalla $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ la serie ϱ-pla di g_n (supposta speciale);

3) se $\pi = 0$ $(r > 0)$ prendendo la serie g_{rn-2}^{rn-2} di tutti i gruppi di $rn - 2$ punti della C.

Una curva dell'ente algebrico si dirà una *curva subaggiunta di rango* r a $|C|$ (e si indicherà con K_r), se sega ogni curva C generica secondo un gruppo di $g_{2\pi-2+rn}$.

Sommando ad una K_r delle curve fondamentali di $|C|$ si ha ancora una curva subaggiunta di rango r a $|C|$: in particolare se $|C|$ è un fascio ad una $K_r = K_0$ si possono sommare quante si vogliono curve del fascio. Ma se la dimensione di $|C|$ è > 1 l'indeterminazione che compare nella definizione delle curve subaggiunte dipende soltanto da *parti fisse* (fondamentali per $|C|$) che secondo riuscirà più opportuno potremo immaginare sommate o tolte ad esse.

Se K_s è *una curva subaggiunta di rango* s a $|C|$, *le curve* $K_s + rC$ (> 0) *costituiscono curve* K_{r+s} *subaggiunte di rango* $r + s$ *a* $|C|$.

La teoria delle curve subaggiunte ad un sistema lineare compare qui essenzialmente come preparazione alla teoria delle *curve aggiunte* che saranno definite più tardi: in questo studio fatto a tale scopo si può porre delle limitazioni che saranno tolte del tutto nella teoria delle curve aggiunte; precisamente imponiamo ai sistemi lineari $|C|$ rispetto a cui si considerano le curve subaggiunte, la restrizione di essere *irriducibili, semplici, di genere* $\pi > 0$, e *di non possedere un fascio di curve unisecanti* sull'ente algebrico; *tale restrizione figura implicitamente in tutto questo capitolo* (cioè fino al § 26).

Allora una superficie F_n di S_3, immagine dell'ente algebrico, avente come sezioni piane ∞^3 curve generiche C, è non rigata a sezioni di genere $\pi > 0$.

Si supponga $|C|$ normale; la possibilità di considerare una superficie F_n immagine dell'ente algebrico partendo da un qualunque sistema ∞^3 contenuto in $|C|$ ci permette (stante il § 20) di affermare che: una curva la quale seghi le curve d'un fascio generico in $|C|$ secondo gruppi della serie $g_{2\pi-2+rn}$ (definita innanzi), ed inoltre non passi per i punti base del fascio che non sono base per $|C|$, è una curva subaggiunta di rango r rispetto ad ogni sistema lineare ∞^3 contenuto in $|C|$, e quindi rispetto a $|C|$.

---

gruppi composti d'un gruppo di g_m e di un gruppo di g_n: allora la g_m (e analogamente si dica per la g_n) si deduce da g_{m+n} staccando un (qualsiasi) gruppo di g_n.

Tantochè non solo le curve K_r subaggiunte a $|C|$ vengono rappresentate da curve subaggiunte dello stesso rango su F_n, ma anche viceversa. E perciò le K_r (che su F_n vengono segate dalle ψ_r formanti un sistema lineare), formano su F_n un sistema lineare (supposte infinite): questo si dirà il *sistema subaggiunto di rango r* a $|C|$.

Per precisare come esso debba esser dato sull'ente possiamo convenire di porre la massima connessione in ogni punto di una K_r su F_n, tranne che nei punti (base) comuni alle parti variabili delle K_r (supposte in numero infinito). Il detto sistema $|K_r|$ (se ∞^1 almeno) risulta allora privo di parti fisse fondamentali per $|C|$: esso è certo normale: invero si indichi con $|K'_r|$ il sistema normale in cui esso è contenuto totalmente (cfr. § 11), ogni curva totale di $|K'_r|$ sega una C generica secondo un gruppo della serie (completa) $g_{2\pi-2+rn}$ e però è una K_r subaggiunta di rango r a $|C|$; giacchè se una curva generica di $|K'_r|$ segasse una C in più di $2\pi-2+rn$ punti, $|K'_r|$ non conterrebbe più *totalmente* il detto sistema $|K_r|$ subaggiunto a $|C|$.

Possiamo riassumere le cose dette enunciando il teorema:

Sopra l'ente algebrico ∞^2 una curva K_r è subaggiunta di rango r al sistema $|C|$ (25) *se:*

1) *sega le C d'un fascio generico secondo gruppi della serie* $g_{2\pi-2+rn}$ (definita in principio);

2) *non passa per quei punti base del detto fascio che non sono base per $|C|$.*

Esistono sempre infinite curve subaggiunte di rango r a $|C|$ per r assai alto.

Esse spogliate delle componenti fisse (comuni a tutte) *fondamentali per $|C|$ costituiscono il sistema lineare normale $|K_r|$ subaggiunto di rango r a $|C|$.*

È superfluo avvertire che di $|K_r|$ non possiam dire a priori se sia irriducibile o semplice ecc.

Sotto forma proiettiva si può enunciare il resultato ottenuto dicendo: *Sopra una superficie F_n, d'ordine n, non rigata a sezioni di genere >0 in S_3, una curva K che seghi i piani d'un fascio generico secondo gruppi appartenenti a curve d'ordine $n-3+r$ aggiunte alle sezioni di F_n, e che non contenga i punti comuni all'asse del fascio e ad F_n, è una curva subaggiunta di rango r.*

---

(25) Che soddisfa alle restrizioni poste innanzi.

20. - Staccamento di una curva dal sistema subaggiunto.

Sopra un ente algebrico ∞^2 si abbia un sistema lineare normale $|C|$ soddisfacente alle restrizioni del § 19, ed essendo $|C''|$ un qualunque sistema irriducibile (∞^1 almeno), si supponga che il residuo sistema

$$|C'| = |C - C''|$$

sia irriducibile.

Si designi con $|K|$ il sistema subaggiunto (di rango 0) a $|C|$, (supposto esistente) e si supponga che esso contenga $|C''|$ di guisa che esista un sistema residuo $|K - C''|$.

Dico che le curve di $|K - C''|$ costituiscono curve subaggiunte a $|C'|$.

Si indichi con i il numero delle intersezioni variabili di una C' con una C'' (fuori dei punti base dei due sistemi) e si consideri in $|C|$ una curva spezzata generica $C'+C''$ (curva totale di $|C|$), che ha i punti doppi fuori dei punti base di $|C|$, e oltre questi non ha singolarità che non competano a tutte le C.

Si assuma come immagine dell'ente algebrico una superficie F di S_3 avente ∞^3 sezioni piane C tra cui la $C'+C''$: sia n l'ordine di F; n' ed n'' gli ordini risp. di C', C'' su di essa ($n = n' + n''$). Una superficie ψ_{n-3} (subaggiunta ad F d'ordine $n-3$) sega il piano di $C'+C''$ secondo una curva d'ordine $n-3$ che passa $\varrho - 1$ volte per ogni punto ϱ-plo della curva spezzata, tranne che per gli i punti (semplici per F) immagini delle i intersezioni di C', C'' sull'ente: dunque il sistema lineare segato sul piano di $C'+C''$ dalle ψ_{n-3} è contenuto totalmente nel sistema normale somma di C'' col sistema delle curve d'ordine $n'-3$ aggiunte a C'; segue che la serie segata sulla C' (che è una curva generica di $|C'|$) dalle K è contenuta totalmente nella serie completa somma della serie canonica di C' e del gruppo di i punti segati da C'', e però i gruppi segati su C' dalle curve di $|K - C''|$ sono gruppi canonici, vale a dire queste curve sono subaggiunte a $|C'|$ c.d.d.

Una immediata estensione del resultato ottenuto può aversi considerando le curve K_r subaggiunte di un qualunque rango r ($\geqslant 0$) a $|C|$; si ottiene allora che le curve di

$$|K_r - (r+1)C''|$$

(supposte esistenti) costituiscono curve K'_r subaggiunte di rango r a $|C'|$.

Riferiamoci per semplicità al caso $r = 1$, e torniamo alla considerazione della precedente F; si considerino quindi in luogo delle ψ_{n-3} le ψ_{n-2} subaggiunte ad essa.

Il sistema di curve segato da queste ψ_{n-2} sul piano di $C'+C''$ è contenuto totalmente nel sistema normale somma delle rette e del sistema delle curve d'ordine $n-3$ aggiunte a $C'+C''$; per conseguenza le ψ_{n-2} segano su C' un gruppo appartenente alla serie somma di quella canonica, del gruppo segato da C'', e della serie segata dalle rette; quest'ultima serie (segata da curve C) è contenuta totalmente nella serie completa somma del gruppo sezione di C'' e della serie caratteristica di $|C'|$: segue che la serie segata su C' dalle ψ_{n-2} è contenuta totalmente nella serie completa somma della serie canonica di C', della serie caratteristica (determinata dalle altre C') e del gruppo delle intersezioni di $C'C''$ contàto due volte: si deduce ecc.

(Nel ragionamento si suppone implicitamente che le C' abbiano il genere $\pi' > 0$, ma il resultato sussiste in ogni caso; bastano per $\pi' = 0$ lievi modificazioni al discorso precedente).

21. - Addizione di una curva al sistema subaggiunto.

Vi è per noi un interesse nell'osservare che si può prender r tanto grande che il sistema $|K_r|$ subaggiunto di rango r a

$$|C| = |C' + C''|$$

contenga $|(r+1)C''|$ ed abbia anzi come residuo di esso un sistema

$$|K_r - (r+1)C''|$$

di dimensione alta quanto si vuole.

Invero si prenda anzitutto s così alto che $|K_s|$ esista e sia ∞^1 almeno: il sistema

$$|K_s + (r-s)C|$$

$(r \geqslant s)$ è contenuto in $|K_r|$ (§ 19); ora il sistema

$$|(r-s)C| = |(r-s)C' + (r-s)C''|,$$

contiene $(r+1)C''$ se si prende r così grande (restando fermo s) che $|(r-s)C'|$ contenga $|(s+1)C''|$, ciò è certo possibile essendo $|C'|$ un sistema semplice (perchè sopra una superficie ad es. di S_3, ogni sistema assegnato di curve è contenuto in quello segato da tutte le superficie d'ordine assai elevato).

Per il valore dato di r, o per un valore superiore, $|K_r|$ contiene $|(r+1)C''|$, e

$$|K_r - (r+1)C''|$$

ha la dimensione $\geqslant 1$, e crescente con r.

Supponiamo di aver dato ad r un valore così alto che

$$|K_r - (r+1)C''|$$

esista e sia ∞^1 almeno: indichiamo con χ (complessivamente) le eventuali componenti fisse fondamentali per $|C'|$ che compariscono nel sistema, allora il sistema

$$|k'_r| = (K_r - (r+1)C'' - \chi)$$

non ha componenti fisse fondamentali per $|C'|$: ma stante il § 20, le curve di $|K_r - (r+1)C''|$ sono subaggiunte di rango r a $|C'|$, quindi $|k'_r|$ è contenuto nel sistema subaggiunto $|K'_r|$ di $|C'|$, il quale (per definizione) non ha componenti fisse fondamentali per $|C'|$: si dovrà dunque avere (se $|k'_r|$ $|K'_r|$ non coincidono)

$$|K'_r| = |k'_r + \theta|$$

(stante la normalità dei due sistemi), e fin d'ora possiamo osservare che la θ dovrà comporsi di curve fondamentali per $|C'|$, giacchè tanto una k'_r come una K'_r segano una C' secondo gruppi d'una stessa serie, aventi lo stesso numero di punti. Consideriamo una curva composta

$$K'_r + \chi + (r+1)C'' ;$$

essa incontra una C in un numero di punti che è *maggiore* od *uguale* al numero delle intersezioni di C con una curva di

$$|K_r| = |k'_r + \chi + (r+1)C''| :$$

nella seconda ipotesi il gruppo segato su una C da $K'_r + \chi + (r+1)C''$ è un gruppo della serie segata dalle subaggiunte di rango r a $|C|$ ossia $K'_r + \chi + (r+1)C''$ è una subaggiunta di rango r a $|C|$. Nella prima ipotesi invece $K'_r + \chi + (r+1)C''$ non è una subaggiunta di rango r a $|C|$; allora $|k'_r|$ è contenuto parzialmente in $|K'_r|$ e si ha

$$|K'_r| = |k'_r + \theta| ;$$

dove come si è detto la θ si compone di curve fondamentali per $|C'|$.

Ora possiamo aggiungere che la θ non si compone tutta di curve fondamentali per $|C|$, perchè una K'_r e quindi una $k'_r+\theta$ ha con una C un numero di intersezioni maggiore che una k'_r. Si conclude che se non è

$$|k'_r| = |K'_r| ,$$

esistono delle curve fondamentali per $|C'|$ che non sono tali per $|C|$.

Tantochè se $|C|$ e $|C'|$ hanno le stesse curve fondamentali (e quindi anche χ si compone di curve fondamentali per $|C|$), ogni curva K'_r sommata ad una $(r+1)C''$ costituisce una K_r.

Ma questo resultato è stabilito soltanto ove si sappia a priori l'esistenza di $|K_r|$ e di $|K_r-(r+1)C''|$, quindi per r assai alto.

Peraltro possiamo renderlo indipendente da tale ipotesi.

Suppongasi di sapere soltanto che esiste una curva K'_s subaggiunta di rango s a $|C'|$, e che le curve fondamentali di $|C'|$ sono tali anche per $|C|$: dico che K'_s sommata ad una $(s+1)C''$ costituisce una K_s.

Invero di osservi che una K'_s+rC' costituisce una K'_{r+s}; quindi una

$$K'_s + rC' + (r+s+1)C''$$

costituisce una

$$K'_{r+s} + (r+s+1)C'' :$$

d'altra parte si ha per r assai alto che la $K'_{r+s}+(r+s+1)C''$ costituisce una K_{r+s} (subaggiunta di rango $r+s$ a $|C|$), e perciò la

$$K'_s + rC' + (r+s+1)C'' = K'_s + rC + (s+1)C''$$

costituisce una K_{r+s}, e la

$$K'_s + (s+1)C''$$

costituisce una curva del sistema

$$|K_{r+s} - rC| :$$

quest'ultimo sistema è costituito di curve K_s, quindi la $K'_s+(s+1)C''$ è una K_s c.d.d.

Possiamo dunque affermare che:

Se

$$|C| = |C' + C''|$$

e se le curve fondamentali di $|C'|$ *sono fondamentali anche per* $|C|$, *le curve* K'_s *subaggiunte di rango* s *a* $|C'|$, *prese insieme ad* $s+1$ *curve* $|C''|$ *costituiscono curve*

$$K'_s + (s+1)C'' = K_s$$

subaggiunte di rango s *a* $|C|$.

Come corollario si ha che *le curve subaggiunte di rango* r (>0) *a* $|C|$ *sono subaggiunte di rango* 0 *ad* $|(r+1)C|$: invero tali curve K_r sommate ad una curva di $|r(r+1)C|$ formano subaggiunte di rango r ad $|(r+1)C|$ $(=|C+rC|)$; quindi tali curve del sistema $|K_r+r(r+1)C|$ segano la curva generica $|(r+1)C|$ secondo gruppi della serie completa somma di quella canonica e della serie r-pla della caratteristica; in conseguenza staccando r volte la curva di $|(r+1)C|$ da tale sistema $|K_r+r(r+1)C|$ si ottengono curve (K_r) subaggiunte di rango 0 ad $|(r+1)C|$.

Viceversa le curve subaggiunte di rango 0 *ad* $|(r+1)C|$ *sono subaggiunte di rango* r *a* $|C|$.

Ciò mostra come nella teoria delle curve subaggiunte possiamo limitarci senza restrizione a quelle di rango 0: nel seguito ci riferiremo appunto a queste (omettendo per brevità la designazione « di rango 0 »).

22. - Imposizione di molteplicità alle curve subaggiunte d'un sistema lineare.

Sieno $|C|$, $|C'|$ due sistemi lineari sopra un ente algebrico ∞^2 soddisfacenti alle restrizioni del § 19, e suppongasi che $|C'|$ abbia sull'ente dei punti base

$$O_1^{\varrho_1} \quad O_2^{\varrho_2} \quad \ldots \quad O_s^{\varrho_s}$$

non base per $|C|$ e venga dedotto da $|C|$ imponendo appunto i nominati punti base, sicchè

$$|C| = |C' + O_1^{\varrho_1} + O_2^{\varrho_2} + \ldots + O_s^{\varrho_s}| \,.$$

Dico che le (particolari) curve subaggiunte a $|C|$ che hanno in O_i $(i=1, 2, \ldots, s)$ la molteplicità $\varrho_i - 1$ (fatto in ciascun punto O_i un buco) costituiscono (se esistono) curve subaggiunte a $|C'|$.

Invero si assuma come immagine dell'ente algebrico una superficie F_n di S_3 di un certo ordine n avente per sezioni curve generiche C tra le quali una C'; questa C' è la sezione di F con un piano α tangente ad F ϱ_i volte in ciascun punto O_i (che supponiamo semplice per F), e non tangente ad essa in altri punti: le superficie ψ_{n-3} (subaggiunte ad F_n) che toccano $\varrho_i - 1$ volte il piano α_i in ciascun punto O_i segano su α curve aggiunte alla C' e però segano C' in gruppi canonici. Segue l'enunciato.

La dimostrazione non viene infirmata dalla possibilità che alcuni punti O_i sieno infinitamente vicini fra loro o cadano in punti multipli di F_n; è appena il caso di modificare lievemente le parole nella seconda ipotesi.

Deve essere notato che se un punto O_i semplice per F_n ha (in conseguenza delle condizioni poste) una molteplicità $> \varrho_i - 1$ per la sezione di una ψ_{n-3} toccante α $\varrho_1 - 1$ volte in O_1 ecc., l'intorno del punto O_i su F va debitamente aggiunto alla sezione di ψ_{n-3} per comporre una subaggiunta a $|C'|$, altrimenti ψ_{n-3} segherebbe C' in un numero di punti minore di quello che spetta ad un gruppo canonico. Tantochè, considerate sull'ente, le curve subaggiunte à $|C|$ dedotte imponendo in O_i la molteplicità $\varrho_i - 1$ hanno il punto O_i $(\varrho_i - 1)$-plo e non come punto di una maggiore molteplicità. La cosa si estende al caso che O non sia semplice per F_n.

Suppongasi ora che, essendo $|C''|$ irriducibile ∞^1 almeno, si abbia

$$|C| = |C' + C'' + O_1^{\varrho_1} + \ldots + O_s^{\varrho_s}| \, .$$

Allora $|C'+C''|$ si deduce da $|C|$ imponendo i punti base $O_i^{\varrho_i}$; per conseguenza le curve k' che hanno nei punti O_i le molteplicità $\varrho_i - 1$ ed insieme ad una C'' compongono subaggiunte a $|C|$ sono subaggiunte a $|C'|$: vale a dire che *staccando dal sistema subaggiunto a* $|C|$ *una* C'' (supposto possibile) *e imponendo le molteplicità* $\varrho_i - 1$ *nei punti* O_i *alle curve residue, si ottengono curve subaggiunte a* $|C'|$.

Si abbia ora sull'ente un sistema $|C|$ soddisfacente alle restrizioni del § 19, e supponiamo che essendo O un punto base i-plo per $|C|$, sia ancora irriducibile il sistema $|C - O^r|$ che si ottiene imponendo in O molteplicità $i+r$ alle curve C. Se $|K|$ è il sistema subaggiunto a $|C|$ dico che le curve di $|K - O^r|$ (supposte esistenti) sono subaggiunte a $|C'| = |C - O^r|$.

Invero si assuma una immagine F dell'ente su cui un fascio generico di curve C contenente una C' venga segato dai piani per una retta a, e ciò disponendo d'un sistema ∞^3 sull'ente, contenente il fascio, il quale non abbia O come punto base. Al punto O corrisponde allora un punto di a (che possiamo designare collo stesso nome), il quale è i-plo per le sezioni piane di F fuori di a: una di queste sezioni (quella corrispondente alla C') ha in O la molteplicità $i - r$.

Sulla F le curve K possono (colla costruzione del § 18) farsi segare da superficie φ seganti ogni piano per a secondo una curva d'ordine $n-3$ aggiunta alla sezione (d'ordine n) di F, e quindi comportantisi come subaggiunte di F tranne rispetto alla a di cui non possiamo fissare la molteplicità per φ. Le sezioni di queste φ coi piani per a hanno fuori di a la molteplicità $i-1$ in O. Quelle φ la cui sezione col piano della C' ha in O un punto $(i+r)$-plo segano su C' gruppi canonici. Segue l'enunciato.

L'enunciato si estende subito al caso in cui $|C|$ abbia più punti base $O_1^{i_1} \dots O_r^{i_r}$ nei quali vengano imposte rispettivamente le molteplicità (maggiori) $i_1+s_1, \dots, i_r+s_r$, quando $|C'|=|C-O_1^{s_1}-O_2^{s_2} \dots -O_r^{s_r}|$ sia irriducibile, purchè i punti $O_1 \dots O_r$ possano pensarsi come punti di una medesima superficie immagine dell'ente, cioè esistano sistemi per cui essi non sieno punti base.

Si noti infine che col ragionamento del § 21 si può invertire l'enunciato se $|C'|$ soddisfa pure alle restrizioni del § 19 e se le sue curve fondamentali sono tutte fondamentali anche per $|C|$.

Dunque si ha che: *Aumentando o diminuendo le molteplicità delle curve subaggiunte ad un sistema* $|C|$ (soddisfacente alle restrizioni del § 19) *in un gruppo di punti base che esso possiede sopra una superficie immagine dell'ente, si ottengono curve subaggiunte al sistema dedotto colla stessa operazione da* $|C|$ (supposto irriducibile), *quando, nel 2° caso, non si vengano a perdere delle curve fondamentali di* $|C|$.

23. - Completamento del resultato del § 21.

Possiamo ora estendere il resultato del § 21. Sopra un ente algebrico ∞^2 si abbiano due sistemi lineari

$$|C| \qquad |C'|,$$

soddisfacenti alle restrizioni del § 19, e supponiamo che, essendo $O_i^{\varrho_i}$ i punti dell'ente che sono base (ϱ_i-pli) per $|C'|$ e non per $|C|$, il sistema

$$|C-C'-\sum O_i^{\varrho_i}|=|C''|$$

esista e sia irriducibile ∞^1 almeno (il sistema $|C-C'|$ contiene almeno i punti $O_i^{\varrho_i}$ come parti fisse): si abbia dunque

$$|C|=|C'+C''+\sum O_i^{\varrho_i}| .$$

Se le curve fondamentali di $|C'|$ sono tali anche per $|C|$, la dimostrazione del § 21 si estende a questo caso, e ci prova che, essendo K'

una subaggiunta a $|C'|$, la

$$K' + C''$$

è sempre una subaggiunta a $|C|$. Ma il resultato può essere esteso anche al caso in cui $|C|$ abbia sull'ente dei punti base B_s ($s = 1, 2, \ldots$) non base per $|C'|$ (che sono fondamentali per $|C'|$ e non per $|C|$), purchè ancora ogni curva non eccezionale per $|C'|$ sia fondamentale per $|C|$: solo in questo caso non $K' + C''$ ma

$$K' + C'' + \sum B_s$$

costituirà una subaggiunta a $|C|$.

Supponiamo dapprima che imponendo alle curve C' di passare pei punti B_s si ottenga un sistema irriducibile il quale non possieda curve fondamentali che non sieno tali per $|C'|$. Si supponga inoltre che vi sieno almeno ∞^1 curve del sistema

$$|K - C'' - \sum B_s|$$

aventi le molteplicità $\varrho_i - 1$ nei punti O_i: esse formeranno il sistema che di regola potrà designarsi simbolicamente con

$$|K - C'' - \sum B_s - \sum O_i^{\varrho_i - 1}|$$

(solo se qualche punto O_i fosse base per $|K|$ converrebbe modificare quel simbolo, ma ciò non altererebbe le successive deduzioni).

Ora indichiamo con $|k'|$ il precedente sistema (normale) spogliato delle eventuali parti fisse fondamentali per $|C' - \sum B_s|$: $|k'|$ sarà contenuto nel subaggiunto $|K_1'|$ di $|C' - \sum B_s|$, e sarà costituito di curve subaggiunte a $|C' - \sum B_s|$, quindi si avrà

$$|K'| = |k' + \theta|$$

dove θ si compone di curve fondamentali per $|C' - \sum B_s|$ e non per $|C - \sum B_s|$; ma curve siffatte non esistono, perchè le curve fondamentali di $|C' - \sum B_s|$ sono tali per $|C'|$ e quindi anche per $|C|$ (non essendo costituite di punti B_s) e per $|C - \sum B_s|$; si deduce

$$|K_1'| = |k'| .$$

Ma d'altra parte le curve

$$K_1' + \sum B_s$$

sono subaggiunte a $|C'|$ (22), e però le curve

$$K' + C'' + \sum O_i^{\varrho_i - 1},$$

e ugualmente le

$$K' + C''$$

sono subaggiunte a

$$|C - \sum B_s| \;;$$

segue che le

$$K' + C'' + \sum B_s$$

sono subaggiunte a $|C|$. Resta da eliminare nella dimostrazione le ipotesi restrittive poste in principio. Ma ciò si può fare (in modo analogo al § 21) considerando le subaggiunte a $|C'|\,|C|$ di rango più elevato, o (ciò che è lo stesso) considerando in luogo dei sistemi $|C'|$ e $|C|$ i sistemi $|rC'|$ ed $|rC|$ dove r è assai alto, cioè tanto alto che $|rC' - \sum B_s|$ sia irriducibile e non avente curve fondamentali per $|rC'|$, e tanto alto ancora che esistano infinite curve del sistema

$$|K + (r-1)C - rC'' - \sum B_s - \sum O_i^{\varrho_i - 1}|$$

ottenute staccando

$$rC'' + \sum B_s + \sum O_i^{\varrho_i - 1}$$

dal sistema $|K + (r-1)C|$ subaggiunto a $|rC|$.

Si deduce che *se esiste una K' subaggiunta a $|C'|$ le*

$$K' + C'' + \sum B_s$$

composte di essa, di una C'' e dei punti base per $|C|$ e non per $|C'|$, costituiscono curve subaggiunte a $|C|$: ciò in conseguenza dell'ipotesi che le curve non eccezionali fondamentali per $|C'|$ sieno fondamentali per

$$|C| = |C' + C'' + \sum O_i^{\varrho_i - 1}| \,.$$

Alla dimostrazione data si potrebbe muovere un appunto nel caso che alcuni dei punti B_s cadano in punti multipli della superficie immagine dell'ente avente per sezioni le curve C', giacchè in tal caso si può dubitare che imponendo ad $|rC'|$ i punti base B_s si ottenga mai un sistema irriducibile sull'ente: questo caso esigerebbe dunque ulteriori considerazioni permettenti di togliere ogni dubbio. Ce ne dispensiamo, tanto più che applicheremo il resultato ottenuto soltanto nel caso che $|C'|$ sia non singolare, ed allora l'obiezione avvertita non si presenta.

24. - Riassunto.

Crediamo utile riassumere i resultati di natura invariantiva stabiliti nella teoria delle curve subaggiunte: il punto di vista proiettivo sarà ripreso più tardi.

Ci riferiamo a sistemi lineari normali $|C|\,|C'|$ irriducibili, semplici, sopra un dato ente algebrico ∞^2, ed escludiamo che alcuno di tali sistemi ammetta un fascio di curve unisecanti sull'ente. Allora le curve subaggiunte a ciascuno (supposte in numero infinito), spogliate delle parti fisse fondamentali per il risp. sistema formano il sistema lineare normale subaggiunto ad esso.

Supponiamo

1) che $|C|$ contenga $|C'|$;

2) che sieno $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots$ i punti dell'ente base per $|C'|$ e non per $|C|$, e che A_r abbia la molteplicità i_r per $|C'|$;

3) che il sistema

$$|C - C'|$$

il quale possiede come parti fisse i punti $A_r^{i_r}$, non possieda altre parti fisse e sia, all'infuori di questi punti fissi, irriducibile, (∞^1 almeno); vale a dire sia irriducibile il sistema

$$|C''| = |C - C' - \sum A_r^{i_r}| \ ;$$

4) che sieno $B_1, B_2, \ldots, B_s, \ldots$ i punti dell'ente base per $|C|$ e non per $|C'|$.

Allora:

a) Se esiste un sistema $|K|$ subaggiunto a $|C|$, le curve di $|K - C''|$ (supposte esistenti) che hanno la molteplicità $i_r - 1$ in ciascun punto A_r (riguardato come un buco) costituiscono subaggiunte a $|C'|$.

Se nessuno dei punti A_r è base per $|K|$ (ciò che accidentalmente può avvenire) si può dire che formano subaggiunte a $|C'|$ le curve di

$$|K - C'' - \sum A_i^{i_r - 1}|$$

supposte esistenti: si può conservare tale forma simbolica al resultato se si suppone di includere in $|K|$ (sommandolo ad esso s volte) ogni punto base s-plo pel sistema subaggiunto di $|C|$, non base per $|C|$.

b) Viceversa: *supposto che ogni curva fondamentale per* $|C'|$ *all'infuori degli eventuali punti base* $B_1, B_2, \ldots, B_s, \ldots$ *di* $|C|$ *e non di* $|C'|$ *sia fondamentale anche per* $|C|$; se esiste una curva K' subaggiunta a $|C'|$, ogni curva

$$K' + C'' + \sum B_s$$

costituisce una subaggiunta a $|C|$: ed allora costituisce una subaggiunta a $|C|$ anche ogni curva

$$K' + C'' + \sum A_r^{i_r - 1} + \sum B_s .$$

La restrizione sottolineata per l'enunciato *b*) *è necessaria*, sebbene possa in parte ridursi.

Quando $|C'|$ abbia delle curve fondamentali proprie non fondamentali per $|C|$ si vedrà da effettivi esempi che la più generale curva

$$K' + C'' + \sum B_s$$

non è subaggiunta a $|C|$: in altre parole il sistema

$$K - C'' - \sum A_r^{i_r - 1}$$

generalmente non è tutto $|K'|$ ma è contenuto parzialmente in esso.

Osservazione. – Per quanto riguarda la restrizione che $|C|\,|C'|$ non posseggano un fascio di unisecanti, osserviamo che tale restrizione può essere omessa relativamente a $|C'|$ nell'enunciato della proprietà *a*), ma non in quello della *b*): invero (cfr. § 30) figura qui in modo essenziale la condizione che le curve subaggiunte a $|C'|$ formino un sistema lineare, e ciò (come è facile vedere) non è più vero se $|C'|$ possiede un fascio di unisecanti (l'ente algebrico ammettendo in questo caso come immagine una rigata di cui le C' sono direttrici).

IV.

CURVE AGGIUNTE

25. - Curve aggiunte ad un sistema non singolare.

Prendiamo come immagine dell'ente algebrico ∞^2 una superficie F non rigata senza singolarità in un S_k, sulla quale esistano infinite curve subaggiunte K: esse formano un sistema lineare cui possiamo togliere ogni punto fisso non comune a tutte le K, e sommare ogni punto i-plo per le K un numero i di volte, per modo da ottenere un sistema lineare che (riguardato sotto l'aspetto invariantivo secondo il § 3) non abbia punti base su F. Il sistema così precisato si dirà il sistema *aggiunto* a quello delle sezioni C di F, e le sue curve si diranno *aggiunte* al detto sistema $|C|$. Se si designano con C_a, si ha un sistema $|C_a|$ che non differisce da quello subaggiunto a $|C|$ se non (eventualmente) per la presenza di punti fissi di F, non base per $|C|$.

Si diranno *curve aggiunte* ad $|nC|$ o *curve aggiunte di rango* $n-1$ a K le curve del sistema

$$|(nC)_a| = |(n-1)C + C_a| .$$

Evidentemente il sistema $|(nC)_a|$ potrebbe definirsi in modo analogo a $|C_a|$ sulla superficie trasformata di F avente per sezioni iperpiane le curve di $|nC|$ (§ 21). Si abbia ora su F un qualsiasi sistema lineare non singolare $|C'|$ non possedente un fascio di unisecanti, il quale abbia un certo numero r di punti base $A_1^{i_1} \dots A_1^{i_r}$.

Si consideri un multiplo $|nC|$ di $|C|$ così alto che

$$|C''| = |nC - C' - \sum A_s^{i_s}|$$

sia irriducibile (in altre parole si prenda n così alto che le varietà d'ordine n ed $h-1$ dimensioni passanti per una C' non abbiano comune alcun punto fisso su F fuori di C').

Si diranno *curve aggiunte* a $|C'|$ su F e si designeranno con C'_a le curve del sistema

$$|(nC)_a - C'' - \sum A_s^{i_s - 1}| = |(n-1)C + C_a - C'' - \sum A_s^{i_s-1}|$$

vale a dire tutte quelle curve che

1) sono subaggiunte a $|C'|$ (pel § 22);

2) sommate ad una curva residua di una C' rispetto ad $|nC|$ costituiscono aggiunte ad $|nC|$.

Il sistema $|C'_a|$ *aggiunto* a $|C'|$ resta così definito indipendentemente dal valore di n; perchè se si muta n in $n+m$, $|(n-1)C|$ si muta in $|(n+m-1)C|$ e $|C''|$ si muta in $|C''+mC|$.

Le curve C'_a sono come abbiam notato subaggiunte a $|C'|$, anzi il loro sistema è *tutto* il subaggiunto a $|C'|$ aumentato eventualmente di qualche parte fissa, curva eccezionale di F fondamentale per $|C'|$ (immagine d'un punto dell'ente non base per $|C'|$).

Ciò è una conseguenza immediata dei resultati ottenuti nel § 23.

Per la definizione: *Le curve aggiunte ad un sistema non singolare su* F *hanno come* $(i-1)$*-plo ogni punto base* i*-plo* O *di questo su* F: s'intende con ciò che se O ha per le curve suddette (intese in senso proiettivo) una molteplicità $i-1+\varrho$, compare come componente sommata alle curve stesse l'intorno di O su F contato ϱ volte. Ora *se* $|C'|\,|C''|$ *sono due qualsiansi sistemi non singolari* (*privi d'un fascio di unisecanti*) *su* F, *e sono* $A_s^{i_s}$ $(s=1, 2, ...)$ *i punti di* F *base per* $|C''|$ *e non per* $|C'|$, *e* $B_s^{h_s}$ $(s=1, 2, ...)$ *i punti di* F *base per* $|C'|$ *e non per* $|C''|$, *e se inoltre* $|C'|$ *contiene* $|C''|$ *ed è* C''' *una curva residua di una* C'' *rispetto a* $|C'|$ *su* F (*vale a dire sull'ente* $|C'|=|C''+C'''+\sum A_s^{i_s-1}+\sum B_s|$), *si ha*

$$|C'_a|=|C''_a+C'''+\sum A_s^{i_s-1}+\sum B_s|\,.$$

Infatti le curve

$$C''_a+C'''+\sum A_s^{i_s-1}+\sum B_s$$

1) sono subaggiunte a $|C'|$ (§ 23);

2) sommate ad una curva residua di una C' rispetto ad nC dànno aggiunte ad $|nC|$.

La precedente relazione simbolica ci dice che le curve C''_a+C''' considerate proiettivamente su F sono contenute totalmente in $|C'_a|$, e solo possono differire dalle C'_a per la presenza di certi buchi: ove senza occuparci di tali buchi si voglia porre in evidenza il fatto che due sistemi lineari considerati proiettivamente su F sono contenuti totalmente in un altro (ottenuto sommando ad essi dei punti) si userà del simbolo $\equiv$: scriveremo dunque

$$|C'_a|\equiv|C''_a+C'''|\,.$$

Una congruenza simbolica tra due sistemi normali su F denota la coincidenza (uguaglianza simbolica) di essi quando le curve dei due sistemi abbiano gli stessi buchi, ossia i due sistemi abbiano gli stessi punti base colle stesse molteplicità.

Osservazione. – Le curve aggiunte ad un sistema non singolare (privo d'un fascio di unisecanti) restano precisate sull'ente assumendo una particolare superficie senza singolarità immagine dell'ente: mutando questa superficie mutano soltanto per la presenza di punti fissi non base pel sistema, poichè astrazion fatta da tali punti le curve aggiunte ad un sistema non singolare (privo d'un fascio di unisecanti) si confondono colle subaggiunte.

26. - Definizione generale delle curve aggiunte.

Sia $|C|$ un qualunque sistema irriducibile normale (∞^1 almeno) sopra la superficie F a cui ancora ci riferiamo. Si può sempre considerare un sistema normale $|L|$ irriducibile semplice non singolare e non possedente un fascio di unisecanti, che contenga $|C|$ (§ 14), di guisa che si abbia

$$|L-C|=|C'|+\sum A_r^{i_r}$$

$$|L|=|C+C'+\sum A_r^{i_r}|$$

essendo $A_r^{i_r}$ $(r=1, 2, ...)$ i punti di F base per $|C|$ e non per $|L|$.

Come sistema $|L|$ possiamo prendere anche un multiplo assai elevato del sistema delle sezioni iperpiane su F, cioè il sistema segato su F dalle varietà d'ordine abbastanza alto (reso normale).

Sieno poi B_s $(s=1, 2, ...)$ i punti base per $|L|$ e non per $|C|$.

All'infuori di questi punti B_s ogni curva fondamentale per $|C|$ è fondamentale anche per $|L|$, perchè $|L|$ è non singolare.

Indicheremo col nome di *curve aggiunte* a $|C|$ e designeremo con C_a le curve (supposte esistenti) che sono subaggiunte a $|C|$ e che prese insieme con una C' e coi punti $A_r^{i_r-1}$ e B_s $(r=1, 2, ..., s=1, 2, ...)$ formano curve L_a aggiunte ad $|L|$. Le curve C_a sono dunque le curve del sistema

$$|C_a|=|L_a-C'-\sum A_r^{i_r-1}-\sum B_s| \ ;$$

ove esse sieno infinite, $|C_a|$ è normale e dicesi *sistema aggiunto* a $|C|$.

Le curve C_a vengono per definizione ad avere come $(i-1)$-plo ciascun punto base i-plo di $|C|$ su F. Anzi si può dire che le curve C_a aggiunte a $|C|$ vengono così definite come quelle curve di $|L_a-C'|$ $(\equiv|C_a|)$, in cui sono tolti i buchi che cadono fuori dei punti base di $|C|$, e dove è fatto invece un buco in ogni punto base i-plo di $|C|$ $(i>1)$ imponendo in esso alle curve stesse la molteplicità $i-1$.

La definizione posta deve essere subito giustificata mostrando che essa è indipendente dal particolare sistema $|L|$ scelto su F, nella cui scelta compare una grande arbitrarietà. Per ciò si scelga un altro sistema $|M|$ soddisfacente alle medesime condizioni, e sia

$$|M - C| \equiv |C''| :$$

basta provare che

$$|L_a - C'| \equiv |M_a - C''| ,$$

giacchè le ulteriori condizioni (consistenti nel togliere e sommare punti) che debbono essere imposte alle curve dei due sistemi per avere le C_a portano a togliere alle curve di ciascun sistema i buchi che cadono fuori dei punti base di $|C|$ e a praticarne in questi in modo che ogni punto base i-plo di $|C|$ diventa per essi $(i-1)$-plo, cosicchè dopo tali operazioni le curve generiche dei due sistemi avranno le stesse molteplicità in tutti i punti di F, e quindi (essendo normali) coincideranno.

Ora consideriamo il sistema non singolare

$$|S| = |L + M| :$$

poichè $|S|$, $|L|$, $|M|$ soddisfano alle restrizioni del precedente § si avrà

$$|S_a| \equiv |L_a + M| \equiv |L + M_a| ;$$

ma

$$|L| \equiv |C + C'| \qquad M \equiv |C + C''| ,$$

quindi

$$|L_a + C + C''| \equiv |M_a + C + C'|$$

$$|L_a - C'| \equiv |M_a - C''| \qquad \text{c. d. d.}$$

27. - Teorema fondamentale.

Ora possiamo estendere alle curve aggiunte rispetto a due *qualunque* sistemi irriducibili $|C|\,|C'|$ sopra la superficie F le relazioni del § 25. Si supponga dunque che sia

$$|C| = |C' + C'' + \sum A_r^{i_r}|$$

essendo $A_r^{i_r}$ $(r = 1, 2, \ldots)$ i punti di F base per $|C'|$ e non per $|C|$: sieno

$B_s^{\varrho_s}$ $(s = 1, 2, ...)$ i punti base di $|C|$ e non base per $|C'|$. Si vuol provare che

$$|C_a| = |C'_a + C'' + \sum A_r^{i_r - 1} + \sum B_s| \, ,$$

dove supposto che abbia significato il simbolo del primo membro, deve avere significato per conseguenza quello del secondo e viceversa.

A tal fine si consideri su F un sistema non singolare $|L|$ sotto le restrizioni del precedente §, il quale contenga $|C+C'|$: si abbia

$$|L - C - C'| \equiv |C''| \, .$$

Si ha (prescindendo da punti che figurano come componenti nei simboli)

$$|L| \equiv |C + C' + C''|$$

e quindi (pel § precedente)

$$|L_a| \equiv |C_a + C' + C''|$$

$$|L_a| \equiv |C'_a + C + C''| \, ;$$

segue

$$|C_a + C'| \equiv |C'_a + C| \equiv |C'_a + C' + C''|$$

$$|C_a| \equiv |C'_a + C''| \, .$$

Questa congruenza simbolica dà luogo alla relazione che si vuol stabilire tenendo conto opportunamente dei «punti» che abbiamo trascurato.

Basta infatti osservare che sommando entro il secondo simbolo

$$\sum A_r^{i_r - 1} + \sum B_s$$

si ottiene un sistema indicato dal relativo simbolo che ha su F gli stessi punti base di $|C_a|$, donde segue

$$|C_a| = |C'_a + C'' + \sum A_r^{i_r - 1} + \sum B_s| \qquad \text{c. d. d.}$$

Enunciando in parole il resultato ottenuto possiamo dire che:

Sopra una superficie senza singolarità abbiam posto il concetto di curve *aggiunte* ad un sistema lineare irriducibile $|C|$ in guisa che:

1) le curve C_a aggiunte ad un sistema lineare $|C|$ segano gruppi canonici sulle curve generiche del sistema;

2) le curve aggiunte ad un sistema lineare $|C|$, compongono (se esistono) un sistema lineare normale $|C_a|$ (*aggiunto* a $|C|$) che ha come punti base $(i-1)$-pli i punti base i-pli per $|C|$ $(i>0)$ e non ha altri punti base;

3) il sistema $|C_a|$ aggiunto a $|C|$ (fatta astrazione da curve eccezionali fisse) è quello di *tutte* le curve soddisfacenti alla condizione 1) se $|C|$ è un sistema semplice, non singolare, non possedente un fascio di unisecanti;

4) sussiste il:

TEOREMA FONDAMENTALE. – *Se ad un sistema lineare normale irriducibile $|C|$ si somma o toglie una curva C'' oppure si impongono dei nuovi punti base i-pli, in guisa che l'operazione conduca ad un sistema irriducibile* (∞^1 *almeno*) $|C'|$, *si otterrà il sistema* $|C'_a|$ *aggiunto a* $|C'|$;

a) *sommando o togliendo risp. la C'' al sistema $|C_a|$ aggiunto a $|C|$*;

b) *imponendo alle C_a la molteplicita $i-1$ in ciascun nuovo punto base i-plo.*

Corollario. – Se $|C|\,|C'|$ sono due sistemi lineari irriducibili su F (ma non sono fasci coincidenti) si ha che

$$|C_a + C'| \quad \text{è contenuto in} \quad |(C+C')_a|$$

e da esso differisce solo pel fatto di possedere come base i-plo anzichè $(i-1)$-plo ogni (eventuale) punto base i-plo di $|C'|$ non base per $|C|$: in particolare se $|C|\,|C'|$ hanno gli stessi punti base

$$(1) \qquad |(C+C')_a| = |C_a + C'| = |C + C'_a| \,.$$

La definizione delle curve aggiunte ad un qualsiasi sistema irriducibile $|C|$ su F si riduce con operazioni determinate sull'ente a quella delle curve aggiunte a sistemi non singolari e non possedenti un fascio di unisecanti. Segue che se in luogo di F si sceglie come immagine dell'ente un'altra superficie F' (senza singolarità) le curve aggiunte a $|C|$ su F' differiscono dalle aggiunte a $|C|$ su F soltanto (eventualmente) per «punti» fissi dell'ente, non base per $|C|$. Ossia:

Sull'ente algebrico ∞^2 le curve aggiunte ad un sistema lineare irriducibile $|C|$ restano definite a meno di punti fissi non base per $|C|$.

Trattando di curve aggiunte a $|C|$ *sull'ente* si deve ricordare che esiste questa indeterminatezza nella loro definizione, indeterminatezza della quale si può profittare nel modo più conveniente.

Allorchè l'ente algebrico ∞^2 ammette delle superficie immagini senza curve eccezionali, è conveniente precisare su una qualsiasi di queste la definizione delle curve aggiunte, ed allora il teorema fondamentale si può enunciare riferendosi all'ente algebrico. In questo caso se $|C|\,|C'|$ sono due sistemi privi di punti base (puri) si ha sempre

$$|C_a + C'| = |C + C'_a| .$$

Osservazione. – Riferendoci al caso in cui l'ente ammette superficie immagini senza curve eccezionali, ed ai sistemi privi di punti base (puri) su tale ente, vediamo come l'operazione geometrica (*aggiunzione*) facente passare da un sistema lineare (irriducibile) $|C|$ al sistema aggiunto $|C_a|$ (ove possibile), riesce caratterizzata dalla relazione (1), che serve a definire l'aggiunzione appena fissato (ad arbitrio) il sistema $|C'_a|$ aggiunto ad un dato particolare sistema puro $|C'|$. Invero dalla (1) si ricava

$$|C_a| = |C + C'_a - C'| ,$$

da cui si vede che $|C_a|$ (ove esista) è determinato ([26]).

La precedente osservazione può porsi sotto aspetto analitico, sostituendo alla considerazione di $|C|\,|C'|$ le corrispondenti funzioni razionali dell'ente $f\,f'$, dove ciascuna funzione contiene un certo numero di parametri (il massimo possibile) e dove le $f\,f'$ non hanno punti di zero indipendenti dai valori dei parametri. Occorre per ciò di designare con ff' la funzione contenente il più ampio numero di parametri appartenente al sistema lineare determinato dai prodotti delle funzioni f ed f', vale a dire la funzione corrispondente al sistema normale $|C+C'|$.

Conviene inoltre designare con φ l'*operazione funzionale* di aggiunzione, quindi con $\varphi(f)$, $\varphi(f')$, $\varphi(ff')$, le funzioni corrispondenti a $|C_a|$, $|C'_a|$, $|(C+C')_a|$ e con $\varphi(f)f'$, $\varphi(f')f$ le funzioni corrispondenti a $|C_a + C'|$, $|C'_a + C|$. Allora si ha simbolicamente

$$\varphi(ff') = \varphi(f)\cdot f' = \varphi(f')\cdot f .$$

È chiara l'analogia di questa equazione simbolica che definisce l'operazione funzionale φ appena fissata (arbitrariamente) la funzione corrispondente ad una data, coll'equazione funzionale

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\cdot y = \varphi(y)\cdot x$$

che ha per funzione integrale

$$\varphi(x) = Cx \qquad (C = \text{cost.}).$$

([26]) Si avverta inoltre che l'indeterminazione nella scelta di $|C'_a|$ viene molto limitata se si vuole che l'aggiunzione riesca definita razionalmente sull'ente, indipendentemente dal sistema iniziale $|C'|$.

Il paragone tra la relazione data dal teorema fondamentale dell'aggiunzione coll'equazione funzionale

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\cdot y$$

mi pare ne faccia bene rilevare l'intima natura: questo paragone mi è stato suggerito da una conversazione col sig. PINCHERLE intorno alle sue recenti ricerche di calcolo funzionale ([27]).

Cenno d'estensione. – Il teorema fondamentale permette di estendere il significato dell'aggiunzione anche rispetto a sistemi normali riducibili di dimensione $\geqslant 0$. Non ci tratterremo su questa facile estensione che non occorre pel seguito.

28. - Non influenza delle curve fondamentali improprie d'un sistema lineare nella determinazione delle curve aggiunte.

Si può ora domandare una definizione *diretta* delle curve C_a aggiunte ad un sistema irriducibile $|C|$ sopra un ente algebrico ∞^2, mostrando in qual modo la determinazione delle C_a fra le curve subaggiunte sia legata alle curve fondamentali di $|C|$. In questa ricerca *supporremo anzitutto il sistema lineare $|C|$ irriducibile semplice ∞^3 almeno e non possedente un fascio di curve unisecanti le C*: qualche altra limitazione relativa alla natura delle curve fondamentali di $|C|$ sarà posta in seguito; è appunto per la difficoltà che si incontra quando vi sono curve fondamentali infinitamente vicine (§ 8) che è preferibile di dare delle curve aggiunte la definizione indiretta del § 26, che comprende tutti i casi. Per precisare la definizione delle curve aggiunte a $|C|$ riferiamoci ad una superficie F senza singolarità, immagine dell'ente.

Sappiamo che il sistema $|C_a|$ (che appunto supponiamo ∞^1 almeno) eventualmente spogliato di parti fisse fondamentali per $|C|$ è contenuto nel sistema $|K|$ subaggiunto a $|C|$, e che le curve residue si compongono (ove esistano) soltanto di un numero finito di curve fondamentali per $|C|$ il cui complesso denoteremo con θ; quindi $|K-\theta|$ coinciderà con $|C_a|$ a meno di eventuali parti fisse che gli si dovranno aggiungere.

La determinazione di $|C_a|$ (a meno di componenti fisse fondamentali per $|C|$) dipende dunque dalle curve di F fondamentali per $|C|$ le quali sono in numero finito: ciascuna curva fondamentale di $|C|$ avrà una

([27]) Cfr. la sua Nota, *Sulle operazioni funzionali distributive* (« R. Accad. dei Lincei », febbraio 1895).

influenza nella determinazione delle curve aggiunte, influenza data dal numero r ($\geqslant 0$) delle volte che essa compare come componente in θ, cioè dal numero delle volte che essa deve essere staccata da $|K|$: una curva fondamentale di $|C|$ di cui la detta influenza valga $r = 0$, dovrà dirsi non avere influenza ecc.

Curve fondamentali di $|C|$ che compariscano come parti fisse in $|C_a|$ e non in $|K - \theta|$ non hanno certo influenza nella determinazione delle aggiunte a $|C|$, perchè se una tal curva θ' comparisse in θ si potrebbe staccare da $|K|$ la $\theta - \theta'$ anzichè la θ, ed il sistema residuo coinciderebbe ancora con $|C_a|$, a meno di parti fisse fondamentali per $|C|$ da sommarsi.

Teorema. – *Una curva fondamentale di $|C|$ che ha influenza nella determinazione delle curve aggiunte a $|C|$ influisce anche sul genere delle curve residue, ossia è una curva fondamentale propria.*

Sia $|C_a|$ il sistema aggiunto di $|C|$ e supponiamo che esso non possieda come parti fisse delle curve fondamentali per $|C|$ (di cui eventualmente potrebbe spogliarsi); allora detto $|K|$ il sistema subaggiunto a $|C|$, $|C_a|$ è contenuto in $|K|$: se θ è (su F) una curva fondamentale di $|C|$ che ha influenza nella determinazione delle curve aggiunte si avrà

$$|C_a| = |K - \theta - \theta'|$$

denotando θ' un eventuale complesso di altre curve fondamentali per $|C|$.

Si indichi con

$$|C'| = |C - \theta|$$

il sistema residuo di θ rispetto a $|C|$; stante le ipotesi poste per $|C|$ questo sistema $|C'|$ è irriducibile tranne nel caso che per lo staccamento di θ si stacchi in conseguenza da $|C|$ qualche altra curva fondamentale, ma in ogni caso intenderemo di prescindere da queste parti fisse; si denotino con π, π' i risp. generi di $|C|$ $|C'|$: si deve provare che

$$\pi' < \pi\,.$$

A tal fine si osservi che le K (di cui la θ non è parte fissa) segano le C generiche in $2\pi - 2$ punti, e quindi segano le C' in un numero di punti $\leqslant 2\pi - 2$; in conseguenza le curve del sistema $|K - \theta|$ segheranno le C' in un numero di punti $< 2\pi - 2$. A fortiori dunque le curve di $|C_a - \theta|$ segheranno le C' in un numero di punti $< 2\pi - 2$: ma (pel teorema fondamentale) $|C'_a|$ coincide con $|C_a - \theta|$ (o è contenuto in esso), quindi le curve di $|C_a - \theta|$ segano le C' in $2\pi' - 2$ punti (almeno): dunque

$$2\pi' - 2 < 2\pi - 2\,,$$

ossia

$$\pi' < \pi \qquad \text{c. d. d.}$$

Nel ragionamento si suppone tacitamente che da $|C_a|$ possa staccarsi θ (ossia che esista $|C'_a|$): la conclusione è vera indipendentemente da tale ipotesi, giacchè se il ragionamento precedente non sarà applicabile a $|C|$, sarà pur sempre applicabile ad $|nC|$, dove n è assai alto, e dall'avere stabilito che θ è curva fondamentale propria per $|nC|$ seguirà che essa è pure fondamentale propria per $|C|$. Il teorema può essere posto sotto altra forma, affermando che le curve fondamentali improprie di $|C|$ non influiscono nella determinazione delle sue curve aggiunte. Se ne trae il *Corollario*: *Se un sistema lineare irriducibile semplice* (*non possedente un fascio di unisecanti*) *è privo di curve fondamentali proprie, il suo sistema aggiunto, spogliato di eventuali componenti fisse fondamentali, coincide col sistema subaggiunto.*

Osservazione. – Non sono soltanto le curve fondamentali improprie d'un sistema $|C|$ che non influiscono nella determinazione delle sue curve aggiunte.

Le curve fondamentali di $|C|$ non influenti nella determinazione delle sue curve aggiunte possono chiamarsi *curve fondamentali apparenti*: un esempio di esse (all'infuori delle curve improprie) è dato dalle curve fondamentali *irriducibili razionali* a cui non sieno infinitamente vicine altre curve fondamentali ([28]).

29. - Influenza delle curve fondamentali proprie d'un sistema lineare nella determinazione delle curve aggiunte.

L'influenza di una curva fondamentale nella determinazione delle curve aggiunte a $|C|$, può essere valutata nel caso generale, quando $|C|$ *abbia curve fondamentali distinte*: conserviamo la limitazione che $|C|$ *sia semplice* e *non possieda un fascio di unisecanti.*

Si assuma come immagine dell'ente algebrico una superficie F (d'ordine n) in S_3, la quale sia proiezione generica d'una superficie senza singolarità in un iperspazio e contenga una stella (avente un centro O i-plo per F) di sezioni piane C (curve generiche di $|C|$) (cfr. § 8): la F (per costruzione) non ha punti multipli isolati fuori di O. Allora le curve subaggiunte a $|C|$ vengono segate su F da superficie ψ_{n-3} (di ordine $n-3$) aventi O $(i-1)$-plo e seganti i piani generici per O secondo curve ag-

([28]) Cfr. le mie « Ricerche », V, 4, 6.

giunte alle sezioni di F. (Invero una tale ψ_{n-3} si costruisce col metodo del § 18). Una curva fondamentale di $|C|$ ha per immagine su F una retta s-pla per O; la quale non sarà in generale $(s-1)$-pla per una tale ψ_{n-3} (se è una retta fondamentale non apparente), ma sarà $(s-1)$-pla per quelle tra le ψ_{n-3} considerate che segano su F curve aggiunte a $|C|$, giacchè tali curve aggiunte insieme ad O e a rette per esso costituiscono (per definizione) delle curve aggiunte (alle sezioni piane) su F.

Si osservi poi che una ψ_{n-3} avente una retta a per O, s-pla per F, come $(s-1)$-pla, incontra un piano generico per a secondo una curva d'ordine $n-s-2$ (particolare) aggiunta alla sezione di F fuori di a, avente come ϱ-plo ogni punto ϱ-plo per essa su a (il quale è un punto $(\varrho+s)$-plo non isolato per F): segue che una curva aggiunta a $|C|$ sega una curva C_1 residua della fondamentale a in un gruppo di punti appartenente alla serie somma di quella canonica di C_1 e del gruppo di punti comune a C_1, a [29].

D'altra parte le condizioni cui deve soddisfare una ψ_{n-3} la quale determini su F una curva aggiunta a $|C|$ (e non soltanto subaggiunta), sono tutte espresse dal contenere come $(s-1)$-ple le rette s-ple per F (distinte) passanti per O.

Dunque si trae il

TEOREMA. – *Se $|C|$ è un sistema lineare irriducibile semplice di genere >0, dotato di curve fondamentali proprie distinte, e non possedente un fascio di unisecanti, le curve aggiunte a $|C|$ sono quelle che*

1) *segano una curva C generica secondo un gruppo canonico;*

2) *segano una curva generica C_1 (di genere $\pi \geqslant 0$) residua d'una curva fondamentale propria θ, secondo un gruppo della serie somma della $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ canonica di C_1 e di quella cui appartiene il gruppo dei punti comuni a C_1 ed a θ* [30]. L'enunciato perderebbe il significato se le C_1 residue di una θ fossero riducibili, ma allora $|C|$ possederebbe un fascio di unisecanti, o non sarebbe semplice.

Una estensione si può prevedere pel caso di curve fondamentali qualunque, che vengano distribuite in gruppi ciascuno dei quali si possa considerare come l'insieme di un certo numero r di curve fondamentali $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ infinitamente vicine. Allora occorrerà esaminare i sistemi $|C_1|\,|C_2|\ldots$ che si ottengono staccando da $|C|$ successivamente $\theta_1, \theta_2, \ldots$ (riportando la cosa ad un multiplo di $|C|$ ove $|C|$ non sia assai ampio). Il resultato che si prevede è analogo a quello più limitato che è stato

---

[29] Parlando di serie somma di quella canonica e di un gruppo di λ punti sopra una curva C_1, includeremo convenzionalmente anche il caso in cui C_1 abbia il genere 0, riguardando allora come serie somma siffatta quella $\infty^{\lambda-2}$ dei gruppi di $\lambda-2$ punti su C_1.

[30] Tale è appunto la definizione diretta delle curve aggiunte a $|C|$ data nelle mie « Ricerche », III.

stabilito: però l'argomento è delicato ed esige cautela ove si voglia trattare con rigore.

30. - Sistemi lineari possedenti un fascio di curve unisecanti.

Un cenno speciale meritano i sistemi lineari possedenti un fascio di unisecanti che sono stati esclusi in varî enunciati precedenti: l'ente algebrico cui appartengono sistemi siffatti ammette come superficie immagine una rigata di cui le curve del sistema sono direttrici.

Cominciamo dunque a stabilire un lemma sui sistemi lineari appartenenti ad una rigata o più in generale ad una superficie con un fascio di curve razionali K.

Sopra una tale superficie si consideri un sistema lineare di curve seganti in ϱ (> 1) punti variabili le curve K del fascio; sia $|C|$ il detto sistema che supponiamo irriducibile ∞^2 almeno.

Costruiamo un fascio razionale di curve composte ciascuna con un certo numero s (assai grande) di curve K, il che può farsi considerando una serie g_s^1 sull'ente ∞^1 che ha per elementi le curve K.

Trasformiamo la data superficie in una F di S_3, in modo che le curve del nominato fascio vengano segate dai piani per una retta a, ed in modo che le ∞^2 curve generiche C (di una rete) vengano segate dai piani per un punto O fuori di a. Sia n l'ordine di F, ed i la molteplicità per F della retta a; possiamo supporre senza restrizione $i > 0$; ogni piano per a sega ulteriormente F secondo s curve K ciascuna (incontrata da un piano per O in ϱ punti e quindi) d'ordine ϱ; si ha quindi

$$n = i + s\varrho\,.$$

Le curve aggiunte a $|C|$ sono contenute nel sistema delle curve aggiunte (alle sezioni piane) su F: queste ultime (non essendo F rigata) si trovano fra le sezioni di F colle superficie ψ_{n-3} d'ordine $n-3$, subaggiunte ad essa.

Ora una tale ψ_{n-3} ha la retta a come retta $(i-1)$-pla, e sega quindi ulteriormente un piano generico per a secondo una curva d'ordine $n-i-2$, aggiunta alla curva composta di s curve K sezione di F: per conseguenza il gruppo delle intersezioni di una ψ_{n-3} con una curva K (d'ordine ϱ) appartiene alla serie segata sulla K stessa dal sistema somma delle altre $s-1$ curve K che sono nel suo piano, e delle curve d'ordine $\varrho-2$ aggiunte ad essa: ma poichè due K si segano soltanto in punti multipli di F (sull'ente non hanno punti comuni) si conclude che le ψ_{n-3} segano sopra una K una serie di gruppi di $\varrho-2$ punti. Perciò le curve aggiunte a $|C|$ incontreranno pure le K in $\varrho-2$ punti al più. Vale a dire:

Sopra un ente algebrico ∞^2 possedente un fascio di curve razionali K, le curve aggiunte ad un sistema lineare irriducibile ∞^2 almeno di curve ϱ secanti le K ($\varrho > 1$), segano le K stesse in $\varrho - 2$ punti al più; e si vedrebbe che tali curve aggiunte segano le K proprio in $\varrho - 2$ punti e non in meno (cfr. § 32).

Un corollario immediato è il seguente:

Sopra un ente algebrico ∞^2 un sistema lineare irriducibile $|C|$ ∞^2 almeno, il quale possegga un fascio di curve unisecanti (certo razionali) *non ammette curve aggiunte.*

Infatti se $|C|$ ammettesse curve aggiunte, una di queste sommata ad una C costituirebbe una curva aggiunta a $|2C|$ e segherebbe in un punto (almeno) le curve (razionali) dell'ente unisecanti le C, mentre le curve di $|2C|$ segano in due punti queste stesse curve.

Osservazione. – Se sopra un ente algebrico ∞^2 esiste un fascio di curve razionali, partendo da un opportuno sistema irriducibile ed applicando successivamente l'operazione di aggiunzione si giunge a sistemi di curve bisecanti o unisecanti quelle del fascio, e quindi ad una superficie immagine dell'ente rigata o con un fascio di coniche ([31]).

V.

SUPERFICIE AGGIUNTE

31. - Superficie aggiunte ad una di S_3.

Sopra un ente algebrico si abbia un sistema lineare irriducibile semplice $|C|$: scegliamo come immagine dell'ente algebrico una superficie F di S_3 avente come sezioni piane ∞^3 curve C generiche: la F sia non rigata ed abbia l'ordine n. Le curve aggiunte a $|C|$ (che sono definite a meno di punti di F) vengono segate su F da particolari superficie (d'ordine $n-3$) subaggiunte ad F: queste s'indicheranno con φ_{n-3} e si diranno *superficie aggiunte* ad F.

La loro particolarità tra le subaggiunte dipende dal modo di comportarsi nei punti multipli isolati (propri) non *apparenti* su F, cioè in quei punti isolati di F che non sono immagini di curve fondamentali apparenti del sistema delle sezioni piane.

La definizione indiretta data di esse è generale qualunque natura

([31]) Cfr. Noether, *Ueber die Flächen welche ein Schaar rationaler Curven besitzen*, « Mathem. Annalen », 3.

abbiano le singolarità di tali punti. Ma le condizioni che vengono imposte alle φ_{n-3} aggiunte ad F dai punti multipli isolati possono facilmente essere fissate quando la F abbia *punti multipli isolati distinti* (immagini di curve fondamentali distinte per $|C|$); *allora una superficie* φ_{n-3} *aggiunta ad* F *è una superficie* (d'ordine $n-3$) *che sega un piano generico di* S_3 *secondo una curva aggiunta alla sezione di* F *ed un piano generico per un punto multiplo isolato* O *secondo una curva che insieme ad una retta per* O *costituisce una aggiunta alla sezione di* F (32); una tale superficie ha dunque come $(i-2)$-plo un punto i-plo isolato ordinario di F (33). La definizione data delle superficie aggiunte ad F si estende alle superficie aggiunte d'ordine $> n-3$ o $< n-3$, (anche nel caso di singolarità arbitrarie per F).

Basta infatti valersi delle curve aggiunte ad $|rC|$ componenti il sistema $|C_a + (r-1)C|$ (se si vuole « curve aggiunte di *rango* $r-1$ su F ») o delle curve di $|C_a - (r-1)C|$ supposte esistenti (curve aggiunte di rango $1-r$) e definire le particolari superficie subaggiunte ad F di cui tali curve sono sezioni con F (fuori della curva multipla), come *superficie* φ_{n-4+r} *aggiunte* ad F.

Adottata questa definizione delle φ_{n-4+r} per r assai alto, in modo che esistano infinite superficie d'ordine $n-4+r$ aggiunte ad F, potremo definire anche il sistema delle $\varphi_{n-4+r+s}$ ($s \gtrless 0$) come il sistema *normale* (cioè determinato dal gruppo base) somma del sistema delle φ_{n-4+r} e del sistema di tutte le superficie d'ordine s ($s > 0$), o invece come il sistema residuo di una superficie generale d'ordine s (contenuta nel sistema delle φ_{n-4+r}) rispetto al sistema φ_{n-4+r}. Possiamo esprimere ciò dicendo che: *riguardo ad ogni superficie* F_n *d'un certo ordine* n *in* S_3 (*non rigata*) *risultano definite le superficie aggiunte d'ordine* $n-4+r$ (φ_{n-4+r}), *in modo che ne esistono sempre infinite per* r *assai alto*: che « *le superficie aggiunte dei vari ordini si comportano ugualmente nei punti singolari di* F_n *e sono definite da tale comportamento* »: che « *la data definizione ricade in quella di* NOETHER *se le singolarità di* F *possono riguardarsi come ordinarie e nella mia* (delle « Ricerche ») *se la* F *ha punti isolati* (*propri*) *distinti* (caso che include quello delle singolarità ordinarie). Si potrebbe giungere ugualmente alla definizione delle superficie aggiunte ad F con opportuna estensione

(32) Questa interpretazione proiettiva dei resultati del § 29 si trova pure nelle mie « Ricerche », III.

(33) Ed in questo caso si ha delle superficie aggiunte l'ordinaria definizione di NOETHER. Si prevede poi che, ove le singolarità superiori sieno definite come riunioni di punti multipli isolati ordinari infinitamente vicini, e curve multiple ordinarie infinitamente piccole, le condizioni che un punto multiplo isolato impone alle superficie aggiunte si esprimeranno dicendo che esse debbono possedere come $(i-2)$-plo ciascuno di tali punti e come $(i-1)$-pla ciascuna di tali curve. Ciò si suppone generalmente in vari lavori.

della definizione del sig. NOETHER per singolarità ordinarie, considerate le singolarità superiori come limiti di queste [34].

In ogni caso qualunque via si segua per stabilire il concetto delle superficie aggiunte ad F, si ha:

Sopra una superficie F (*d'ordine* n) *non rigata, in* S_3, *le curve aggiunte al sistema r-plo di quello delle sezioni piane* (*curve aggiunte di rango* $r-1$ *su* F_n) *vengono segate* (*fuori della curva multipla e dei punti multipli*) *dalle superficie* φ_{n-4+r} (*d'ordine* $n-4+r$) *aggiunte ad* F_n: Alle parole «fuori dei punti multipli» si deve dare un significato conveniente tenuto conto delle *ipermolteplicità* che eventualmente le φ_{n-4+r} possono avere in un punto multiplo.

Corollario. – Nel piano il sistema (non singolare) di tutte le curve C_n (d'ordine $n>3$) ha come sistema aggiunto (= subaggiunto) quello di tutte le C_{n-3}, quindi (pel § 26) il sistema aggiunto ad un sistema lineare di C_n determinato da punti base multipli è costituito da tutte le curve C_{n-3} *aggiunte* alle C_n [35] (nel senso ordinario di BRILL e NOETHER).

Si può dunque affermare che: *data in* S_3 *una superficie* (*razionale*) F_m *d'un certo ordine m, rappresentata punto per punto sul piano, le curve* (*d'ordine* $n-3$) *del piano, aggiunte alle curve* (*d'ordine* n) *immagini delle sezioni piane di* F_m *rappresentano le sezioni di* F_m (fuori della curva multipla) *colle superficie* φ_{m-3} *d'ordine* $m-3$ *aggiunte ad* F_m *e viceversa.*

Questo teorema si trova già nelle mie *Ricerche* (III, 5), con qualche restrizione (punti isolati distinti per F_m): il sig. HUMBERT lo ha stabilito nuovamente per via indipendente [36], estendendo la considerazione alla φ_{n-4+r} (r qualunque): è chiaro come si perverrebbe anche qui a tale estensione.

32. - Superficie aggiunte alle rigate.

Le superficie rigate, fatta eccezione dai coni, non hanno punti multipli isolati: è quindi naturale in ordine alla definizione generale di chiamare superficie aggiunte ad una rigata F di S_3 tutte le superficie (subaggiunte) seganti un piano generico secondo una curva aggiunta alla sezione di F; soltanto se F è un cono d'ordine n si imporrà altresì alle superficie aggiunte di possedere il vertice del cono F come $(n-2)$-plo.

Dopo ciò è essenziale notare come si estendano alle rigate i prece-

---

[34] A questo proposito cfr. NOETHER, « Göttinger Nachrichten », 1871.

[35] Il sistema aggiunto ad un sistema lineare nel piano si trova considerato da NOETHER, KANTOR e sistematicamente nel lavoro di CASTELNUOVO, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* (« Accad. di Torino, Memorie », 1891).

[36] « Mathem. Annalen », 1895.

denti teoremi relativi alle superficie aggiunte, benchè le rigate stesse si siano dovute escludere innanzi a cagione del procedimento seguito.

Lasciamo da parte i coni pei quali la verifica dei resultati si fa immediatamente. Cominciamo dal notare che:

Le superficie φ_{n-3+r} d'ordine $n-3+r$ aggiunte ad una rigata F d'ordine n in S_3 segano le generatrici (fuori della curva multipla) in $r-1$ punti (si suppone $r>0$; per $r=0$ non esistono φ_{n-3}).

Invero un piano per una generatrice a sega ulteriormente la F secondo una curva C d'ordine $n-1$ che sega la generatrice stessa fuori della curva multipla in *un* punto (variabile col piano): la sezione dello stesso piano con una φ_{n-3+r} è una curva d'ordine $n-3+r$ che passa pei punti fissi di C su a (punti della curva multipla) e si comporta in essi come la C: essa sega dunque a in $r-1$ punti.

Ora si consideri su F una curva k aggiunta al sistema segato dalle superficie d'ordine $r+1$ (necessariamente $r>0$): benchè la F sia rigata si prova col ragionamento del § 21 che la k sega la sezione piana generica di F in un gruppo sezione di una curva aggiunta d'ordine $n-3+r$ giacchè per ciò si esige soltanto l'applicazione del teorema fondamentale (non seguirebbe invece la proprietà inversa): si deduce col procedimento del § 18 che questa curva k è sezione parziale di F (fuori della curva multipla) con una superficie aggiunta φ_{n-3+s} dove $s \geqslant r$: non diciamo $s=r$ appunto perchè F è rigata. Ma nel caso $s>r$ (seguendo appunto la costruzione del § 18), la sezione di F colla φ_{n-3+s} oltrechè di k (e della curva multipla) si compone soltanto di generatrici della rigata (cioè di curve non aventi intersezioni variabili coi piani d'un fascio); si dedurrebbe quindi che k sega la generatrice di F in $s-1$ punti, mentre sappiamo dal § 30 che essa sega le dette generatrici in $r-2$ punti al più.

Concludiamo:

Sopra una superficie rigata d'ordine n in S_3, le curve aggiunte al sistema segato dalle superficie d'ordine $r+1$ ($r>0$) sono le sezioni della rigata (fuori della curva multipla) colle superficie aggiunte d'ordine $n-3+r$.

E la cosa vale anche pei coni.

Si ha dunque che le rigate non dànno eccezione ai resultati generali.

Osservazione. – Si noti come possono costruirsi sopra una rigata F (d'ordine n e genere p) i sistemi aggiunti ai sistemi segati dalle superficie d'ordine $r+1$, per $r=1, 2,\ldots$ (sistemi aggiunti di rango r). In primo luogo il sistema aggiunto di rango 1 si compone di ∞^{p-2+n} curve ciascuna costituita di $2p-2+n$ generatrici. Gli altri si ottengono sommando a questo sistema le sezioni piane, le sezioni quadriche, ecc.

Segue che le superficie aggiunte ad F dall'ordine $n-2$ in su, segano sopra un piano *tutto* il sistema delle curve aggiunte di quel dato ordine alla sezione di F.

Vi sono su F curve subaggiunte di rango $r = 0$ o di rango $r > 1$ che non sono aggiunte: se ne possono infatti costruire componendole con gruppi di generatrici. Esse non possono ottenersi come ulteriori *sezioni totali di F fuori della curva multipla*, con superficie aggiunte.

33. - Una interpretazione proiettiva del teorema fondamentale.

Il teorema fondamentale del § 27, è suscettibile di una interpretazione proiettiva che (in virtù della definizione diretta che si ha per le superficie aggiunte ad una superficie di S_3 con punti multipli isolati distinti) può fornire una nuova definizione delle curve aggiunte ad un sistema lineare. Questa è la seguente.

Sopra una superficie F (d'ordine n) in S_3, non rigata, le curve aggiunte ad un fascio lineare irriducibile di sezioni piane per una retta i-pla (ordinaria) a, sono segate dalle superficie φ_{n-3} (d'ordine $n - 3$) aggiunte ad F che hanno come i-pla la retta a e come $(\varrho - 1)$-plo ogni punto ϱ-plo di F su a.

Dunque il sistema di curve così ottenuto su F non muta per una trasformazione birazionale di F in cui si conservi il detto fascio di sezioni piane, oppure si muti questo in un altro fascio dell'eventuale sistema lineare più ampio cui esso appartiene come fascio generico.

Una interpretazione analoga di quel teorema fondamentale si avrebbe riferendosi ad una rete segata su F dai piani d'una stella.

34. - Il teorema di Noether sulle superficie aggiunte alle curve gobbe e la sua inversione.

Un'altra interpretazione proiettiva del teorema fondamentale del § 27 serve nuovamente a definire le curve aggiunte ad un sistema lineare, e fornisce come corollario il teorema del sig. NOETHER relativo alle superficie aggiunte alle curve gobbe ([37]).

Sia F una superficie d'ordine n, in S_3 a sezioni piane C. Un sistema lineare $|K|$ (∞^1 almeno) su F venga segato da superficie f_m d'ordine m passanti per una curva K' e per certi punti base su F (semplici per F). Il sistema aggiunto a $|mC|$ vien segato su F dalle superficie aggiunte φ_{n-4+m} (d'ordine $n - 4 + m$): *le φ_{n-4+m} che passano per K' ed hanno come $(i-1)$-plo ogni punto base i-plo di $|K|$ su F, segano su F le curve aggiunte a $|K|$; viceversa queste curve aggiunte si ottengono sempre come sezioni di F*

([37]) « Mathem. Annalen », 8.

con tali φ_{n-4+m}. (Nell'applicare il teorema occorre qualche avvertenza riguardo alle curve che compongono K' qualcuna delle quali potrebbe esser l'intorno d'un punto multiplo su F, e riguardo ai punti base per $|K|$ qualcuno dei quali potrebbe essere pure un (parziale) intorno d'un punto multiplo).

In particolare dunque le dette φ_{n-4+m} segano su una K gruppi canonici, e ciò vale anche se invece di un sistema lineare si ha una sola K; in questo consiste il teorema di NOETHER, il quale segue già dal nostro teorema del § 20 (nel quale appunto non è essenziale che le curve residue di quella staccata sieno in numero infinito). Ma l'interpretazione proiettiva che abbiamo dato del teorema fondamentale ci dà anche di più, ci dà (si può dire) *l'inversione del teorema di* NOETHER (ove questo si applichi ad un sistema lineare sulla superficie F), *almeno in quella misura in cui essa è possibile.* (Si confrontino a questo proposito le considerazioni in principio del § 25).

35. - Completamento proiettivo del teorema del resto.

Sappiamo (§§ 19, 27, 28) che il sistema subaggiunto ed aggiunto ad un sistema $|C|$ sopra un ente algebrico sono sistemi normali: e sebbene nello stabilire questo fatto pel sistema subaggiunto si sieno imposte a $|C|$ le restrizioni del § 19, relativamente al sistema aggiunto esso risulta vero per ogni sistema $|C|$ (stante il teorema del § 27). Interpretando proiettivamente questo resultato otteniamo il complemento proiettivo del teorema del resto.

Sopra una superficie F_n *d'ordine* n *in* S_3, *tutte le superficie aggiunte di dato ordine segano su* F (*fuori della curva multipla*) *un sistema lineare normale.*

Ogni sistema lineare normale su F *può essere segato su di essa dalle superficie* φ *aggiunte ad* F *di ordine abbastanza alto che passano per curve* (*e punti*) *fisse* (*intersezioni residue*): *questo sistema su* F *viene dunque segato ugualmente dalle* φ *che passano per un'altra intersezione residua con* F.

Le rigate non fanno eccezione al teorema (§ 32); resterebbero soltanto fuori le superficie a sezioni razionali; ma per queste (che sono rigate razionali o superficie di STEINER) [38] la cosa si verifica direttamente.

Data su F una curva C si può considerare una φ di ordine abbastanza elevato che passa per essa; se C' è l'intersezione residua di φ, F, tutte le φ per C' segano su F un sistema normale: questo non dipende dall'ordine di φ (supposto assai alto), nè dalla φ da cui si parte come segue

---

[38] PICARD, « Giornale di Crelle », t. C.

dal teorema precedente; se inoltre si tien conto dei buchi della C e si costringono le φ a passare per quei punti ed a toccare debitamente la F, il sistema ottenuto è il sistema normale cui appartiene la C (data sull'ente), e però non muta neppure rifacendo la costruzione per una superficie trasformata ([39]).

36. - Lemmi sulle superficie subaggiunte.

1° Lemma. – *Se C_n è una curva piana d'ordine n e genere π, e con C_{n-3+r} $(r \geqslant 1)$ s'indicano le curve d'ordine $n-3+r$ aggiunte a C_n, il minimo sistema lineare di $C_{n-3+(r+1)}$ contenente* tutte *le curve spezzate in una retta e in una C_{n-3+r}* è il sistema normale di tutte *le curve d'ordine $n-3+(r+1)$ aggiunte a C_n* ([40]).

Per la dimostrazione si osservi che il minimo sistema delle $C_{n-3+(r+1}$ predetto contiene le

$$\infty^{\pi-1+rn+[r(r-3)/2]}$$

curve composte d'una retta a e d'una C_{n-3+r}, e le

$$\infty^{\pi-1+rn+[r(r-3)/2]}$$

curve composte di un'altra retta a' e d'una C_{n-3+r}; questi due sistemi han comune il sistema composto di a, a' e di una $C_{n-3+(r-1)}$ che è

$$\infty^{\pi-1+(r-1)n+[(r-1)(r-4)/2]}$$

e però il minimo sistema che li contiene entrambi ha una dimensione

$$\geqslant 2\left\{\pi-1+rn+\frac{r(r-3)}{2}\right\}-\left\{\pi-1+(r-1)n+\frac{(r-1)(r-4)}{2}\right\}$$

cioè

$$\geqslant \pi-2+(r+1)n+\frac{(r+1)(r-2)}{2}\,;$$

ma questo sistema è contenuto o coincide con quello delle $C_{n-3+(r+1)}$ pas-

([39]) Si vede così che l'enunciato precedente abbraccia in sè e completa il *Restsatz* di Noether (« Mathem. Annalen », 8) e quello stabilito nel cap. 3 delle mie *Ricerche*. (A questo proposito cfr. l'Appendice).

([40]) Cfr. *Ricerche*, pag. 33-34 [questo volume, pp. 68-69].

santi pel punto comune ad a, a', e poichè le curve composte d'una retta e d'una C_{n-3+r} non passano tutte per quel punto, la dimensione del sistema delle $C_{n-3+(r+1)}$ considerate è

$$\geqslant \pi - 1 + (r+1)n + \frac{(r+1)(r-2)}{2},$$

e quindi è appunto la dimensione

$$\pi - 1 + (r+1)n + \frac{(r+1)(r-2)}{2}$$

del sistema normale di *tutte* le curve d'ordine $n-3+(r+1)$ aggiunte a C_n.

2° Lemma. – *Il minimo sistema lineare di curve piane C_{n-2+r} contenente* tutte *le curve composte d'una C_{n-2} aggiunta a C_n e d'una retta contata r volte* ($r \geqslant 1$) *è* il sistema normale di tutte *le curve d'ordine $n-2+r$* aggiunte a C_n.

Anzitutto si noti che una C_{n-2} ha come residuo rispetto al nominato sistema di C_{n-2+r} un sistema contenente tutte le rette r-ple, quindi il sistema di *tutte* le curve d'ordine r. Segue che una retta $(r-1)$-pla ha come residuo rispetto al sistema delle C_{n-2+r} un sistema di curve C_{n-1} (d'ordine $n-1$) contenente tutte le linee composte d'una C_{n-2} e d'una retta ossia (pel precedente lemma) il sistema di tutte le C_{n-1} aggiunte a C_n.

Adoperando ancora il precedente lemma si deduce analogamente che una retta $(r-2)$-pla ha come residuo rispetto al sistema delle C_{n-2+r} il sistema di tutte le curve d'ordine n aggiunte alla data C_n ecc., sicchè infine risulta stabilito che una retta (semplice) ha come residuo rispetto al nominato sistema di C_{n-2+r} quello di tutte le $C_{n-2+(r-1)}$ e però il sistema delle C_{n-2+r} è quello di *tutte* le curve d'ordine $n-2+r$ aggiunte a C_n c.d.d..

Teorema. – *Se F_n è una superficie d'ordine n in S_3, esiste un numero h assai alto, tale che le superficie ψ_{n-2+h} d'ordine $n-2+h$ subaggiunte ad F_n segano sopra ogni piano il sistema normale di tutte le curve d'ordine $n-2+h$ aggiunte alla sezione piana di F_n: altrettanto avviene allora* (*se $h \geqslant 0$*) *per le subaggiunte d'ordine superiore.*

Stabiliamo la prima parte del teorema; la seconda segue quindi come immediata applicazione del primo lemma, poichè fra le $\psi_{n-2+(h+1)}$ vi sono quelle composte d'una ψ_{n-2+h} e d'un piano.

Per ciò si fissi una retta generica a e in un piano α per essa si consideri una C_{n-2} aggiunta alla sezione di α la quale incontrerà a in $n-2$ punti che chiameremo $A_1 A_2 \ldots A_{n-2}$: si fissino inoltre π rette generiche $a_1 \ldots a_\pi$ incidenti a C_{n-2}, essendo π il genere delle sezioni piane di F_n.

Allora in ogni piano per a resta fissata una curva C_{n-2} d'ordine $n-2$ aggiunta alla sezione di F_n, la quale passa per $A_1 \ldots A_{n-2}$ e incontra $a_1 \ldots a_\pi$, e questa C_{n-2} variando il piano per a genera una superficie ψ_{n-2+h} subaggiunta ad F_n (§ 19) d'un certo ordine $n-2+h$ dove $h \geqslant 0$; questa contiene a come retta h-pla. Per ciò le ψ_{n-2+h} subaggiunte ad F_n segano sul piano (generico) α un sistema di curve contenente tutte quelle composte d'una retta h-pla e d'una C_{n-2} aggiunta alla sezione di F_n: in virtù dei nostri lemmi precedenti le ψ_{n-2+h} subaggiunte ad F_n segano dunque su α il sistema di tutte le curve d'ordine $n-2+h$ aggiunte alla sezione di F_n: ciò è quanto dovevasi dimostrare.

37. - Dimensione virtuale del sistema delle superficie di dato ordine aggiunte ad una data.

Le condizioni che i punti multipli isolati d'una superficie F in S_3 (non rigata), impongono alle superficie subaggiunte ψ perchè esse sieno aggiunte a F, sono indipendenti dall'ordine delle ψ (supposto assai alto); si tratta invero di imporre alle ψ un tal modo di comportarsi nei nominati punti multipli isolati di F, che dal sistema (subaggiunto di rango r) segato dalle ψ, vengano staccate un certo numero di volte le curve fondamentali del sistema $|C|$ determinato dalle sezioni piane di F, e questo numero è uguale al numero analogo calcolato per un sistema multiplo di $|C|$ il quale possiede le medesime curve fondamentali di $|C|$ coi medesimi caratteri (cfr. i §§ 21, 31).

Pertanto si può vedere che il sistema di curve segato sopra un piano dalle superficie φ_{n-4+k} d'ordine $n-4+k$ aggiunte ad una F d'ordine n in S_3, sarà *tutto* il sistema normale delle curve d'ordine $n-4+k$ aggiunte a quella sezione di F, se k è assai alto. Invero si designi con M_k il numero delle ψ_{n-4+k} (linearmente indipendenti) e con N_k quello delle φ_{n-4+k}; e si supponga di prendere $k \geqslant h$ dove h è già così grande che le (subaggiunte) ψ_{n-4+k} $(k=h,\ h+1, \ldots)$ seghino sopra un piano generico il sistema di tutte le curve C_{n-4+k} aggiunte alla sezione di F, e così grande ancora che sia $M_k - N_k = M_h - N_h = P_h$; si designi con Δ_k $(k=h,\ h+1, \ldots)$ la deficienza del sistema di curve segate dalle φ_{n-4+k} sul piano stesso: allora si ha

$$M_{h+1} = N_{h+1} + P_h + \Delta_{h+1}\,.$$

da cui

$$\Delta_{h+1} = 0\,,$$

ed analogamente $\Delta_{h+2} = 0$ ecc., c.d.d.

Più tardi (§ 40) sarà data la determinazione di un intero h al di là del quale avvenga il fatto menzionato ($\Delta_k = 0$): intanto preme rilevare sotto altra forma il significato dell'osservazione precedente.

Suppongasi di aver preso $r > h$, e di voler calcolare il numero delle superficie $\varphi_{n-4+(r+1)}$ aggiunte ad F, dato il numero delle φ_{n-4+r}: si osserverà per questo che le φ_{n-4+r} aumentate d'un piano fisso α costituiscono $\varphi_{n-4+(r+1)}$; ora per staccare il piano α dal sistema delle $\varphi_{n-4+(r+1)}$ bisogna scegliere *una* tra le $C_{n-4+(r+1)}$ sezioni su α delle $\varphi_{n-4+(r+1)}$ e imporre successivamente alle $\varphi_{n-4+(r+1)}$ che passano per essa di contenere ancora un altro punto di α; ciò (stantechè le $\varphi_{n-4+(r+1)}$ segano su α il sistema di tutte le curve aggiunte alla sezione di F) porta ad imporre alle $\varphi_{n-4+(r+1)}$

$$\pi + rn + \frac{r(r-3)}{2}$$

condizioni, essendo π il genere delle sezioni piane di F.

Si può dunque affermare che:

I numeri N_{n-4+r} esprimenti le dimensioni dei sistemi di superficie φ_{n-4+r} aggiunte ad una data d'ordine n, a sezioni di genere π (non rigata), formano al di là d'un certo valore per r una progressione aritmetica di terzo ordine che ha per ragione

$$\pi + rn + \frac{r(r-3)}{2}.$$

Se si immagina questa progressione prolungata anche al di sotto del detto valore di r, i termini di essa ci daranno dei valori che chiameremo le dimensioni *virtuali* dei sistemi di φ_{n-4+r}: è chiaro che questi valori non possono superare gli *effettivi* per $r \geqslant 0$, giacchè in questo caso il sistema segato su α dalle $\varphi_{n-4+(r+1)}$ può bensì non essere normale ed avere quindi una dimensione minore di

$$\pi - 1 + rn + \frac{r(r-3)}{2}$$

ma mai avere una dimensione maggiore.

La progressione aritmetica di terzo ordine di cui i termini esprimono le dimensioni virtuali dei sistemi di φ_{n-4+r}, riesce determinata appena se ne è calcolato un termine; basta per ciò avere il numero delle φ_{n-4+r} per r assai alto. Ciò vien dato, nel caso che F abbia singolarità ordinarie, dalle formule di postulazione del sig. NOETHER (41). Il sig. CASTELNUOVO (42)

(41) « Annali di Matematica », serie 2ª, t. V. Alcuni casi di queste formule erano stati trattati innanzi dal sig. CAYLEY.

(42) *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche,* « Rendic. Circolo Matematico di Palermo », t. IV.

ha osservato appunto che queste formule di postulazione possono esprimersi nel modo semplice sopra detto; sotto questa forma esse risultano ora estese a tutti i casi, indipendentemente da ogni restrizione per le singolarità di F.

Una ultima osservazione riguarda l'interpretazione invariantiva del resultato precedente.

Sia $|C|$ il sistema normale delle sezioni piane di F e quindi $|rC|$ il sistema normale cui appartengono le sezioni di F colle superficie d'ordine r (>1).

Si indichi con $\delta(rC)$ la deficienza ($\geqslant 0$) della serie dei gruppi canonici segata sopra una curva generica di $|rC|$ dal sistema $|(rC)_a|$, ossia dalle φ_{n-4+r} aggiunte ad F: e si denoti con π_r il genere di $|rC|$, di guisa che la dimensione della serie segata dalle φ_{n-4+r} sulla curva generica di $|rC|$ valga

$$\pi_r - 1 - \delta(rC)\,.$$

Ciò posto calcoliamo la dimensione N_{n-4+r} del sistema delle φ_{n-4+r}. Poichè per ogni curva sezione di una φ_{n-4+r} con F passano (per $r \geqslant 4$) $\infty^{(r-1)(r-2)(r-3)/6}$ φ_{n-4+r}, e poichè per ogni gruppo sezione di una di tali curve con una curva di $|rC|$ passano $\infty^{N_{n-4}+1}$ curve tra quelle, si avrà

$$N_{n-4+r} = N_{n-4} + \pi_r - \delta(rC) + \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{6}\,,$$

da cui (mutando r in $r+1$ e sottraendo)

$$N_{n-4+(r+1)} - N_{n-4+r} = \pi_{r+1} - \pi_r - \delta((r+1)C) + \delta(rC) + \frac{r(r-3)}{2} + 1:$$

d'altronde se $\pi_1 = \pi$ è il genere delle sezioni piane di F si ha (§ 16)

$$\pi_{r+1} = \pi_r + \pi + rn - 1\,;$$

dunque

$$N_{n-4+(r+1)} - N_{n-4+r} = \pi + rn - \delta((r+1)C) + \delta(rC) + \frac{r(r-3)}{2}\,.$$

D'altra parte si è visto prima che $N_{n-4+(r+1)} - N_{n-4+r}$ per r assai alto vale $\pi + rn + r(r-3)/2$: segue dunque che per r assai alto dovrà aversi

$$\delta((r+1)C) = \delta(rC)\,.$$

Invece per valori inferiori ($\geqslant 0$) di r, $\delta(rC)$ (di sua natura positivo) è crescente perchè per $r > 0$ il sistema segato sopra un piano dalle φ_{n-3+r} ($r \geqslant 0$) può essere incompleto ma non sovrabbondante, e quindi è sempre

$$N_{n-4+(r+1)} - N_{n-4+r} \leqslant \pi + rn + \frac{r(r-3)}{2}$$

onde

$$\delta(rC) - \delta((r+1)C) \leqslant 0 :$$

segue che il detto $\delta(rC)$ al crescere di r ammette un massimo.

Dunque si può enunciare il teorema:

Sopra un ente algebrico ∞^2 si abbia un sistema lineare irreducibile semplice $|C|$, (∞^3 almeno) e s'indichi con $\delta(rC)$ la deficienza ($\geqslant 0$) della serie di gruppi canonici segata sulla curva generica di $|rC|$ dal sistema aggiunto $|(rC)_a|$; il $\delta(rC)$ è una funzione positiva o nulla di r (per $r > 0$) che non decresce al crescere di r e per r assai alto ammette un massimo ([43]).

Nell'enunciato non figura (come sembrerebbe doversi) l'esclusione del fatto che $|C|$ possegga un fascio di curve unisecanti, perchè se ciò accade per $|C|$ non accadrà per $|2C|$, e mediante il teorema fondamentale la proprietà stabilita per $|2rC|$ si estende a $|(2r-1)C|$. D'altronde questa estensione rientrerebbe come corollario nel teorema del § 41.

Osservazione. – Se immaginiamo di calcolare col procedimento seguito innanzi il numero N_{n-4+r} delle φ_{n-4+r} aggiunte ad F ($r > 0$) partendo dal numero supposto noto $N_{n-4+(r-1)}$, e invece di supporre completo il sistema segato sopra un piano dalle φ_{n-4+r} ne indichiamo con ω_r la deficienza troviamo

$$N_{n-4+r} = N_{n-4+(r-1)} + \pi + (r-1)n + \frac{(r-1)(r-4)}{2} - \omega_r$$

da cui (facendo percorrere ad r la serie dei numeri interi da r a zero e sommando le successive uguaglianze)

$$N_{n-4+r} = N_{n-4} + \pi_r + \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{6} - \sum_1^{r-1} \omega_i$$

([43]) La questione dell'esistenza di questo massimo $\delta(rC)$ mi si era presentata nelle *Ricerche*, III, 2); io l'avevo ricondotta alle formule di postulazione di NOETHER che dànno il numero delle superficie aggiunte ad una data di S_3, onde essa era risoluta affermativamente solo con restrizioni relative alle singolarità della superficie.

onde

$$\delta(rC) = \sum_{1}^{r-1} \omega_i .$$

Le ω_i da un certo punto in poi divengono tutte nulle (appena $\delta(rC)$ ha toccato il suo massimo); quindi si ha:

Il massimo di $\delta(rC)$ è uguale alla somma delle deficienze delle serie segate sulla curva generica C dai sistemi aggiunti a $|C|$ di tutti i ranghi 0, 1, 2,...

Ciò vale per ogni sistema semplice $|C|$; anche se questo possiede un fascio di unisecanti come si vede dando al ragionamento precedente la forma invariantiva.

VI.

CARATTERI INVARIANTIVI D'UNA SUPERFICIE

38. - Curve canoniche e genere geometrico superficiale.

La considerazione del sistema aggiunto ad un sistema lineare sopra un ente algebrico ∞^2, ed il relativo teorema fondamentale del § 27 conduce (come applicazione immediata) a stabilire tutti i caratteri invariantivi generalmente considerati per le superficie ed a trovarne dei nuovi.

È ciò che qui vogliamo mostrare. Riferiamoci ad una superficie F senza singolarità, immagine dell'ente.

Sieno $|C'|\,|C''|$ due diversi sistemi lineari (irreducibili ∞^1 almeno): denotando al solito con $|C'_a|\,|C''_a|$ i loro sistemi aggiunti (dove i simboli avranno un significato se questi sistemi esistono), e denotando con χ_1 il gruppo dei punti base per $|C'|$ e non per $|C''|$ (contati ciascuno una volta) e similmente con χ_2 il gruppo dei punti base per $|C''|$ e non per $|C'|$, si ha (ragionando nell'ipotesi che i simboli abbiano significato) a cagione del teorema fondamentale

$$|C' + C''_a + \chi_1| = |C'' + C'_a + \chi_2| ,$$

giacchè questi due sistemi coincidono ambedue col sistema $|(C'+C'')_a|$ aggiunto a $|C'+C''|$. Dalla relazione precedente si ricava la relazione simbolica

$$|C'_a - C' - \chi_1| = |C''_a - C'' - \chi_2| ,$$

la quale avrà un significato effettivo se uno dei simboli dei due membri (e per conseguenza l'altro) avrà significato. Vale a dire: se p. e. $|C'_a|$ contiene $|C'|$, e in tale ipotesi nel residuo $|C'_a - C'|$ comparisce come parte fissa il gruppo di punti χ_1 (giacchè uno di questi punti i-plo per $|C'|$ è $(i-1)$-plo per $|C'_a|$), allora anche $|C''|$ sarà contenuto in $|C''_a|$.

Il resultato ottenuto può essere enunciato riferendosi all'ente algebrico. È vero che mutando la superficie F scelta come immagine di esso, la definizione dei sistemi aggiunti $|C'_a|\,|C''_a|$ potrà mutare, ma la variazione porta soltanto a sommare o togliere contemporaneamente a $|C'_a|\,|C''_a|$ delle parti fisse (curve eccezionali o punti di F) date da punti dell'ente non base risp. per $|C'|\,|C''|$.

Si può dunque dire che se, sull'ente, $|C_a|$ contiene $|C'|$ (e l'indeterminazione di $|C'_a|$ non fa nulla a questo riguardo), anche $|C''_a|$ conterrà $|C''|$ ed i sistemi residui $|C'_a - C''|$, $|C''_a - C''|$ differiranno soltanto per parti fisse «punti dell'ente che siano base per l'uno dei due sistemi $|C'|\,|C''|$ e non per l'altro».

Si può anche aggiungere che in $|C'_a - C'|$ sono certo contenuti come parti fisse tutti i punti base di $|C'|$ sull'ente (e forse altri punti non base): questi punti sono dunque in numero finito.

Concludiamo:

Se sopra un ente algebrico ∞^2 un sistema lineare irreducibile (∞^1 almeno) è contenuto nel proprio sistema aggiunto, ogni altro sistema lineare irreducibile è contenuto nel suo aggiunto, ed ogni sistema ha rispetto al proprio aggiunto un sistema residuo (di dimensione $\geqslant 0$) che spogliato dei punti fissi che entrano in esso come componenti, è indipendente dal sistema di partenza. Ogni sistema lineare irreducibile ha in questo caso (al più) un numero finito di punti base sull'ente e questi entrano come parte fissa a comporre le curve residue del sistema rispetto all'aggiunto.

Una curva residua d'un sistema lineare irreducibile $|C|$ rispetto al sistema aggiunto $|C_a|$, spogliata dei punti base di $|C|$ e degli eventuali punti non base per $|C|$ e per $|C_a|$ che (sopra una superficie immagine) costituissero parti fisse di $|C_a|$, costituisce una *curva canonica* dell'ente algebrico: l'esistenza di una tal curva non dipende dalla scelta del particolare sistema $|C|$ sull'ente, ma dalla natura dell'ente stesso. Si ha infatti la proprietà caratteristica:

Una curva canonica di un ente algebrico ∞^2 F, sommata agli eventuali punti base d'un sistema lineare $|C|$ (irreducibile ∞^1 almeno) costituisce una curva residua di $|C|$ rispetto al sistema aggiunto $|C_a|$.

Per conseguenza:

Una curva canonica su F sega sulla curva generica d'ogni sistema irreducibile (∞^1 almeno) $|C|$ un gruppo speciale residuo della serie caratteristica di $|C|$ e dei punti base di $|C|$ sull'ente ([44]).

([44]) Come serie residua d'un punto i-plo o di una curva C rispetto ad una serie data, intendiamo quella ottenuta staccando gli i punti costituenti l'intorno di O su C.

Viceversa tale proprietà verificata rispetto ad un particolare sistema $|C|$ *irreducibile semplice, non possedente un fascio di unisecanti, e dotato soltanto di curve fondamentali apparenti basta a caratterizzare una curva canonica sull'ente* F ([45]) (*a meno di parti fisse eccezionali*).

Più generalmente se $|C|$ *è su* F *un sistema irreduttibile semplice non possedente un fascio di unisecanti, e dotato di curve fondamentali proprie distinte, una curva canonica su* F *ha le seguenti proprietà caratteristiche*:

1) *sega ogni curva generica* C *in un gruppo residuo della serie caratteristica di* $|C|$ *e dei punti base di* $|C|$;

2) *gode dell'analoga proprietà rispetto ad ogni sistema residuo d'una curva fondamentale propria rispetto a* $|C|$.

Effettivamente se K è una tal curva $K+C$ è una curva aggiunta a $|C|$ (§ 39).

Corollario. – Una superficie a sezioni non speciali non possiede curve canoniche.

Infine se si prende come immagine dell'ente algebrico una superficie F_n d'ordine n in S_3 e ci si riferisce al sistema delle sue sezioni piane, si ha che una curva canonica su F_n aumentata delle curve eccezionali su F_n e di una sezione piana deve esser sezione fuori della curva multipla d'una φ_{n-3} aggiunta; dunque:

Sopra una superficie F_n *d'ordine* n *in* S_3 *le curve canoniche* (*se esistono*) *sono le sezioni di* F_n (*fuori delle singolarità e fuori delle curve eccezionali su* F_n) *colle superficie aggiunte* φ_{n-4} *d'ordine* $n-4$. *Viceversa tali sezioni delle* φ_{n-4} *su* F_n (*se esistono*) *sono curve canoniche.*

Se la F_n è rigata non vi sono mai φ_{n-4} ad essa aggiunte o soltanto subaggiunte, come non vi sono mai curve canoniche sopra di essa.

Il numero delle curve canoniche linearmente indipendenti sopra un ente algebrico ∞^2 F costituisce il *genere geometrico superficiale* p o p_g dell'ente.

Si può dire che $p-1$ è la dimensione del sistema residuo d'un qualunque sistema $|C|$ su F rispetto al proprio aggiunto $|C_a|$.

Sarà dunque $p=0$ se su F nessun sistema $|C|$ è contenuto in $|C_a|$.

Sarà $p=1$ se (uno e quindi) ogni sistema $|C|$ è contenuto in $|C_a|$; vi è allora su F *una* curva canonica che può eventualmente aver l'ordine 0 (cioè mancare); questo 2° caso ha luogo se $|C|$ differisce da $|C_a|$ soltanto per gli eventuali punti base.

([45]) La condizione che $|C|$ sia semplice è superflua: non così quella che non vi sia su F un fascio di unisecanti le C. Si vede infatti che sopra una rigata non può esistere alcuna curva canonica stante la possibilità di trasformare la rigata in una rigata a sezioni non speciali: ma presa una rigata F a sezioni speciali senza punti multipli isolati vi sono sempre gruppi di generatrici che rispetto al sistema $|C|$ delle sezioni piane (o iperpiane) di F si troverebbero nelle condizioni dell'enunciato.

Quando $p > 1$ vi è su F un sistema lineare *canonico* ∞^{p-1}.

In linea storica, relativamente ai resultati esposti in questo §, possiamo dire che:

1) Il genere delle superficie è stato introdotto da CLEBSCH (« Comptes rendus », 1868), come il numero degli integrali doppi linearmente indipendenti ovunque finiti e continui sulle superficie.

2) Il sig. NOETHER (« Mathem. Annalen », II, VIII) ha considerato le curve canoniche sopra una superficie d'ordine n in S_3, come sezioni delle superficie d'ordine $n-4$ aggiunte ad essa: di tali curve (che corrispondono ai detti integrali) ha dimostrato algebricamente il carattere invariantivo in una trasformazione della superficie.

3) Il sig. NOETHER (« Comptes rendus », 1886) e il sig. CASTELNUOVO (« Istituto lombardo », 1891) hanno osservato la proprietà delle curve canoniche sopra una superficie di segare sopra la curva generica d'un sistema (irreducibile) $|C|$ un gruppo contenuto nella serie residua della serie caratteristica di $|C|$.

4) Tale proprietà, convenientemente precisata, è stata assunta da me come definizione delle curve canoniche sopra una superficie (*Ricerche*, cap. II): il loro carattere invariantivo resta quindi fissato per la natura stessa della loro definizione.

5) La definizione indiretta data qui delle curve canoniche sopra una superficie a partire da un sistema lineare $|C|$ ha il vantaggio di essere indipendente dalla natura delle curve fondamentali di $|C|$, per le quali non si esige alcuna restrizione.

39. - Curve bicanoniche.

Conservando le denominazioni poste in principio del precedente §, si considerino sopra il dato ente algebrico ∞^2 e risp. sopra una fissata superficie immagine, i sistemi lineari $|2C'|$, $|2C''|$, $|2C'_a|$, $|2C''_a|$; avremo la relazione simbolica

$$|2(C'+C'')_a| = |2C'_a + 2C'' + 2\chi_2| = |2C' + 2C''_a + 2\chi_1| ,$$

da cui segue

$$|2C'_a - 2C' - 2\chi_1| = |2C''_a - 2C'' - 2\chi_2| .$$

Questa relazione simbolica seguirebbe (moltiplicando per 2) da quella del precedente §; ma potrebbe avvenire che quella non avesse significato e questa sì, ed in questo caso tale modo di deduzione non sarebbe che solamente formale. La precedente relazione ci dice che:

Se sopra un ente algebrico ∞^2 F, *il doppio di un sistema lineare irreducibile* $|C|$ *è contenuto nel doppio del proprio sistema aggiunto* $|C_a|$, *altrettanto avviene per ogni altro sistema lineare su* F; *e le curve residue di* $|2C|$ *rispetto a* $|2C_a|$ *spogliate delle loro componenti fisse costituite da punti base per* $|C|$ *o da punti che entrano come parti fisse in* $|C_a|$, *non dipendono dal sistema di partenza* $|C|$.

Queste curve si diranno *curve bicanoniche* sull'ente.

Le curve bicanoniche sopra un ente algebrico ∞^2 *godono della seguente proprietà caratteristica: prese insieme al gruppo dei punti base d'un qualunque sistema lineare irreducibile* $|C|$ (*ogni punto base venendo contato due volte*) *segano sopra la curva generica* C *un gruppo appartenente alla serie residua del doppio della serie caratteristica di* $|C|$ *rispetto al doppio della serie canonica su* C.

Una curva la quale goda di tale proprietà rispetto ad un sistema $|C|$ *semplice, non possedente un fascio di unisecanti, e dotato soltanto di curve fondamentali apparenti, è una curva bicanonica sull'ente* (*a meno di curve eccezionali*) ecc..

Le curve bicanoniche sopra un ente algebrico ∞^2 F (se esistono) formano il *sistema lineare bicanonico* di F: il numero P delle curve bicanoniche linearmente indipendenti si chiamerà *bigenere* dell'ente algebrico F: si deve ritenere $P=0$ se nessun sistema $|2C|$ è contenuto in $|2C_a|$ ed invece $P=1$ se (uno e quindi) ogni sistema $|2C|$ è contenuto in $|2C_a|$ e vi è al più una curva residua (di $|2C_a-2C|$), che può anche mancare.

Se F possiede un sistema canonico (ha il genere $p>1$): *il sistema bicanonico è il doppio del sistema canonico.*

Ma la considerazione delle curve bicanoniche sopra un ente algebrico ∞^2, trae la sua effettiva importanza da ciò che:

Il bigenere P *può essere* >0 *e possono anche esservi infinite curve bicanoniche, sopra enti algebrici* ∞^2 *di genere* $p=0$.

Per stabilire questo fatto è sufficiente citare degli esempi.

Un primo esempio di superficie di genere $p=0$, per cui $P=1$ (sulla quale il doppio d'un sistema $|C|$ è contenuto nel doppio del sistema aggiunto a $|C|$), vien dato dalla *superficie* F *del* 6° *ordine con* 6 *rette doppie spigoli d'un tetraedro* (*e punti tripli nei vertici*) ([46]); essa ha le sezioni non speciali, quindi certo il sistema aggiunto a quello $|C|$ delle sezioni piane

([46]) Tale è la superficie

$$\varphi(x_1x_2x_3,\ x_1x_2x_4,\ x_1x_3x_4,\ x_2x_3x_4)+x_1x_2x_3x_4f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=0$$

dove φ f sono forme quadratiche rispettivamente nei prodotti $x_1x_2x_3$, $x_1x_2x_4$, $x_1x_3x_4$, $x_2x_3x_4$ e nelle x_1, x_2, x_3, x_4.

(segato dalle superficie cubiche per gli spigoli del tetraedro) non contiene $|C|$ ed è $p = 0$; invece il doppio di tale sistema aggiunto, segato su F dalle superficie del 6° ordine aventi come rette doppie gli spigoli dello stesso tetraedro, e segato ugualmente su F da tutte le quadriche, coincide col sistema $|2C|$: pertanto il numero P delle curve bicanoniche linearmente indipendenti deve considerarsi per questa superficie come uguale ad 1.

Sulla superficie nominata non si hanno però curve bicanoniche propriamente dette. Sotto questo aspetto riesce più luminoso il seguente esempio (comunicatomi dal sig. CASTELNUOVO):

Una superficie F^7 del 7° ordine passante tre volte per una retta a e due volte per una conica c (retta e conica senza punti comuni) avente inoltre tre tacnodi A, B, C i cui piani tacnodali passano per a è di genere 0 e possiede come curve bicanoniche le quartiche ellittiche segate dai piani per a.

Oltre al caso delle superficie di genere 0 le curve bicanoniche possono riuscire utili anche nello studio di superficie di genere > 0, ad es. quando esse si presentano in numero infinito sopra superficie di genere 1. La possibilità della cosa è provata dal seguente esempio: *Una superficie del 5° ordine F^5 con 3 tacnodi siffatti che il loro piano seghi F^5 secondo una conica ed una cubica che si toccano in essi, ha il genere 1 e possiede un fascio di curve bicanoniche sezioni delle quadriche passanti per la conica e tangenti ai piani tacnodali.*

Infine ci si può domandare come si possono ottenere le curve bicanoniche sopra una superficie F_n di un certo ordine n in S_3.

La risposta più semplice si ha nel caso in cui F_n è dotata soltanto di punti multipli isolati *apparenti* e di curva doppia: in questo caso le superficie subaggiunte ad F sono anche aggiunte.

Possiamo supporre senza restrizione $n \geqslant 5$.

Una curva bicanonica λ sommata a curve eccezionali su F_n il cui complesso denoteremo con χ, e sommata all'intorno K della curva doppia di F_n, costituisce una curva $\lambda + \chi + K$ la quale presa insieme alla sezione ϱ di F_n con una quadrica incontra una sezione piana di F_n (di genere π) secondo un gruppo appartenente alla serie somma del doppio della serie canonica e degli intorni dei punti doppi; vale a dire che $\lambda + \chi + K + \varrho$ incontra una sezione piana di F_n secondo un gruppo della serie $g_{2\pi-2+n(n-3)}$ segata (fuori dei punti doppi) dalle curve aggiunte d'ordine $2n - 6$; in conseguenza la $\lambda + \chi + K$ incontra la detta sezione piana secondo un gruppo della serie segata dalle curve aggiunte di ordine $2n - 8$, ossia la detta $\lambda + \chi + K$ è una curva subaggiunta su F_n. Segue (§ 20) che K è una sezione di F_n con una superficie φ_{2n-8} (subaggiunta ossia) aggiunta ad F_n d'ordine $2n - 8$: ma di questa sezione fa parte l'intorno K della curva doppia di F_n, quindi la φ_{2n-8} ha la detta curva come doppia, e la $\lambda+\chi$ è la residua intersezione della F_n colla φ_{2n-8} tolta la curva doppia contata 4 volte.

Così resta provato che ogni curva bicanonica su F_n è sezione (parziale) di F_n con una superficie φ_{2n-8} avente come doppia la curva doppia di F_n.

Più in generale si prova analogamente che: *Sopra una superficie F_n d'ordine n ($\geqslant 5$) in S_3 le curve bicanoniche supposte esistenti vengono segate da superficie* (*d'ordine* $2n-8$) *che possono dirsi superficie biaggiunte ad F*: queste si comportano in un modo determinato ([47]) relativamente alla singolarità di F_n. *Se F_n ha soltanto curva doppia e punti multipli isolati apparenti, le superficie biaggiunte ad essa d'ordine* $2n-8$ *sono quelle che passano doppiamente per la curva doppia di F_n.*

Alle sezioni di tali superficie biaggiunte (spogliate delle componenti eccezionali) compete dunque il carattere invariantivo nelle trasformazioni birazionali della superficie.

Osservazione. – Il concetto che conduce alla considerazione delle curve bicanoniche darebbe luogo ad una considerazione analoga di curve *pluricanoniche* o *r-canoniche* ($r>2$): di queste curve ne esistono sempre (risp. per qualunque valore di r o per r pari) sopra enti algebrici dotati di curve canoniche e bicanoniche; tali sono infatti le curve composte d'un certo numero di curve canoniche o bicanoniche. Però è dubbio se all'infuori di questo caso (cioè sopra enti algebrici privi di curve bicanoniche) si possono avere curve pluricanoniche, ed è questa circostanza che renderebbe specialmente fruttuosa la considerazione delle curve pluricanoniche.

40. - Genere numerico.

Sopra un ente algebrico, e sopra una superficie immagine F (a cui ci riferiamo), si abbiano due sistemi lineari $|C|\,|C_1|$ (irreducibili ∞^1 almeno), il primo contenente il secondo. Sia p il genere geometrico di F, π, π_1 i generi di $|C|$. $|C_1|$: le dimensioni dei due sistemi aggiunti risp. a $|C|\,|C_1|$ (pel § 39) valgono $p+\pi-1-\omega$, $p+\pi_1-1-\omega_1$, dove

$$\omega \geqslant 0\,, \qquad \omega_1 \geqslant 0\,:$$

dico che

$$\omega \geqslant \omega_1$$

([47]) Una curva i-pla di F_n è in generale i-pla per le superficie biaggiunte, le quali hanno inoltre lungo essa un tale contatto con F_n da segare la F_n come superficie che avessero la curva come $(2i-1)$-pla, ecc..

Sia C_2 una curva residua di $|C_1|$ rispetto a $|C|$, di genere virtuale π_2, ed $n > 0$ denoti il numero dei punti comuni ad una C_1 e ad una C_2 che sono punti di connessione per C_1+C_2 in $|C|$. Potrà darsi che $|C_1|$ non sia tutto il residuo di C_2 rispetto a $|C|$, se $|C_1|$ possiede dei punti base (i-pli) non base per $|C|$: allora il genere virtuale delle C_1 considerate come curve residue di C_2 rispetto a $|C|$ vale

$$\pi_1 + \sum \frac{i(i-1)}{2},$$

e si ha

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + \sum \frac{i(i-1)}{2} + n - 1 .$$

Comunque $|C_1|$ viene dedotto da $|C|$ staccando C_2 e imponendo i nominati punti base i-pli alle curve residue. Allora il sistema aggiunto a $|C_1|$ si deduce dall'aggiunto a $|C|$ staccando C_2 e imponendo come $(i-1)$-plo alle curve residue ciascuno dei nominati punti base i-pli per $|C_1|$: le condizioni così imposte possono non essere tutte indipendenti, ed allora la dimensione del sistema aggiunto a $|C_1|$ risulta maggiore di quella calcolata nell'ipotesi opposta; pel nostro scopo dunque il supporre tutte indipendenti le nominate condizioni equivale a porci nel caso più sfavorevole. Ora ciascun punto base i-plo per $|C_1|$ non base per $|C|$, impone alle curve residue di C_2 rispetto all'aggiunto a $|C|$ che debbono essere aggiunte a $|C_1|$ (e però debbono averlo come $(i-1)$-plo), $i(i-1)/2$ condizioni: pel nostro scopo occorre dunque mostrare che la C_2 presenta alle curve aggiunte a $|C|$ che debbono contenerla un numero di condizioni

$$\leqslant \pi_2 + n - 1 .$$

Ora così accade effettivamente.

Per cominciare dal caso più semplice supponiamo che C_2 sia irreducibile ed il suo genere virtuale π_2 sia uguale al suo genere effettivo; la serie segata su C_2 dal sistema aggiunto a $|C|$ è non speciale di grado $2\pi_2 - 2 + n$, poichè le aggiunte a $|C|$ segano una C_1+C_2 in

$$2\pi - 2 = 2\left(\pi_1 + \pi_2 + \sum \frac{i(i-1)}{2} + n - 1\right) - 2$$

punti e segano C_1 in

$$2\left(\pi_1 + \sum \frac{i(i-1)}{2}\right) + n - 2$$

punti; essa ha quindi la dimensione

$$\pi_2 - 2 + n - \theta \qquad (\theta \geqslant 0),$$

e però il numero delle condizioni presentate da C_2 alle curve aggiunte a $|C|$ è appunto $\leqslant \pi_2 + n - 1$.

Supponiamo invece che C_2 pur essendo irreducibile su F possieda delle ipermolteplicità di guisa che il suo genere effettivo π_2' sia $< \pi_2$: ciò dipende dall'esistenza di qualche punto $(j+i)$-plo per la C_2 $(j+i > 1$, $i > 0$, $j \geqslant 0)$, s-plo per $|C_1|$ $(s \geqslant 0)$ ed $(s+j)$-plo per $|C|$. In un punto siffatto imponiamo alle curve aggiunte a $|C|$ di avere la molteplicità $s+j+i-1$ (anzichè $s+j-1$); ciò porta

$$\frac{1}{2}\{(s+j+i-1)(s+j+i-2)-(s+j-1)(s+j-2)\}$$

condizioni (o meno), cioè tante condizioni quanta è la diminuzione del genere di C_2 dipendente dalla ipermolteplicità (i) che essa ha nel nominato punto: dopo ciò le curve aggiunte a $|C|$ soddisfacenti alle dette condizioni rispetto ad ogni punto ipermultiplo di C_2, segano su C_2 una serie (non speciale) di grado $2\pi_2' - 2 + n$ (essendo π_2' il genere effettivo di C_2), e però C_2 presenta ad esse un numero di condizioni $\leqslant \pi_2' + n - 1$: ancora in questo caso dunque la C_2 presenta alle curve aggiunte a $|C|$ che debbono contenerla un numero di condizioni

$$\leqslant \pi_2 + n - 1 .$$

Allo stesso resultato si perviene se C_2 si spezza in più curve: riferiamoci per semplicità al caso in cui C_2 si compone di due curve irreducibili C_2' C_2'' (che possono anche coincidere) di generi virtuali risp. π_2' π_2'' con i $(\geqslant 0)$ punti di connessione: l'estensione al caso generale non presenterebbe nuove difficoltà. Si indichino con n', n'' risp. i punti comuni (di connessione in $|C|$) a C_2', C_1 ed a C_2'', C_1; avremo $n = n_1' + n_1''$. Il ragionamento del § 20 ci dice che le curve aggiunte a $|C|$ segano su C_2' C_2'' due serie risp. di grado $2\pi_2' - 2 + n' + i$, $2\pi_2'' - 2 + n'' + i$.

La C_2' presenta dunque a tali curve aggiunte un numero di condizioni

$$\leqslant \pi_2' + n' + i - 1 ,$$

e ciò (per le considerazioni precedenti) può affermarsi anche nel caso che essa abbia un genere effettivo $< \pi_2'$. Staccata la C_2' dal sistema aggiunto a $|C|$, il sistema residuo (ove la C_2'' non se ne stacchi di conseguenza) sega su C_2'' una serie di grado $2\pi_2'' + n'' - 2$ e però presenta a tale sistema residuo un numero di condizioni

$$\leqslant \pi_2'' + n'' - 1 ;$$

la $C_2 = C_2' + C_2''$ presenta dunque alle curve aggiunte a $|C|$ che debbono contenerla

$$\pi_2 + n - 1 = \pi_2' + \pi_2'' + i - 1 + n' + n'' - 1$$

condizioni, o meno.

Pertanto rimane stabilito il

LEMMA. – *Sieno* $|C|\,|C_1|$ *due sistemi lineari irreducibili* (∞^1 *almeno*) *sopra un ente algebrico, e si indichino con* $\delta(C)$, $\delta(C_1)$ *le deficienze delle serie segate su una* C *o su una* C_1 *generica dai risp. sistemi aggiunti a* $|C|$, $|C_1|$: *se* $|C|$ *contiene* $|C_1|$ *si ha*

$$\delta(C) \geqslant \delta(C_1) .$$

Ora se anche $|C_1|$ non è contenuto in $|C|$ e $|C|$ è un sistema semplice potrà sempre prendersi r così grande che $|C_1|$ sia contenuto in $|rC|$: allora sarà

$$\delta(C_1) \leqslant \delta(rC) .$$

D'altronde si è visto nel § 38 che il $\delta(rC)$ per r assai grande assume un valore massimo costante (cioè indipendente da r) k: *il massimo* k *rappresenta dunque la massima deficienza della serie segata sopra la curva generica d'un qualsiasi sistema lineare* (*irreducibile* ∞^1 *almeno*) *dal sistema aggiunto, e questo massimo è raggiunto in corrispondenza ad un multiplo assai elevato di ogni sistema lineare semplice* (*irreducibile* ∞^3 *almeno*) *sull'ente algebrico.*

Porremo $k = p_g - p_n$ ($\geqslant 0$) e p_n si dirà *il genere numerico o aritmetico* (*superficiale*) *dell'ente algebrico. Il carattere* $k = p_g - p_n$ *di un ente algebrico si può anche definire come la somma delle deficienze delle serie segate sulla curva generica d'ogni sistema irreducibile semplice dai sistemi aggiunti di tutti i ranghi* $\geqslant 0$ (cfr. § 37).

Il genere numerico di un ente algebrico è il numero virtuale delle sue curve canoniche linearmente indipendenti, ossia il numero virtuale delle superficie d'ordine $n - 4$ (*linearmente indipendenti*) *aggiunte ad una superficie d'ordine* n *in* S_3 *immagine dell'ente algebrico* (numero calcolato secondo le formule di postulazione del § 37).

A questo numero $p_n \leqslant p_g$ *compete, dunque, il carattere invariantivo nelle trasformazioni birazionali della superficie.*

Ciò fu stabilito dai sig. ZEUTHEN ([48]) e NOETHER ([49]) limitandosi però a trasformazioni dalle quali non nascano singolarità straordinarie della superficie. Nelle mie *Ricerche* (III, 2) ho notato (per $p_g > 0$) il significato funzionale del detto numero (relativo al sistema aggiunto), da cui apparisce il legame fra questo carattere ed il genere geometrico. Concepii fin d'allora (come appare da una nota) il disegno di stabilire sotto il nuovo punto di vista l'invariantività del genere numerico per *tutti* i casi. Ma non ero ancora riuscito a liberarmi del tutto dalle formule di postulazione calcolate in base alle singolarità della superficie, ciò che qui è ottenuto cogli sviluppi del § 37; e d'altra parte non possedendo il teorema fondamentale non potevo prescindere dall'ipotesi $p_g > 0$. Mi limitai per ciò ad esaminare (per $p_g > 0$) quando si abbia $p_g = p_n$, ed il resultato si estenderebbe anche qui al caso $p_g = 0$, e si potrebbe enunciare dicendo che « per un sistema semplice privo d'un fascio di unisecanti è

$$\delta(rC) = 0 \qquad (r > 0)$$

se

$$\delta(2C) = 0 \text{ »}.$$

Ma il signor CASTELNUOVO è riuscito a fare un passo di più, mostrando che basta sapere che $\delta(C) = 0$ per concludere $\delta(rC) = 0$; quindi nella sua Memoria ([50]) si vedrà stabilito il teorema:

Un ente algebrico ∞^2 ha i due generi superficiali uguali se sopra di esso vi è un sistema lineare irreducibile semplice $|C|$ tale che il sistema aggiunto $|C_a|$ seghi sulla curva generica C la serie canonica completa.

Osservazione. – Applicando la definizione posta innanzi all'ente algebrico razionale si trova $p_g = p_n = 0$.

Se si applica la stessa definizione all'ente rappresentabile con una rigata di genere p, si ha

$$p_g = 0 , \qquad p_n = -p .$$

Infatti una rigata d'ordine n in S_3 non possiede superficie aggiunte d'ordine $n-3$, mentre le superficie aggiunte ad essa d'ordine $n-3+r$ ($r > 0$) segano sopra un piano generico il sistema di *tutte* le curve d'ordine $n-3+r$ aggiunte alla sezione piana della rigata (§ 32).

A questo proposito cfr. CAYLEY, *On the deficiency of certain surfaces* ([51]).

([48]) « Mathem. Annalen », 3.

([49]) « Mathem. Annalen », 8.

([50]) *Alcuni resultati sui sistemi lineari ecc.*.

([51]) « Mathem. Annalen », 3.

41. - Genere lineare.

Se per un ente algebrico ∞^2 il genere geometrico vale

$$p_g > 0,$$

resta definito un carattere ($p^{(1)}$) dell'ente che è il genere del sistema canonico (tranne se, per $p_g = 1$, mancano curve canoniche propriamente dette): questo carattere si dirà il *genere lineare* (Curvengeschlecht) dell'ente. Per $p_g > 1$ si ha anche un altro carattere dell'ente, cioè il grado $p^{(2)}$ del sistema canonico intendendo di considerare il grado virtuale ove il sistema canonico sia riducibile (contenendo una parte fissa che può o no essere un punto dell'ente) [52]; sussiste sempre (come dimostreremo) la relazione

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1$$

data dal sig. NOETHER.

Ora ci proponiamo di definire per un ente algebrico, dei caratteri $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$ $(= p^{(1)} - 1)$ che abbiano il significato precedente ove esista il sistema canonico, ma che esistano (sotto ipotesi molto late) anche se $p_g = 0$.

La restrizione imposta all'ente algebrico consiste nel supporre che esso ammetta una superficie immagine priva di curve eccezionali, e però ogni sistema lineare (irreducibile) su di esso abbia un numero finito di punti base: questa restrizione è da ritenersi soddisfatta (almeno in generale) se esistono sull'ente curve bicanoniche (o pluricanoniche) e quindi in particolare se $p_g > 0$ (cfr. l'Appendice). Ma per $p_g > 0$ lievi modificazioni al ragionamento darebbero il resultato indipendentemente da ciò.

Data la restrizione di cui sopra prendiamo appunto come immagine dell'ente algebrico una superficie F senza curve eccezionali: ciò che si dice su questa può considerarsi come detto sull'ente algebrico.

Per arrivare più naturalmente al resultato consideriamo dapprima l'ipotesi $p_g > 0$ (dove sia $|K|$ il sistema canonico) e valutiamo il $p^{(1)}$ (genere del sistema canonico). Sieno π, n il genere e il grado d'un sistema irreducibile $|C|$; π_a, n_a gli analoghi caratteri di $|C_a|$ (virtuali se $|C_a|$ è riducibile): sieno $i_1 \dots i_r$ le molteplicità dei punti base $A_1 \dots A_r$ di $|C|$

---

(52) Effettivi esempi provano che non è sempre possibile trasformare in un punto semplice una curva d'una superficie d'ordine n in S_3 comune a tutte le superficie aggiunte φ_{n-4}; ciò che si riteneva generalmente supponendo l'invertibilità delle formule della memoria del sig. NOETHER («Math. Ann.», 3). Basta p. e. pensare alla superficie F^5 del 5° ordine con 3 tacnodi che dal piano di essi venga segata secondo una cubica ed una conica che si toccano in essi: questa F^5 ha i caratteri $p_g = 1$, $p^{(1)} = 1$. (Esempio suggeritomi dal sig. CASTELNUOVO).

(su F ossia) sull'ente. Allora dico che si ha

$$\pi_a = p^{(1)} + 3(\pi - 1) - n - r .$$

Invero ciò segue (applicando la formula del § 16 che dà il genere d'una curva spezzata) dalla relazione

$$|C_a| = |C + k + \sum_1^r A_s| ,$$

ove si tenga conto del fatto che una $k + \sum A_s$ sega la C generica in $2\pi - 2 - n$ punti (§ 39).

Ciò posto si ricava pel genere lineare dell'ente il valore

$$(1) \qquad p^{(1)} = \pi_a - 3(\pi - 1) + n + r ,$$

calcolato in base ai caratteri di $|C|$ e di $|C_a|$.

In modo simile (per $p_g > 1$) denotando con $p^{(2)}$ il grado (virtuale) del sistema canonico, si ha (essendo $|C_a| = |C + k + \sum A_s|$)

$$n_a = p^{(2)} + 4(\pi - 1) - n + r$$

da cui

$$(2) \qquad p^{(2)} = n_a - 4(\pi - 1) + n - r .$$

Dimostriamo ora indipendentemente dal significato di $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ relativo all'ipotesi $p_g > 1$, l'invariantività dei secondi membri nelle formule (1) (2); dimostriamo cioè che essi danno per $p^{(1)}$ $p^{(2)}$ valori indipendenti dal particolare sistema $|C|$ scelto su F.

Per questo si consideri su F un altro sistema irreducibile $|C'|$ e si denotino per esso con π', n', π'_a, n'_a le quantità analoghe a π, n, π_a, n_a; sia r' il numero dei punti base di $|C'|$ sull'ente (che per le ipotesi poste innanzi è finito).

Si vuol stabilire che

$$\pi_a - 3(\pi - 1) + n + r = \pi'_a - 3(\pi' - 1) + n' + r'$$
$$n_a - 4(\pi - 1) + n + r = n'_a - 4(\pi' - 1) + n' + r' .$$

Supponiamo per generalità che vi sia un certo numero σ di punti base comuni a $|C|$ $|C'|$.

Essendo $A_1 \dots A_{r-\sigma}$ i punti base per $|C|$ e non per $|C'|$, e $B_1 \dots B_{r-\sigma}$

i punti base per $|C'|$ e non per $|C|$, abbiamo

$$|C + C'_a + A_1 + \dots + A_{r-\sigma}| = |C' + C_a + B_1 + \dots + B_{r-\sigma}| = |(C + C')_a|.$$

Si denoti con

δ il numero delle intersezioni di una C con una C'_a;

δ' il numero delle intersezioni di una C' con una C_a;

h il numero delle intersezioni di una C con una C';

i la somma delle molteplicità dei punti A per $|C|$;

i' la somma (analoga) delle molteplicità dei punti B per $|C'|$.

Il genere di $|C + C'_a + A_1 + \dots + A_{r-\sigma}|$ vale

$$\pi + \pi'_a + \delta - 1 + i - (r - \sigma)$$

invece il genere di $|C'_a + C_a + B_1 + \dots + B_{r-\sigma}|$ vale

$$\pi' + \pi_a + \delta' - 1 + i' - (r' - \sigma) ;$$

dunque intanto (sommando σ)

$$\pi + \pi'_a + \delta + i - 1 - r = \pi' + \pi_a + \delta' + i' - r' .$$

Analogamente uguagliando i gradi dei due sistemi si ha

$$n + n'_a + 2\delta + 2i - r = n' + n_a + 2\delta' + 2i' - r' .$$

D'altra parte la curva di $|(C+C')_a|$ incontra quella di $|C+C'|$ (avente il genere $\pi + \pi' + h - 1$) in $2(\pi + \pi' + h - 2)$ punti: questo numero è anche quello delle intersezioni di una curva di $|C+C'|$ con una curva di $|C + C'_a + A_1 + \dots + A_{r-\sigma}|$ e però vale anche

$$n + h + 2(\pi' - 1) + \delta + i ;$$

o analogamente

$$n' + h + 2(\pi - 1) + \delta' + i' .$$

Uguagliando questi due numeri si trova

$$n + 2(\pi' - 1) + \delta + i = n' + 2(\pi - 1) + \delta' + i' .$$

Si ricavi di qua il valore della differenza $\delta + i - (\delta' + i')$ e si sostituisca nelle relazioni precedenti, facendo le opportune riduzioni; si deduce allora

$$\pi_a - 3(\pi - 1) + n + r = \pi'_a - 3(\pi' - 1) + n' + r'$$
$$n_a - 4(\pi - 1) + n + r = n'_a - 4(\pi' - 1) + n' + r' ,$$

appunto c.d.d.

Si può dunque affermare che:

Per un ente algebrico ∞^2 *il quale ammetta una superficie immagine senza curve eccezionali restano definiti* (*dalle formule* (1) (2)) *due caratteri* $p^{(1)}$ $p^{(2)}$ *le cui espressioni vengono formate col genere e col grado d'un qualunque sistema lineare e del suo aggiunto, e col numero dei punti base del sistema dell'ente. Questi caratteri se il genere dell'ente vale* $p_g > 1$ (*e pel* 1° *basta* $p_g > 0$) *sono il genere e il grado* (*virtuale*) *del sistema canonico.*

Conserveremo sempre al $p^{(1)}$ il nome di *genere lineare dell'ente.*

Dimostriamo ora che *vale in ogni caso sotto queste ipotesi più generali* (in cui può anche essere $p_g = 0$) *la relazione del sig.* NOETHER (data per $p_g > 0$)

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1 .$$

Questa relazione (stante le formule (1) e (2)) equivale alla relazione

(3) $$n_a - \pi_a = \pi - 2$$

che dimostreremo sussistere sempre fra il grado (virtuale) e il genere del sistema $|C_a|$ aggiunto ad un qualunque sistema irreducibile $|C|$ e il genere π di $|C|$ stesso. *La relazione* (3) *vale anche se sull'ente non sono definiti* $p^{(1)}$ *e* $p^{(2)}$ (cioè indipendentemente dalle restrizioni precedenti per l'ente) ([53]). Basta stabilirla per un sistema irreducibile $|C|$ siffatto che abbia sull'ente soltanto punti base di molteplicità > 1 e che ammetta un sistema aggiunto irreducibile $|C_a|$ ed un 2° aggiunto $|(C_a)_a| = |C_{2a}|$: si estenderà la relazione ad ogni altro sistema col procedimento che stabilisce le formule (1) e (2) (anche indipendentemente dall'ipotesi che $|C|$ abbia un numero finito di punti base): il ragionamento diretto andrebbe solo lievemente modificato se $|C|$ avesse punti semplici ecc. Ora nelle dette ipotesi si ha

$$|(C + C_a)_a| = |2C_a| = |C + C_{2a}| ;$$

quindi il grado di $|2C_a|$ può essere valutato in due modi:

([53]) Nel piano esso dice che il sistema aggiunto ad ogni sistema lineare è regolare. Cfr. CASTELNUOVO, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* (« Acc. di Torino, Memorie », 1891).

1) determinando le intersezioni di due curve $C_a + C_a$, che sono $4n_a$;
2) determinando le intersezioni di una $C_a + C_a$ con una $C + C_{2a}$ che sono $4(\pi - 1) + 4(\pi_a - 1)$; paragonando segue appunto

$$n_a - \pi_a = \pi - 2 \qquad \text{c. d. d.}$$

Avvertenza. – Se per $p_g > 1$ il sistema canonico è riducibile sull'ente (e deve riguardarsi come tale se ha dei punti base sopra una superficie immagine), $p^{(2)}$ è il grado virtuale di esso; prendendo il grado effettivo non varrebbe più la relazione $p^{(2)} = p^{(1)} - 1$. Si prenda ad es. la superficie del 5° ordine con due tacnodi che ha un fascio di curve canoniche (sezioni piane per i due tacnodi aumentate del punto sezione della loro retta) di genere $p^{(1)} = 2$; il grado effettivo del sistema canonico è $= 0$, mentre quello virtuale è $p^{(2)} = 1$.

APPENDICE

42. - Superficie senza curve eccezionali.

In tutto il corso del lavoro (tranne nell'ultimo §) non si è imposto agli enti algebrici considerati alcuna restrizione. Per collegare i risultati generali qui ottenuti a quelli delle « Ricerche » è opportuno aggiungere questi brevi sviluppi.

Fondamento di molte semplificazioni nello studio di un ente algebrico, è la possibilità di assumere come immagine dell'ente stesso una *superficie F senza curve eccezionali.*

Conviene quindi esaminare anzitutto quando ciò è possibile.

Vi sono certo delle superficie che non possono essere trasformate in tal guisa: tali sono le superficie con un fascio di curve razionali (fra cui le superficie razionali e le rigate).

All'infuori di queste è dubbio se vi sieno altre superficie siffatte.

Qui ci limiteremo a indicare come si possa almeno venire alla persuasione che ogni superficie avente il genere geometrico $p_g > 0$ (o soltanto il bigenere $p > 0$), può trasformarsi in una senza curve eccezionali; e ciò sarà dimostrato rigorosamente per le superficie aventi il genere numerico $p_n = p_g > 0$.

Cominciamo dal notare che una superficie F per cui $p_g > 0$ contiene un numero finito di curve eccezionali (§ 38).

Ora ciascuna di queste può essere trasformata in un punto (semplice per la trasformata F'); ma può domandarsi « nella trasformazione effettuata potrà accadere che qualche punto di F debba necessariamente mutarsi in una curva (eccezionale per F') »?

Noi ci limiteremo a constatare che « se χ è una curva eccezionale su F, trasformandola in un punto non accadrà che a qualche punto di χ corrisponda una curva eccezionale su F' »: poichè non sembra probabile che nella trasformazione di χ in un punto debba necessariamente mutarsi in curva qualche punto fuori di χ, questa osservazione, una volta stabilita, si può riguardare come una dimostrazione non rigorosa del fatto che la F possa trasformarsi in una superficie F' con una curva eccezionale di meno, e quindi (dopo un numero finito di passaggi) in una superficie senza curve eccezionali.

Stabiliamo la precedente osservazione.

Supponiamo per semplicità che F sia priva di singolarità (in un iperspazio). Sia O un punto qualunque (semplice per F) della curva eccezionale χ, e supponiamo che esso si muti in una curva su F' dove a χ corrisponde un punto; ciò dimostreremo essere assurdo: indichiamo con $|C|$ il sistema delle sezioni di F' che avrà su F il punto base O, di una certa molteplicità $i > 0$: siccome χ si muta in un punto su F', le curve C non hanno colla χ intersezioni variabili. Supponiamo per semplicità che $|C|$ non abbia altri punti base su χ: non farebbe alcuna difficoltà liberarsi da questa ipotesi riferendo a ciascun punto base il ragionamento che si fa per O. Precisando l'operazione di aggiunzione col partire da F consideriamo il sistema $|nC + C_a| = |((n+1)C)_a|$, dove n è assai grande: le curve di questo sistema segano su una C una serie completa (§ 40) e però da esse non si stacca (l'intorno del punto) O: se da esse si stacca la curva χ noi la immagineremo tolta; le curve variabili residue non hanno allora intersezioni variabili con χ giacchè le superficie aggiunte ad F' (supposta F' in S_3 dove eventualmente si proietterebbe) non passano per il punto fisso semplice di essa corrispondente a χ (basta considerare le ∞^3 polari rispetto ad F', che sono particolari superficie aggiunte ad esso).

Abbiamo dunque che le curve di $|nC+C_a|$ su F hanno il punto O come $\{(n+1)i-1\}$-plo (al più) e non come punto di molteplicità maggiore, e (private di χ) non hanno intersezioni variabili con essa, ma d'altra parte le curve di $|(n+1)C|$ contenute in $|nC+C_a|$ (essendo $p_g > 0$) hanno O come punto $\{(n+1)i\}$-plo, non contengono χ e non la segano ulteriormente: ciò costituisce manifestamente un assurdo.

Non sarebbe difficile estendere questo ragionamento alle superficie per cui $p_g = 0$ ma il bigenere $P > 0$.

Lasciamo stare questo, e indichiamo invece la dimostrazione rigorosa della trasformabilità di una superficie in una senza curve eccezionali pel caso $p_g = p_n > 0$.

A questa dimostrazione occorre premettere il lemma:

Sopra un ente algebrico avente il genere geometrico uguale al numerico $p_g = p_n > 0$, *il sistema aggiunto ad un sistema lineare irriducibile semplice senza curve fondamentali proprie* (spogliato di eventuali componenti fisse, *è pure esso* (*irriducibile*) *privo di curve fondamentali proprie.*

La dimostrazione del lemma si fa col procedimento adoprato dal sig. CASTELNUOVO pel caso $p_g = p_n = 0$ (ove però comparisce una eccezione) cfr. la sua Memoria c.

Ora consideriamo una superficie F di S_3, priva di punti multipli isolati, la quale abbia $p_g = p_n > 0$. Le curve C_a aggiunte alle sezioni piane su di essa, non passano tutte per uno stesso punto, altrimenti esse non segherebbero la serie canonica completa sopra una curva C sezione piana di F.

Per la medesima ragione non si stacca dalle C_a una curva fissa eccezionale di F.

Pertanto passando sull'ente dal sistema $|C|$ al sistema aggiunto $|C_a|$, e trascurando in quest'ultimo le eventuali parti fisse, si ha un sistema lineare irriducibile (contenente $|C|$) che ha (al più) come $(i-1)$-plo ogni punto base i-plo di $|C|$ e non ha nuovi punti base.

Stante il lemma posto innanzi si può applicare al sistema $|C_a|$ così dedotto, il ragionamento applicato a $|C|$: poichè $|C|$ ha un numero finito di punti base dotati di molteplicità finite, il procedimento ricorrente conduce ad un sistema lineare irreducibile (*puro*) privo di punti base sull'ente ([54]), e la superficie immagine dell'ente avente per sezioni le curve del sistema riesce priva di curve eccezionali.

Dunque è certo che:

Una superficie di genere geometrico uguale al numerico

$$p_g = p_n > 0$$

è trasformabile in una senza curve eccezionali.

Avvertenza. – Nelle mie *Ricerche* si suppone costantemente la trasformabilità d'una superficie in una senza curve eccezionali (facendosi uso sistematico dei sistemi puri); questa ipotesi non è restrittiva nel campo delle superficie di genere geometrico e numerico $p_g = p_n > 0$ ivi considerate.

Ma si deve avvertire una differenza fra il significato dato qua alla parola « curva eccezionale » e il significato dato alla stessa parola nelle *Ricerche*. Noi intendiamo qua col nome di « curva eccezionale » la trasformata di un punto; invece nelle *Ricerche* la stessa locuzione

([54]) Questo procedimento si trova già adoperato nelle *Ricerche*, III.

denota una « curva appartenente a tutte le superficie (d'ordine $n-4$) aggiunte alla data superficie (d'ordine n in S_3) » (curva « ausgezeichnete » secondo NOETHER).

Il significato dato qui alla locuzione è più restrittivo, cioè (cfr. il § 38) « ogni curva eccezionale è una curva ausgezeichnete » *ma non viceversa*: il sig. NOETHER nel § 9 della sua citata Memoria (« Math. Ann. », VIII), ha dato le formule di trasformazione di un punto semplice d'una superficie in una curva ausgezeichnete (cfr. le formule I_a, I_c), ma queste formule non sono sempre invertibili come si è ritenuto fin qui (cfr. anche la fine del § 10 della sua citata Memoria); a provarlo basta l'esempio, già dato innanzi, delle superficie del 5° ordine con 3 tacnodi ($p_g=p_n=1$) dove si ha *una* curva canonica (ausgezeichnete) di genere $p^{(1)}=1$.

Devesi dunque esplicitamente avvertire che il resultato del cap. III, § 6, delle mie *Ricerche* concernente la superficie di genere $p_g=p_n=1$ (cioè l'esistenza d'un sistema puro ∞^π di genere π e grado $2\pi-2$ sulla superficie) si riferisce alle superficie di genere 1, prive di curve canoniche.

Nel seguito delle *Ricerche* si ammette, per $p_g=p_n>1$ l'irreducibilità del sistema canonico; con ciò resta esclusa la possibilità di curve, « ausgezeichnete » non eccezionali.

43. - Sistemi lineari completi rispetto al genere.

Allorchè un ente algebrico ammette delle superficie immagini prive di curve eccezionali, giova riferirci ad una di queste che sia inoltre priva di singolarità; le curve ed i sistemi lineari dati sull'ente si possono considerare indifferentemente come dati in senso proiettivo su questa superficie: in conseguenza di ciò si ha in molte cose una notevole semplificazione.

In questo caso si può porre accanto alla considerazione dei sistemi lineari completi rispetto al grado (o normali), quella dei sistemi *completi rispetto al genere* o brevemente completi.

Possiamo precisare il loro concetto così.

Sia F una superficie senza curve eccezionali, priva di singolarità in un certo S_r. Diremo che una curva C' (data sull'ente) *appartiene* ad un sistema lineare $|C|$ se è contenuta (totalmente o parzialmente) in $|C|$, in guisa che $|C-C'|$ sia un gruppo di punti dell'ente; in altre parole se la C', proiettivamente considerata su F è contenuta totalmente in $|C|$.

Allora si definirà come *completo rispetto al genere un sistema lineare irriducibile $|C|$ non appartenente ad un sistema più ampio di ugual genere.*

E si può stabilire che:

Sopra una superficie F senza curve eccezionali una curva irriducibile C appartiene ad un determinato sistema lineare completo dello stesso genere (di dimensione $\geqslant 0$).

La dimostrazione del teorema si basa sui lemmi:

a) Sopra la superficie F senza curve eccezionali se una curva irriducibile C di genere π appartiene a due sistemi lineari irriducibili $|C_1|\,|C_2|$ dello stesso genere π, essa appartiene ad un sistema lineare più ampio pure di genere π, che contiene $|C_1|$ e $|C_2|$ (55).

In primo luogo si può supporre senza restrizione che $|C_1|\,|C_2|$ sieno normali (altrimenti si renderebbero tali). Consideriamo su F il sistema lineare

$$|C_1 + C_2 - C|\,.$$

Poichè C appartiene a $|C_1|\,|C_2|$, questi due sistemi appartengono ambedue a $|C_1 + C_2 - C|$, e (poichè F non ha curve eccezionali) proiettivamente su F le $C_1\, C_2$ sono curve totali di $|C_1 + C_2 - C|$ su F.

Ogni punto multiplo i-plo ($i > 1$) di C è base i-plo per $|C_1|$ e per $|C_2|$ (cui C appartiene, e che hanno il genere di C); un tal punto è quindi $2i$-plo per $|C_1 + C_2|$ e i-plo per $|C_1 + C_2 - C|$.

Oltre ai punti multipli di C, $|C_1|$ potrà avere dei punti base semplici su C comuni anche a $|C_2|$, doppi per $|C_1+C_2|$ e semplici per $|C_1 + C_2 - C|$, ed infine $|C_1|$ potrà avere su F dei punti base semplici $A_1A_2\,...$ non base per $|C_2|$, e similmente $|C_2|$ potrà avere dei punti base semplici $B_1B_2\,...$ non base per $|C_1|$: la C passa pei punti $A_1A_2\,...\,B_1B_2\,...$, quindi $|C_1 + C_2 - C|$ non ha come punti base $A_1A_2\,...\,B_1B_2\,...$.

Il sistema $|C_1 + C_2 - C|$ differisce da $|C_1|\,|C_2|$ appunto per ciò che questi due sistemi nascono da esso imponendo i punti base $A_1A_2\,...$ e risp. $B_1B_2\,...$: poichè questi sono punti semplici, $|C_1+C_2-C|$ ha come $|C_1|$, $|C_2|$ e come C il genere π.

Così viene stabilito il lemma.

b) Sopra un ente algebrico che non abbia come immagine una rigata di genere π un sistema lineare irriducibile di genere π ha al massimo la dimensione $3\pi+5$ o 9 (per $\pi = 1$) (massimo raggiunto in corrispondenza agli enti razionali).

Per la dimostrazione cfr. la mia Nota, *Sulla massima dimensione dei*

(55) Così viene precisato il lemma a pag. 16 (I, 2) delle *Ricerche* [questo volume, pag. 47] che non varrebbe invece senza la restrizione qui introdotta: quell'errore è senza conseguenza nel seguito giacchè l'applicazione rimane limitata al caso in cui esso è valido; così essenzialmente nel teorema del resto (III, 3).

Si avverta che quel lemma non precisato si trova richiamato nelll'ultimo § della mia Nota, *Sulla massima dimensione dei sistemi lineari di curve di dato genere ecc.* (« Acc. di Torino », 1894) [questo volume, VI], dove ne è fatta l'applicazione *c*): si deve dunque introdurre in quell'enunciato la stessa restrizione che qui figura.

sistemi lineari di curve di dato genere appartenenti ad una superficie algebrica (« Acc. di Torino, Atti », 1894), [questo volume, VI].

c) Sopra una superficie senza curve eccezionali che non può essere una rigata, si abbia una curva irreducibile C di genere π: o essa non appartiene ad alcun sistema lineare (∞^1 almeno) dello stesso genere; o essa appartiene a qualche sistema lineare dello stesso genere: ma in questo 2° caso dati due di quei sistemi cui C appartiene se ne costruisce un altro più ampio dello stesso genere cui C parimente appartiene; l'ampliamento dei sistemi di genere π avendo un limite (*b*) si giunge necessariamente ad *un* sistema completo di genere π cui C appartiene, nel quale sono contenuti tutti gli altri sistemi di genere π cui C appartiene.

Con ciò è dimostrato il teorema.

Corollario proiettivo. – Data una superficie trasformabile in una senza curve eccezionali, si cerchi se esiste una superficie di uno spazio più elevato (a sezioni iperpiane dello stesso genere) della quale la prima sia proiezione da punti semplici: con questo procedimento si giunge sempre ad una superficie *proiettivamente determinata* da cui si ottiene la prima come proiezione da punti semplici, e che invece non si ottiene a sua volta similmente da altra.

Osservazione. – L'uso dei sistemi completi rispetto al genere in confronto all'uso dei sistemi completi rispetto al grado o normali, si presenta spontaneo per ottenere sistemi determinati da una sola curva, perchè la prima definizione di normalità d'un sistema irriducibile suppone la dimensione del sistema $\geqslant 1$: ma quando il concetto di sistema normale sia convenientemente esteso ai sistemi riducibili (come nel § 11) esso può sostituire in ogni caso senza danno quello di sistema completo, ed offre anzi il vantaggio di essere adoperabile in *tutti* i casi.

44. - Ulteriori sviluppi.

Nelle *Ricerche* (IV, 1) io avevo stabilito che « sopra un ente algebrico di genere $p_g = p_n > 0$ ogni sistema lineare normale o completo ha la serie caratteristica completa *se tale proprietà compete al sistema canonico* (supposto irriducibile) ».

Ora il sig. CASTELNUOVO dimostra la stessa proprietà indipendentemente da ogni ipotesi pel sistema canonico ed anche per $p_g = p_n = 0$.

In conseguenza di ciò il lettore potrà passare ai cap. IV, V, VI delle *Ricerche* (estensione del teorema di RIEMANN-ROCH ecc.) ritenendo che « i resultati ivi ottenuti si possono riferire a tutti gli enti algebrici di genere $p_g = p_n$, pei quali si ha la irriducibilità del sistema canonico ($p_g = p_n > 1$) ove di questo sistema si fa uso »; ed eliminando la restrizione superflua ivi imposta.

INDICE DELLA MEMORIA

INTRODUZIONE . . . . pag. 211

I. *Generalità sull'ente algebrico doppiamente infinito e sui sistemi lineari sopra di esso.*

1. Ente algebrico doppiamente infinito . . . . » 220
2. Curve e sistemi di curve sopra l'ente algebrico ∞^2 . . . . . . » 222
3. Generalità sui sistemi lineari . . . . » 224
4. Significato proiettivo della geometria dei sistemi lineari . . . . » 227
5. Sistemi lineari riducibili . . . . » 229
6. Curve e sistemi lineari contenuti in altri . . . . » 231
7. Disuguaglianza fra i gradi di due sistemi lineari di cui uno è contenuto parzialmente nell'altro . . . . » 232
8. Curve fondamentali d'un sistema lineare . . . . » 232

II. *Sistemi lineari normali ed operazioni elementari sopra di essi.*

9. Sistemi lineari normali . . . . » 235
10. Sistema normale somma di due dati . . . . » 237
11. Estensione del concetto di sistema normale ai sistemi riducibili . » 239
12. Estensione del concetto di sistema somma . . . . » 241
13. Teorema del resto . . . . » 241
14. Modo di dedurre ogni sistema lineare da un sistema irriducibile . » 243
15. Grado virtuale d'un sistema lineare . . . . » 244
16. Genere (virtuale) delle curve riducibili di un sistema lineare . . » 247

III. *Curve subaggiunte.*

17. Superficie subaggiunte ad una data di S_3 . . . . » 250
18. Curve subaggiunte sopra una superficie di S_3 . . . . » 251
19. Curve subaggiunte ad un sistema lineare . . . . » 252
20. Staccamento di una curva dal sistema subaggiunto . . . . » 255
21. Addizione di una curva al sistema subaggiunto. . . . . » 256
22. Imposizione di molteplicità alle curve subaggiunte d'un sistema lineare . . . . » 259
23. Complemento del resultato del § 21 . . . . » 261
24. Riassunto . . . . » 264

IV. *Curve aggiunte.*

25. Curve aggiunte ad un sistema non singolare . . . . pag. 266
26. Definizione generale delle curve aggiunte . . . . » 268
27. Teorema fondamentale . . . . » 269
28. Non influenza delle curve fondamentali improprie d'un sistema lineare nella determinazione delle curve aggiunte . . . . . . » 273
29. Influenza delle curve fondamentali proprie d'un sistema lineare nella determinazione delle curve aggiunte . . . . » 275
30. Sistemi lineari possedenti un fascio di curve unisecanti . . . . » 277

V. *Superficie aggiunte.*

31. Superficie aggiunte ad una di S_3 . . . . » 278
32. Superficie aggiunte alle rigate . . . . » 280
33. Una interpretazione proiettiva del teorema fondamentale . . . . » 282
34. Il teorema di Noether sulle superficie aggiunte alle curve gobbe e la sua inversione . . . . » 282
35. Completamento proiettivo del teorema del resto . . . . » 283
36. Lemmi sulle superficie subaggiunte . . . . » 284
37. Dimensione virtuale del sistema delle superficie di dato ordine aggiunte ad una data . . . . » 286

VI. *Caratteri invariantivi d'una superficie.*

38. Curve canoniche e genere geometrico superficiale . . . . » 290
39. Curve bicanoniche . . . . » 293
40. Genere numerico . . . . » 296
41. Genere lineare . . . . » 301

Appendice.

42. Superficie senza curve eccezionali . . . . » 305
43. Sistemi lineari completi rispetto al genere . . . . » 308
44. Ulteriori sviluppi . . . . » 310

XIV.

SOPRA LE SUPERFICIE ALGEBRICHE DI CUI LE CURVE CANONICHE SONO IPERELLITTICHE

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. V (1° sem., 1896), pp. 191-197 (*).

1. – Nella teoria delle superficie hanno fondamentale importanza le così dette curve *canoniche* (sezioni della superficie supposta d'ordine n con superficie aggiunte d'ordine $n-4$) possedenti carattere invariantivo rispetto a trasformazioni birazionali.

Il numero delle curve canoniche linearmente indipendenti è il genere (geometrico superficiale) p della superficie, mentre il genere di esse curve ne costituisce il 2° genere o *genere lineare* $p^{(1)}$.

Le superficie ($p>1$, $p^{(1)}=1$) di cui le curve canoniche sono (irriducibili) ellittiche o si spezzano in curve ellittiche (d'un fascio) sono state considerate dal sig. NOETHER (¹). Nello stesso lavoro il sig. NOETHER ha dimostrato che le superficie a curve canoniche irriducibili hanno il genere lineare $p^{(1)} \geqslant 2p-3$, e che il valore minimo $p^{(1)}=2p-3$ si ottiene in corrispondenza alle superficie di cui le curve canoniche sono iperellittiche.

A queste superficie è dedicata la presente Nota, nella quale mi propongo dunque di determinare tutti i tipi di superficie aventi curve canoniche irriducibili iperellittiche ($p>2$, $p^{(1)}>1$).

E innanzi tutto un richiamo per spiegare come deve intendersi l'irriducibilità del sistema canonico (²).

Allorchè è data una superficie F_n d'ordine n e se ne considera la

(*) Nota presentata dal Socio L. CREMONA nella seduta del 15 marzo 1896.

(¹) *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde*, « Mathem. Annalen », 8.

(²) Per questa osservazione e per l'altra contenuta nel § 2 riferentisi alla teoria generale delle superficie, si può confrontare la mia: *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (« Memorie dell'Accad. dei XL », 1896) [questo volume, XIII].

sezione con una generica superficie aggiunta φ_{n-4} d'ordine $n-4$, si deve anzitutto ritrarne la curva multipla stessa contata opportunamente secondo risulta dal modo di comportarsi in essa di una superficie aggiunta (dunque $i(i-1)$ volte se si tratta di una curva i-pla ordinaria): la parte residua contiene sempre come parti fisse quelle, eventuali, curve (*eccezionali*) che con una trasformazione della superficie possono esser mutate in un punto semplice; ma di queste curve eccezionali si distinguono due specie, secondochè il punto che viene a corrispondere ad una di esse sopra una opportuna trasformata $F'_{n'}$, d'ordine n', non appartiene o invece appartiene a tutte le superficie $\varphi_{n'-4}$ d'ordine $n'-4$ aggiunte a $F'_{n'}$: ora le curve eccezionali della 1ª *specie* debbono ancora essere ritratte dalla sezione di F_n colle φ_{n-4}; le intersezioni residue costituiscono propriamente le curve canoniche di F_n. Dunque nelle curve canoniche di F_n verrebbero incluse le eventuali curve eccezionali della 2ª *specie*, la presenza delle quali costituisce perciò un caso di riducibilità del sistema canonico di F_n. Siccome poi si tratta di questioni invariantive, ammettendo la irriducibilità del sistema canonico, deve anche escludersi la presenza di qualche punto di F_n (comune a tutte le φ_{n-4}) che in una trasformazione di F_n possa dar luogo a curve eccezionali di 2ª specie: in altre parole il sistema canonico su F_n non deve avere punti base (che l'intorno d'un punto base costituirebbe una componente fissa del sistema stesso). Per queste superficie a sistema canonico irriducibile (che debbono riguardarsi costituenti il caso generale) si ha che il numero delle intersezioni variabili di due curve canoniche (di genere $p^{(1)}$) è

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1$$

(NOETHER, l. c.).

Ciò premesso (a scanso di equivoci) si ha il resultato seguente:

Le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono irriducibili iperellittiche

$$(p > 2, \ p^{(1)} > 1)$$

a) *posseggono un fascio razionale di curve di genere due, oppure sono rappresentabili:*

b) *sul piano doppio con curva di diramazione dell'*8° *ordine* ($p=3$);

c) *o sul piano doppio con curva di diramazione del* 10° *ordine* ($p=6$).

2. – Avanti di entrare in argomento, cioè di venire alla dimostrazione del resultato innanzi enunciato, mi par conveniente di riportare la proprietà che caratterizza le curve canoniche sopra una superficie di fronte ad un qualsiasi sistema lineare (irriducibile) su di essa tracciato, poichè di questa proprietà dovremo far uso più volte nel seguito.

Sopra una superficie F una curva canonica sega la curva generica C di un qualsiasi sistema lineare irriducibile $|C|$, secondo un gruppo che sommato all'intersezione di un'altra C (ossia ad un gruppo della serie *caratteristica* di $|C|$) e al gruppo dei punti base di $|C|$, costituisce un gruppo canonico (di $2p^{(1)}-2$ punti) della detta C (di genere $p^{(1)}$).

Viceversa tale proprietà è caratteristica per le curve canoniche.

È sottinteso che alla superficie F si possa indifferentemente sostituire una sua trasformata, e però si debba tener conto opportunamente delle curve eccezionali di F cui venissero a corrispondere punti base per $|C|$ aggiungendo esse pure alle curve canoniche, appunto come si fa dei nominati punti base.

3. – Consideriamo una superficie F a curve canoniche (irriducibili) iperellittiche ($p>2$, $p^{(1)}>1$). Consideriamo su di F un fascio generico di curve canoniche: le infinite g_2^1 appartenenti alle curve (iperellittiche) del fascio, dànno luogo ad una involuzione Γ_2^2 su F: se gli elementi (coppie) di questa Γ_2^2 si considerano essi stessi come i punti (in senso astratto) d'una nuova superficie F', la F' possiede un fascio razionale di curve razionali (ciascuna curva essendo costituita dalle infinite coppie di una delle nominate g_2^1), e però è razionale ([3]), ossia rappresentabile punto per punto sul piano. Per conseguenza la data F è rappresentabile sul piano doppio, riferendo ai punti del piano le coppie della Γ_2^2 (e ciò osserva pure il sig. NOETHER, « Mathem. Annalen », VIII). Segue ([4]) che tutte le curve canoniche di F *appartengono* all'involuzione Γ_2^2 ossia contengono infinite coppie di questa (costituenti alla lor volta su ciascuna curva una involuzione γ_2^1).

La involuzione Γ_2^2 ottenuta su F a partire da un fascio di curve canoniche (iperellittiche), varierà con questo fascio, o sarà indipendente da esso?

È facile riconoscere che la Γ_2^2 non varia al variare del fascio di curve canoniche scelto su F. Si può fare la dimostrazione per assurdo nel modo seguente:

se la Γ_2^2 su F varia col fascio nominato, essa deve variare con continuità, e con continuità deve variare ancora l'involuzione γ_2^1 composta dalle coppie di Γ_2^2 appartenenti ad una data curva canonica; si ha dunque sulla curva canonica una serie continua di involuzioni γ_2^1, le quali deb-

---

([3]) Cfr. NOETHER, *Ueber Flächen welche eine Schaar rationaler Curven besitzen*, « Math. Ann. », 3.

([4]) Cfr. CASTELNUOVO, « Istituto lombardo », 1891, e le mie: *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, VI (« Memorie Accad. Torino », 1893) [questo volume, V].

bono essere razionali ([5]), e la curva stessa è in conseguenza una curva ellittica ($p^{(1)}=1$), mentre abbiamo supposto che essa sia di genere $p^{(1)}>1$.

Deduciamo che sopra la superficie F vi è una involuzione Γ_2^2 alla quale appartengono tutte le curve canoniche, tale che le coppie di Γ_2^2 formano su ciascuna curva canonica (iperellittica) la g_2^1 che essa possiede.

Dunque nella rappresentazione di F sul piano doppio (ottenuta riferendo ai punti del piano le coppie di Γ_2^2) le curve canoniche hanno per immagini le curve *razionali* d'un sistema lineare ∞^{p-1}. Questo sistema lineare di curve razionali è determinato dal gruppo base, perchè altrimenti ogni curva razionale del sistema più ampio cogli stessi punti base sarebbe l'immagine (doppia) di una curva su F cui spetterebbero le stesse proprietà caratteristiche per le curve canoniche (§ 2).

Questa osservazione ci permette di affermare in particolare che le ∞^{p-2} curve canoniche di F passanti per un suo punto generico A (le quali curve passano in conseguenza per il punto coniugato di A nella Γ_2^2) non passano tutte per altri punti variabili con A.

4. – Riferiamo proiettivamente gli elementi (curve) del sistema canonico ∞^{p-1} su F, agli iperpiani S_{p-2} di un S_{p-1}: si ottiene allora in S_{p-1} una superficie Φ i cui punti rappresentano le coppie della Γ_2^2, cioè una superficie doppia (dotata d'una certa curva di diramazione) su cui la F viene rappresentata. La Φ è (per ciò che si è detto innanzi) una superficie razionale rappresentabile sul piano prendendo come immagini delle sezioni iperpiane le ∞^{p-1} curve razionali di un sistema determinato dai punti base; essa è dunque una superficie normale a sezioni iperpiane razionali; perciò il suo ordine vale

$$p-2=\frac{p^{(1)}-1}{2}\,.$$

La Φ può essere ([6]):

1) un piano;

2) una superficie di Veronese del 4° ordine in S_5;

3) una superficie rigata.

Discutiamo partitamente i tre casi.

Caso 1°. – Se la Φ è un piano (doppio), si ha

$$p=3\,,\qquad p^{(1)}=3\,,$$

([5]) Il teorema che afferma l'impossibilità di una serie continua di involuzioni irrazionali sopra una curva è stabilito implicitamente dal sig. Painlevé: *Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre*, « Annales de l'École normale », 1891, ed esplicitamente (con altro metodo) dal sig. Castelnuovo, « Atti dell'Accad. di Torino », 1893, e dal sig. Humbert, « Comptes rendus » e « Journal de Mathématiques », 1893.

([6]) Cfr. Picard, « J. von Crelle », Bd. 100, e Guccia, « Circolo Mat. di Palermo », to. I.

e poichè una retta del piano è l'immagine (doppia) di una curva canonica su F, di genere 3, la curva di diramazione del piano doppio Φ ha l'ordine 8.

CASO 2°. – Se la Φ è una superficie di VERONESE del 4° ordine in S_5, si ha

$$p = 6\,, \qquad p^{(1)} = 9\,,$$

e poichè una sezione iperpiana di Φ è l'immagine (doppia) di una curva canonica su F avente il genere $p^{(1)} = 9$, la curva di diramazione su Φ ha l'ordine 20.

Rappresentiamo la Φ punto per punto sul piano, in guisa che le sezioni iperpiane di essa abbiano per immagini le coniche, ed avremo rappresentato la superficie F sul piano doppio con curva limite di ordine 10.

CASO 3°. La Φ sia una rigata razionale normale in S_{p-1} $(p > 3)$.

Dico che le generatrici di Φ rappresentano (doppiamente) curve di genere 2 (costituenti un fascio) su F.

Si escluda dapprima che la Φ stessa sia in cono. Allora le generatrici di Φ non hanno alcun punto comune, e poichè inoltre a Φ non appartiene alcuna curva eccezionale, le curve C di F corrispondenti alle rette di Φ formano pure un fascio (lineare) senza punti base; perciò le curve canoniche segano le curve C (di genere π) su F, ciascuna in un gruppo canonico di $2\pi - 2$ punti e poichè le segano in *due* punti, le C stesse hanno il genere $\pi = 2$.

Se la Φ è un cono, potrebbe nascere il sospetto che il suo vertice fosse immagine di qualche punto base pel fascio delle curve C aventi come immagini (doppie) le generatrici di Φ. Ma in questo caso possiamo valutare il genere π delle C nel seguente modo.

Un iperpiano pel vertice del cono Φ (di S_{p-1}) sega il cono stesso in $(p^{(1)} - 1)/2$ generatrici, al gruppo delle quali corrisponde su F una curva canonica spezzata in altrettanti componenti di genere π ciascuna: queste componenti debbono esser fra loro connesse, come si deduce riguardando la detta curva spezzata come limite di una curva canonica irriducibile, e però se si valuta il genere ($p^{(1)}$) della nominata curva composta secondo la nota formula che dà il genere d'una curva spezzata (7), si ha

$$p^{(1)} \geqq \pi \frac{(p^{(1)} - 1)}{2}\,,$$

da cui segue (essendo $\pi > 1$) $\pi = 2$. Del resto ciò può anche confer-

(7) Cfr. NOETHER, « Acta mathematica », 8, e la mia: *Introduzione ecc.*, § 16 [questo volume, XIII].

marsi col computo dell'ordine della curva di diramazione su Φ e del numero delle sue intersezioni colle generatrici di Φ.

Resta così provato che le superficie a curve canoniche iperellittiche rientrano nelle tre classi delimitate nel § 1.

Importa ora di vedere che le superficie di queste classi hanno effettivamente le curve canoniche iperellittiche.

5. – Che le superficie possedenti un fascio lineare di curve C di genere due abbiano le curve canoniche iperellittiche (supposto $p > 2$, $p^{(1)} > 1$), segue subito dalla proprietà caratteristica delle curve canoniche. Invero ciascuna curva canonica deve incontrare una C in due punti costituenti una coppia della g_2^1 su di essa, e quindi le C (costituenti un fascio lineare) determinano sopra ogni curva canonica una g_2^1. Rimane soltanto da stabilire che i piani doppi con curva limite di ordine 8 e 10 hanno risp. il genere $p = 3$, $p = 6$, e posseggono come immagini delle curve canoniche le rette e risp. le coniche del piano: da ciò segue invero che tali piani doppi rappresentano superficie algebriche a curve canoniche iperellittiche.

L'asserzione precedente è contenuta come corollario nel seguente enunciato:

Il piano doppio avente come curva limite la curva generale d'ordine $2n$ ha il genere $p = (n-3)n/2$, e possiede come immagini delle curve canoniche le curve d'ordine $n-3$ (contate due volte).

Sia

$$\varphi(xy) = 0$$

l'equazione della curva limite d'ordine $2n$, e si rappresenti il piano doppio sulla superficie (d'ordine $2n$)

$$z^2 = \varphi(xy)$$

che ha come $2(n-1)$-plo il punto all'infinito O dell'asse z perpendicolare al piano $z = 0$.

La sezione piana generica della superficie fatta con un piano per O ha il genere $n-1$, e quindi possiede oltre al punto $2(n-1)$-plo O, altri $n-1$ punti doppi (sia pure infinitamente vicini ad O): in conseguenza le superficie d'ordine $2n-4$ aggiunte alla $z^2 = \varphi(xy)$ (le quali sono cilindri di vertice O), si spezzano in un cilindro fisso d'ordine $n-1$ proiettante da O la curva doppia, ed in un qualsiasi cilindro d'ordine $n-3$ col vertice O.

Segue il precedente enunciato.

E rimane così esaurita la questione che forma argomento della presente Nota.

6. – Aggiungeremo l'osservazione seguente relativa alla costruzione di una superficie proiettivamente determinata, tipo della classe di superficie con un fascio razionale di curve di genere due.

Tali superficie, da quanto si è detto, risultano riferibili al piano doppio con curva di diramazione d'ordine $2n$ dotata di punto $(2n-6)$-plo.

Si può supporre il punto $(2n-6)$-plo di questa curva nel punto all'infinito dell'asse x, ed allora la sua equazione (in coordinate cartesiane)

$$\varphi(xy) = 0$$

conterrà x al 6° grado.

Il piano doppio è allora da riguardarsi come proiezione dal punto all'infinito dell'asse z, della superficie d'ordine $2n$

$$z^2 = \varphi(xy)\,,$$

per cui la retta all'infinito dei piani $y = \text{cost}$ è $(2n-6)$-pla.

Si deduce che:

Ogni superficie con un fascio razionale di curve di genere due può trasformarsi in una superficie di un certo ordine $2n$ con retta $(2n-6)$-pla e un (particolare) punto $(2n-2)$-plo su questa. In casi particolari si può rappresentare questa superficie sopra un'altra d'un certo ordine m con retta $(m-5)$-pla o $(m-4)$-pla e punto $(m-2)$-plo su di essa.

XV.

UN' OSSERVAZIONE RELATIVA ALLA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DELLE CURVE ALGEBRICHE

« Rend. del Circolo Matematico di Palermo », to. X (1896), pp. 30-35.

1. – La presente Nota trae origine da una questione inerente alla rappresentazione parametrica algebrica d'una curva.

Si abbia una curva algebrica C che, senza restrizione, possiamo supporre piana, data da un'equazione

$$f(x, y) = 0 .$$

La più generale rappresentazione parametrica algebrica della curva si ottiene ponendo le x, y funzioni razionali d'un parametro t e d'un irrazionale X legato a t da un'equazione di grado n in X

$$\varphi(X, t) = 0 ,$$

mediante le formule

$$x = f_1(X, t) , \qquad y = f_2(X, t) : \tag{1}$$

e si può dire allora che le

$$x = x(t) , \qquad y = y(t)$$

sono funzioni *irrazionali di grado* n in t.

Avviene *generalmente* che le formule (1) insieme alla $f(x, y) = 0$ permettono di esprimere inversamente X, t come funzioni razionali di x, y; cioè dànno una rappresentazione parametrica *semplice* della curva C;

ma in casi particolari può accadere l'opposto. In ogni caso però si deve supporre che *un* valore di X resti determinato, quando sono dati x, y, t [in guisa da soddisfare alle (1)]; altrimenti x, y resulterebbero funzioni razionali di t e di una funzione razionale di X e si dovrebbero riguardare come funzioni irrazionali del parametro t aventi un grado $< n$.

Abbiamo dunque in ogni caso al variare di t [mediante le (1)] una serie razionale di gruppi di n punti sulla curva C: per un noto teorema di LÜROTH si può supporre che i gruppi della serie corrispondano *biunivocamente* ai valori del parametro t, bastando altrimenti sostituire al parametro t un nuovo parametro τ funzione razionale di t; supposto ciò, le formule (1) daranno una rappresentazione parametrica semplice della curva C (ossia ciascun punto di C corrisponderà ad *un* valore di t) se i nominati gruppi di n punti su C formano una involuzione lineare g^1_n; accadrà invece l'opposto se quella serie di gruppi è tale che un punto di C appartiene a più d'un gruppo (ha l'*indice* $\delta > 1$). Che cosa potrà dirsi in quest'ultimo caso relativamente alla rappresentazione parametrica della curva C?

La risposta è data dal seguente enunciato:

Se le coordinate dei punti d'una curva algebrica

$$f(x, y) = 0$$

si esprimono come funzioni irrazionali di grado n d'un parametro t ed ogni punto della curva corrisponde a più valori di t;

1) *o le x, y si possono riguardare come funzioni irrazionali di grado n d'un parametro τ che è alla sua volta funzione razionale di t;*

2) *oppure la curva è trasformabile in una curva d'ordine n* (eventualmente multipla), ed ammette quindi infinite rappresentazioni parametriche semplici di grado n e di grado $< n$.

Stante le considerazioni precedenti risulta chiaro che questo enunciato è contenuto nel seguente enunciato geometrico (da cui si ottiene per $r = 1$):

Sopra una curva algebrica, una serie razionale ∞^r ($r \geqslant 1$) *di gruppi di n punti è lineare* (involutoria) *o è contenuta in una serie lineare più ampia g^s_n ($s > r$).*

2. – Sopra una curva algebrica C esista una serie razionale ∞^1 di gruppi di n (> 1) punti di un certo *indice* $m > 1$.

Supponiamo dapprima che gli m gruppi della serie definiti da un punto generico della C non abbiano comuni altri punti variabili con esso, o come diremo brevemente che la data serie sia *semplice*.

Gli elementi (gruppi) della serie possono riferirsi biunivocamente ai punti della curva K razionale normale d'ordine m in S_m: allora ad un punto della C corrispondono m punti della K (omologhi ai gruppi appartenenti sulla C al punto dato) e quindi ad un punto della C corrisponde un iperpiano (S_{m-1}) segante sulla K gli m punti; al variare del punto della C si ha così in S_m una serie ∞^1 di iperpiani, e gli elementi della serie (iperpiani) corrispondono biunivocamente ai punti della C; per un punto della K passano n dei nominati iperpiani, dati dagli n punti della C che compongono il gruppo (della data serie) corrispondente ad esso. Si può dire che la serie d'iperpiani considerata sia di classe n, cioè che per ogni punto di S_m (anche fuori di K) passino n iperpiani di essa?

La risposta affermativa alla precedente questione vien data da una considerazione del sig. SEGRE (¹).

Se la classe della serie di iperpiani fosse $\delta > n$, soltanto per un punto appartenente all'inviluppo della serie potrebbero passare meno di δ iperpiani, ed in conseguenza tutti i punti della K (per ciascuno dei quali passano solo n iperpiani distinti) apparterrebbero al nominato inviluppo; ma allora (la K appartenendo all'inviluppo della serie di iperpiani), per una nota proprietà degli inviluppi, ogni iperpiano di essa serie sarebbe tangente alla K, e quindi non la segherebbe più in m punti (distinti), contro il supposto.

Ora operiamo in S_m una trasformazione reciproca; agli iperpiani della nostra serie corrisponderanno i punti d'una curva C' d'ordine n (in corrispondenza biunivoca coi punti di C), ed ai punti di K gli iperpiani di una serie di classe m, seganti sulla C' i gruppi di n punti della serie razionale ∞^1 di grado n e indice m trasformata di quella supposta esistente sulla C.

La C' può (eventualmente) appartenere ad uno spazio S_s con $s < m$ dimensioni; allora la data serie di grado n e indice m sulla C risulta immersa in una serie lineare g_n^s (dello stesso grado).

Supponiamo ora, ciò che per un momento avevamo escluso, che sulla C la data serie non sia semplice, cioè che i gruppi di m punti di essa determinati da un punto generico abbiano comune, oltre quel punto, altri $\nu - 1$ punti ($\nu > 0$) variabili con esso; allora la serie risulta *composta* mediante i gruppi d'una involuzione γ_ν di grado ν, e considerando gli elementi (gruppi) di questa come i punti d'una curva, si può ancora applicare il ragionamento precedente: si deduce ancora che sulla C la data serie è contenuta in una serie lineare dello stesso grado g_n^s $(1 < s \leqslant m)$ (composta coi gruppi della γ_ν). Infine osserveremo che per $m = 1$ la serie è una g_n^1.

(¹) *Introduzione alla Geometria sopra l'ente algebrico semplicemente infinito*, n. 22 (« Annali di Matematica », 1894).

Sussiste dunque in ogni caso il teorema sopra enunciato per le serie ∞^1. Ma esso si estende subito alle serie di dimensione > 1, notando che in tal caso la serie stessa può riguardarsi come contenente infinite serie razionali ∞^1 aventi comune un gruppo di n punti, e quindi tutta la serie razionale risulta contenuta nella g_n^s completa a cui il detto gruppo di n punti appartiene.

3. – Il teorema enunciato al n. 1 trova la sua più semplice espressione nel caso ($n = 2$) delle curve iperellittiche ed in questo caso esprime una proprietà nota ([2]): questa può anche enunciarsi dicendo che *sopra una curva iperellittica di genere* $p \geqslant 1$ *ogni involuzione irrazionale è trasformata in sè stessa dalla (o da ciascuna)* g_2^1 *appartenente alla curva.*

Ed è anche da osservarsi che lo stesso fatto si può riguardare come *la proprietà degl'integrali iperellittici* (di prima specie)

$$I = \int_{x_0}^{x} \psi[x \sqrt{\varphi(x)}]\, dx \,,$$

riducibili ad ellittici, di ammettere una trasformazione birazionale (involutoria) in sè stessi e di trasformarsi in integrali ellittici mediante una sostituzione razionale

$$x = \theta(X)\,.$$

Basta invero ricordare come l'esistenza di un integrale iperellittico I riducibile ad un integrale ellittico coi periodi ω, ω', porti di conseguenza l'esistenza d'una curva ellittica

$$p(I \,|\, \omega, \omega')\,, \qquad p'(I \,|\, \omega, \omega')$$

trasformata razionale della

$$y^2 = \varphi(x)\,,$$

ossia porti l'esistenza d'una involuzione ellittica su quest'ultima curva (e viceversa) ([3]).

4. – Passando ad estendere il teorema del n. 2 alle superficie, stabiliamo che:

([2]) Cfr. PAINLEVÉ, *Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre*, ch. II (« Annales de l'École Normale », 1891); SEGRE, *Introduzione, ecc.*, op. cit.; nota al n. 67.

([3]) Cfr. a proposito della riducibilità degli integrali abeliani (in particolare iperellittici) PICARD APPELL, BRIOSCHI, GOURSAT, POINCARÉ (« Bulletin de la Société Mathématique » e « Comptes Rendus », 1882-86), come anche KOWALEVSKY (« Acta Mathematica », 1884).

Sopra una superficie algebrica una serie razionale (di dimensione $\geqslant 1$) *di curve è sempre contenuta totalmente in un sistema lineare.*

Supponiamo che la serie in questione sia ∞^1.

Se essa non è un *fascio* (sistema lineare ∞^1), per ogni punto della data superficie F passa un numero finito $\nu > 1$ di curve della serie: considerando le curve della serie come gli elementi d'un ente algebrico razionale ∞^1 K, ad ogni punto della superficie F corrisponde un gruppo di ν elementi su K. Inversamente si può supporre senza restrizione (analogamente a ciò che si è fatto nel n. 2) che la data serie di curve su F sia *semplice* e quindi a ciascuno dei detti gruppi di ν elementi su K corrisponda *un* punto di F. Figuriamoci l'ente K come una serie di iperpiani d'indice ν in un S_ν: ai punti di F vengono allora a corrispondere i punti d'una superficie ψ in S_ν (ciascun punto di ψ essendo comune ai ν iperpiani della serie che corrispondono al punto omologo di F): gli iperpiani della serie non sono tangenti a ψ in tutti i punti della linea sezione, altrimenti per ogni punto di ψ passerebbero meno di ν iperpiani; quindi la serie di curve che essi segano su ψ (ciascuna curva essendo contata una volta) viene contenuta totalmente nel sistema lineare delle sezioni iperpiane di ψ.

Il teorema stabilito per le serie di curve ∞^1 si estende alle serie razionali di dimensione > 1, usufruendo della estensione alle superficie dei teoremi sulle serie g_n^r complete relativi alle curve, estensione che si ha colla più generale considerazione dei sistemi normali comunque riducibili ([4]).

La proposizione stabilita deve essere confrontata coll'interessante teorema del sig. Humbert ([5]): « Sopra una superficie algebrica *priva di integrali di differenziali totali* di prima specie, *ogni* serie algebrica di curve è contenuta totalmente in un sistema lineare ».

Il teorema del sig. Humbert è più generale rispetto alla natura delle serie di curve, che noi supponiamo razionale; esso racchiude invece una restrizione, che non compare nel nostro enunciato, relativamente alla natura della superficie.

([4]) Cfr. la mia *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* (« Memorie dell'Accad. dei XL », 1895) [questo volume, XIII].

([5]) *Sur une propriété d'une classe de surface algébriques* (« Comptes Rendus », 1893).

XVI.

SUI PIANI DOPPI DI GENERE UNO

« Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta "dei XL") », s. 3ª, to. X (1896), pp. 201-222.

1. – Nella teoria delle curve algebriche e delle funzioni ad esse relative compariscono prime le curve iperellittiche il cui campo di razionalità è

$$x \qquad \sqrt{f(x)}\,,$$

dove f indica un polinomio in x.

Come estensione diretta si presentano fra le superficie i *piani doppi*, cioè le superficie il cui campo di razionalità è

$$x \quad y \quad \sqrt{\varphi(xy)}\,,$$

dove φ indica un polinomio in x, y. Ma le ricerche intorno ai piani doppi (CLEBSCH, NOETHER) si sono limitate alla determinazione delle condizioni di razionalità, cioè alla determinazione delle forme cui deve potersi ricondurre il polinomio $\varphi(xy)$ con trasformazione birazionale su x, y, affinchè x, y, $\sqrt{\varphi(xy)}$ sieno esprimibili razionalmente per due parametri. Tale questione è completamente esaurita.

Considerando come appartenenti ad una medesima *classe* due piani doppi

$$x \quad y \quad \sqrt{\varphi(xy)}\,, \qquad X \quad Y \quad \sqrt{\psi(XY)}$$

allorchè con una trasformazione birazionale tra i piani (xy) (XY) si può trasformare la curva di diramazione $\varphi(xy) = 0$ dell'uno, nella curva di diramazione $\psi(XY) = 0$ dell'altro, si ha il resultato [1]:

---

[1] Cfr. CLEBSCH, *Ueber den Zusammenhang etc.* (« Mathem. Annalen », 3); NOETHER, *Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen* (« Sitzungsberichte der phil. med. Soc. zu Erlangen », 1378).

I piani doppi razionali rientrano nelle tre classi rappresentate dai seguenti tipi:

1) piano doppio con curva di diramazione d'ordine $2n$ $(n \geqslant 1)$ dotata di un punto $(2n-2)$-plo;

2) piano doppio con curva di diramazione del 4° ordine;

3) piano doppio con curva di diramazione del 6° ordine dotata di due punti tripli infinitamente vicini.

Ora interessa di passare allo studio dei piani doppi (non razionali) di genere > 0, anche perchè a questi si collegano trascendenti (come gli integrali doppi di CLEBSCH, NOETHER) che sono la naturale estensione delle trascendenti iperellittiche.

In questo lavoro mi propongo di portare un primo contributo alla teoria dei piani doppi di genere > 0, classificando quei piani doppi che occupano naturalmente il primo posto dopo i piani doppi razionali, cioè il posto analogo a quello occupato dalle curve di genere 1 fra le curve iperellittiche.

Tale classificazione (il primo esempio di classificazione completa d'una famiglia di superficie non razionali mediante caratteri) mostrerà anche l'utilità di un nuovo carattere recentemente introdotto nella teoria delle superficie (accanto ai generi geometrico e numerico).

Ma appunto perchè dobbiamo fare uso di questo carattere e richiamare alcuni resultati generali della teoria delle superficie, non sarà male che cominciamo dal riassumere brevemente ciò che dobbiamo utilizzare nel seguito, anche prima di esporre i nuovi resultati qui ottenuti.

2. (2) – Nella teoria generale delle superficie algebriche si pone a fondamento la possibilità di trasformare una qualsiasi superficie data in una superficie (priva di singolarità in un iperspazio, o ciò che è lo stesso in una superficie) di S_3 dotata soltanto di curva doppia e punti tripli (*impropri*) che sono tripli anche per la curva doppia.

Senza entrare nella questione tuttora dibattuta se tale ipotesi sia limitativa, osserviamo che per le superficie rappresentabili sul piano doppio, che qui considereremo, la trasformazione cui sopra si allude potrebbe essere eseguita senza difficoltà fondandosi sulla nota teoria delle singolarità delle curve piane (applicata alla curva di diramazione del piano doppio).

Si abbia una superficie F di S_3 dotata di sola curva doppia e punti tripli impropri: denotiamo con n il suo ordine.

---

(2) Cfr. anche per le citazioni la mia *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* (« Memorie dell'Accad. dei XL », 1896) [questo volume, XIII].

Si dicono *superficie aggiunte* ad F quelle superficie φ che passano semplicemente per la curva doppia.

Vi sono in generale sopra F delle curve che godono carattere d'invarianza rispetto a trasformazioni birazionali e diconsi *curve canoniche*: esse possono essere definite in modo invariantivo [3]: esse si costruiscono proiettivamente su F come sezioni (parziali) della F colle superficie φ_{n-4} d'ordine $n-4$ aggiunte ad F (fuori della curva doppia contata due volte e di certe curve [eccezionali] trasformabili in punti semplici).

Il numero delle curve canoniche di F, o delle φ_{n-4}, linearmente indipendenti, costituisce il *genere geometrico superficiale* p_g di F: il genere (virtuale) delle curve canoniche costituisce il *genere lineare* $p^{(1)}$ di F.

Considerando tutte le superficie d'ordine $n-4$ e supponendo che esse seghino sulla curva doppia una serie completa e non speciale (fatte le opportune riduzioni se la detta curva si spezza), si ottiene una formula aritmetica, detta di *postulazione* [4], che permette di calcolare il numero delle φ_{n-4}, linearmente indipendenti, aggiunte ad F.

Il numero p_n così calcolato è uguale a p_g se è vera l'ipotesi nella quale si è istituito il calcolo: ciò accade per le superficie che si considerano come *regolari*. In caso diverso è $p_n < p_g$.

Il numero p_n dicesi *genere numerico* di F e si può darne un significato invariantivo [5] che mostra come esso non muti per una trasformata di F (fatte opportune modificazioni se le singolarità della detta superficie trasformata sono più elevate).

Sopra F possono ancora in generale definirsi certe *curve* dette *bicanoniche* che godono pure del carattere d'invarianza per trasformazioni birazionali [6]: esse si ottengono come sezioni (parziali) di F colle *superficie* Φ_{2n-8} d'ordine $2n-8$ *biaggiunte* ad F, cioè passanti due volte per la curva doppia di F (e non spezzate in F e in una residua superficie). Il numero delle curve bicanoniche di F linearmente indipendenti costituisce il *bigenere* P di F.

Noi ci riferiremo a superficie F (regolari) di genere $p_g = p_n = 1$. Esse hanno il bigenere $P \geqslant 1$, perchè la φ_{n-4} (aggiunta ad F) contata due volte costituisce una Φ_{2n-8} biaggiunta ad F. Nel caso che di solito si considera come generale, non esistono altre Φ_{2n-8} aggiunte ad F, se non quelle appartenenti al sistema lineare determinato dalla detta Φ_{2n-8} e della F presa insieme con un'arbitraria superficie d'ordine $n-8$ (se $n \geqslant 8$), cioè si ha in generale $P=1$: ma può anche essere $P>1$ ed aversi su F (una sola curva canonica ed) infinite curve bicanoniche.

---

(3) *Introduzione ecc.*, § 38.

(4) Cfr. NOETHER («Annali di Matematica», t. V).

(5) *Introduzione ecc.*, § 40.

(6) *Introduzione ecc.*, § 39.

Noi ci riferiremo a superficie per le quali, oltre ad essere $p_g = p_n = 1$, è anche $P = 1$, ossia alle *superficie che hanno tutti i generi uguali ad uno* (vedremo tra un momento che per le superficie aventi $p_g = p_n = P = 1$ anche il genere lineare $p^{(1)}$ deve considerarsi come uguale ad 1, mentre non vale l'inversa, cioè le superficie aventi $p_g = p_n = p^{(1)} = 1$ possono avere $P = 1$ o $P = 2$).

3. – Ricordate le nozioni precedenti notiamo che le superficie razionali si ottengono nella classificazione delle superficie in corrispondenza ai valori nulli dei generi (⁷) e perciò si può dire che il risultato precedentemente citato di CLEBSCH-NOETHER (n. 1) dà la *classificazione dei piani doppi aventi i generi nulli* ($p_g = p_n = P = 0$).

Nel presente lavoro si risolve il problema successivo della classificazione dei piani doppi aventi tutti i generi uguali ad 1, e si ottiene il teorema:

I piani doppi che hanno tutti i generi uguali ad 1 ($p_g = p_n = P = 1$) *rientrano in una delle* 4 *classi rappresentate dai seguenti tipi:*

1) *piano doppio con curva di diramazione del* 6° *ordine;*

2) *piano doppio con curva di diramazione di* 8° *ordine dotata di due punti* 4-pli *che possono essere infinitamente vicini;*

3) *piano doppio con curva di diramazione del* 10° *ordine dotata di un punto 7-plo e due punti 3-pli infinitamente vicini* (*distinti*);

4) *piano doppio con curva di diramazione del* 12° *ordine dotata di un punto 9-plo e tre punti 3-pli infinitamente vicini* (*distinti*).

§ I.

4. – Avanti di entrare a parlare più specialmente dei piani doppi, dobbiamo fare alcune osservazioni generali riguardanti le superficie F per le quali

$$p_g = p_n = P = 1 .$$

Cominciamo dal ricordare che ogni superficie regolare di genere p $(= p_g = p_n) > 0$ può essere trasformata in una superficie F senza curve eccezionali (curve trasformabili in punti semplici). La F può supporsi priva di singolarità in un certo iperspazio S_r a cui appartiene. Un sistema

---

(⁷) CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero* (« Memorie Accad. XI. », 1896).

lineare irriducibile $|C|$ privo di punti base su F si dice *puro*: $|C|$ si dice *semplice* se esso è tale che il passaggio di una C per un punto generico di F non porti di conseguenza il suo passaggio per altri punti di F (quindi ∞^3 almeno).

Dato su F un sistema puro semplice $|C|$ resta definito su F un altro sistema $|C'|$, *aggiunto* a $|C|$, di cui le curve segano gruppi canonici alle C e che può considerarsi come *somma* di $|C|$ col sistema canonico [8]. Essendo $p_g = p_n$, $|C'|$ sega su una C la serie canonica completa: perciò essendo $|C|$ semplice (in guisa che può supporsi essere il sistema delle sezioni iperpiane di una trasformata di F) $|C'|$ è irriducibile e non ha punti base su F, ossia è anch'esso un sistema puro.

Denotando con π il genere (delle curve generiche C ossia il genere) di $|C|$, e con n il suo *grado* (numero delle intersezioni di due C), con π' il genere di C', e con $p^{(1)}$ il genere lineare di F (ossia il genere virtuale delle curve canoniche, supposte esistenti) si ha

$$(1) \qquad p^{(1)} = \pi' - 3(\pi - 1) + n :$$

questa formula segue dalla proprietà delle curve canoniche K di segare le curve C in $2(\pi - 1) - n$ punti, e dall'essere

$$|C'| = |C + K| .$$

Denotando ancora con n' il grado di $|C'|$ si ha pure la formula

$$(2) \qquad p^{(1)} - 1 = n' - 4(\pi - 1) + n .$$

Le formole (1) (2) sono senz'altro applicabili al caso che la superficie F abbia il genere

$$p = (p_g = p_n =)1$$

purchè esista su di essa una effettiva curva canonica. Ma nel caso $p = 1$ tale curva può anche mancare, giacchè se si suppone la F proiettata da punti esterni in una superficie F' di S_3 avente un certo ordine m, l'intersezione della F' colla superficie aggiunta d'ordine $m - 4$ può essere costituita soltanto dalla curva doppia.

In questo caso manca il significato assegnato a $p^{(1)}$, ma possiamo

---

(8) *Introduzione ecc.*, IV, VI.

ancora prendere convenzionalmente

$$p^{(1)} = \pi' - 3(\pi - 1) + n$$

come genere virtuale della curva canonica (non esistente) e chiamarlo genere lineare di F, avvertendo che esso conserva ancora il suo carattere d'invarianza (9). Il $p^{(1)}$ può ora valutarsi subito.

Invero (mancando il sistema canonico $|K|$) si ha ora

$$|C'| = |C|$$

e però

$$\pi' = \pi \qquad n' = n,$$

ed, una C' segando una C in $2\pi - 2$ punti, si ha

$$n = 2\pi - 2.$$

sicchè

$$p^{(1)} = 1.$$

Sussiste allora anche la formula

$$p^{(1)} - 1 = n' - 4(\pi - 1) + n = 0. \tag{2}$$

Vediamo ora che valore può avere il bigenere P d'una superficie regolare di genere $p = (p_g = p_n =)1$.

Il numero $P - 1$ rappresenta la dimensione del sistema doppio del sistema canonico: se dunque manca su F la curva canonica dovrà prendersi $P = 1$.

Supponiamo invece che esista su F una effettiva curva canonica di genere $p^{(1)}$.

Essa può considerarsi come un sistema lineare $|K|$ di dimensione 0, ed il sistema bicanonico (che è il più ampio sistema lineare cui appartiene la K contata due volte) come il sistema $|K'|$ aggiunto a $|K|$ secondo la definizione data nella mia *Introduzione ecc.* di sistema aggiunto ad un sistema lineare comunque riducibile di dimensione $\geqslant 0$ (10); quindi in virtù dei risultati generali ivi dimostrati la dimensione del

(9) *Introduzione ecc.*, § 41.

(10) Cfr. l'osservazione in fine del § 27.

sistema bicanonico $|K'|$ sarà

$$P-1=p^{(1)} \quad (^{11}):$$

si ha dunque

$$P=p^{(1)}+1\,,$$

formula che non è più vera se manca su F la curva canonica, poichè in questo caso si è detto doversi prendere

$$p^{(1)}=1\,, \qquad P=1\,.$$

5. – Ora ci proponiamo la seguente questione:

La superficie F può possedere una effettiva curva canonica di genere virtuale $p^{(1)}=0$?; in altre parole può essere $P=1$ per una superficie F che possegga una effettiva curva canonica?

La risposta è negativa.

Facciamo la dimostrazione per assurdo.

Supponiamo dunque che sopra la superficie F di genere $p=(p_g=p_n=)1$ esista una effettiva curva canonica K di genere (virtuale) $p^{(1)}=0$. Sia $|C|$ un sistema lineare irriducibile semplice puro su F. Sieno π, n il genere e il grado di $|C|$: la curva K incontra la C in

$$2(\pi-1)-n$$

punti.

Sia $|C'|$ il sistema aggiunto a $|C|$ (che è anch'esso irriducibile, semplice, puro), e sieno π', n' risp. il genere e il grado di $|C'|$. Si ha dalle formule (1) (2) (in cui è posto $p^{(1)}=0$)

$$\pi'=3(\pi-1)-n$$

$$n'=4(\pi-1)-n-1$$

e perciò

$$2(\pi'-1)-n'=2(\pi-1)-n-1\,.$$

Segue che le curve C' incontrano la K in un numero di punti $(2(\pi'-1)-n')$ minore del numero delle intersezioni di K colle C.

---

(11) L. c., § 40. Veramente in quel ragionamento si suppone la dimensione di $|K|>0$, ma il ragionamento vale ancora in questo caso, almeno per dimostrare che è $P-1\geqslant p^{(1)}$ ciò che a noi qui basta: si vedrebbe poi l'assurdità di supporre $P-1>p^{(1)}$.

Dunque procedendo a considerare il sistema aggiunto a $|C'|$ e così via, si arriva ad un sistema irriducibile semplice, puro, $|C^\nu|$, di cui le curve non incontrano K, tale dunque che (indicati con π_ν, n_ν il suo genere e il suo grado) si ha

$$2(\pi_\nu - 1) - n_\nu = 0 .$$

Trasformiamo la superficie F in una F_{n_ν} (di ordine n_ν) in S_3 avente come sezioni piane ∞^3 curve generiche C^ν: sulla F_{n_ν} manca la curva canonica; ma si potrebbe pensare che essa venisse rappresentata dall'intorno di qualche punto multiplo (non mai di qualche punto semplice di F_{n_ν}, perchè dalla curva canonica K si sono già escluse le componenti eccezionali).

Per eliminare il dubbio che qui si presenta osserviamo che si può supporre di aver preso $|C|$ in modo che sia privo di curve fondamentali proprie (cioè di curve fondamentali diminuenti il genere delle curve residue); allora la stessa proprietà vale per $|C^\nu|$ ([12]) e quindi F_{n_ν} non ha punti multipli propri, vale a dire la sezione piana generica di F_{n_ν} fatta con un piano passante per un punto multiplo O, ha lo stesso genere π_ν della sezione non passante per O.

Osservato ciò, vediamo se l'intorno d'un punto multiplo O può costituire (tutto o in parte) la curva canonica di F_{n_ν}. Se O è i-plo, esso (essendo improprio) è $(i-1)$-plo almeno per la superficie $\varphi_{n_\nu-4}$ d'ordine $n_\nu - 4$ aggiunta ad F_{n_ν}; dovrebbe essere i-plo perchè il suo intorno facesse parte della curva canonica su F_{n_ν}.

Ma questo è impossibile perchè allora in un piano generico per O la sezione di $\varphi_{n_\nu-4}$ e di F_{n_ν} si segherebbero in i punti (infinitamente vicini ad O) fuori dei punti multipli.

È del pari analogamente impossibile che (non tutto ma) una parte dell'intorno di O su F_{n_ν} faccia parte della curva canonica.

Dunque questa curva canonica non può venire in alcun modo rappresentata su F_{n_ν} e però non esiste nemmeno su F.

Resta così dimostrato che:

Le superficie di genere $p_g = p_n = 1$ e di bigenere $P = 1$ non posseggono curva canonica ed hanno quindi il genere lineare (virtuale) $p^{(1)} = 1$.

Si deduce ([13]):

([12]) Cfr. CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero*, l. c., § 5.

([13]) Cfr. le mie *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, « Memorie dell'Accad. di Torino », 1893 (III) [questo volume, V]; e la *Introduzione ecc.*, § 42 [questo volume, XIII].

Sopra una superficie avente i generi

$$p_g = p_n = P = 1$$

(che può supporsi già assunta senza curve eccezionali e senza singolarità in un iperspazio):

ogni sistema lineare irriducibile puro di genere π è di grado $2\pi - 2$ e di dimensione π;

ogni sistema lineare irriducibile ∞^π di genere π e grado $2\pi - 2$ è puro $(\pi \geqslant 1)$;

ogni sistema lineare irriducibile (∞^1 almeno) di genere π e grado n, dotato di σ punti base di molteplicità risp. $\varrho_1\, \varrho_2 \ldots \varrho_\sigma$, è contenuto in un sistema lineare puro di genere

$$\Pi = \pi + \sum_1^\sigma \frac{\varrho_i(\varrho_i - 1)}{2}$$

e di grado

$$N = 2\Pi - 2 = n + \sum_1^\sigma \varrho_i^2 .$$

§ II.

6. – Si abbia una superficie F avente i generi

$$p_g = p_n = P = 1 ,$$

rappresentabile sul piano doppio.

Possiamo supporre F proiettivamente data in un certo S_n, in guisa che essa non abbia alcuna singolarità e non possieda curve eccezionali.

Sopra F si ha una involuzione I di coppie di punti, le cui coppie corrispondono ai punti del piano doppio.

Riguardata I come una trasformazione (involutoria) di F in sè stessa, non vi è alcun punto (fondamentale) di F cui corrisponda una curva, giacchè tale curva sarebbe eccezionale.

Un sistema lineare su F si dirà *appartenente* all'involuzione I se le sue curve passanti per un punto di F passano in conseguenza per il coniugato in I.

Dico che si possono costruire su F dei sistemi lineari senza punti base (puri) appartenenti ad I.

Invero si considerino le quadriche inviluppo della S_r cui F appartiene, come gli elementi (punti) di un $S_{r(r+3)/2}$: in questo spazio lineare $S_{r(r+3)/2}$ è contenuta la varietà di tutte le coppie di punti di $S_{r(r+3)/2}$: in particolare le coppie di punti di F appariscono in esso come i «punti» d'una superficie F' in corrispondenza [1, 2] colla F. Al sistema delle sezioni iperpiane di F' (in $S_{r(r+3)/2}$) corrisponde appunto su F un sistema lineare puro $|C|$ appartenente all'involuzione I.

La superficie F' si può considerare come una superficie (razionale) doppia trasformata della F, ottenuta col riferire proiettivamente agli iperpiani dello spazio ($S_{r(r+3)/2}$) che la contiene gli elementi (curve) del sistema lineare $|C|$: ed il fatto che $|C|$ è puro si può esprimere dicendo che la superficie doppia F' non possiede curve eccezionali, cioè curve a cui corrispondano punti di F.

Possiamo aggiungere un'altra osservazione e cioè che $|C|$ costruito nel modo anzidetto non ha su F alcuna curva fondamentale (all'infuori delle coppie di I), giacchè ad una curva fondamentale di $|C|$ su F, corrisponderebbe una singolarità di F', mentre due punti (non coniugati) di F danno due coppie di I, e queste *prendono il nome di due* punti di F'.

7. – Rappresentiamo punto per punto le superficie F' sopra un piano π, e sia $|K|$ il sistema lineare delle immagini delle sezioni iperpiane di F'. Il piano π è un piano doppio rappresentativo della superficie F di genere 1; il sistema $|K|$ è un sistema di curve piane di π, privo di curve fondamentali proprie, cui corrisponde su F un sistema puro ($|C|$). Se n è l'ordine delle K e $p > 1$ il loro genere, consideriamo le ∞^{p-1} curve d'ordine $n - 3$ aggiunte alle K; esse formano un sistema lineare che, spogliato delle eventuali componenti fisse, costituisce il *sistema aggiunto* ([14]) (puro) $|K'|$ di $|K|$. Dico che a $|K'|$ corrisponde (come a $|K|$) un sistema puro su F.

Invero si supponga l'opposto. Allora il sistema $|K'|$ deve avere qualche punto base O sopra la superficie F' rappresentata dal sistema $|K|$ in π: ma questo è impossibile perchè le curve K' (considerate su F') segano la serie canonica completa sopra ogni sezione iperpiana di genere p, e la sezione generica di F' per un punto *arbitrario* O è sempre di genere p, poichè F' non ha punti multipli. Si osservi che non importa qui tener conto del fatto che F' è priva di singolarità, basta tener conto del fatto che F' non ha punti singolari diminuenti il genere delle sezioni iperpiane per essi, cioè che $|K|$ non ha curve fondamentali proprie.

Ciò posto se $|K'|$ è irriducibile, semplice e privo di curve fondamen-

([14]) Cfr. CASTELNUOVO, *Ricerche sui sistemi lineari di curve piane* («Memorie dell'Accad. di Torino», 1891).

tali proprie, e se esso ha ancora il genere > 1 potremo concludere ugualmente che il suo sistema aggiunto $|K''|$ rappresenta un sistema puro di F e così via. Ma è noto che se $|K'|$ è irriducibile e semplice, esso è pure privo di curve fondamentali proprie ([15]).

Noi siamo dunque condotti ad esaminare quando avverrà che spingendo l'operazione di aggiunzione nel piano π, a partire da $|K|$, si incontri un(primo) sistema lineare riducibile, o non semplice, o di genere $\leqslant 1$.

Il sig. CASTELNUOVO ha già avuto occasione di occuparsi di tale questione, ma non ha pubblicato completamente i risultati ottenuti; egli mi comunica la conclusione seguente:

L'operazione di aggiunzione successivamente applicata nel piano a partire da un sistema lineare irriducibile, semplice, privo di curve fondamentali proprie, conduce sempre ad uno dei seguenti sistemi:

1) *Sistema lineare (∞^1 almeno) di curve razionali, determinato dal gruppo dei punti base.* (Se il sistema ha una dimensione > 1 esso è semplice e non possiede curve fondamentali proprie, cioè non è rappresentativo d'un cono).

2) *Sistema lineare, irriducibile, semplice (∞^3 almeno) di curve ellittiche privo di curve fondamentali proprie, determinato dal gruppo base.*

3) *Rete di curve ellittiche riducibile (per trasformazione birazionale) alla rete delle cubiche passanti per sette punti base.*

4) *Sistema lineare ∞^3 di curve di genere due riducibile al sistema delle sestiche con otto punti base doppi* ([16]).

Noi possiamo dunque affermare che sul piano doppio π si ha sempre un sistema lineare del tipo 1) o 2) o 3) o 4) rappresentativo di un sistema puro sopra F.

Andiamo a discutere partitamente i singoli casi che si presentano.

8. – CASO 1. Esiste sul piano doppio π un sistema lineare (∞^1 almeno) di curve razionali rappresentativo di un sistema puro sopra la superficie (di genere 1) F.

Indicheremo questo sistema con $|L|$.

Anzitutto:

α) $|L|$ può essere un fascio: allora si ha in corrispondenza su F un fascio puro appartenente all'involuzione I (di cui le coppie sono riferite ai punti di π); questo fascio è necessariamente composto di curve ellittiche (n. 5).

Se $|L|$ non è un fascio (e quindi ∞^2 almeno), possiamo considerare

---

([15]) Cfr. CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero*, § 5.

([16]) La dimostrazione di questo teorema si trova nell'*Aggiunta* pubblicata alla fine della Memoria.

una superficie razionale normale Φ rappresentata su π, avente come (immagini delle) sezioni iperpiane le curve razionali L: la Φ è una immagine doppia senza curve eccezionali della superficie F.

Ora si hanno i tre casi [17]:

β) La superficie Φ è un piano. Allora alle rette (L) del piano Φ corrispondono su F le curve di una rete pura di grado due e (però anche) di genere due, appartenente all'involuzione I (n. 5).

γ) La superficie Φ è una superficie di VERONESE (del 4° ordine in S_5). Allora su Φ vi è una rete (omaloidica) di coniche, senza punti base, cui corrisponde su F una rete pura di grado due e (però anche) di genere due appartenente all'involuzione I.

δ) La superficie Φ è una rigata (razionale normale) d'un certo ordine $n-1$, appartenente ad un S_n, ma (nel nostro caso) non un cono. Allora alle generatrici di Φ corrispondono su F le curve d'un fascio puro, dunque curve ellittiche.

9. – CASO 2. Esiste su π un sistema lineare (∞^3 almeno) irriducibile semplice di curve ellittiche, privo di curve fondamentali proprie, cui corrisponde un sistema puro (appartenente all'involuzione I) sopra la superficie F di genere 1.

Sia $|L|$ questo sistema, determinato dal gruppo base.

Possiamo considerare una superficie razionale normale Φ rappresentata sul piano π, avente come sezioni (piane o iperpiane) le L: tale Φ è priva di punti doppi, mancando $|L|$ di curve fondamentali proprie: la Φ può riguardarsi come una immagine doppia senza curve eccezionali della superficie.

La Φ è notoriamente una superficie d'un certo ordine n ($\leqslant 9$) in S_n e non avendo punti doppi contiene (almeno) una rete omaloidica senza punti base di curve razionali, cubiche o quartiche [18]. A questa rete corrisponde su F una rete pura di grado due e (quindi) di genere due.

10. – CASO 3. Esiste sul piano π una rete di cubiche $|L|$ con 7 punti base, cui corrisponde un sistema puro su F.

Alla rete di cubiche $|L|$ corrisponde sulla superficie F di genere 1, una rete pura di grado 4 appartenente all'involuzione I: le curve della rete (essendo questa di grado 4) hanno il genere 3; e la rete stessa è con-

---

(17) Deduzione immediata del teorema di PICARD, *Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales*, (« Crelle », Bd. C). Cfr. anche GUCCIA (« Circolo di Palermo », t. I).

(18) Il lettore potrà trovare raccolti i resultati noti sulle superficie a sezioni ellittiche (DEL PEZZO, GUCCIA, CASTELNUOVO) nel mio lavoro dei « Mathem. Annalen » (1895), *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche* [questo volume, X].

tenuta in un sistema lineare completo (rispetto al grado e rispetto al genere) $|C|$, di dimensione 3.

Questo sistema $|C|$ non appartiene all'involuzione I, altrimenti gli corrisponderebbe sul piano doppio π un sistema lineare ∞^3 contenente la rete di cubiche $|L|$, ed avente lo stesso grado 2, mentre un tal sistema sul piano π non esiste.

Può bensì darsi che il sistema $|C|$ non sia semplice ed appartenga ad un'altra involuzione I' su F: questo è l'unico caso possibile se $|C|$ non è semplice, perchè la serie (canonica) segata sopra una C generica dalle altre C (*serie caratteristica di* $|C|$) è sempre semplice oppure composta con una g_2^1, se la C è iperellittica.

Aggiungasi che se $|C|$ appartiene ad una involuzione I', ad I' corrisponde su π una serie di coppie di punti cui appartiene la rete $|L|$, ossia l'involuzione (di coppie di punti) determinata da questa rete: dunque la (supposta) involuzione I' deve esser permutabile coll'involuzione I, per modo che la I faccia corrispondere ad ogni coppia di punti coniugati in I', una coppia analoga.

Comunque sia, l'involuzione I su F trasforma in se stesso il sistema completo $|C|$, poichè trasforma in sè una rete dello stesso grado e in esso contenuta (la rete corrispondente ad $|L|$).

Riferiamo proiettivamente gli elementi (curve) di $|C|$ ai piani di S_3: la F si trasformerà in una superficie F_4 del 4° ordine, eventualmente ridotta ad una quadrica F_2 doppia (i cui punti rappresenterebbero le coppie di I'). L'involuzione I viene rappresentata su F_4 o su F_2 da una involuzione, subordinata da un'omografia involutoria che trasforma in sè la superficie. Vi è una rete di sezioni piane unite (le curve corrispondenti alle cubiche L di π), dunque l'omografia, che trasforma in sè F_4 (o F_2), e subordina su di essa l'involuzione I, è un'omologia (armonica).

La curva di coincidenza di I (corrispondente alla curva di diramazione del piano doppio π) è la sezione di F_4 (o F_2) col piano d'omologia.

Dunque la curva di coincidenza di I su F appartiene al sistema completo $|C|$. Di qui segue che la curva di diramazione del piano doppio π è una sestica con 7 punti doppi, cioè una curva del sistema $|2L|$ doppio della rete di cubiche $|L|$. Infatti eseguendo la trasformazione [1, 2] che fa passare da π ad F, si passa dal sistema $|2L|$ al sistema $|2C|$ e dalla curva di diramazione di π alla curva di coincidenza di I contata due volte, cioè ad una curva del sistema (completo) $|2C|$.

Si deduce che alle rette del piano π corrispondono su F le curve di genere due di una rete di grado due (rete pura).

11. – CASO 4. Esiste sul piano π un sistema lineare ∞^3 $|L|$ di sestiche di genere due, con 8 punti base doppi, rappresentativo di un sistema puro sopra F.

Al sistema $|L|$ di grado 4 corrisponde su F un sistema puro di grado 8 e (quindi) di genere 5, contenuto in un sistema completo ∞^5 $|C|$ (dello stesso grado e genere).

Ragionando come nel numero precedente si prova che $|C|$ è semplice, oppure appartiene ad una involuzione I' permutabile con I: deve aver luogo il secondo caso se sopra le C immagini delle L le altre C segano una serie (canonica) composta, cioè se quelle C sono iperellittiche (ed allora si deduce che sono iperellittiche tutte le C).

Dico che effettivamente, il fatto enunciato deve accadere, e quindi $|C|$ deve appartenere ad una involuzione I' su F (permutabile con I).

Notiamo, a tal fine, che una C immagine di una L possiede una serie g_4^1 *autoresidua* (rispetto alla serie canonica), corrispondente alla g_2^1 di L, perchè alla serie caratteristica di $|L|$ (composta colla g_2^1) corrisponde una g_8^2 contenuta nella serie canonica di C: ogni gruppo della nominata g_4^1 è mutato in sè dall'involuzione di genere due γ_2^1 le cui coppie sono rappresentate dai punti di L. Ciò posto l'affermazione precedente si riduce all'affermazione del lemma:

Se una curva di genere 5 *possiede una involuzione di genere due* γ_2^1 (di coppie di punti) *la quale muti in sè ciascun gruppo di una serie* g_4^1 *autoresidua, la curva è iperellittica* (e la g_4^1 è contenuta in una g_4^2 doppia della g_2^1).

La dimostrazione del lemma si farà per assurdo.

Una curva di genere 5, non iperellittica, può rappresentarsi colla curva canonica C_8 d'ordine 8 di S_4. Suppongasi che su C_8 vi sia una involuzione γ_2^1 di genere due la quale muti in sè ciascun gruppo di una g_4^1 autoresidua.

Le coppie di gruppi della g_4^1 formano una g_8^2 segata su C_8 dagli iperpiani per una retta r, da cui C_8 viene proiettata secondo un cono quadrico di 2ª specie Q.

Le coppie della γ_2^1 vengono congiunte dalle generatrici di una rigata (di genere due) il cui ordine è 6 ([19]): questa rigata giace sul cono Q, ed ammette la direttrice r (asse di Q) come retta doppia.

L'involuzione γ_2^1 su C_8 viene subordinata da un'omografia involutoria di S_4 che trasforma in sè C_8, la rigata di 6° ordine, e il cono Q: questa omografia ha come punti uniti (doppi) i punti di r. Essa possiede ancora un piano di punti uniti (non incidente ad r) che incontra tutte le generatrici della rigata (ognuna delle quali possiede due punti uniti): la sezione di questo piano colla rigata (appartenendo a Q) è una conica λ necessariamente doppia per la rigata. Ma questa conclusione è assurda, perchè la corrispondenza [2, 2] che viene ad intercedere fra r e λ ha il genere $\leqslant 1$, mentre essa dovrebbe avere il genere (due) della rigata.

([19]) SEGRE, per es. nella Nota *Sulle curve normali di genere p...*, « Rend. dell'Ist. Lombardo », 1888.

Così il lemma è stabilito.

Dal precedente lemma segue, come abbiamo detto, che il sistema $|C|$ su F appartiene ad una involuzione I', permutabile con I. Riferendo proiettivamente gli elementi (curve) di $|C|$ agli iperpiani di S_5, si ha in S_5 una immagine doppia di F, del 4° ordine: la indicheremo con F_4. Sopra F_4 vi è una involuzione rappresentativa di I.

Si può supporre che la F_4 sia una rigata o una superficie di VERONESE.

Nella prima ipotesi (dato che essa sia possibile) alle generatrici di F_4 dovrebbero corrispondere su π le cubiche aggiunte alle sestiche L: a queste cubiche corrisponderebbero dunque su F coppie di curve ellittiche d'un fascio necessariamente razionale (perchè la F è regolare ([20])) e quindi un fascio puro su F: la curva di coincidenza dell'involuzione I su F sarebbe costituita da *due* curve del fascio, e però la curva di diramazione del piano doppio π sarebbe composta di due delle nominate cubiche, ossia sarebbe una sestica L (spezzata).

La F_4 sia, invece, una superficie di VERONESE.

L'involuzione I di F muta in sè le curve d'un sistema ∞^3 dello stesso grado 8 contenuto in $|C|$ e però muta in sè il sistema completo $|C|$. Questo vuol dire che la I su F_4 è subordinata da un'omografia involutoria (che trasforma in sè F_4). Ora un'omografia involutoria di S_5 che trasformi in sè una superficie di VERONESE F_4, ha, su questa, una conica di punti uniti, ed un altro punto unito. (Lo si vede rappresentando F_4 sul piano in guisa che alle sue coniche corrispondano le rette del piano).

La detta conica, congiunta al punto nominato, rappresenta la curva di coincidenza di I su F. Ma al detto punto unito su F_4 corrisponde (come è facile vedere) su π il 9° punto comune alle cubiche aggiunte alle sestiche L (aventi 8 punti base doppi), il quale punto di π è immagine di una coppia comune alle involuzioni I ed I' su F; dunque alla curva di diramazione del piano doppio π corrisponde su F una curva che, contata due volte, appartiene al sistema completo $|C|$ (rappresentato dalle quartiche sezioni iperpiane di F_4).

Si deduce, analogamente a ciò che si è fatto nel numero precedente, che la curva di diramazione del piano doppio π è una sestica L (con 8 punti doppi).

Quindi alle rette del piano doppio π corrispondono (in ogni caso) su F le curve di genere due di una rete di grado 4 (rete pura).

12. – La nostra analisi essendo compiuta possiamo riassumere i resultati ottenuti enunciando il teorema:

([20]) CASTELNUOVO, *Alcuni resultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, n. 10 («Memorie dell'Accad. dei XL», 1896).

Se una superficie F avente tutti i generi uguali ad 1 *è rappresentabile sul piano doppio, ossia possiede una involuzione razionale I di coppie di punti,*

1) *la superficie contiene una rete pura di genere due e grado due appartenente all'involuzione I,*

2) *oppure contiene un fascio lineare puro di curve ellittiche similmente appartenente all'involuzione I.*

Nel 1° caso la rappresentazione di F sul piano doppio π i cui punti sono riferiti alle coppie di I può esser fatta in modo che la curva di diramazione sia una sestica.

Nel 2° caso in modo che alle curve ellittiche del fascio nominato corrispondano (doppiamente) le rette d'un fascio in π, ed allora la curva di diramazione del piano doppio π segherà le rette di questo fascio in 4 o in 3 punti variabili cioè sarà una curva d'un certo ordine $2n$ avente un punto $(2n-4)$-plo o $(2n-3)$-plo (nel centro del fascio).

Se la F fosse rappresentata in un altro modo sul piano doppio π, si potrebbe sempre ridurci ad uno dei casi precedenti operando una trasformazione birazionale nello stesso piano π.

§ III.

13. – Per esaurire la classificazione dei piani doppi aventi tutti i generi uguali ad 1 noi dobbiamo ora esaminare quali tipi di piani doppi con curva di diramazione d'ordine 6, o d'ordine $2n$ dotata di punto $(2n-4)$-plo o $(2n-3)$-plo riescono effettivamente di genere 1.

Si ha anzitutto:

Il piano doppio con sestica di diramazione ha in generale tutti i generi uguali ad 1.

I casi di degenerazione (corrispondenti a note singolarità della sestica) portano a noti piani doppi razionali o a piani doppi rappresentativi di rigate.

Tenendo conto del fatto che un piano doppio con curva di diramazione d'ordine < 6 $(= 4$ o $= 2)$, ha il genere 0, potremo limitarci nel seguito all'esame di piani doppi con curva di diramazione d'ordine $2n > 6$, dotata di punto $(2n-4)$-plo o $(2n-3)$-plo.

14. – Se si costruisce un piano doppio prendendo una qualsiasi curva di diramazione C_{2n} d'ordine $2n > 6$, dotata di punto $(2n-4)$-plo o $(2n-3)$-plo O, questo piano doppio risulta in generale di genere > 1. Bisogna dunque ricercare le singolarità ulteriori da attribuirsi a C_{2n} perchè il piano doppio risulti di genere 1.

Ma, pel nostro scopo, si può indifferentemente sostituire ad una data C_{2n} una analoga curva di diramazione C_{2m} operando nel piano una trasformazione di JONQUIÈRES che lasci immutato il fascio di rette di centro O (pur scambiandone fra loro le rette): di ciò possiamo valerci, occorrendo, per semplificare la ricerca.

E possiamo anche supporre di aver già portato all'infinito il punto O, disponendo (eventualmente) d'una trasformazione omografica del piano: e supporre ancora (senza restrizione) che la retta all'infinito del piano non si stacchi da C_{2n}.

Allora assumiamo un sistema di assi cartesiani ortogonali xyz in guisa che l'asse x abbia come punto all'infinito il punto O: sia

$$\varphi(xy) = 0$$

l'equazione della curva di diramazione C_{2n} del piano doppio; il polinomio $\varphi(xy)$ sarà soltanto di grado 4 o 3 in x.

Costruiamo la superficie F che ha per equazione

$$z^2 = \varphi(xy) :$$

essa è una immagine (semplice) del nostro piano doppio: il suo ordine è $2n$.

Indicato con A il punto all'infinito dell'asse z, la F ha A come punto $(2n-2)$-plo; la F possiede inoltre la retta OA (retta all'infinito del piano xz) come $(2n-4)$-pla o risp. $(2n-3)$-pla secondo la moltiplicità di O per C_{2n}; infine la F possiede una curva doppia (sia pur ridotta all'intorno di A), che viene proiettata dal punto A secondo un cono d'ordine $n-1$ ([21]).

Le superficie d'ordine $2n-4$ aggiunte ad F si spezzano in quel cono fisso (d'ordine $n-1$) ed in residue superficie φ_{n-3} d'ordine $n-3$: queste φ_{n-3} si spezzano in gruppi di $n-3$ piani passanti per la retta OA, essendo ellittiche le sezioni di F con questi piani ([22]).

Se la C_{2n} non ha altre singolarità oltre O, la F ha dunque il genere $n-2$.

Ulteriori singolarità della F possono corrispondere soltanto ad ulteriori punti multipli di C_{2n} oltre O. Se C_{2n} ha un punto multiplo B che influisce (sulla determinazione delle superficie aggiunte e quindi) sul genere di F, il piano che proietta B dalla retta OA si stacca da tutte

([21]) Cfr. la mia Nota *Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche*, § 5 (« Accad. dei Lincei », 1896) [questo volume, XIV].

([22]) Cfr. NOETHER, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde* (« Mathem. Annalen », Bd. 8); CASTELNUOVO, *Osservazioni intorno alla Geometria sopra una superficie* (Nota I, « Istituto lombardo », 1891).

le φ_{n-3}: la sua sezione con F costituisce una curva eccezionale di F rappresentata sul piano doppio dalla retta OB.

Dunque il piano doppio non può possedere altre curve eccezionali che rette proiettanti da O un punto multiplo della curva C_{2n}: ciò è d'accordo col fatto che il fascio delle rette per O deve rappresentare un fascio puro su F.

15. – Ciò posto supponiamo che la F abbia i generi uguali ad 1 e consideriamo la curva di diramazione C_{2n} del piano doppio su cui F è rappresentata, curva avente un punto $(2n-4)$-plo o $(2n-3)$-plo O.

Consideriamo sul piano doppio il sistema lineare di tutte le curvature razionali d'un certo ordine s assai alto, che hanno come $(s-1)$-plo il punto O, e passano semplicemente per gli altri (eventuali) ϱ punti multipli di C_{2n}. A questo sistema $|K|$ (di grado $2s-1-\varrho$) corrisponde su F un sistema lineare puro di grado $4s-2-2\varrho$, e quindi di genere $\pi = 2s - \varrho$ $(4s-2-2\varrho = 2\pi - 2)$.

Con una opportuna trasformazione di Jonquières del piano, che lasci fermo il fascio di rette O, il sistema $|K|$ può essere ricondotto ad uno dei seguenti tipi d'ordine minimo ([23]).

a) sistema $|K_r)$ costituito dalle curve d'un certo ordine r avente un punto base $(r-1)$-plo O ed un punto base semplice B (distinto da O);

b) sistema $|K_r|$ delle curve d'un certo ordine r avente un punto base $(r-1)$-plo O e λ punti base semplici infinitamente vicini ad O $(O \leqslant \lambda \leqslant r-1)$: si aggiunga che questi λ punti (ossia le λ tangenti fisse delle K_r in O) possono supporsi non coincidenti.

La trasformazione eseguita nel piano muta C_{2n} in una curva C_{2m} d'un certo ordine $2m$ nella quale intenderemo incluse, *una* volta, le curve fondamentali che, contate un numero dispari di volte, vengono a corrispondere a punti (semplici o multipli) di C_{2m}.

Il piano doppio con curva di diramazione C_{2n} viene trasformato nel piano doppio con curva di diramazione C_{2m}.

I punti multipli di C_{2m} che possono influire sul genere del piano doppio sono soltanto i punti base di $|K_r|$: infatti $|K_r|$ rappresenta un sistema puro e quindi una K_r non può incontrare fuori dei punti base una retta eccezionale per O, come è una retta che congiunga un punto multiplo di C_{2m} influenti sul genere del piano doppio.

Dunque i punti multipli di C_{2m} influenti sul genere (del piano doppio ossia) di F, sono, oltre O, il punto B nel caso *a*), i λ $(\geqslant 0)$ punti infinitamente vicini ad O sulle tangenti fisse delle K_r nel caso *b*).

Discutiamo ora separatamente i casi *a*) e *b*).

([23]) Guccia, *Generalizzazione di un teorema di Noether* (« Circolo di Palermo », t. I).

16. – Caso *a*). Il sistema $|K_r|$ ha il grado

$$r^2 - (r-1)^2 - 1 = 2r - 2\,,$$

sicchè il suo corrispondente su F ha il grado

$$4r - 4$$

e (poichè si tratta d'un sistema puro) ha il genere

$$\pi = 2r - 1 \qquad (2\pi - 2 = 4r - 4)\,.$$

Segue che sopra una K_r (considerata come immagine doppia d'una curva iperellittica di genere π su F) vi sono

$$2\pi + 2 = 4r$$

punti di diramazione, distinti.

Ora questi punti contano fra i $2rm$ punti d'intersezione della K_r con C_{2m}, dai quali bisogna togliere, debitamente contati, i punti d'intersezione assorbiti nelle singolarità di C_{2m}.

Anzitutto fra le due rm intersezioni di K_r con C_{2m}, ne cadono in O

$$(2m-4)(r-1)$$

oppure

$$(2m-3)(r-1)$$

secondochè O è $(2m-4)$-plo o $(2m-3)$-plo per C_{2m}: nel 1° caso quel numero va interamente tolto da $2rm$ perchè l'intorno di O non fa parte della curva di diramazione C_{2m}; all'opposto nel 2° caso gli $r-1$ punti di K_r infinitamente vicini ad O sono da considerarsi come punti di diramazione, e perciò pel nostro computo dobbiamo togliere da $2rm$ (non l'intero numero $(2m-3)(r-1)$ ma) soltanto

$$(2m-3)(r-1) - (r-1) = (2m-4)(r-1)\ :$$

si vede dunque che il risultato è lo stesso nei due casi.

Dopo aver tolto da $2rm$ il numero delle intersezioni di K_r con C_{2m}, assorbite in O, che non rappresentano punti di diramazione per K_r, bisogna ancora togliere il numero analogo relativo al punto B (base semplice per K_r).

Ora se denotiamo con ϱ la moltiplicità di B per C_{2m}, si ha che l'intorno di B figura o no come facente parte della curva di diramazione C_{2m} secondochè ϱ è dispari o pari: ciò si potrebbe anche verificare trasformando B in una curva. Segue che il numero delle intersezioni di K_r e C_{2m} assorbite in B, che non rappresentano punti di diramazione di K_r, è $\bar{\varrho}$, dove $\bar{\varrho}$ designa il massimo numero pari contenuto in ϱ.

Otteniamo dunque il numero dei punti di diramazione su K_r dato da

$$2\pi + 2 = 4r = 2rm - (2m - 4)(r - 1) - \bar{\varrho} .$$

Si ricava l'uguaglianza fra numeri interi

$$4 + \bar{\varrho} = 2m .$$

La discussione di essa è breve.

Il punto B non può avere per C_{2m} una molteplicità $\varrho > 4$ senza che da C_{2m} si stacchi la retta OB, e (nella peggiore ipotesi) non può avere una molteplicità $\varrho > 5$ senza che la OB si stacchi due volte da C_{2m}: ora la C_{2m} può bensì spezzarsi, ma non mai contenere parti multiple (giacchè queste si possono supporre tolte un numero pari di volte); si conclude che

$$\varrho \leqslant 5 , \qquad \bar{\varrho} \leqslant 4 .$$

D'altra parte, abbiamo già escluso dalla nostra discussione i casi in cui $2m \leqslant 6$ (n. 13), dunque vi è un solo modo di soddisfare alla predetta equazione in numeri interi, cioè prendendo

$$\bar{\varrho} = 4 , \qquad 2m = 8 .$$

Nel caso a) siamo dunque condotti ad un tipo di piano doppio avente come curva di diramazione una curva di 8° ordine dotata di due punti quadrupli o (ciò che corrisponde ad un caso particolare del precedente) dotato di un punto 5-plo e uno 4-plo.

17. – Caso b). Il sistema $|K_r|$ ha il grado

$$r^2 - (r - 1)^2 - \lambda = 2r - 1 - \lambda$$

sicchè il suo corrispondente su F ha il grado

$$4r - 2 - 2\lambda$$

ed (essendo puro) il genere

$$\pi = 2r - \lambda \qquad (2\pi - 2 = 4r - 2 - 2\lambda).$$

Segue che sopra una K_r (considerata come immagine doppia d'una curva iperellittica di genere π su F) vi sono

$$2\pi + 2 = 4r - 2\lambda + 2$$

punti di diramazione, distinti.

Vediamo di valutare in altro modo il medesimo numero.

La K_r incontra C_{2m} in

$$2rm$$

punti, di cui

$$(2m - 4)(r - 1) \qquad \text{o} \qquad (2m - 3)(r - 1)$$

sono riuniti in O, e (indicando con $\varrho_1\, \varrho_2 \ldots \varrho_\lambda$ le molteplicità per C_{2m} dei λ punti base di $|K_r|$ infinitamente vicini ad O)

$$\sum_1^\lambda \varrho_i$$

sono riuniti nei λ punti multipli di C_{2m} infinitamente vicini ad O.

Ora se O è $(2m - 4)$-plo per C_{2m} il suo intorno non deve riguardarsi come appartenente a C_{2m} e perciò le $(2m - 4)(r - 1)$ intersezioni di K_r che cadono in O debbono anzitutto esser tolte dal numero totale $2rm$ delle intersezioni di K_r e C_{2m}, nel computo dei punti di diramazione che cadono su K_r. Successivamente si deve togliere nello stesso modo da $2rm$ il numero ϱ_i per ogni punto ϱ_i-plo di C_{2m} infinitamente vicino ad O, avente una molteplicità pari; invece $\varrho_i - 1$ per ogni punto analogo di molteplicità dispari. Denotando ancora con $\overline{\varrho}_i$ il massimo numero pari contenuto in ϱ_i, si ha dunque (quando O è $(2m - 4)$-plo per C_{2m}) il numero dei punti di diramazione su K_r dato da

$$2\pi + 2 = 4r - \lambda + 2 = 2rm - (2m - 4)(r - 1) - \sum_1^\lambda \overline{\varrho}_i :$$

in questo caso si ha quindi l'equazione fra numeri interi

$$6 + \sum \overline{\varrho}_i = 2m + 2\lambda .$$

Supponiamo invece che O sia $(2m-3)$-plo per C_{2m}.

Nell'eseguire il nostro computo possiamo ancora considerare O come $(2m-4)$-plo, togliendo dunque anzitutto da $2rm$ il numero $(2m-4)(r-1)$, perchè ora ogni punto di K_r infinitamente vicino ad O conta come un punto di diramazione: se uno di questi punti (base per K_r) è ϱ_i-plo per C_{2m} e ϱ_i è pari si dovrà ancora in corrispondenza ad esso togliere ϱ_i da $2rm-(2m-4)(r-1)$; ma se ϱ_i è dispari, l'intorno del punto ϱ_i-plo deve riguardarsi come facente parte di C_{2m} e però come innanzi toglieremo dal numero precedente soltanto ϱ_i-1: dopociò veniamo a considerare in quel punto di K_r un punto di diramazione (appartenente all'intorno del punto ϱ_i-plo di C_{2m}) che va a sovrapporsi al punto di diramazione che ivi già si trova perchè quel punto appartiene all'intorno di O; ma siccome quando due punti di diramazione sono riuniti essi non contano più come un punto di diramazione, bisogna togliere ancora 2 dal numero precedente: dunque per ogni punto ϱ_i-plo di molteplicità dispari infinitamente vicino ad O si viene in definitiva a togliere $\varrho_i-1+2=\varrho_i+1$ dal numero delle intersezioni di C_{2m} con K_r, pel computo dei punti di diramazione su K_r. (Se a qualcuno facesse difficoltà il precedente ragionamento sui punti infinitamente vicini ad O, non ha che da trasformare in una curva il punto O, decomponendo così la singolarità di C_{2m} che ivi si trova). Possiamo esprimere complessivamente il resultato del computo ottenuto colle avvertenze precedenti, introducendo la notazione $\underline{\varrho_i}$ per indicare il minimo numero pari che contiene ϱ_i (dunque ϱ_i o risp. ϱ_i+1 secondochè ϱ_i è pari o dispari); allora si ha che il numero dei punti di diramazione su K_r è

$$2\pi+2=4r-2\lambda+2=2rm-(2m-4)(r-1)-\sum_1^\lambda \underline{\varrho_i}:$$

in questo caso si ha dunque l'equazione in numeri interi

$$6+\sum_1^\lambda \underline{\varrho_i}=2m+2\lambda .$$

Questa equazione non differisce da quella ottenuta pel caso in cui O è $(2m-4)$-plo per C_{2m} se non pel significato diverso di $\overline{\varrho}_i$, $\underline{\varrho_i}$ quando ϱ_i è dispari.

Procediamo alla discussione della nominata equazione fondamentale tra numeri interi, che scriveremo nella forma

$$6+\sum_1^\lambda x_i=2m+2\lambda .$$

Tenendo conto della possibilità che la curva C_{2m} si spezzi staccandosene *una* volta la retta che proietta da O un punto ϱ_i-plo, si ha, nel primo caso

$$\varrho_i \leqslant 5\,,$$

nel secondo caso

$$\varrho_i \leqslant 4\,,$$

dunque risp.

$$\overline{\varrho}_i \leqslant 4\,, \qquad \underline{\varrho_i} \leqslant 4\,,$$

ossia

$$x_i \leqslant 4\,.$$

D'altra parte si ha, risp. nei due casi,

$$\sum \varrho_i \leqslant 2m - 4\,, \qquad \sum \varrho_i \leqslant 2m - 3\,,$$

onde (nella peggiore ipotesi è sempre)

$$\sum x_i \leqslant 2m - 3 + \lambda \qquad (x_i \leqslant \varrho_i + 1).$$

Ponendo

$$\sum x_i = 2m + 3 + \lambda - x$$

dove $x \geqslant 0$, l'equazione fondamentale diventa

$$3 - x = \lambda\,,$$

da cui si deduce

$$\lambda = 0\,, \quad \text{o} \quad \lambda = 1\,, \quad \text{o} \quad \lambda = 2\,, \quad \text{o} \quad \lambda = 3\,;$$

ora le x_i (non nulle) essendo pari (ed avendosi $x_i \leqslant 4$) si ha

$$x_i = 2 \quad \text{o} \quad x_i = 4\,:$$

supporre che una x_i valga 2 o che essa manchi è indifferente rispetto all'equazione fondamentale

$$6 + \sum_1^{\lambda} x_i = 2m + 2\lambda\,:$$

potremo dunque prescindere dalle x_i uguali a 2; la loro eventuale presenza permetterebbe solo di aggiungere delle singolarità (non influenti sul genere del piano doppio) alla curva C_{2m}. Ciò posto avremo risp. pei 4 valori di λ

$$\sum x_i = 0\,, \qquad \sum x_i = 4\,, \qquad \sum x_i = 8\,, \qquad \sum x_i = 12\,.$$

Corrispondentemente l'equazione fondamentale ci dà

$$2m = 6\,, \qquad 2m = 8\,, \qquad 2m = 10\,, \qquad 2m = 12\,.$$

Siccome abbiamo già escluso il caso $2m = 6$, restano da esaminare i tre casi seguenti:

α) $$2m = 8\,, \qquad \lambda = 1\,.$$

Allora l'equazione fondamentale $6 + \sum x_i = 2m + 2\lambda$ ci dà

$$\sum x_i = x_1 = 4\ :$$

segue, secondochè O è 4-plo o 5-plo per $C_{2m} \equiv C_8$, risp.

$$\overline{\varrho_1} = 4 \quad \text{cioè} \quad \varrho_1 = 4 \quad (\text{essendo assurdo } \varrho_1 = 5)$$

o

$$\underline{\varrho_1} = 4 \quad \text{cioè} \quad \varrho_1 = 4 \quad \text{o} \quad \varrho_1 = 3\,.$$

Dunque la curva di 8° ordine C_8 ha due punti 4-pli infinitamente vicini oppure (caso particolare del precedente) un punto 5-plo O ed un punto 3-plo o 4-plo ad esso infinitamente vicino.

β) $$2m = 10\,, \qquad \lambda = 2\,.$$

Allora l'equazione fondamentale ci dà

$$\sum x_i = x_1 + x_2 = 8\,,$$
$$x_1 = x_2 = 4\,.$$

Si deduce che il punto O, 6-plo o 7-plo per $(C_{2m} \equiv) C_{10}$, deve essere 7-plo per esso, poichè altrimenti vicino ad un punto 6-plo vi sarebbero due punti 4-pli o 5-pli.

Si avrà quindi

$$x_i = \underline{\varrho_i} = 4 ,$$

e però

$$\varrho_i = 3 \quad \text{o} \quad \varrho_3 = 4 .$$

Dunque la curva C_{10} del 10° ordine ha un punto 7-plo e due punti tripli (distinti) infinitamente vicini, di cui (in particolare) uno può essere 4-plo.

γ)
$$2m = 12 , \qquad \lambda = 3 .$$

Allora dall'equazione fondamentale si trae

$$\sum x_i = x_1 + x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 = x_2 = x_3 = 4 .$$

La curva $(C_{2m} \equiv) C_{12}$ è del 12° ordine e (come innanzi si deduce che) il punto O è 9-plo (non 8-plo) per essa: accanto ad O si hanno tre punti tripli infinitamente vicini (distinti).

18. – Riassumendo concludiamo come già in principio avevamo enunciato:

I piani doppi coi generi ($p_g = p_n = P$) *uguali ad* 1 *rientrano tutti nelle* 4 *classi aventi per tipi:*

1) *il piano doppio con curva di diramazione del* 6° *ordine;*

2) *il piano doppio con curva di diramazione dell'*8° *ordine dotata di due punti 4-pli* (distinti o infinitamente vicini);

3) *il piano doppio con curva di diramazione di ordine* 10 *dotata di un punto 7-plo e di due punti 3-pli ad esso infinitamente vicini* (distinti);

4) *il piano doppio con curva di diramazione d'ordine* 12 *dotata di punto 9-plo e di* 3 *punti 3-pli ad esso infinitamente vicini* (distinti).

Si verifica facilmente che i nominati piani doppi hanno in generale i generi 1.

Ogni piano doppio coi generi uguali ad 1 può essere ricondotto ad uno dei 4 menzionati o ad un suo caso particolare mediante una trasformazione birazionale del piano.

F. ENRIQUES

Aggiunta alla Memoria del sig. Enriques in relazione ad un resultato enunciato nel n. 7.

Questa Nota è dedicata a giustificare il resultato sui sistemi lineari di curve piane, di cui il sig. ENRIQUES approfitta. Ricorrerò, a tal fine, a considerazioni, svolte in parte nella mia Memoria *Sulle superficie di genere zero* (« Mem. della Società dei XL », 1896).

Ivi è dimostrato (§§ 2-7) che se un sistema lineare $|C|\infty^r$ di curve piane di genere $\pi > 1$, è *irriducibile, semplice, privo di curve fondamentali proprie ed ha la serie caratteristica non speciale* (la quale ultima condizione non costituisce propriamente una restrizione, poichè se non si verifica per $|C|$, certo si verifica pel sistema aggiunto, e tanto a noi basta), allora anche il sistema ad esso aggiunto $|C'|$ possiede le stesse proprietà, fatta eccezione per i seguenti casi:

1) se tutte le curve di $|C|$ sono iperellittiche, poichè allora ogni curva di $|C'|$ si spezza in $\pi - 1$ curve razionali appartenenti ad un fascio;

2) se $|C|$ contiene un sistema ∞^{r-1} composto di curve iperellittiche, poichè in tal caso il sistema $|C'|$ non è semplice; esso si compone precisamente (l. c. § 13) di $\infty^{\pi-1}$ curve iperellittiche di genere $\pi - 2$ secantisi a due a due in $\pi - 2$ coppie della serie g_2^1 che ciascuna C' sostiene.

Se $|C'|$ non si trova nelle condizioni 1) o 2), si possono applicare ad esso i risultati enunciati per $|C|$; e così si può continuare costruendo i successivi aggiunti di $|C|$:$|C'|$, $|C''|$,... Poichè le curve che li compongono hanno ordini decrescenti, si arriva in fine ad un primo sistema $|C^{(i)}|$ il quale non soddisfa più alle proprietà di $|C|$:

1) sia perchè ogni curva di $|C^{(i)}|$ si compone di un certo numero ($\geqslant 1$) di curve razionali variabili in un fascio;

2) sia perchè $|C^{(i)}|$, pur essendo irriducibile, non è semplice, e si compone di ∞^{π_i+1} curve iperellittiche di genere π_i secantisi a due a due in π_i coppie di punti;

3) sia perchè $|C^{(i)}|$ è di genere $\pi_i \leqslant 1$, il qual caso però ricade nei precedenti, a meno che $|C^{(i)}|$ non sia un sistema almeno ∞^2 di curve razionali, od almeno ∞^3 di curve ellittiche.

Sicchè in sostanza, per giustificare il lemma che adopera il sig. ENRIQUES, rimane da approfondire il caso 2), e da dimostrare che esso è possibile soltanto per le reti di curve ellittiche ($\pi_i = 1$), per i sistemi ∞^3 di curve di genere 2 ($\pi_i = 2$) trasformabili in sistemi di sestiche con otto punti base, più (forse) in un caso che si riduce ad 1).

Determineremo a tal fine tutti i sistemi $|C|\,\infty^{\pi+1}$ di curve iperellittiche di genere π secantisi a due a due in π coppie della g_2^1 che ciascuna C sostiene; (ho tralasciato l'indice i per semplicità di scrittura).

Potremo supporre $\pi > 1$, trascurando il caso ben noto della rete di curve ellittiche, che si può ridurre sempre ad un sistema di cubiche con 7 punti base.

Mediante il sistema $|C|$ vien rappresentata sul piano una superficie F d'ordine π di $S_{\pi+1}$, contata due volte, e dotata di una curva di diramazione Λ di ordine $2\pi+2$. Ora una tale superficie è certo rigata, poichè la ipotesi che sia F una superficie di VERONESE (del 4° ordine di S_5) viene esclusa dal fatto che ognuna delle ∞^2 coniche della superficie verrebbe segata da Λ in 5 punti, e non in un numero pari di punti, come dovrebbe accadere.

Le generatrici di F (di ordine π) non possono esser segate dalla curva Λ (di ordine $2\pi+2$) in più di quattro punti; segue che quelle generatrici hanno per immagini sul nostro piano ∞^1 curve γ razionali od ellittiche formanti un fascio e bisecanti le curve di $|C|$.

Se le curve γ sono razionali, il sistema $|C|$ può trasformarsi in un sistema di curve di un certo ordine n dotate di un punto fisso $(n-2)$-plo; e quindi ogni curva del sistema aggiunto a $|C|$ si compone di più rette uscenti da quel punto multiplo; si ricade così in un caso già contemplato.

Supponiamo invece che esista un fascio di curve ellittiche γ bisecanti le curve C, e trasformiamo il fascio delle γ in un fascio di curve d'ordine $3r$ ($r \geqslant 1$) con 9 punti base r-pli (BERTINI, GUCCIA, JUNG,...). Il sistema $|C|$ si trasformerà in un sistema che rappresenteremo collo stesso simbolo, le cui curve avranno un certo ordine n e le molteplicità $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_9$ nei 9 punti base nominati.

La ipotesi che le curve ellittiche bisechino le C si traduce allora nella relazione

$$3nr - r\sum\alpha = 2$$

la quale ci dà intanto $r = 1$ o 2; però anche il valore $r = 2$ va escluso perchè in contrasto colle formole che dànno il genere π e il grado 2π del sistema $|C|$ in funzione dell'ordine n e delle molteplicità dei punti base. Rimane dunque

$$3n - \sum\alpha = 2\,. \tag{1}$$

Se però si suppone che il sistema $|C|$ sia ridotto all'ordine minimo, mediante trasformazioni cremoniane, alla formula (1) può essere aggiunta l'altra

$$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_l \leqslant n \tag{2}$$

per ogni combinazione i, j, l dei primi 9 numeri (perchè se la (2) non fosse verificata si riuscirebbe ad abbassare l'ordine n di $|C|$ colla trasformazione quadratica avente per punti fondamentali quei punti base del fascio di cubiche γ, che occupano i posti i, j, l). Ora un esame semplicissimo delle relazioni (1) e (2) tra i numeri interi n ed α conduce ai seguenti sistemi di soluzioni, dove k indica un numero intero:

a) $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_8 = k, \quad \alpha_9 = k-2, \quad n = 3k, \quad \pi = 2k-2 \qquad (k \geqslant 2)$

b) $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_7 = k, \quad \alpha_8 = \alpha_9 = k-1, \quad n = 3k, \quad \pi = 2k-1 \qquad (k \geqslant 2)$

c) $\alpha_1 = k+1, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_9 = k, \quad n = 3k+1, \quad \pi = 2k \qquad (k \geqslant 1)$

(il limite inferiore di k è fissato in guisa da ottenere sistemi di genere $\pi \geqslant 2$).

Rimane però da decidere quale tra i sistemi a), b), c) possa considerarsi come aggiunto di un sistema *semplice*; poichè tale condizione è fondamentale per noi. Ora si vede che uno qualsiasi $|C|$ dei sistemi a), b), c), il quale possegga *nove* punti base (di molteplicità $\geqslant 1$) proviene mediante aggiunzione da quel sistema dello stesso tipo, i cui caratteri si ottengono mutando k in $k+1$ nei valori dei caratteri di $|C|$. Ma allora il nuovo sistema, come $|C|$, è *non-semplice*; il passaggio di una sua curva qualsiasi per un punto generico trae di conseguenza il passaggio per un secondo punto collegato col primo. La cosa va diversamente invece, se $|C|$ possiede meno di 9 punti base, il che è possibile soltanto pel sistema a) quando si pone $k = 2$, vale a dire *pel sistema delle sestiche con otto punti base doppi*; poichè un tal sistema è aggiunto al sistema *semplice* delle curve di nono ordine con 8 punti base tripli. Concludiamo dunque che l'unico sistema dei tipi precedenti, il quale possa presentarsi tra i successivi aggiunti di un sistema irriducibile, semplice, privo di curve fondamentali proprie, è precisamente il sistema ∞^3 di curve di genere 2, che può trasformarsi birazionalmente nel sistema delle sestiche con 8 punti base doppi. E così il lemma di cui il sig. Enriques approfitta è pienamente giustificato.

Per incidenza si può notare che *ogni sistema di curve iperellittiche di genere* π (>1) *secantisi a due a due in* π *coppie della* g_2^1 *giacente sopra ciascuna di esse, può trasformarsi birazionalmente o in un sistema di curve di un certo ordine* n *dotate di un punto base multiplo d'ordine* $n-2$ (*più altri punti base semplici o doppi*), *oppure in uno dei sistemi* a), b), c) *sopra descritti.*

G. Castelnuovo

XVII.

SUR QUELQUES RÉCENTS RÉSULTATS DANS LA THÉORIE DES SURFACES ALGÉBRIQUES

par GUIDO CASTELNUOVO et FEDERIGO ENRIQUES

« Math. Ann. », Bd. XLVIII (1896),

pp. 241-316.

La *Géométrie sur une surface algébrique générale,* dont l'origine remonte à une remarque de CLEBSCH (1) et à un Mémoire fondamental de M. NOETHER (2), s'est enrichie, dans ces derniers temps, de nouveaux résultats, grâce aux recherches des géomètres français et italiens. Ces recherches ont un même point de départ dans le Mémoire cité de M. NOETHER, mais elles suivent deux directions différentes que nous allons exposer brièvement.

En France on a considéré surtout les fonctions transcendantes qui sont attachées à l'équation d'une surface algébrique. M. NOETHER avait déjà introduit dans l'étude des surfaces certaines intégrales doubles (à différentielles algébriques) qui restent partout finies, et qui jouent le même rôle que les intégrales abéliennes de première espèce relatives aux courbes algébriques. Quelques ans plus tard M. PICARD (3) a donné une nouvelle impulsion à cette théorie, en considérant, à côté des intégrales doubles, certaines intégrales simples de différentielles totales qui sont aussi dignes de remarque. Il a étudié en particulier les intégrales simples qui restent partout finies. Les surfaces les plus connues ne possèdent pas vraiment de telles intégrales; mais M. PICARD a indiqué des classes de surfaces, dont les propriétés remarquables dépendent précisement de la présence de fonctions transcendantes de l'espèce nommée. M. POINCARÉ avec une courte Note (4), et M. HUMBERT surtout avec plusieurs Mémoires im-

(1) « Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc. », 1868.

(2) *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens...,* I, II, « Math. Annalen », Bd. 2, 8, 1869, 1874.

(3) Voir les deux Mémoires: *Sur les intégrales de différentielles totales algébriques...,* « Journal de Mathém. », 4e s., t. I, 1885; *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques,* « Journ. d. Math. », 4e s., t. V; ainsi que plusieurs Notes dans les « Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc. », déc. 1884.

(4) « Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc. », déc. 1884.

portants ([5]), ont suivi la même direction, soit en approfondissant la théorie générale, soit en étudiant des classes particulières de surfaces ([6]). Mais le champ de recherches que M. PICARD a ouvert est loin d'être épuisé; car la question même de décider, en partant des caractères géométriques d'une surface, si la surface possède de telles intégrales simples, n'est pas encore résolue, d'une manière générale.

Les géomètres italiens, au contraire, se sont consacrés à l'étude des systèmes linéaires de courbes algébriques qui appartiennent à une surface algébrique, ou, en d'autres termes, à l'étude des fonctions rationnelles de trois quantités x, y, z liées par une rélation algébrique $f(x, y, z)=0$. C'était un ordre de recherches qui se présentait tout naturellement à leur attention; car en Italie, pendant les dernières années, on avait cultivé les deux théories auxiliaires qui servent de base aux développements nouveaux; à savoir *la géométrie sur une courbe algébrique*, et *la théorie des systèmes linéaires de courbes planes*.

La géométrie sur une courbe, qui a pris naissance dans les travaux immortels de RIEMANN (1857), a été développée plus tard sous la forme géométrique dans le Mémoire classique de MM. BRILL et NOETHER ([7]). Il restait pourtant encore à délivrer cette théorie des considérations projectives qu'on y faisait intervenir trop souvent; c'est ce qu'on a fait en Italie (SEGRE, CASTELNUOVO, ...) en raisonnant sur les courbes, sans faire attention ni à leurs ordres, ni aux espaces auxquels elles appartiennent, et en limitant l'usage des courbes adjointes, dont la considération peut être utile parfois, mais n'est point nécessaire pour le développement de cette théorie.

La théorie des systèmes linéaires de courbes planes, au point de vue des transformations birationnelles du plan, a commencé par les recherches bien connues de M. CREMONA (1863-1865) et de M. NOETHER (1870), et a été développée par les géomètres italiens CAPORALI, BERTINI, JUNG, GUCCIA, MARTINETTI, CASTELNUOVO, ... On a pu aborder par cette voie l'étude des propriétés du plan qui restent invariables par rapport aux transformations birationnelles; c'est donc la théorie d'une *classe* particulière de surfaces (à savoir des surfaces *rationnelles*), qui a pris naissance par ces recherches.

Mais on s'aperçut bientôt que la plupart des méthodes qu'on y avait employées pouvaient avoir une application plus étendue, car elles ser-

---

([5]) *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques*, « Journal de Mathématiques », 4[e] s., t. IX; *Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques*, « Journ. d. Math. », 4[e] s., t. X; ainsi que plusieurs Notes dans les « Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc. », 1893-95.

([6]) Consulter aussi sur ce sujet le Mémoire de M. NOETHER, *Ueber die totalen algebraischen Differentialausdrücke*, « Math. Annalen », 29, 1886.

([7]) *Ueber die algebraischen Functionen...*, « Math. Annalen », Bd. 7, 1873.

vaient aussi à l'étude de questions analogues sur les surfaces algébriques générales. On parvint ainsi à distinguer deux sortes de propriétés des systèmes linéaires de courbes situés sur une surface. Il y a en effet des propriétés qui ne dépendent pas de la surface, mais bien de la nature du système qu'on y envisage; tandis qu'il y a d'autres propriétés qui appartiennent à tous les systèmes linéaires de courbes situés sur la même surface, et dépendent seulement de la nature de celle-ci. Ce sont ces dernières propriétés qui offrent le plus grand intérêt, car elles fournissens des caractères d'une surface, qui se transportent à toutes les surfaces en correspondance birationnelle avec celle-là, des caractères *invariants* (par rapport aux transformations nommées). C'est à l'aide de telles remarques que l'on retrouva sous une nouvelle lumière les invariants introduits par M. NOETHER, et qu'on parvint à en ajouter d'autres encore.

Ainsi se forma un ensemble de recherches qui sont étroitement liées entre elles, bien qu'elles se trouvent à présent éparses dans plusieurs travaux publiés tout dernièrement en Italie ([8]).

Réunir ces résultats, les présenter dans l'ordre logique (qui n'est pas toujours l'ordre chronologique), les rapprocher à des propriétes connues des courbes et du plan, pour en faire ressortir tantôt les analogies, tantôt les différences; voilà le but que nous nous sommes proposé en écrivant cette Monographie. Il ne faut donc y chercher des résultat nouveaux, maix bien une exposition nouvelle de résultats déjà publiés. Ce travail pourtant ne paraîtra pas superflu à nos lecteurs, à ce que nous pensons. C'est que les Mémoires originaux que nous résumons ici, ne sont pas d'une lecture facile. Cela dépend de plusieurs causes. Tout d'abord il y a les difficultés qui proviennent de la théorie elle-même; la plupart des propriétés des surfaces sont bien loin de présenter les caractères de simplicité, qu'on trouve en de propositions analogues relatives aux courbes. Mais le rapprochement avec celles-ci est très utile pour mettre en lumière l'esprit des résultats nouveaux. Nous recourons sans cesse à ce moyen, et même, pour le rendre plus aisé, nous avons exposé d'avance les propositions fondamentales de la géométrie sur une courbe, dans l'ordre qui nous semblait préférable.

([8]) Voici en ordre chronologique les travaux principaux dont nous exposons ici les résultats, pour ce qui concerne la théorie générale des surfaces algébriques (pour la théorie des surfaces rationnelles nous donnerons ailleurs les citations relatives):

ENRIQUES, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, « Mem. dell'Acc. d. Scienze di Torino », s. 2a, t. 44, 1893 [questo volume, V].

ENRIQUES, *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche*, « Mem. della Società Italiana d. Scienze », s. III, t. X, 1896 [questo volume, XIII].

CASTELNUOVO, *Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, ibid., 1896.

CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero*, ibid., 1896.

ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere uno*, ibid., 1896 [questo volume, XVI].

Ainsi nous obtenons l'avantage d'exposer à nos lecteurs toutes les notions nécessaires pour aborder l'étude des surfaces. La lecture de cette Monographie n'exigera donc, nous le pensons, que la connaissance de ces notions générales de géométrie, qui sont familières même à ceux qui se sont consacrés à tout autre ordre de recherches.

Mais pour atteindre ce but, nous nous sommes bornés à présenter seulement les énoncés des théorèmes, et les considérations qui servent le mieux à les mettre en lumière; quant aux démonstrations, nous avons pensé qu'il valait mieux les supprimer tout à fait, en renvoyant aux ouvrages originaux le lecteur désireux de les connaître. C'est qu'on ne réussit pas, pour le moment, à exposer ces démonstrations de manière à éviter toute difficulté. La conception qui inspire ces raisonnements peut bien être simple, dans la plupart des cas; mais le développement exige qu'on envisage tant de cas particuliers, qu'on rebute tant d'objections, que le lecteur fatigué par ce morcellement de la démonstration, perd de vue l'ensemble des résultats. C'est un défaut qu'on peut reprocher d'ordinaire aux théories en formation; et bien souvent le progrès consiste dans l'introduction de certaines conceptions plus amples, de certaines locutions plus convenables, qui permettent d'embrasser par un seul regard un grand nombre de cas qui semblaient distincts.

Le moment n'est pas encore venu pour introduire de tels perfectionnements dans la théorie des surfaces. Ce qui importe à présent, c'est de surmonter les obstacles qu'on rencontre sur le chemin, c'est d'arriver au sommet qui reluit devant nous. S'il y a quelqu'un qui ne se hasarde pas à nous suivre sur une voie désagréable, eh bien qu'il attende! Cependant, nous l'espérons, il lira avec intérêt la description du paysage qui s'offre à nos regards, du point où nous sommes parvenus; il la trouvera dans cette Monographie, qui lui est consacrée.

Mais s'il y a des courageux qui désirent de nous suivre, ils trouveront dans les pages suivantes tous les renseignements pour le faire. Et ils seront récompensés de leur peine, car le champ de recherches est bien loin d'être épuisé, et la région qui reste à explorer est encore très vaste, et peut amener à de brillantes découvertes. Il faut pourtant se rappeler que ce n'est pas d'un seul point de vue qu'on peut embrasser un horizon si vaste. C'est au contraire par les efforts réunis de plusieurs travailleurs suivant des voies différentes, c'est par l'application savante de toutes les ressources que la géométrie et l'analyse mettent aujourd'hui à notre disposition, qu'on peut espérer d'approfondir la théorie des surfaces, et de l'enrichir de nouvelles découvertes.

Alors seulement cette branche sera digne de figurer à côté de la théorie admirable des fonctions algébriques d'une variable, dont la construction est une gloire des géomètres de notre siècle.

CHAPITRE I.

TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES. GENRE D'UNE COURBE ET D'UNE SURFACE D'APRÈS CLEBSCH ET M. NOETHER

1. - Transformations birationnelles.

La géométrie projective (théorie des substitutions linéaires et homogènes entre deux groupes de variables) a trouvé son extension la plus naturelle dans la théorie des transformations birationnelles entre deux variétés algébriques.

On sait bien comment ces transformations sont définies. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_r$, et $y_1, y_2, \ldots, y_s$ deux groupes de variables, que nous pouvons regarder comme les coordonnées homogènes d'un point x dans un espace linéaire X à $r-1$ dimensions, et d'un point y dans un espace Y à $s-1$ dimensions; établissons entre ces variables des relations de la forme

$$\varrho y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{1}$$

où les f_i sont des formes algébriques toutes du même degré dans les x, et ϱ est un facteur de proportion; on aura alors une *transformation rationnelle* entre l'espace X et une certaine variété algébrique de l'espace Y. À tout point général x de X correspond un (seul) point y de l'espace Y; tandis que x décrit dans son espace une ligne, ou surface,... algébrique F, le point y décrit en Y (en général) une ligne, ou surface, ... algébrique F' qui correspond à F. Tout point général y de F' peut provenir cependant d'un, ou de plusieurs (même d'infinis) points x. Si c'est le premier cas qui arrive, alors, à l'aide des (1) et des équations qui définissent la F en X, on peut exprimer à leur tour les variables x en fonctions rationnelles des y, par des relations de la forme

$$\sigma x_k = \varphi_k(y_1, y_2, \ldots, y_s) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{2}$$

Les (1) et (2) définissent une *correspondance*, ou *transformation birationnelle* entre F et F'.

En particulier, on peut avoir une transformation birationnelle (ou de CREMONA) entre deux espaces linéaires (ayant les mêmes dimensions);

les (1) et (2) définissent une telle transformation entre X et Y, si $r=s$, et si en outre l'on peut deduire les (1) des (2), et celles-ci de celles-là, pour *toutes* les valeurs des x et des y.

2. - Eléments exceptionnels d'une transformation.

En revenant aux variétés F et F' en correspondance birationnelle, il y a deux cas à distinguer, suivant que les F, F' sont des courbes, ou bien des variétés à plus d'une dimension. Dans le premier cas en effet, on a entre les courbes F, F' une correspondance biunivoque *sans exceptions* d'une nature essentielle. Mais si F, F' sont par exemple des surfaces (à deux dimensions), il peut bien exister sur F (ou F') des points simples (en nombre fini), à chacun desquels vont correspondre sur F' (ou F) tous les points d'une courbe [9]. Sur une surface, une courbe qui par une transformation birationnelle convenable peut être changée en un point simple d'une autre surface, se distingue, par bien de propriétés, des autres courbes de la première surface; nous la nommerons *courbe exceptionnelle.* Les courbes exceptionnelles (dans la plupart des cas) ne diffèrent pas des *ausgezeichnete Curven*, considérées par M. NOETHER [10]; c'est ce que nous verrons plus tard.

Supposons, en particulier, qu'au point P de F corresponde la courbe exceptionnelle P' de F'; et soit C une courbe quelconque de F passant par P. Les points de C, autres que P, correspondent aux points d'une courbe C' de F'; on pourrait vraiment regarder C' comme la courbe correspondante de C sur F. Mais d'ordinaire il convient de joindre à la courbe C', la courbe exceptionnelle P' (qui provient du point P de C), et d'envisager la courbe ainsi composée comme la transformée de C. C'est là une convention que nous allons respecter, en général, dans la suite.

3. - Répartition en classes des variétés algébriques.

Par rapport aux transformations birationnelles, les variétés algébriques, ayant un même nombre de dimensions, se répartissent en classes; nous dirons, avec RIEMANN, que deux variétés appartiennent à la même classe lorsqu'on peut établir une correspondance birationnelle entre elles. On

---

[9] La projection stéréographique d'une surface du second ordre sur un plan donne un exemple bien simple de telles courbes.

[10] Mém. cité, « Mathem. Annalen », 8, pag. 521.

aura donc, par exemple, à considérer la classe des *courbes rationnelles* (ou unicursales) qui peuvent être transformées birationnellement en une droite, la classe des *surfaces rationnelles* (ou unicursales, homaloïdes) qui sont en correspondance birationnelle avec un plan, etc.

Les variétés d'une même classe diffèrent entre elles, il est vrai, par leurs caractères projectifs (ordre, dimension de l'espace auquel elles appartiennent, ...); mais elles ont plusieurs propriétés communes, dont la recherche forme le sujet de la *Géométrie sur les variétés algébriques*; cette branche s'occupe donc des propriétés invariables par rapport aux transformations birationnelles. Il s'ensuit que lorsqu'on étudie une *classe* de variétés [irréductibles], on peut se rapporter toujours à une variété abstraite, générale, de la classe, sans faire attention du tout à ses caractères projectifs; on pourrait même dire qu'on envisage le *champ algébrique* dont les variétés de la classe (courbes, surfaces,...) sont des *images projectives*; il n'y aurait là pourtant qu'un nouveau mot, pas une conception nouvelle [11].

La considération de la variété générale d'une classe a ce grand avantage, qu'elle permet de faire abstraction de toutes les singularités de nature projective qu'une variété particulière peut présenter. Ainsi, dans la suite, lorsque nous parlerons des points de la variété générale d'une classe, nous allons supposer toujours qu'il s'agit de points *simples*; on n'exclut pas naturellement que ces points ne peuvent correspondre à des points multiples sur des variétés particulières de la classe; mais on affirme simplement qu'un point multiple est une particularité projective de quelque représentant de la classe, pas de la classe elle-même; c'est, pour ainsi dire, un défaut de l'image, pas du modèle.

On va trouver pourtant, dans la suite, quelques paragraphes où l'on envisage vraiment une variété donnée par ses caractères projectifs (une courbe *plane* avec ses points multiples, une surface *de l'espace ordinaire* d'ordre connu, etc.); c'est que ces paragraphes n'appartiennent pas proprement à notre théorie, mais à des théories auxiliaires. On pourrait même les supprimer, si l'on ne redoutait pas la complication qui s'ensuivrait.

4. - Genre d'une courbe et d'une surface algébrique.

Pour effectuer la répartition en classes, dont nous venons de parler, il faut connaître des caractères numériques qui gardent la même valeur pour toutes les variétés d'une même classe. On sait bien comment RIE-

---

[11] À ce point de vue l'on peut regarder l'étude d'une classe de variétés comme l'étude d'un *champ de rationalité* (d'après KRONECKER) où d'un *corps de fonctions algébriques* (d'après DEDEKIND et WEBER).

MANN, en étudiant au point de vue de l'*Analysis situs* la surface réelle qui représent les points (réels et imaginaires) d'une *courbe algébrique*, est parvenu au plus important de ces caractères, qu'il a nommé *genre de la courbe* (ou de la relation algébrique correspondante) ([12]). CLEBSCH et GORDAN, en exposant (1866) la même conception sous la forme géométrique, ont donné du genre la définition bien connue qui suit.

Soit C une courbe plane de l'ordre n; supposons par simplicité que C n'ait d'autres points multiples, en dehors de d points doubles [ordinaires]. Considérons les courbes d'ordre $n-3$ qui passent simplement par les d points nommés, courbes qu'on appelle *adjointes* à C; *le nombre des courbes adjointes qui sont linéairement distinctes est le genre p de C.*

A côté de cette définition *géométrique*, on peut donner une définition *numérique* de p. Il suffit de remarquer que le nombre des paramètres qui entrent d'une façon homogène dans l'équation d'une courbe de l'ordre $n-3$, assujettie à passer par d points donnés, est

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d \, .$$

On suppose vraiment ici que les d points doubles de C présentent autant de conditions *distinctes* aux courbes d'ordre $n-3$, que l'on contraint à passer par eux; cela n'est pas évident *a priori*, mais on a démontré plus tard (BRILL et NOETHER ([13])) que la supposition est toujours vérifiée, lorsque on se borne aux courbes irréductibles.

Même si l'on fait abstraction de cette remarque, il est bon d'observer que les deux définitions amènent également à des invariants d'une courbe plane; en effet, on a donné plusieurs démonstrations de l'invariance du genre, dont quelques-unes (RIEMANN, CLEBSCH et GORDAN,...) se rapportent à la première définition, d'autres (CREMONA, BERTINI, ZEUTHEN,...) à la seconde.

L'extension de ces définitions aux surfaces algébriques est immédiate, dans les cas les plus simples; CLEBSCH ([14]) et M. NOETHER ([15]) l'ont indiqué.

Soit F une surface algébrique d'ordre n de l'espace ordinaire; supposons que F n'ait d'autres singularités qu'une courbe double de l'ordre d ($\geqslant 0$) et genre π, et un certain nombre fini t ($\geqslant 0$) de points triples pour la surface, et triples aussi pour la courbe double nommée. Considérons maintenant les surfaces d'ordre $n-4$ qui passent simplement

---

([12]) On pourrait faire remonter la notion du genre au théorème d'ABEL, bien que ABEL lui-même ne parle pas expressément de caractères invariants.

([13]) *Ueber die algebraischen Functionen...*, « Math. Annalen », Bd. 7, 1873.

([14]) « Comptes Rendus de l'Acad. d. Sc. », déc. 1868.

([15]) Mémoire cité, *Zur Theorie...*, « Mathem. Annalen », 2, 8.

par la courbe double (et en conséquence deux fois, en général, par ses points triples), surfaces que nous appelerons *adjointes* à F; *le nombre de ces surfaces linéairement distinctes* est (d'après la démonstration de M. NOETHER) un caractère invariant (par rapport aux transformations birationnelles) de la surface F; on l'appelle le *genre géométrique* de F, et on le désigne par p_g.

Or, si nous remarquons qu'une surface d'ordre m *assez élevé* doit satisfaire à

$$md - 2t - \pi + 1$$

conditions pour contenir la courbe double de F, nous sommes portés (avec CAYLEY [16]) à former l'expression

$$p_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} - (n-4)d + 2t + \pi - 1,$$

dont la valeur est exactement p_g, si $m = n - 4$ est assez élevé pour que l'on puisse appliquer la formule qui précède. Que la dernière condition soit remplie ou non, l'*expression de p_n a toujours la propriété d'invariance*; c'est ce que MM. ZEUTHEN et NOETHER [17] ont montré. La même expression est parfaitement analogue à celle considerée ci-dessus en parlant des courbes planes; on lui a donné le nom de *genre numérique* de la surface F.

Mais ici s'arrête l'analogie avec les courbes planes; en effet nous ne pouvons plus affirmer l'égalité entre les valeurs de p_g et p_n; au contraire *il peut bien arriver que l'on ait $p_g \neq p_n$ et précisément $p_g > p_n$*. Par exemple une surface réglée ayant les sections planes de genre p, a (d'après CAYLEY [18]) $p_g = 0$, $p_n = -p$. On a porté plus tard d'autres exemples de surfaces avec $p_g > p_n$; nous y reviendrons dans la suite.

5. - Remarques sur les définitions qui précèdent.

M. NOETHER dans le Mémoire cité plusieurs fois, avance dans l'étude des surfaces, en considérant les courbes découpées sur F par les surfaces adjointes d'ordre $n - 4$. Nous ne le suivrons pas, pour le moment, dans cette direction; nous aimons mieux montrer quelques difficultés auxquelles amènent les définitions des genres d'une surface.

---

[16] *On the Deficiency of certain Surfaces*, « Mathem. Annalen », 3, 1871.

[17] ZEUTHEN, *Etude géométrique...*, « Mathem. Annalen », 4, 1871; NOETHER, *Zur Theorie...*, « Math. Annalen », 8, pag. 526.

[18] Mém. cité.

Nous nous sommes bornés en les rappelant, à considérer des surfaces ayant des singularités bien simples; on pourrait, vraiment, envisager aussi des cas plus compliqués, mais il s'en faut de beaucoup que l'on puisse toujours préciser d'une manière directe le comportement d'une surface adjointe dans un point singulier de la surface donnée ([19]). On n'est donc pas en mesure de définir le genre numérique d'une surface ayant des singularités supérieures, ni par suite de montrer dans ce cas la propriété d'invariance de p_n. Ce serait bien mieux si l'on pouvait donner de p_n, et même de p_g, une telle définition qui ne dependît pas des singularités de la surface considérée, et qui fît ressortir sur le champ l'invariance de ces caractères, et le lien entre eux. C'est ce que nous nous proposons d'obtenir. Mais pour plus de clarté il convient de partir des notions les plus simples, et de montrer comment la théorie des courbes et des surfaces algébriques peut se reconstruire sous un unique point de vue.

Chapitre II.

SÉRIE LINÉAIRE DE GROUPES SUR UNE COURBE. SYSTÈME LINÉAIRE DE COURBES SUR UNE SURFACE

6. - Série linéaire sur une courbe.

Dans l'étude d'une *classe* de variétés algébriques, le plus grand intérêt appartient aux *fonctions rationnelles* des équations qui définissent la classe.

En nous bornant, pour le moment, aux courbes, si

$$f(x, y) = 0$$

est l'équation d'une courbe plane quelconque de la classe, à toute *fonction rationnelle* $R(x, y)$ de x et y (liées par la $f = 0$) correspond une *série linéaire* ∞^1 de groupes de points sur la courbe; chaque groupe de la série se compose des points (en nombre fixe) où la R prend une valeur arbitrairement donnée, qui change d'un groupe à l'autre. Le nombre n

---

([19]) La méthode analytique proposée à cet effet par M. Noether ne fournit pas une définition directe, permettant le calcul de p_n; car on doit recourir à une transformation de la surface. Voir à ce sujet Noether, « Göttinger Nachrichten », 1871, « Mathem. Annalen », 29, ainsi que Zeuthen, *Revision et extension des formules numériques...*, « Mathem. Annalen », 10, pag. 544, 1876.

des points de chaque groupe est appelé l'*ordre* de la R ou de la série; celle-ci est désignée, d'ordinaire, par g_n^1. On peut dire aussi que les groupes de g_n^1 sont les groupes des zéros des fonctions rationnelles représentées par l'expression $R(x, y)+C$, où C est un paramètre; toutes ces fonctions ont les mêmes pôles. Plus généralement, considérons plusieurs fonctions rationnelles de notre courbe,

$$R_1(x, y)\,, \qquad R_2(x, y)\,, \qquad \ldots, \qquad R_r(x, y)\,,$$

ayant toutes les mêmes n pôles, et n'étant pas liées par aucune relation linéaire à coefficients constants; formons la fonction

$$\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \ldots + \lambda_r R_r + C$$

qui dépend des paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, C$; le groupe des zéros de celle-ci décrit (lorsque on fait varier les paramètres) *une série linéaire* g_n^r *d'ordre* n, *et dimension* r; r points généraux de la courbe entrent dans un groupe de g_n^r, et dans un seul. Le groupe des pôles appartient aussi à la série, et ne présente aucune particularité dans celle-ci. Il est facile maintenant de définir la plus ample série linéaire d'ordre n, à laquelle appartient un groupe de n points donnés, ou, comme nous dirons, la *série complète* (*Vollschaar*) qui est déterminée par ce groupe. Il suffit en effet de considérer *toutes* les fonctions rationnelles d'ordre n, qui ont leurs pôles dans ce groupe; les groupes des zéros de ces fonctions forment la série demandée. Il est clair que la dimension de la dernière série ne peut surpasser n; si elle atteint cette valeur, la courbe dont il s'agit est rationnelle, car dans le cas contraire on ne saurait fixer arbitrairement les zéros et les pôles d'une même fonction rationnelle.

Les mêmes considérations peuvent être présentées aussi sous la forme géométrique ([20]). Soit C une courbe algébrique (plane ou de l'espace ordinaire, ou d'un hyperespace); découpons-la par un système linéaire ∞^r ($r \geqslant 0$) de variétés (courbes, surfaces,...):

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_{r+1} f_{r+1} = 0\,,$$

où les f sont des formes algébriques toutes du même degré (à trois,

---

([20]) Ainsi que nous l'avons dit dans l'introduction, nous présentons ici la théorie géométrique des séries linéaires (qui est due à MM. BRILL et NOETHER, Mém. cité) suivant le plan adopté dans quelques travaux italiens. On trouvera les développements et les citations relatives dans la Monographie de M. SEGRE, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico...*, « Annali di Matematica », s. II, t. XXII, 1894. Dans le même volume on pourra aussi consulter avec profit une Monographie de M. BERTINI, où le même sujet est exposé au point de vue de BRILL et NOETHER.

quatre,... variables). Si chaque f a n points d'intersection avec la C, et s'il n'y a dans le système aucune variété qui contient la C, les groupes des intersections formeront une série linéaire g_n^r. Plus généralement si avec les groupes de la g_n^r nous formons des groupes de $n \pm n'$ points, en ajoutant aux premiers groupes les mêmes n' points fixés arbitrairement sur C, ou en les retranchant s'ils entrent dans chaque groupe de g_n^r, nous dirons que les nouveaux groupes forment une série linéaire $g_{n\pm n'}^r$.

Les variétés f qui nous ont permis de construire la série g_n^r ne sont pas pourtant liées avec elle (au point de vue de la géométrie sur la courbe), et n'entrent pas du tout dans l'étude de la série. On peut bien construire celle-ci par d'autres systèmes de variétés, soit sur la même courbe C, soit sur une courbe C' de la même classe (car une transformation birationnelle entre C et C' change la g_n^r en une g_n^r de C').

On peut même définir la série linéaire g_n^r sur une courbe algébrique quelconque, sans mentionner expressément les variétés qui servent à la découper. En effet *c'est une g_n^r tout système ∞^r de groupes de n points sur la courbe, dont les groupes dépendent rationnellement de r paramètres, de manière que la condition de contenir un point arbitrairement fixé sur la courbe se traduise par une relation linéaire entre les paramètres.* Il s'ensuit naturellement que r points généraux de la courbe définissent un groupe; mais nous verrons tout à l'heure comment on peut aussi (avec quelques restrictions) tirer les prémisses de la conclusion.

Lorsqu'une série linéaire g_n^r $(r \geqslant 0)$ est donnée sur une courbe, il peut se faire qu'il existe sur la même courbe une nouvelle série g_n^s du même ordre et de dimension $s > r$, qui contienne tous les groupes de g_n^r, et par suite la g_n^r elle-même; il peut arriver au contraire qu'une telle série g_n^s n'existe pas. Or on dit *qu'une série est complète, lorsqu'elle n'est pas contenue dans une autre série du même ordre et de dimension supérieure;* la série est *incomplète* dans le cas contraire ([21]).

Dans ce dernier cas, en formant des séries de l'ordre n et de plus en plus amples, qui contiennent une série incomplète g_n^r donnée, on parviendra nécessairement à une série g_n^s $(r < s \leqslant n)$ complète contenant celle-là. Or on démontre que cette dernière série ne dépend pas du procédé qu'on suit pour la construire; elle dépend seulement de la série g_n^r d'où l'on part. En d'autres termes:

Une série linéaire g_n^r $(r \geqslant 0)$ ou bien est complète, ou bien elle est contenue dans une série complète du même ordre n, laquelle est entièrement déterminée par la g_n^r ([22]).

([21]) On voit bien que cette définition est parfaitement d'accord avec celle que nous avons donnée, en partant de considérations analytiques.

([22]) SEGRE, l. c., § 14.

Il s'ensuit par exemple que *si d'une série complète* g_n^r *on déduit une nouvelle série* $g_{n-\nu}^\varrho$ *en imposant aux groupes de celle-là la condition de contenir* ν *points quelconques de la courbe, et en les supprimant ensuite dans ces groupes, la nouvelle série sera encore complète.* On l'appelle *série résiduelle* des ν points par rapport à g_n^r; sa dimension ϱ est égale à $r-\nu$, ou supérieure, selon que les ν points présentent des conditions toutes indépendantes, ou non, aux groupes de g_n^r qui les contiennent.

Ce sont les séries complètes qui offrent le plus grand intérêt. Toutefois la théorie des surfaces va nous amener souvent à considérer aussi des séries incomplètes. Un caractère d'une telle série g_n^r, auquel il faut avoir regard, c'est la différence $s-r$ que l'on obtient en retranchant la dimension de notre série de la dimension de la série complète g_n^s qui contient celle-là. Nous appelons cette différence le *défaut* (*deficienza, difetto di completezza, Defect*) de la g_n^r.

Remarque. – Sur la définition d'une série linéaire on peut faire une remarque, qui, du reste, n'a pas d'importance pour la suite de notre Monographie. Appelons *involution d'ordre* n *et dimension* r sur une courbe algébrique tout système algébrique de ∞^r groupes de n points, tels que r points généraux de la courbe entrent dans un seul groupe du système. Alors nous pouvons dire que toute série linéaire est une involution; sera-t-il vrai aussi le théorème réciproque? Pas toujours, car il y a des involutions ∞^1 qui ne sont pas linéaires; celles, par exemple, qui sont découpées par les génératrices d'une surface réglée irrationnelle sur les courbes appartenantes à la surface. Mais, *en dehors* des involutions ∞^1, et *des involutions* ∞^r *dont tout groupe est formé par* r *groupes arbitraires d'une involution* ∞^1 (d'ordre $n \geqslant 1$), on démontre que *toute involution de dimension* >1 *est une série linéaire* ([23]). On a donc là une nouvelle définition de ces séries.

7. - Système linéaire de courbes sur une surface.

Les fonctions rationnelles d'une équation algébrique à deux variables nous ont portés à considérer les séries linéaires sur une courbe; de même, en partant d'une équation à trois variables, on parviendrait à envisager les systèmes linéaires de courbes sur une surface.

Pour les définir au point de vue géométrique, il suffit de considérer une surface algébrique F (de l'espace ordinaire ou d'un hyperespace) et

---

([23]) Ce théorème a été donné en même temps (juin 1893) par MM. HUMBERT (« Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc. »; voir aussi « Journal de Mathématiques », 4e série, t. X) et CASTELNUOVO (« Atti dell'Accad. d. Sc. di Torino »).

un système linéaire de variétés (à deux, ... dimensions)

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_{r+1} f_{r+1} = 0 ;$$

les courbes que ces variétés découpent sur la F forment un *système linéaire* dont la *dimension* est r, si aucune des variétés nommées ne contient la F.

Au sujet des variétés f, il peut se faire qu'elles contiennent une même courbe fixe de F, courbe qu'on est libre de regarder comme faisant partie de la courbe générale du système, ou bien comme étrangère à celle-ci (qui alors se réduira à la partie variable de l'intersection fF). Il peut arriver encore que les f passent par des points fixes de F (en dehors des courbes fixes); ces points, en nombre fini, qui appartiennent à toutes les courbes du système, sont appelés *points-base* de celui-ci.

Un système linéaire ∞^r de courbes sur une surface a la propriété que par r points généraux de la surface passe une seule courbe du système. Cette propriété peut même servir de définition pour un système linéaire de dimension $r > 1$. Il existe, c'est vrai, des systèmes pas linéaires ∞^1 de courbes satisfaisant à la condition que par tout point général de la surface passe une seule courbe du système; *ce sont les faisceaux irrationnels*, dont le système des génératrices d'une surface réglée irrationnelle fournit un exemple bien simple. *Mais tout système ∞^r, avec $r > 1$, dont une seule courbe est entièrement déterminée par r points [généraux] de la surface, est un système linéaire, si l'on exclut seulement le cas où la courbe générale du système est composée par plusieurs courbes d'un faisceau irrationnel* ([24]).

La courbe générale d'un système linéaire peut être *irréductible*, ou bien se composer de plusieurs parties; dans le premier cas on dit que le système est *irréductible*, et *réductible* dans le second cas. L'étude de ce dernier cas se réduit au premier (le plus intéressant) à l'aide du théorème:

La courbe générale d'un système linéaire réductible ∞^r est formée:

1) *ou bien par une partie fixe (commune à toutes les courbes du système), jointe à une courbe qui varie dans un système linéaire irréductible ∞^r*;

2) *ou bien par plusieurs ($\geqslant r$) courbes qui appartiennent à un même faisceau (rationnel ou non), auxquelles peuvent s'ajouter parfois des parties fixes.*

L'exclusion des systèmes réductibles, qui rendrait plus simples nos considérations, n'est pas toujours possible; car il y a des opérations sur

([24]) ENRIQUES, *Una questione sulla linearità...*, « Rendic. della R. Accad. d. Lincei », luglio 1893 [questo volume, III]; la démonstration est rapportée avec quelques simplifications dans la Monographie citée de M. SEGRE, n. 27.

les systèmes linéaires qui, même en partant d'un système irréductible, peuvent porter à des systèmes réductibles. Mais, à l'aide de conventions appropriées, on peut réunir sous un même énoncé la plupart des propriétés des uns et des autres systèmes.

Bornons-nous, pour le moment, aux systèmes irréductibles [infinis]; soit $|C|$ un tel système, C sa courbe générale.

Les caractères les plus importants du système (qui restent invariables par les transformations birationnelles de la surface) sont les suivants:

1) la *dimension* $r(\geqslant 1)$ de $|C|$;

2) le *degré* n, c'est-à-dire le nombre des intersections variables de deux courbes générales du système (pour $r=1$, on a $n=0$).

3) le *genre* π, qui est le genre de la courbe C.

On a aussi à considérer souvent une série linéaire qui est liée invariablement avec le système $|C|$, et qui va jouer dans la suite un rôle important; c'est la *série caractéristique* g_n^{r-1}, qui est découpée sur une C par les autres courbes de $|C|$ (25). Ici l'on a $r-1 \leqslant n$, d'où l'on conclut que la dimension d'un système irréductible ne peut surpasser le degré augmenté d'une unité.

Remarque. – La propriété d'un système $|C|$, situé sur une surface F, d'être réductible ou irréductible, ainsi que les caractères r, n, π de $|C|$, se transportent sans modifications à un système $|C'|$ d'une surface F', lorsqu'il y a une transformation birationnelle qui change F en F' et $|C|$ en $|C'|$. Toutefois, pour que cette remarque subsiste sans exceptions, il faut faire la convention suivante. Il peut arriver qu'un point-base P de $|C|$ sur F, ayant l'ordre $i \geqslant 1$ pour la courbe C générale (point que nous supposerons simple pour F), donne, par la transformation, une courbe exceptionnelle P' de F'. D'après le n. 2, on devrait regarder cette courbe P', comme faisant partie de la courbe C' transformée de C; mais alors $|C'|$ serait réductible, lors même que $|C|$ ne l'est pas. Pour éviter le désaccord on convient dans ce cas, de faire abstraction de la courbe P' (correspondante à un point-base de $|C|$), et de regarder C' comme le lieu des points correspondants aux points de C, excepté le point P. On va respecter au contraire la règle du n. 2 lorsque P (qui se transforme en la courbe P') n'est pas un point-base de $|C|$, mais bien un point général de F.

Outre l'exemple que nous avons porté, il y en aurait d'autres analogues à discuter. Nous n'y insistons pas ici; le lecteur qui voudra appro-

(25) L'importance de cette série dans l'étude des systèmes linéaires de courbes planes a été remarquée par MM. SEGRE (*Sui sistemi lineari...*, « Rendic. Circolo Mat. di Palermo », tomo I, 1887) et CASTELNUOVO (*Ricerche generali sopra i sistemi lineari...*, « Memorie dell'Acc. d. Sc. di Torino », s. II, t. 42). Quant à la considération de cette série sur les surfaces on n'a qu'à consulter les travaux des MM. ENRIQUES et CASTELNUOVO, cités dans l'introduction.

fondir ces questions, pourra le faire ailleurs ([26]); il verra pourtant de ces quelques mots, qu'il y a dans la théorie des surfaces des difficultés et des distinctions qu'on ne réussit pas à éviter.

8. - Systèmes linéaires complets.

Si nous nous proposons de transporter aux systèmes linéaires sur une surface la notion de série complète établie pour une courbe, nous rencontrons tout d'abord une distinction qui ne se présentait pas alors. En effet, si l'on cherche un système $|D|$ qui contienne le système donné $|C|$, il faut fixer quel est le caractère de $|C|$ qui doit se transmettre au nouveau système. On peut exiger que le genre π seulement reste invariable; mais on peut aussi exiger que ce soit le degré n (et par suite le genre) qui ne change pas. Bien que la première condition soit de nature plus générale que la seconde, c'est à celle-ci qu'il faut assigner plus d'intérêt; le progrès de la théorie des surfaces l'a montré. Par conséquent nous dirons qu'*un système linéaire irréductible de courbes est complet* (*par rapport au degré*), *lorsqu'il n'y a sur la surface d'autre système du même degré et de dimension supérieure, qui contienne le premier système* ([27]).

En voici un exemple fort simple. Considérons sur un plan le système linéaire de toutes les courbes ayant des multiplicités données en certains points-base; c'est un système *complet*. En d'autres termes: *un système linéaire de courbes planes entièrement défini par ses points-base est complet* ([28]).

La définition que nous venons de donner ci-dessus, peut se présenter d'une manière plus générale, qui permet de l'étendre aussi aux systèmes réductibles. À cet effet il faut expliquer d'abord la locution: *une courbe C_0* (*simple ou composé*) *est contenue totalement dans un système $|C|$ donné.*

Cela revient à dire que la courbe C_0 est par elle-même *une* courbe de $|C|$ (on exclut ainsi qu'elle soit *une partie* d'une telle courbe), et en outre que C_0 a le même ordre de multiplicité de la courbe générale de $|C|$ en tout point-base du système. Pareillement on dit qu'un système est contenu *totalement* dans un autre, lorsque la courbe générale du premier

---

([26]) ENRIQUES, *Introduzione...*, cap. I.

([27]) La notion de système complet (par rapport au degré, ou *sistema normale*) a été introduite par M. ENRIQUES (*Ricerche di geometria...*, I, 2; *Introduzione...*): l'extension aux variétés ∞^r se trouve dans la Monographie citée de M. SEGRE (n. 26). M. ENRIQUES dans le premier Mémoire parle aussi des systèmes complets par rapport au genre, qu'il appelle *sistemi completi*. Nous n'y recourons pas dans ce Mémoire.

([28]) Si parmi les points-base il y en a des simples, en faisant abstraction de ceux-ci l'on obtient un système plus ample que le système donné, qui a pourtant le même genre de celui-ci, mais le degré supérieur. On voit donc qu'un système complet par rapport au degré peut bien n'être pas complet par rapport au genre.

système est contenue totalement dans le second, et les points-base de celui-ci sont aussi les points-base de celui-là. On démontre alors facilement que deux systèmes dont l'un est contenu totalement dans l'autre, ont le même *degré*; et *viceversa*, si de deux systèmes ayant le même degré, l'un est contenu dans l'autre, on peut affirmer qu'il y est contenu *totalement* ([29]). Il résulte que la définition de système complet peut maintenant s'énoncer comme il suit:

Un système linéaire est complet s'il n'est pas contenu totalement dans un autre système.

Sous cette forme la définition a une signification, et montre ce que l'on doit entendre par *système complet*, lors même que le système donné est réductible, ou s'il a la dimension *un* ou *zéro*; dans ces derniers cas on doit désigner quels sont les points qu'il faut regarder comme points-base du système complet.

C'est dans ce sens qu'il faut entendre le théorème suivant, qui est parfaitement analogue à un théorème sur les séries linéaires ([30]):

Tout système linéaire ∞^r $(r \geqslant 0)$ *est complet, ou bien il est contenu totalement dans un système complet qui est entièrement déterminé par celui-là.*

On a encore cet autre théorème qui rappelle aussi un théorème sur les séries:

Si d'un système linéaire complet on déduit un nouveau système en imposant aux courbes du premier la condition de passer par des points fixes avec des ordres de multiplicité donnés, le dernier système est aussi complet.

Dans la suite nous allons considérer, autant que possible, des systèmes complets.

9. - Opérations élémentaires sur les séries et sur les systèmes de courbes.

Nous appelons par ce nom les opérations d'addition et de soustraction des séries et des systèmes, que nous allons définir; elles correspondent à la multiplication et à la division des fonctions rationnelles qui appartiennent à un même champ de rationalité.

Soient d'abord deux séries linéaires complètes g_m^q, g_n^r sur une même courbe; formons tous les groupes de $m+n=p$ points que l'on obtient en réunissant un groupe arbitraire de g_m^q à un groupe arbitraire de g_n^r; les groupes ainsi formés appartiennent, on le démontre facilement, à une même série complète g_p^s, que l'on appelle *somme des deux séries données*. On n'exclut pas le cas où les deux séries g_m^q, g_n^r coïncident; on

---

([29]) ENRIQUES, *Introduzione...*, n. 7.
([30]) ENRIQUES, *Introduzione...*, n. 11.

parvient alors à la série *double* d'une série donnée. Et de même l'on définit la série somme de plusieurs séries, et la série multiple (k-uple) d'une série donnée ([31]).

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'opération inverse, la soustraction des séries, autant qu'elle est possible. Considérons à cet effet deux séries complètes g_p^s, g_n^r $(p > n)$ sur la courbe, et supposons qu'un certain groupe G_n de la seconde série soit contenu dans ∞^q groupes $(q \geqslant 0)$ de la première. Les groupes de $p - n = m$ points qui restent, forment comme nous savons, une série complète g_m^q *résiduelle* de G_n par rapport à g_p^s. Or cette série g_m^q a une propriété remarquable; en effet elle est résiduelle (par rapport à g_p^s) non seulement de G_n, mais aussi de tout autre groupe de g_n^r. On dit par conséquent que g_m^q *est la série résiduelle de* g_n^r *par rapport à* g_p^s; mais l'on voit de même que g_n^r, à son tour, est résiduelle de g_m^q par rapport à g_p^s; la dernière série est la somme des deux premières. Cette propriété donne lieu à l'énoncé qui suit ([32]):

Deux séries complètes g_p^s, g_n^r étant données sur une même courbe, si un groupe de la g_n^r est contenu dans quelque groupe de la première série, il en est de même pour tout autre groupe de la g_n^r; il existe alors une troisième série g_m^q, entièrement déterminée, qui additionnée à la seconde g_n^r, donne la première série g_p^s; les deux séries g_m^q, g_n^r sont résiduelles l'une de l'autre par rapport à g_p^s.

À ce théorème l'on pourrait donner le nom de *théorème du reste* pour les séries; ce nom cependant a été déjà adopté par MM. Brill et Noether pour désigner un théorème qui a bien d'analogie avec le précédent, mais qui comprend aussi d'autres notions dont nous allons parler plus tard.

Venons maintenant aux systèmes linéaires de courbes sur une surface; l'analogie nous permet d'étendre sur le champ les résultats qui précèdent. Si $|C_1|$ et $|C_2|$ sont deux systèmes complets de courbes sur une même surface, les courbes $C_1 + C_2$, que l'on peut former en réunissant deux courbes prises arbitrairement dans les deux systèmes, appartiennent à un même système complet déterminé $|C| = |C_1 + C_2|$ qui s'appelle *somme de* $|C_1|$ *et* $|C_2|$. En particulier on peut parler du système *double, triple, ...* d'un système donné.

Partons à présent du système $|C|$, et soit C_1 une courbe qui entre dans quelque courbe (réductible) de $|C|$; les courbes C_2 qui avec la C_1 donnent lieu à des courbes de $|C|$ forment un système complet, $|C_2|$, *ré-*

([31]) Segre, *Introduzione...*, n. 59. Vraiment on entendait quelques fois par *somme de deux séries* g_m^q, g_n^r (complètes, ou non) la série d'ordre $m + n$ et de la plus petite dimension, qui contient les groupes composés d'un groupe de g_m^q et d'un groupe de g_n^r (*voir* Castelnuovo, *Sui multipli di una serie lineare...*, « Rendic. Circolo Mat. di Palermo », t. VII). Mais dans cette Monographie nous adoptons la définition exposée ci-dessus.

([32]) Segre, *Introduzione...*, n. 58.

siduel de la C_1 *par rapport à* $|C|$. Or, si la C_1 appartient à un système complet $|C_1|$ (déterminé par elle), on démontre que $|C_2|$ est aussi résiduel (par rapport à $|C|$) de toute autre courbe de $|C_1|$; c'est *le système* $|C_2|=|C-C_1|$ *résiduel de* $|C_1|$ *par rapport à* $|C|$, de même que $|C_1|$ est résiduel de $|C_2|$ par rapport à $|C|$. On a donc le théorème (33):

Si un système complet $|C|$ *contient une courbe d'un second système complet* $|C_1|$, *le premier système contient toute courbe du second; il existe alors un système complet* $|C_2|$, *entièrement déterminé, tel que* $|C|=|C_1+C_2|$; *chacun des deux systèmes* $|C_1|$ *et* $|C_2|$ *est résiduel de l'autre par rapport à* $|C|$.

Il faut remarquer pourtant que même si $|C|$ et $|C_1|$ sont supposés irréductibles, il peut bien se faire que $|C_2|=|C-C_1|$ soit réductible.

Pour terminer ces considérations sur le système somme de deux systèmes donnés, nous ferons connaître ici deux relations bien simples, auxquelles il faut pourtant recourir souvent dans les recherches sur les surfaces. Ces formules expriment le degré n et le genre π du système somme $|C|=|C_1+C_2|$ à l'aide des caractères analogues n_1, π_1 et n_2, π_2 des deux systèmes $|C_1|$ et $|C_2|$; on a précisément

$$n = n_1 + n_2 + 2i\,,$$
$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1\,,$$

où i désigne le nombre des intersections variables d'une C_1 avec une C_2. On suppose ici que $|C_1|$ et $|C_2|$ sont irréductibles; mais il est utile de remarquer que, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait de même définir le genre et le degré des systèmes réductibles de sorte que les relations précédentes fussent encore vraies (34).

(33) Enriques, *Introduzione...*, n. 13.
(34) Enriques, *Introduzione...*, nn. 15, 16.

Chapitre III.

COURBES ADJOINTES À UNE COURBE PLANE. SURFACES SOUS-ADJOINTES À UNE SURFACE DE L'ESPACE ORDINAIRE

Dans le Chapitre précédent nous avons considéré des séries complètes et des systèmes complets de courbes, mais nous n'avons pas indiqué le moyen de *completer* une série ou un système donné. C'est ce que nous allons faire maintenant, en nous bornant (dans ce Chapitre) aux séries situées sur les courbes *planes*, et aux systèmes de courbes sur les surfaces de *l'espace ordinaire*. Tous les autres cas peuvent se ramener à ceux-ci, à l'aide d'une transformation birationnelle convenable de la courbe ou de la surface donnée.

10. - Courbes adjointes à une courbe plane.

Soit d'abord C une courbe *plane* de l'ordre m, qui aura en général des points multiples. On appelle *courbe adjointe* à C une courbe qui passe $\alpha - 1$ fois par tout point multiple d'ordre α de la courbe C ($\alpha = 2, 3, \ldots$) [35]. Les courbes adjointes à C d'un ordre donné (qui existent certainement si cet ordre est assez élevé) forment un système linéaire (complet) de courbes planes. Or ce système a une propriété bien remarquable, d'où s'ensuit l'application des courbes adjointes à la théorie des séries linéaires. En effet [36]:

Les courbes adjointes à C d'un ordre quelconque donné découpent sur la courbe C une série linéaire complète; il faut entendre ici que tout groupe de la série est formé par les intersections de C avec une courbe adjointe en dehors des points multiples. Il s'ensuit (n. 9) qu'on obtient de même sur C une série complète, si l'on oblige les courbes adjointes à passer par des points fixés arbitrairement *sur C*, et l'on se borne à considérer les intersections qui tombent en dehors de ces points (et des points multiples).

À l'aide de la dernière observation on peut tout de suite *construire, sur la courbe C, la série linéaire complète qui est définie par un groupe de*

---

[35] Brill et Noether, *Ueber die algebraischen Functionen...*, l. c.

[36] Brill et Noether, l. c., pag. 275; voir aussi Segre, *Introduzione...*, n. 77.

points, ou par une série incomplète donnée. Par le groupe G donné (qui dans le second cas sera un groupe quelconque de la série) on fait passer une courbe adjointe quelconque, ce qui est toujours possible si l'ordre de celle-ci est assez élevé. La courbe découpe sur C, en dehors des points multiples et du groupe G, un groupe de points G'. Conduisons par G' toutes les courbes adjointes de l'ordre choisi; celles-ci découperont sur C la série complète définie par G.

Il y a de l'arbitraire dans cette construction, car on dispose de l'ordre des courbes adjointes, et aussi de la courbe, parmi celles-ci, que l'on conduit d'abord par G; mais de quelque manière que l'on s'arrange, toujours on parviendra enfin à la même série. C'est précisément cette affirmation qui constitue le *Restsatz* de MM. BRILL et NOETHER ([37]).

11. - Série caractéristique d'un système linéaire de courbes planes.

La propriété de couper sur une courbe plane donnée, C, une série complète n'appartient pas seulement aux systèmes de courbes adjointes, mais aussi à d'autres systèmes. Par exemple les courbes d'un ordre arbitraire, qui passent avec la multiplicité α par chaque point multiple d'ordre α de C, découpent elles-mêmes sur C une série complète; c'est là une propriété qui s'ensuit aisément de la propriété des courbes adjointes. Le cas le plus intéressant se présente si l'ordre des courbes que nous considérons, est l'ordre de C; en effet dans ce cas la série nommée n'est autre chose que la *série caractéristique* du système complet des courbes planes ayant l'ordre de C et les mêmes multiplicités dans les points multiples de celle-ci. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant qui va nous être utile ([38]):

La série caractéristique d'un système linéaire complet de courbes planes est toujours complète.

([37]) Le *Restsatz* provient donc de deux propositions bien distinctes, dont l'une appartient proprement à la *Géométrie sur la courbe*, et se rapporte aux opérations d'addition et de soustraction des séries (n. 9); tandis que l'autre proposition appartient à la *Géometrie du plan*, et exprime la propriété des systèmes de courbes adjointes que nous avons énoncée ci-dessus. On pourrait même remarquer que le *Restsatz* (comme il est énonce par MM. BRILL et NÖTHER) dit un peu moins que la réunion de nos deux propositions, car il se borne à affirmer que la série découpée par les courbes adjointes de la manière indiquée, ne dépend pas de celles-ci, tandis que nous affirmons en outre que la même série est complète; mais il faut d'ailleurs remarquer que cette dernière partie se déduit sur le champ de la première. Voir BRILL et NOETHER, l. c., pag. 273; SEGRE, *Introduzione...*, n. 78.

([38]) BRILL et NOETHER, l. c., pag. 308; CASTELNUOVO, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari...*, l. c., n. 18.

12. - Surfaces sous-adjointes à une surface de l'espace ordinaire.

Nous allons voir maintenant comment les théorèmes qui précèdent peuvent s'étendre aux surfaces de l'espace ordinaire.

Soit F une telle surface ayant des singularités (courbes multiples et points multiples) quelconques. On peut toujours construire une surface Ψ d'un ordre assez élevé, qui remplit la condition de couper sur tout plan général une courbe adjointe à la section de F faite par le même plan. On précise, de cette manière, le comportement de la Ψ le long des courbes multiples de F; ainsi lorsqu'il s'agit de courbes multiples ordinaires, la Ψ va passer $\alpha-1$ fois par toute courbe de F qui a la multiplicité α pour F. On ne dit rien au contraire sur le passage de Ψ par les points multiples *isolés* de F, dont la présence sur F ne s'ensuit pas (pour ainsi dire) de l'existence des courbes multiples; de sorte que si F possède, par esemple, un point multiple qui n'appartient à aucune courbe multiple, la Ψ ne passera pas, en général, par ce point. En vertu de ces explications, nous dirons que la Ψ est une surface *adjointe à F le long des courbes multiples*, ou, tout court, que la Ψ est *sous-adjointe* (*subaggiunta*) *à F* ([39]). Nous réservons le nom de surfaces *adjointes* à certaines surfaces, dont nous aurons à nous occuper plus tard, qui tout en satisfaisant aux conditions de la Ψ, vont encore passer convenablement par les points isolés de F. Pour le moment les surfaces sous-adjointes suffisent à notre but.

Les surfaces d'un ordre donné sous-adjointes à F forment un système linéaire, qui jouit d'une propriété analogue à celle des courbes adjointes. En effet ([40]):

Les surfaces d'un ordre quelconque donné qui sont sous-adjointes à une surface, découpent sur celle-ci un système de courbes complet: la courbe générale du système est formée par l'intersection de la surface sous-adjointe avec F, en dehors des courbes multiples de F. Le théorème subsiste encore si l'on oblige les surfaces sous-adjointes à passer par des points ou des courbes assignées sur F, et l'on retranche ces courbes fixes des courbes du système (n. 9).

À l'aide de ces remarques, on peut toujours construire sur F le système

---

([39]) ENRIQUES, *Introduzione...*, n. 17; M. NOETHER, (*Zur Theorie...*, « Math. Annalen », 8, pag. 509) appelle *adjungierte Flächen* les surfaces que nous appelons *sous-adjointes*, et réserve le nom de *surfaces* φ aux surfaces d'ordre $n-4$ qui, d'après cette Monographie, sont *adjointes à F*. Le développement de la théorie des surfaces a conseillé ce changement de locutions.

([40]) ENRIQUES, *Introduzione...*, n. 35 (vraiment on y considère les surfaces adjointes, mais la chose est vraie aussi pour les surfaces sous-adjointes). Le même théorème s'ensuit aussi du *Restsatz* de M. NOETHER dont nous allons parler tout à l'heure.

complet déterminé par une courbe donnée, C, ou par un système linéaire incomplet. Il suffit en effet de conduire par la courbe C (qui dans le second cas sera choisie arbitrairement dans le système) une surface sous-adjointe Ψ d'un ordre assez élevé pour que la construction soit possible. La Ψ va découper en général sur F une nouvelle courbe, C', en dehors de C et des courbes multiples de F; que l'on conduise maintenant par C' toutes les surfaces adjointes du même ordre de Ψ; celles-ci vont découper sur F un système linéaire complet, auquel appartient la courbe C; c'est le système cherché, ou tout au plus, il en diffère seulement en cela, que le système cherché peut avoir quelques points-base en plus. Il suffit, dans ce dernier cas, d'imposer ces nouveaux points-base aux courbes du système que nous venons de construire, ou (ce qui revient au même) d'imposer aux surfaces Ψ des passages ou des contacts convenables avec F dans les mêmes points.

Le système complet auquel on parvient ne dépend ni de l'ordre des surfaces sous-adjointes Ψ que l'on emploie, ni de la surface, parmi les Ψ, qu'on conduit d'abord. Cette affirmation constitue le *Restsatz* pour les surfaces, d'après M. NOETHER (41).

Remarque. – Le théorème sur la série caractéristique d'un système linéaire de courbes planes peut s'étendre aussi aux systèmes linéaires de surfaces de l'espace ordinaire. Enonçons le résultat, bien qu'on n'ait pas dans la suite l'occasion d'y recourir:

Si un systéme linéaire de surfaces est entièrement déterminé par les courbes et les points-base, le système de courbes, qui est découpé sur une des surfaces par les autres surfaces du système, est complet.

CHAPITRE IV.

SYSTÈME ADJOINT À UN SYSTÈME DONNÉ

Nous allons définir dans ce Chapitre une opération qui va jouer un rôle fondamental dans la théorie des systèmes linéaires situés sur une surface; c'est l'opération d'*adjonction*. Elle fournit le moyen de déduire de tout système linéaire donné, un nouveau système, l'*adjoint* au premier; et, par la considération des liens qui passent entre ces deux systèmes, elle nous porte à établir les principaux invariants d'une surface par rapport aux transformations birationnelles.

---

(41) *Zur Theorie...*, «Math. Annalen», 8, pag. 509; il y aurait à répéter ici une remarque analogue à celle que nous avons faite à propos des courbes planes.

Suivant notre méthode nous commençons par des considérations relatives aux séries linéaires sur les courbes.

13. - Série canonique sur une courbe.

Parmi les courbes adjointes à une courbe plane C d'ordre m, il faut considérer en particulier celles qui ont l'ordre $m-3$. Supposons qu'il existe de telles courbes, et désignons par p (>0) le nombre de celles qui sont linéairement indépendantes. Alors les dites courbes découpent sur la C une série linéaire complète dont la dimension est $p-1$, et l'ordre est (d'après MM. BRILL et NOETHER [42]) $2p-2$; c'est une g_{2p-2}^{p-1}. Or cette série jouit d'une propriété fondamentale. Si en effet on transforme birationnellement la courbe C en une autre courbe plane C', d'ordre m', la série g_{2p-2}^{p-1} de C se transforme dans la série qui est découpée à son tour sur C' par les courbes d'ordre $m'-3$ adjointes à C'. En d'autres termes, *la série découpée sur une courbe plane d'ordre m par les courbes adjointes d'ordre m — 3 jouit de la propriété d'invariance* (par rapport aux transformations birationnelles). Nous aurons souvent l'occasion de nommer cette série; nous la désignerons dans la suite par le nom de *série canonique* sur la courbe C (ou sur toute autre courbe de la même *classe*). On parlera donc aussi de la série canonique sur une courbe gauche; ce sera la série correspondante à celle découpée par les adjointes d'ordre $m-3$, sur une courbe plane d'ordre m en correspondance birationnelle avec la courbe donnée.

La dimension de la série canonique augmentée d'une unité, est aussi un invariant de la courbe considérée; c'est le *genre* p de la courbe, dont nous avons déjà rappelé la définition dans un cas particulier (n. 4).

Le caractère p, en vertu de sa définition, ne saurait descendre audessous de zéro; il est nul si la courbe correspondante, supposée plane, d'ordre m, n'a pas de courbes adjointes d'ordre $m-3$. On sait bien d'ailleurs que la condition $p=0$ définit entièrement une *classe* de courbes; ce sont les *courbes rationnelles.*

Ce cas excepté, on connaît des propriétés de la série canonique qu'il convient de rappeler ici, car elles sont d'un usage continuel [43]. La série canonique est la seule série qui ait, sur une courbe de genre p, la dimension $p-1$ avec l'ordre $2p-2$. La même série n'a pas de points fixes qui soient communs à tous ses groupes. Par suite, si l'on fixe un point quelconque de la courbe, on déduit de la série canonique g_{2p-2}^{p-1} une

---

(42) *Ueber die algebraischen Functionen...*, pag. 280; voir aussi SEGRE, *Introduzione...*, n. 73.
(43) BRILL et NOETHER; SEGRE, l. c.

nouvelle série g_{2p-3}^{p-2}; celle-ci à son tour n'a pas *en général* de points fixes. Tout au plus, dans un cas particulier, elle peut avoir un point fixe; il arrive alors que tous les groupes de la série canonique qui contiennent un point fixe quelconque contiennent en conséquence un second point fixe, qui est déterminé par le premier; alors il existe sur la courbe une série g_2^1, telle que $p-1$ quelconques de ses groupes forment un groupe de la série canonique g_{2p-2}^{p-1}; c'est le cas des courbes *hyperelliptiques.*

Remarque. – De la série canonique on peut donner une définition analytique, bien connue, qui a l'avantage de s'étendre à la fois à toutes les courbes d'une même classe, qu'elles soient planes ou gauches: *les groupes de la série canonique sont les groupes des zéros des différentielles abéliennes de la première espèce, qui appartiennent à la courbe donnée.*

14. - Système adjoint à un système de courbes planes.

Revenons à la courbe plane C d'ordre m, et supposons maintenant qu'elle soit une courbe générale d'un système linéaire $|C|$ de courbes planes, système complet, c'est-à-dire déterminé entièrement par ses points-base. Ces points ont les mêmes ordres de multiplicité ($\geqslant 1$) pour la C et pour les autres courbes [générales] du système; et tous les points multiples de la C tombent parmi eux. Il s'ensuit que les courbes adjointes à C, de l'ordre $m-3$ (et plus généralement d'un ordre quelconque), sont de même adjointes à toute autre courbe du système $|C|$. Nous dirons que ces courbes de l'ordre $m-3$ forment *le système* $|C'|$ *adjoint au système* $|C|$; on dit *adjoint*, tout court, sans désigner l'ordre des courbes C', car on n'a pas d'occasion de recourir à des systèmes adjoints d'ordre différent.

Le système (complet) $|C'|$, adjoint au système $|C|$, est lié avec celui-ci de telle sorte, que si une transformation birationnelle (ou de Cremona) de tout le plan change les systèmes $|C|$ et $|C'|$ en $|D|$ et $|D'|$ (d'un autre plan), *c'est encore* $|D'|$ *le système adjoint à* $|D|$, pourvu que l'on introduise convenablement en $|D'|$ les courbes exceptionnelles qui proviennent de la transformation ([44]); dans bien de questions il n'est pas même nécessaire de faire attention à ce dernier avertissement. C'est pourquoi nous pouvons dire que *le lien qui passe entre un système linéaire de courbes planes et son système adjoint, est invariable par rapport aux transformations birationnelles du plan.*

Il vient de là que la considération d'un système de courbes planes avec les systèmes adjoints successifs (à savoir, l'adjoint $|C'|$ que nous

([44]) Noether, *Rationale Ausführung der Operationen...*, § 31, « Math. Annalen », 23, 1883; Castelnuovo, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari...*, n. 27.

venons de définir, l'adjoint de l'adjoint, ou second adjoint $|C''|$, etc.) peut rendre bien de services dans l'étude de la Géométrie du plan (ou des surfaces rationnelles), lorsque on prend comme groupe fondamental (dans le sens de M. KLEIN) le groupe des transformations de CREMONA. C'est M. S. KANTOR qui semble avoir aperçu, le premier, le profit que l'on pouvait tirer de cette méthode. En effet il a montré dans une Note des « Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc. » (1885) comment on peut aborder par cette voie le problème de la détermination des transformations planes *cycliques* de CREMONA (transformations dont une puissance convenable donne l'identité); et il a continué cette recherche dans d'autres travaux plus récents ([45]). Plus tard M. CASTELNUOVO a profité des systèmes adjoints pour étudier les systèmes linéaires des courbes planes ([46]), et M. ENRIQUES s'en est servi pour la détermination des groupes continus de transformations birationnelles du plan ([47]).

La propriété d'invariance du système adjoint, que nous venons de rappeler, permet aussi de définir le système $|C'|$ adjoint à un système $|C|$ situé sur une surface rationnelle; il faudra en effet choisir $|C'|$ de telle sorte, que dans une représentation birationnelle quelconque de la surface sur le plan, $|C|$ et $|C'|$ correspondent à deux systèmes de courbes planes, dont le second soit l'adjoint au premier.

Or, lorsque la surface rationnelle F est donnée par ses caractères projectifs (à savoir, une surface de l'espace ordinaire, d'un ordre n connu, etc.), on peut demander de construire directement sur F le système $|C'|$ adjoint à un système donné $|C|$, sans avoir recours à la représentation plane. Supposons, pour plus de simplicité, que $|C|$ soit le système ∞^3 des sections planes de F; existera-t-il un système de surfaces découpant sur F le système de courbes $|C'|$ adjoint à $|C|$? Certainement; on voit même ([48]) que cette propriété appartient à certaines surfaces Φ de l'ordre $n-3$, qui rencontrent tout plan général dans les courbes d'ordre $n-3$ adjointes à la section plane correspondante de F.

Il résulte de là que ces surfaces adjointes Φ sont comprises parmi les surfaces Ψ du même ordre sous-adjointes à F. Or il y a lieu de se demander si les Φ coïncident avec les Ψ, ou bien s'il ne faut imposer aux Ψ de nouvelles conditions pour obtenir les Φ.

Dans certains cas on peut vérifier effectivement que les Φ et les Ψ sont la même chose. Ainsi cela arrive si la surface F n'a pas de *points*

([45]) *Premiers fondements pour une théorie...*, 4$^{\text{me}}$ partie, « Atti dell'Accad. d. Sc. fis. e mat. di Napoli », serie II, vol. 4°. Voir aussi « Journal für die Mathem. », 114, et « Acta Mathem. », 19.

([46]) *Ricerche generali sopra i sistemi lineari...*, l. c.

([47]) *Sui gruppi continui...*, « Rendic. della R. Accad. d. Lincei », 1893 [questo volume, I].

([48]) ENRIQUES, *Ricerche di geometria...*, III, 5; *Introduzione...*, IV; HUMBERT, *Sur la théorie générale des surfaces unicursales*, « Math. Annalen », 45, 1894.

multiples P isolés ou *propres*, c'est-à-dire des points P tels que tout plan conduit par P coupe sur la F une courbe ayant le genre *inférieur* au genre de la section plane générale de F. La surface générale du troisième ordre, la surface du quatrième ordre ayant une droite double, ou une section conique double, nous donnent des exemples de telles surfaces. La même particularité (coïncidence des Φ avec les Ψ) peut du reste se présenter aussi dans d'autres cas plus étendus ([49]).

Il ne faut penser pourtant qu'il en soit toujours ainsi. Au contraire, on démontre que les surfaces adjointes ont un point de l'ordre $i-2$ en tout point multiple (ordinaire) de l'ordre i de F; tandis que les surfaces sous-adjointes peuvent ne passer du tout par ce point, ou bien y passer avec un ordre inférieur. D'où il résulte que le système des surfaces adjointes Φ peut bien avoir une dimension inférieure que le système des surfaces sous-adjointes Ψ.

Vérifions cette remarque sur un exemple. Considérons à cet effet la surface F du quatrième ordre ayant un point triple P (point multiple *isolé*), et désignons par $|C|$ le système des sections planes de la F. On voit aisément que la F peut se représenter sur le plan, de manière qu'au système $|C|$ corresponde un système $|c|$ de courbes planes du quatrième ordre rencontrant une même cubique (image de P) en 12 points fixes. Or les surfaces Ψ d'ordre $4-3=1$ sous-adjointes à F, sont, d'après la définition, les plans de l'espace. Ceux-ci pourtant ne découpent pas sur F le système $|C'|$ adjoint à $|C|$, car $|C'|$ est découpé par les seuls plans Φ qui passent par le point P; on le voit tout de suite si l'on recourt à la représentation plane, où $|C'|$ est représenté par le système $|c'|$ des droites adjointes aux courbes $|c|$. Il s'ensuit donc que du système ∞^3 des Ψ *sous-adjointes* on déduit le système ∞^2 des Φ *adjointes*, en imposant aux Ψ la condition de passer par le point P.

Les considérations qui précèdent regardent le cas des points multiples ordinaires. Mais dès qu'il s'agit de singularité supérieures, le comportement des surfaces adjointes ne peut plus se définir d'une manière si simple, bien qu'on puisse recourir toujours à la représentation de la surface sur le plan.

Ce dernier moyen va pourtant faire défaut, lorsqu'on passe des surfaces rationnelles aux surfaces irrationnelles. En effet, même pour celles-ci, on peut définir un système de surfaces *adjointes* Φ, comprises parmi les sous-adjointes Ψ, et telles que les Φ découpent sur la surface un système *adjoint* au système des sections planes, jouissant de propriétés analogues à celles que nous venons de voir au sujet des surfaces rationnelles. Le comportement des Φ en un point multiple isolé ordinaire de la nouvelle

---

([49]) Voir à ce propos les Mémoires cités de MM. ENRIQUES et HUMBERT.

surface pourra s'établir par la même loi que nous avons exposée dans le cas des surfaces rationnelles; mais les points multiples singuliers présentent ici une difficulté encore plus grande; car on ne peut plus recourir à la représentation sur le plan.

On voit d'après cela l'opportunité d'établir une nouvelle définition du système adjoint, définition qui s'étende à toutes les surfaces algébriques, sans faire attention à leurs caractères projectifs (ordre, singularités, etc.), et qui permette, en conséquence, d'approfondir l'étude du lien (invariable par rapport aux transformations birationnelles) qui passe entre un système de courbes et son adjoint. Pour atteindre ce but il convient d'abord d'examiner les propriétés du système adjoint, dans le cas où nous avons tout-à-fait défini ce système, c'est-à-dire sur le plan. Nous chercherons ensuite d'étendre nos conclusions aux systèmes situés sur une surface quelconque.

15. - Sur quelques propriétés caractéristiques du système adjoint.

Reprenons donc un système linéaire $|C|$ de courbes planes d'ordre m et genre π, et le système adjoint $|C'|$ dont les courbes ont l'ordre $m-3$; et tâchons d'établir le lien qui passe entre $|C|$ et $|C'|$, sans faire attention aux caractères projectifs des deux systèmes.

Nous remarquons d'abord que $|C'|$ *découpe la série canonique* $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ *sur toute courbe générale de* $|C|$.

Cette propriété pourtant ne suffit pas toujours à définir le système $|C'|$. Pour le voir, on n'a qu'à reprendre le système ∞^3 de courbes du quatrième ordre qui passent par 12 points d'une cubique, système qui représente sur le plan la surface du quatrième ordre ayant un point triple; en effet le système lui-même a la propriété de découper sur chacune de ses courbes la série canonique g_4^2, tandis que le système adjoint (∞^2) est formé par les droites du plan.

Malgré cela il nous convient de considérer le plus ample système $|C_1|$ découpant la série canonique sur la courbe générale de $|C|$; on démontre que ce système $|C_1|$ est unique et comprend (à des courbes fixes près) toute courbe qui rencontre les C en de groupes canoniques. $|C_1|$ ne sera pas toujours le système adjoint à $|C|$; nous l'appelons *système sous-adjoint à* $|C|$, car on voit aisément que sur une surface rationnelle F, dont les sections planes sont représentées par ∞^3 courbes de $|C|$, le système $|C_1|$ est découpé par les surfaces sous-adjointes à F (surfaces de l'ordre $M-3$, si M est l'ordre de F [50])).

[50]) Par exemple, sur la surface du quatrième ordre ayant un point triple, le système sous-adjoint au système des sections planes est ce même système.

Le système sous-adjoint $|C_1|$ contient toujours le système adjoint $|C'|$ (et peut même parfois coïncider avec celui-ci). Il s'agit maintenant d'examiner par quelles conditions on peut déduire le système adjoint du système sous-adjoint. Si nous reprenons encore une fois la surface rationnelle F que nous venons de considérer, nous voyons sur le champ que la question proposée ne diffère pas de celle que nous avons rencontrée ci-dessus: établir les conditions qu'il faut imposer à une surface sous-adjointe Ψ, pour qu'elle devienne une surface adjointe Φ. Ces conditions dépendaient de l'existence sur F de certains points multiples *isolés* (ou *propres*), qui n'ont pas d'effet sur les surfaces sous-adjointes. Or remarquons qu'un point multiple isolé de F est représenté sur le plan par une *courbe fondamentale* γ du système $|C|$, courbe qui n'est pas rencontrée en de points variables par les C; c'est de plus une courbe fondamentale que nous dirons *propre*, en faisant attention à la propriété que le système résiduel $|C-\gamma|$ a le genre inférieur au genre de $|C|$ (en relation avec le fait que le point multiple P est *isolé*). On a donc à rechercher sur le plan quelles sont les conditions qu'une courbe fondamentale propre du système $|C|$ impose aux courbes adjointes. Mais cette recherche (ainsi que son analogue sur les surfaces adjointes) ne manque pas de présenter parfois de sérieuses difficultés.

Voici comment on réussit, par une voie indirecte, à les éviter. Mettons en relation notre système $|C|$ avec un autre système linéaire quelconque $|D|$ de courbes du même plan. Envisageons encore le système $|C+D|$ somme de $|C|$ et $|D|$, et le système $|(C+D)'|$ adjoint à celui-là. La courbe générale du système $|C+D|$ a l'ordre $m+n$ (si m et n sont les ordres de C et D), et a l'ordre de multiplicité $\mu+\nu$ en tout point qui est *base* d'ordre μ et ν pour $|C|$ et $|D|$. Par suite la courbe générale du système $|(C+D)'|$ a l'ordre $m+n-3$ et la multiplicité $\mu+\nu-1$ dans le point nommé. Or, si nous comparons ce système $|(C+D)'|$ avec le système $|C'+D|$ somme de $|C'|$ et de $|D|$, nous voyons que les deux systèmes sont formés de courbes du même ordre $(m-3)+n$, qui ont la même multiplicité $(\mu-1)+\nu$ en tout point qui est *base* ($\mu \geqslant 1$) pour $|C|$. Mais une distinction entre les deux systèmes se présente en tout point (s'il en existe), qui est base pour $|D|$, mais pas pour $|C|$ ($\mu=0$, $\nu>0$); car un tel point à l'ordre $\mu+\nu-1$ pour le système $|(C+D)'|$, et l'ordre $\mu+\nu$ pour le système $|C'+D|$. D'après cela nous pouvons énoncer le résultat suivant:

Si $|C|$ et $|D|$ sont deux systèmes de courbes planes, le système $|(C+D)'|$ adjoint à leur somme contient le système $|C'+D|$; et précisément si l'on veut déduire $|C'+D|$ de $|(C+D)'|$, il faut augmenter d'une unité l'ordre de tout point qui est base pour $|D|$, mais ne l'est pas pour $|C|$.

Or il y a lieu de se demander: cette propriété subsiste-t-elle aussi pour les systèmes sous-adjoints? Pas toujours. Et alors, est-ce qu'on ne pourra se servir de la même propriété pour séparer le système adjoint du système sous-adjoint qui le contient?

Il en est précisément ainsi. Partons d'un système $|C|$ quelconque et choisissons un système auxiliaire $|D|$ qui n'ait pas de courbes fondamentales propres (cela est possible d'une infinité de manières). Maintenant que l'on choisisse parmi les courbes du système $|C_1|$ sous-adjoint à $|C|$, celles C' qui, additionnées à une courbe D quelconque, donnent des courbes sous-adjointes à $|C+D|$; on peut démontrer que ces courbes C' forment un système linéaire qui ne dépend pas de $|D|$; *$|C'|$ est le système adjoint à $|C|$.* On peut tirer de cette remarque une nouvelle définition du système adjoint à un système donné de courbes planes. Or, et c'est là un résultat fort intéressant, cette définition peut se transporter aux systèmes linéaires situés sur une surface algébrique *quelconque.* On parvient ainsi à l'énoncé suivant, dont le lecteur trouvera ailleurs la démonstration ([51]).

16. - Système adjoint à un système linéaire donné sur une surface algébrique.

Lorsqu'on connaît sur une surface algébrique un système linéaire irréductible $|C|$, on peut construire un second système $|C'|$, appelé système adjoint à $|C|$, qui est tout-à-fait défini par les propriétés suivantes:

1) *les courbes de $|C'|$ découpent des groupes de la série canonique sur toute courbe générale de $|C|$;*

2) *quel que soit le système $|D|$, le système $|C'+D|$ découpe des groupes de la série canonique sur toute courbe générale de $|C+D|$ (supposé irréductible). Ces groupes toutefois contiennent i points réunis dans chaque point qui a l'ordre i pour $|D|$, et n'est pas base pour $|C|$.*

Il faut bien remarquer que la série $g_{2\pi-2}$ découpée par le système adjoint $|C'|$ sur la courbe C générale (supposée de genre π), n'est pas nécessairement complète; sur quelques surfaces (au contraire de ce qui arrive sur le plan et sur les surfaces rationnelles) la dite série peut bien avoir une dimension inférieure à $\pi-1$. Elle peut même faire défaut, avec le système adjoint lui-même (en dehors du cas évident $\pi=0$). Ainsi l'on démontre ([52]) qu'il n'y a pas de système adjoint au système linéaire des sections planes d'une surface réglée de genre π quelconque.

([51]) À la définition du système adjoint ici rapportée, est consacré le Chap. III de la *Introduzione...*, de M. ENRIQUES.

([52]) ENRIQUES, *Introduzione...*, n. 30.

Il convient souvent d'énoncer, sous forme de théorème, la définition que nous venons de donner du système adjoint, ou du moins la partie essentielle de la même définition. On parvient ainsi à la *propriété fondamentale du système adjoint*:

Soient $|C|$ *et* $|D|$ *deux systèmes linéaires de courbes sur une même surface; le système* $|C'|$ *adjoint au premier, additionné avec le second, donne un système* $|C'+D|$ *qui est contenu dans le système* $|(C+D)'|$ *adjoint à* $|C+D|$; *il en diffère seulement en cela, qu'il peut exister des points en chacun desquels l'ordre de multiplicité de* $|C'+D|$ *est supérieur à l'ordre correspondant de* $|(C+D)'|$. Ce sont précisément les points qui sont base, d'ordre ν par exemple, pour $|D|$, tandis qu'il ne sont pas base pour $|C|$; en effet dans chacun de ces points $|C'+D|$ a l'ordre de multiplicité ν, tandis que $|(C+D)'|$ a l'ordre de multiplicitè $\nu-1$. Si en particulier ces points font défaut, de sorte que tout point-base de $|D|$ est aussi point-base de $|C|$, on a

$$|C'+D|=|(C+D)'| .$$

D'après le théorème qui précède, on peut, par une simple addition, construire le système $|(C+D)'|$ adjoint à $|C+D|$, dès qu'on connaît le système $|C'|$ adjoint à $|C|$. Inversement pour déduire le système adjoint à $|C|$ du système adjoint à $|C+D|$, on n'a qu'à retrancher le système $|D|$ du dernier système adjoint. De ces observations il résulte aisément que, dès qu'on connaît le système $|C'|$ adjoint à un système particulier $|C|$ sur une surface, on peut construire le système adjoint à un système arbitrairement donné sur la surface, à l'aide de simples opérations d'addition et de soustraction (avec des impositions ou suppressions de points multiples, s'il est nécessaire).

Remarque. – La définition qui précède, comme on l'a vu, n'établit pas d'une manière directe les caractères de l'opération d'*adjonction*, par laquelle on passe d'un système donné $|C|$ au système adjoint $|C'|$. Au contraire, on définit cette opération par son comportement en relation avec une autre opération connue d'avance (l'addition). Ce comportement est représenté par la relation

$$|(C+D)'|=|C'+D|$$

qui subsiste toujours, à des multiplicités dans certains points près. Or dans l'Analyse on a souvent l'occasion de recourir à de telles définitions; toutes les fois qu'on définit une fonction, non pas directement, mais à l'aide d'une *équation fonctionnelle*. Ce rapprochement avec des théories connues peut servir à mettre en lumière la voie que nous venons de suivre.

17. - Définition directe du système adjoint.

Dans les cas les plus simples, on peut donner une définition directe du système adjoint à un système donné, définition qui s'ensuit de celle qui précède. Bornons-nous à l'énoncé suivant:

Soit $|C|$ *un système qui ne possède pas de courbes fondamentales propres* (c'est-à-dire des courbes γ qui ne sont pas rencontrées en de points variables par les C, et telles que $|C-\gamma|$ a le genre inférieur au genre de $|C|$); *alors, en général, toute courbe qui découpe un groupe de la série canonique sur les courbes* C, *appartient au systéme adjoint à* $|C|$. Les mots *en général* se rapportent aux observations suivantes.

Pour démontrer le théorème on suppose d'abord que les courbes C, qui passent par un point quelconque de la surface, ne vont passer en conséquence par d'autres points mobiles avec celui-ci. On rencontre ensuite une seconde restriction; elle se rapporte au cas où, la surface appartenant à la *classe* des surfaces réglées, les courbes C découperaient en un point les génératrices. Tandis que la première restriction est peut-être superflue, la seconde est certainement nécessaire. En effet le système $|C|$ des sections planes d'une surface réglée n'a pas de système adjoint, mais il y a bien des courbes qui découpent sur les C des groupes de la série canonique.

En revenant à la définition directe du système adjoint, il y aurait maintenant à considérer le cas d'un système $|C|$ doué de courbes fondamentales propres. Pour ne fatiguer le lecteur nous n'insisterons pas sur ce sujet; on pourra consulter pour ces développements le n. 29 de la *Introduzione...* de M. ENRIQUES.

18. - Surfaces adjointes à une surface donnée.

La définition du système adjoint à un système donné (n. 16) vient d'être énoncée sous une forme qui ne subit aucun changement, lorsqu'on transforme birationnellement la surface considérée; un système $|C|$ et son adjoint $|C'|$ se transforment en deux systèmes $|D|$ et $|D'|$ dont le second est encore l'adjoint au premier (à des courbes *exceptionnelles* près). C'est pourquoi cette définition se prête mieux que toute autre dans les recherches des propriétés d'invariance d'une surface algébrique; nous allons le voir bientôt.

Mais d'abord il nous convient de faire quelques remarques au point de vue projectif.

Soit $|C|$ le système des sections planes d'une surface F d'ordre n de l'espace ordinaire; et soit $|C'|$ le système adjoint à $|C|$. Alors on peut construire un système linéaire de surfaces Φ d'ordre $n-3$, sous-adjointes à F, qui découpent sur F (en dehors des courbes multiples de F) les courbes de $|C|$. Ces surfaces Φ sont tout-à-fait déterminées par les courbes C'; on les appelle *surfaces adjointes à F*, de l'ordre $n-3$; nous en avons déjà parlé dans le cas où F était une surface rationnelle, et nous avons dit alors que cette définition pourrait s'étendre aux surfaces générales.

Sans insister nouvellement sur le même sujet, bornons-nous à remarquer que les considérations précédentes fournissent une définition indirecte des surfaces Φ, à l'aide du système $|C'|$ que celles-ci découpent sur F. Il résulte de la définition que les Φ sont comprises parmi les surfaces sous-adjointes Ψ du même ordre $n-3$, et qu'elles en diffèrent seulement par leur comportement dans les points multiples isolés de la F. De sorte que, si la F ne possède de tels points, les surfaces adjointes coïncident avec les sous-adjointes; elles sont alors tout-à-fait déterminées par la condition de découper sur tout plan général des courbes adjointes à la section correspondante de F. C'est ce qui arrive par exemple si la F est une surface générale de l'ordre n, ou si elle possède une courbe double et un nombre fini de points d'ordre $k = 3, 4, \ldots$ satisfaisant à la condition d'avoir l'ordre $k(k-1)/2$ pour la courbe double.

Si au contraire la F possède des points multiples *isolés ordinaires*, de l'ordre k, on démontre que les Φ passent avec l'ordre $k-2$ par chacun d'eux. De sorte que l'on peut énoncer le résultat suivant:

Si une surface F n'a d'autres singularités que des courbes multiples ordinaires de l'ordre $h = 2, 3, \ldots$, et des points multiples ordinaires de l'ordre $k = 2, 3, \ldots$, les surfaces adjointes sont tout-à-fait déterminées par les conditions de passer $h-1$ fois par ces courbes et $k-2$ fois par ces points. En particulier un point double, isolé, ordinaire, ne présente aucune condition aux surfaces adjointes.

L'énoncé qui précède nous donne une définition directe des surfaces adjointes à une surface douée de singularités ordinaires. On pourrait chercher d'étendre cette définition aux surfaces ayant des points multiples singuliers; mais on rencontre quelques difficultés si l'on veut comprendre, par un même énoncé, tous les cas que ces points peuvent présenter. C'est pourquoi nous avons suivi à ce propos une voie indirecte, en définissant les surfaces Φ adjointes à F à l'aide du système $|C'|$, qu'elles découpent sur F. Mais on aurait pu aborder le problème du comportement des surfaces Φ en un point singulier en s'appuyant sur des considérations analytiques, comme M. NOETHER a montré ([53]). Cette

([53]) *Zur Theorie...*, « Math. Annalen », 8, pag. 510; voir aussi une Note du même auteur dans dernière voie (qui au point de vue historique précède la nôtre) permettrait alors de définir le système adjoint $|C'|$ à l'aide des Φ, tandis que nous avons suivi le chemin inverse.

Remarque. – Ainsi que nous l'avons fait sur le plan, de même l'on pourrait définir sur une surface quelconque les courbes C_1 *sous-adjointes* à un système $|C|$, par l'unique condition de découper sur toute courbe C des groupes de la série canonique. Ces courbes forment un système linéaire $|C_1|$ (*sous-adjoint* à $|C|$), avec une seule exception relative aux surfaces réglées. Le système $|C_1|$ contient le système adjoint $|C'|$.

Si $|C|$ est le système des sections planes d'une surface F de l'ordre n de l'espace ordinaire, on démontre que $|C_1|$ est découpé par les surfaces d'ordre $n-3$ sous-adjointes à F; le cas excepté où F est une surface réglée de genre $\pi > 0$, car alors il y a des C_1 composées de $2\pi - 2$ génératrices, mais il n'existe aucune surface de l'ordre $n-3$ sous-adjointe à F, qui rencontre F dans ces génératrices seulement (en dehors des courbes multiples).

Du reste, nous n'aurons pas à considérer, dans la suite, le système sous-adjoint.

19. - Surfaces adjointes d'autres ordres.

Lorsqu'on a défini, par les moyens qu'on vient de voir, les surfaces Φ d'ordre $n-3$ adjointes à F, on peut aussi construire des *surfaces adjointes d'ordre* $n-3+i$ $(i \gtrless 0)$, c'est-à-dire des surfaces qui ont cet ordre, et qui se comportent comme les Φ le long des courbes multiples et dans les points multiples de F. Les nouvelles surfaces sont aussi déterminées par la condition de découper sur F les courbes du système $|C'+iC|$, où $|C|$ est le système des sections planes de F, et $|C'|$ est le système adjoint à celui-ci. Or, d'après le théorème fondamental sur le système adjoint, $|C'+iC|$ n'est autre chose que le système adjoint au système $|(i+1)C|$, multiple de $|C|$. On a dans cette remarque un moyen pour définir le système $|C'+iC|$ (et par suite les surfaces adjointes d'ordre $n-3+i$ qui le découpent) toutes les fois que $|C'|$ fait défaut; car même alors le système $|(i+1)C|$ peut bien avoir un système adjoint; et il l'a certainement (on le démontre) lorsque i surpasse une certaine valeur.

Nous allons rencontrer dans la suite ces systèmes $|C'+iC|$; il nous

---

les « Götting. Nachrichten » (1871), et le Mémoire *Ueber die totalen algebraischen Differentialausdrücke*, « Math. Annalen », 29. M. NOETHER s'occupe en particulier des surfaces adjointes de l'ordre $n-4$ (*φ-Flächen*), que nous allons étudier ensuite. Voir aussi (pour des surfaces particulières) le Mémoire cité de M. HUMBERT, et l'autre Mémoire du même auteur *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques*, « Journal de Mathém. », 4e s^e^, t. IX, pag. 394, 1893.

faudra alors récourir à la remarque, que nous faisons dès maintenant. Nous avons déjà remarqué (n. 17) que le système $|C'|$ adjoint à un système $|C|$, de genre π, découpe sur la courbe C générale une série $g_{2\pi-2}$, qui est contenue dans la série canonique $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$, mais qui peut bien être incomplète et avoir par conséquent un certain *défaut*; elle peut même manquer (l'exemple des surfaces réglées nous l'a prouvé), et dans ce cas le défaut atteint son *maximum* π. De même la série que le système $|C'+iC|$ $(i>0)$ découpe sur $|C|$ est une série $g_{2\pi-2+in}$ (où n désigne le degré de $|C|$); si elle était complète, sa dimension serait $\pi-2+in$; mais il peut se faire qu'elle aussi soit incomplète, et alors on aura à considérer son défaut. Or, et c'est là la remarque que nous nous proposions de faire, la considération de ce défaut n'a lieu que pour les premières valeurs de i; car *on peut toujours fixer une telle limite l, que pour les valeurs de $i>l$ la série découpée par $|C'+iC|$ sur C résulte complète.*

20. - Surfaces adjointes à une courbe gauche.

Dans le n. 18 nous avons appris à construire des surfaces qui découpent sur une surface donnée F, d'ordre n, le système adjoint aux sections planes de celle-ci. De même, à l'aide du théorème fondamental, on peut construire des surfaces qui découpent sur F le système adjoint à un système de courbes $|C|$ *quelconque* donné sur F. À cet effet on fait passer d'abord par la courbe C générale une surface G d'un ordre m assez élevé pour que cette construction soit possible. Appelons K la courbe intersection résiduelle de la surface G avec F; on aura alors $|K+C|=$ $=|mC|$. Or le système $|C'+(m-1)C|$ adjoint à celui-ci est découpé sur F par les surfaces d'ordre

$$n-3+(m-1)=m+n-4$$

adjointes à F (n. 19). Donc, d'après le théorème fondamental:

Si nous imposons à ces surfaces adjointes d'ordre $m+n-4$ la condition de passer par la courbe K, et d'avoir avec F un contact d'ordre $i-1$ dans tout point-base d'ordre i pour le système $|C|$, nous allons découper sur F le système adjoint à $|C|$.

Le théorème qu'on vient d'énoncer, nous fournit tout d'abord le moyen de découper sur une courbe gauche C, intersection partiale de deux surfaces F et G ayant les ordres n, m, la série canonique, ou du moins une partie de cette série. Nous voyons qu'il faut construire à ce but les surfaces d'ordre $m+n-4$, qui passent par l'intersection résiduelle K de F et G, et se comportent d'une manière convenable dans les points multiples de ces surfaces. Or c'est là précisément un théorème de M. NOETHER sur les surfaces *adjointes* à une courbe gauche [54].

Mais il résulte encore du théorème qui précède, que toute courbe adjointe à $|C|$ sur la surface F peut-être découpée par les dites surfaces adjointes, ce qui permet, pour ainsi dire, l'inversion du théorème de M. NOETHER, autant qu'elle est possible.

CHAPITRE V.

INVARIANTS D'UNE SURFACE PAR RAPPORT AUX TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES

En nous appuyant sur les résultats qui précèdent, nous sommes maintenant en mesure d'aborder la question fondamentale de notre théorie; à savoir, la recherche de quelques invariants d'une surface par rapport aux transformations birationnelles; invariants qui peuvent être des nombres ou des variétés géométriques (courbes ou systèmes de courbes).

À cette recherche il convient cependant de faire précéder quelques remarques d'un caractère général.

À la notion des invariants on est parvenu tout d'abord en considerant les expressions transcendantes liées à la surface (CLEBSCH, NOETHER, 1868-69; PICARD, 1884). Ensuite on s'est proposé de définir les mêmes invariants par la voie géométrique (ou algébrique). Les géomètres qui ont abordé cette question (CAYLEY, NOETHER, ZEUTHEN), procédaient de la manière suivante. On considérait une surface F de l'espace ordinaire, et on faisait attention à ses caractères projectifs (ordre, courbes et points multiples). On transformait ensuite birationnellement la F en une autre surface F' du même espace, et, en comparant les caractères projectifs de F aux caractères analogues de F', on formait des expressions numériques ou des fonctions, qui n'étaient pas modifiées par la transformation.

Nous allons maintenant remplacer cette méthode par une autre qui présente sur celle-là quelque avantage, bien qu'elle n'en diffère pas d'une manière essentielle; elle nous permet pourtant de faire abstraction des caractères projectifs des surfaces, et d'éviter par là les difficultés qui proviennent des points singuliers et de leur comportement dans les transformations.

---

[54] *Zur Theorie...*, « Math. Annalen », 8, pag. 510; voir aussi le Mémoire, *Ueber die algebraischen Raumcurven*, « Denkschriften der Berliner Akad. », 1882, pag. 12.

À cet effet reprenons la surface générale d'une *classe* donnée (n. 3), surface dont les caractères projectifs n'ont pour nous aucun intérêt, et partons d'un système linéaire de courbes $|C|$ de la surface. De $|C|$ nous pouvons déduire, par quelque opération, de nouveaux systèmes qui sont liés avec $|C|$; tels sont, par exemple, le système adjoint $|C'|$, l'adjoint $|C''|$ de $|C'|$, etc. Que l'on cherche maintenant des rélations entre ces systèmes, ou entre leurs caractères (genre, dimension, degré); si l'on parvient à une rélation qui ne dépend pas du système $|C|$ d'où l'on part, on aura là un *invariant de la surface.*

Les exemples que nous allons donner, montreront la fécondité de cette méthode.

21. - Système canonique.

L'exemple le plus important nous est fourni par l'application immédiate du théorème fondamental sur le système adjoint.

Ce théorème en effet nous dit que, si $|C|$ et $|D|$ sont deux systèmes de courbes sur la surface, on parvient au système $|(C+D)'|$ adjoint à $|C+D|$ de deux manières différentes: on peut additionner à $|D|$ le système $|C'|$ adjoint à $|C|$, mais on peut de même additionner à $|C|$ le système $|D'|$ adjoint à $|D|$. On a donc l'égalité symbolique [55]:

$$|C'+D|=|C+D'|\ ,$$

d'où l'on déduit

$$|C'-C|=|D'-D|\ .$$

Cette relation a une signification géométrique seulement dans le cas où $|C'|$ contient $|C|$, car elle nous dit alors che $|D'|$ aussi contient $|D|$, et en outre que le système $|K|=|C'-C|$, résiduel de $|C|$ par rapport à $|C'|$, est de même le résiduel de tout autre système $|D|$ par rapport à son adjoint $|D'|$. En conclusion:

Le résiduel $|K|$ d'un système linèaire $|C|$ par rapport à son système adjoint, ne dépend pas du système $|C|$ d'où l'on part.

En d'autres termes, $|K|$ est un système de courbes qui dépend seulement de la surface considérée, ou plus précisément de la *classe* de sur-

---

[55] Au sujet des ordres de multiplicité des points-base qui appartiennent aux deux systèmes considérés dans cette rélation, il y aurait une observation à faire, car ces ordres peuvent différer d'une unité; qu'il nous soit permis de l'omettre, attendu qu'ici nous nous proposons seulement d'esquisser la démonstration. Voir la démonstration complète dans le n. 38 de l'*Introduzione*... de M. Enriques.

faces à laquelle celle-là appartient; c'est donc un *invariant* de la dite surface. Nous l'appellerons *système canonique* (et courbe canonique chacune de ses courbes), car, ainsi que nous allons le voir, il a la plus grande analogie avec la série canonique définie sur les courbes.

La dimension du système canonique $|K|$ est aussi un *caractère invariable* de la surface. Cette dimension augmentée d'une unité s'appelle *premier genre* de la surface (*Flächengeschlecht* d'après M. NOETHER ([56])); il convient d'ajouter *genre géométrique*, pour le distinguer du genre numérique que nous allons introduire bientôt; on le désigne par p_g.

Si $p_g = 0$, il n'y a pas de système canonique; en d'autres termes, il n'y a sur la surface aucun système $|C|$, qui soit contenu dans son adjoint $|C'|$. C'est ce qui arrive, par exemple, sur les surfaces rationnelles, sur les surfaces réglées, ou plus généralement sur toute surface contenant un système $|C|$ de courbes dont la série caractéristique est non-spéciale.

Si $p_g = 1$, la courbe générale d'un système quelconque $|C|$ appartient à *une seule* courbe du système adjoint $|C'|$. Le reste $C' - C$, s'il y en a, fournit (à des courbes exceptionnelles près) la seule courbe canonique. Mais dans certains cas il peut se faire que $|C|$ coïncide avec $|C'|$; alors il n'y a pas de reste, et la courbe canonique a, pour ainsi dire, l'ordre zéro.

Si $p_g \geqslant 1$, le système canonique $|K|$ peut se construire à l'aide d'un seul système de courbes $|C|$ de la surface, et du système adjoint $|C'|$; cela résulte de la définition. En rappelant les propriétés du système adjoint, on trouve, pour les courbes canoniques, la propriété suivante:

Toute courbe canonique découpe sur la courbe générale C d'un système quelconque $|C|$ un groupe de points, qui, joint aux points-base de $|C|$ et à un groupe de la série caractéristique de $|C|$, fournit un groupe de la série canonique de C.

La propriété énoncée est caractéristique pour les courbes canoniques; il suffit même, pour définir ces courbes, qu'elle soit vérifiée par rapport à un seul système $|C|$, pourvu que ce système satisfasse aux restrictions dont on parle au n. 17.

22. - Construction du système canonique à l'aide des surfaces adjointes de l'ordre $n - 4$.

Lorsqu'une surface F est donnée par ses caractères projectifs dans l'espace ordinaire, et l'on désigne par n son ordre, il convient, dans la construction du système canonique $|K|$, de recourir au système $|C|$ des

([56]) *Zur Theorie...*, ibid., pag. 520.

sections planes de F. On a à retrancher le système $|C|$ du système adjoint $|C'|$, qui est découpé sur F par les surfaces adjointes d'ordre $n-3$. Le système résiduel sera naturellement déterminé par les surfaces adjointes d'ordre $n-4$. On a donc ce résultat:

Sur une surface d'ordre n de l'espace ordinaire, le système canonique est découpé par les surfaces adjointes de l'ordre $n-4$ ([57]). Le nombre de telles surfaces qui sont linéairement indépendantes, fournit donc le genre p_g de F. Ici, comme d'ordinaire, on envisage l'intersection d'une surface adjointe avec F, en dehors des courbes multiples de F. Mais dans cette intersection on peut trouver parfois des courbes qui appartiennent à toutes les surfaces adjointes d'ordre $n-4$, et qu'on ne doit pas regarder comme des courbes canoniques. On démontre en effet que, si une courbe γ de F est *exceptionnelle*, c'est-à-dire, si elle correspond, par une transformation birationnelle, à un point P' d'une surface F' (n. 2), cette courbe γ appartient à toutes les surfaces d'ordre $n-4$ adjointes à F.

Or, au sujet des courbes exceptionnelles γ de F, il y a une distinction à faire. En effet le point P' de F', qui correspond à la courbe γ, n'appartient pas, en générale, à toutes les courbes canoniques de F' (n'est pas point-base du système canonique sur F'), et dans ce cas la courbe exceptionnelle γ, que nous dirons de la *première espèce*, ne doit pas être regardée comme faisant partie des courbes canoniques de F; par suite il faut retrancher la γ de l'intersection de F avec une surface adjointe générale de l'ordre $n-4$, pour obtenir une courbe canonique. On remarquera encore qu'une courbe exceptionnelle de la première espèce n'a aucune intersection variable avec les courbes canoniques ([58]).

Mais il peut arriver au contraire, dans quelques cas particuliers, que P' soit un point-base du système canonique sur F'; alors la courbe exceptionnelle γ correspondante sur F, courbe exceptionnelle de la *seconde espèce*, jouit de la propriété d'invariance, et doit être regardée comme faisant partie de toutes les courbes canoniques. Les courbes résiduelles variables découpent à present γ en de points variables (un au moins).

Voici comment on peut obtenir un exemple d'une courbe exceptionnelle de la seconde espèce. Qu'on envisage une surface du cinquième ordre ayant deux contacts avec elle-même (*points tacnodals*) ([59]); chacun

---

([57]) NOETHER, *Zur Theorie...*, ibid., pag. 514.

([58]) Pour avoir un exemple d'une telle courbe exceptionnelle il suffit de considérer la droite qui joint deux points triples d'une surface du cinquième ordre; ici les surfaces adjointes de l'ordre $5-4=1$ sont les plans conduits par cette droite.

([59]) Si 1 et 2 (points fondamentaux du système des coordonnées) sont les deux points sinde ces points impose une condition aux surfaces adjointes, de sorte que les surfaces adjointes de l'ordre $5-4=1$ sont les plans passant par ces points. Les courbes canoniques sont donc des courbes du cinquième ordre (genre 2), qui ont un point-base P' (en dehors des points singuliers) dans l'intersection ultérieure de la surface avec la droite joignant les deux points singuliers. Toute transformation birationnelle de la surface qui change le point P' en une courbe γ, donne lieu à une courbe exceptionnelle de la seconde espèce.

En laissant de côté l'exemple pour revenir à la remarque qui précède, on peut maintenant préciser l'énoncé du dernier théorème:

Les surfaces d'ordre $n-4$ adjointes à une surface de l'ordre n découpent sur celle-ci le système canonique, en dehors des courbes multiples et des courbes exceptionnelles de la première espèce.

La considération des surfaces adjointes de l'ordre $n-4$ pourrait même servir à définir le système canonique. C'est précisément la voie que CLEBSCH a indiquée, et que M. NOETHER a suivie dans le Mémoire cité. Ce savant a dû, naturellement, surmonter la difficulté de démontrer le caractère d'invariance du système qu'il venait à construire ainsi. Nous avons évité cette difficulté en définissant le système canonique à l'aide de la propriété fondamentale du système adjoint, laquelle peut même remplacer la propriété d'invariance du système canonique, pour les surfaces ($p_g=0$) qui ne possèdent pas un tel système.

La construction du système canonique à l'aide des surfaces adjointes de l'ordre $n-4$, montre que ce système a la plus grande analogie avec la série canonique découpée sur une courbe plane de l'ordre n par les courbes adjointes de l'ordre $n-3$; on voit ainsi la raison du nom que nous avons attribué à ce système.

23. - Système canonique réductible.

Le système canonique appartenant à une surface donnée peut être réductible, soit par la présence de quelque courbe fixe commune à toute courbe canonique, soit par la division de la courbe canonique générale en plusieurs courbes variables dans un faisceau (n. 7).

Le premier cas se présente, nous le savons, toutes les fois qu'il y a

---

guliers, l'équation de la surface est de la forme

$$ax_1^3x_2^2+bx_2^3x_1^2+x_1^2x_2^2f_1+x_1x_2(x_1g_2+x_2h_2+i_3)+x_1j_4+x_2k_4+l_5=0$$

où a et b sont des constantes, et $f_1, g_2, \dots, l_5$ sont des formes algébriques dans les variables x_3, x_4 ayant les degrés 1, 2, ..., 5.

sur la surface quelque courbe exceptionnelle de la seconde espèce. Mais il y a lieu de rechercher si le système canonique ne peut contenir d'autres courbes fixes, en dehors de ces courbes exceptionnelles. Il paraît qu'il en puisse contenir en effet, bien qu'il ne soit pas facile de trouver des exemples à ce sujet. Sans nous arrêter sur la question, nous nous bornons à montrer, par un exemple, que, pour les surfaces ayant $p_g = 1$, la courbe canonique n'est pas nécessairement exceptionnelle, ainsi qu'on a été porté à le croire; au contraire il peut se faire que cette courbe (ou quelqu'une de ses parties) ait le genre > 0. Considérons en effet une surface du cinquième ordre passant par une section conique, et ayant trois contacts avec elle-même en trois points A, B, C de cette courbe [sommets d'un triangle]. L'unique surface adjointe de l'ordre $5 - 4 = 1$ est ici le plan ABC, qui rencontre la surface le long de la section conique nommée et d'une courbe ultérieure du troisième ordre passant simplement par A, B, C. Or, il est clair que cette dernière courbe (ayant le genre > 0) n'est certainement pas exceptionnelle.

Il peut encore arriver, nous avons dit, que la courbe canonique générale (en dehors peut-être de parties fixes) se décompose en plusieurs courbes (au moins $p_g - 1$) variables dans un même faisceau (qui peut être rationnel ou bien irrationnel). Si le faisceau n'a pas de points-base, et s'il n'existe aucune courbe exceptionnelle de la seconde espèce, on démontre (d'après M. NOETHER ([60])) que *chacune des courbes partielles a le genre* 1. La restriction énoncée est nécessaire, car il y a des surfaces de genre $p_g = 2$ ayant un faisceau de courbes canoniques de genre > 1 (avec des points-base). On n'a qu'à rappeler l'exemple de la surface du cinquième ordre cité au n. 22. Inversement, *si une surface* ($p_g \geqslant 2$) *contient un faisceau de courbes du genre* 1, *toute courbe canonique se decompose en* $i \geqslant p_g - 1$ *courbes de ce faisceau.*

24. - Les caractères $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ d'une surface.

Pour obtenir des nombres qui jouissent de la propriété d'invariance par rapport à une surface donnée, on n'a qu'à considérer les autres caractères du système canonique, à côté de la dimension $p_g - 1$ dont nous avons déjà parlé. Ainsi se présentent le genre et le degré du système canonique.

Le genre (de la courbe canonique générale), dans la supposition $p_g \geqslant 1$, nous fournit l'invariant qu'on appelle *second genre* (*Curvengeschlecht*

([60]) *Zur Theorie...*, ibid., pag. 523. Voir aussi CASTELNUOVO, *Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie*, « Rendic. Istituto Lombardo », 1891, Nota I, § 2.

d'après M. NOETHER ([61])) et qu'on désigne par $p^{(1)}$. On peut le calculer directement pour les seules surfaces qui ont des vraies courbes canoniques (d'ordre > 0) ([62]); pour les autres surfaces on ne saurait le définir qu'à l'aide d'une convention; c'est ce que nous allons faire tout à l'heure, du moins dans certains cas.

Mais d'abord parlons aussi du *troisième genre* $p^{(2)}$ ([63]), qui est le degré du système canonique, c'est-à-dire le nombre des intersections variables de deux courbes canoniques; pour que cette définition ait un sens, par elle-même, il faut supposer qu'on ait $p_g > 1$ (pour $p_g = 2$ on aura $p^{(2)} = 0$), et en outre que la courbe canonique générale soit irréductible.

À ce dernier caractère pourtant on ne fait pas attention d'ordinaire, car M. NOETHER à montré ([64]) qu'il est lié à $p^{(1)}$ par la relation bien simple

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1 \; .$$

Mais au sujet de cette relation une remarque est nécessaire; car elle n'est pas vraie sans restriction, si par $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ on entend le genre de la courbe canonique (supposée irréductible), et le nombre des intersections *variables* de deux courbes canoniques. C'est ce que les exemples suivants nous montreront.

Reprenons à cet effet la surface du cinquième ordre qui a deux points de contact avec elle-même (surface dont nous avons parlé au n. 22). Les courbes canoniques sont ici les sections de la surface déterminées par les plans passant par les points singuliers; elles sont par suite ∞^1 courbes du genre $p^{(1)} = 2$; et pourtant on a $p^{(2)} = 0$, car deux courbes de ce faisceau n'ont aucune intersection *variable*. La relation précédente $p^{(2)} = p^{(1)} - 1$ est donc en défaut.

Un autre exemple, relatif à une valeur plus élevée de p_g, ne sera pas inutile. Désignons par 1, 2, ..., 8 les huit intersections de trois surfaces du second ordre, et construisons une surface F^6 d'ordre 6, qui ait un point multiple d'ordre trois dans 1, 2, ..., 7, et un point simple dans 8; cela est toujours possible. Or on voit que les surfaces d'ordre $6 - 4 = 2$ adjointes à F^6, sont les surfaces du second ordre qui passent par 1, 2,... 7, et en conséquence par 8. Ici l'on a $p_g = 3$, $p^{(1)} = 4$, $p^{(2)} = 2 = p^{(1)} - 2$.

On voit par ces exemples que la relation $p^{(2)} = p^{(1)} - 1$ est en défaut, et doit être remplacée par l'inégalité $p^{(2)} < p^{(1)} - 1$, toutes les fois que

---

([61]) *Zur Theorie...*, ibid., pag. 520.

([62]) Ainsi, par exemple, pour la surface générale d'ordre 5 on a

$$p_g = 4 \, , \qquad p^{(1)} = 6 \, .$$

([63]) NOETHER, l. c.

([64]) Loc. cit.

le système canonique possède sur la surface des points-base en dehors des points multiples, ou, ce qui revient au même, s'il contient des courbes exceptionnelles de la seconde espèce.

25. - Définition numérique de $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$.

Les nombres invariants d'une surface dont nous avons parlé jusqu'ici, à savoir p_g, $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$, ont été introduits par la considération directe du système canonique et de ses caractères géométriques. Or, à côté de ces invariants *géométriques*, il convient, dans la théorie des surfaces, de considérer d'autres invariants définis par des expressions numériques formées avec les caractères d'un système quelconque de courbes sur la surface. Ces nouveaux invariants, que nous appellerons *numériques* ou *virtuels*, sont tels, d'ordinaire, qu'ils coïncident avec les invariants géométriques correspondants, lorsque sont remplies certaines conditions de *régularité* de la surface. Ils fournissent au contraire de nouveaux caractères d'invariance pour les surfaces *irregulières*, et parfois ils peuvent remplacer les invariants géométriques, dans les cas où la définition de ceux-ci n'a plus de sens. Le plus important de ces invariants numériques est le (premier) *genre numérique* p_n, qui correspond à p_g; nous y consacrerons quelques uns des paragraphes suivants. Occupons-nous d'abord des caractères numériques $p_n^{(1)}$, $p_n^{(2)}$, qui se présentent à côté de $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$.

Partons de l'hypothèse que le système canonique $|K|$ de notre surface existe ($p_g > 0$), et soit irréductible; et considérons sur la surface un système quelconque $|C|$ irréductible, ainsi que son système adjoint $|C'|$. Pour plus de simplicité supposons encore que $|C|$ et $|C'|$ sur notre surface n'aient pas de points-base, et que la surface ne possède aucune courbe exceptionnelle: on aura alors exactement

$$|K| = |C' - C| \,.$$

On peut calculer le genre $p_n^{(1)}$ et le degré $p_n^{(2)}$ de $|K|$ en fonction des caractères analogues π, n de $|C|$ et π', n' de $|C'|$, pourvu que l'on recoure aux relations du n. 9. Ainsi l'on trouvera aisément

$$(1) \qquad \begin{cases} p_n^{(1)} = \pi' + n - 2\pi + 3 \,, \\ p_n^{(2)} = n' + n - 4\pi + 4 \,. \end{cases}$$

Dans les hypothèses où nous nous sommes placés, les deux caractères $p_n^{(1)}$ et $p_n^{(2)}$ ne différent pas de $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$, et jouissent par suite de la propriété d'invariance. Mais il faut remarquer que les relations précédentes gardent un sens déterminé, lors même qu'on fait abstraction des restrictions imposées au système canonique $|K|$. Ce système peut bien faire défaut ($p_g = 0$), ou, quoique existant, il peut différer du système $|C' - C|$ par la présence de courbes exceptionnelles, il peut même être réductible; néanmoins on pourra toujours construire les expressions (1) à l'aide d'un système $|C|$ et de son adjoint $|C'|$. Mais on ne peut plus affirmer maintenant que les valeurs (1) coïncident avec les valeurs de $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ qui peuvent même n'avoir aucun sens. Il y a donc à examiner si, même dans ce cas, les expressions (1) gardent la propriété d'invariance. Il en est bien ainsi. On démontre en effet le théorème suivant [65]:

Soit F une surface ne possédant aucune courbe exceptionnelle, et $|C|$ un système quelconque qui n'ait pas de points-base sur F; les valeurs $p_n^{(1)}$, $p_n^{(2)}$, calculées à l'aide des caractères du système $|C|$, ne changent pas si l'on remplace ce système par un autre satisfaisant à la même condition; $p_n^{(1)}$, $p_n^{(2)}$ sont par suite deux *invariants* de la surface [66]. *Ils satisfont toujours à la relation*

$$p_n^{(2)} = p_n^{(1)} - 1 .$$

Que l'on ait au contraire une surface F possédant des courbes exceptionnelles; on pourra de même définir les caractères $p_n^{(1)}$, $p_n^{(2)}$ de F, pourvu que l'on parvienne à transformer birationnellement la surface F en une autre F' qui n'ait pas de telles courbes; car il suffira ensuite d'envisager, par exemple, sur F' le système des sections planes. Or cette transformation de F en F' est possible dans bien de cas, même si le système canonique fait défaut ($p_g = 0$). Pas toujours pourtant; il y a en effet des surfaces (par exemple, les surfaces rationnelles et les surfaces réglées) qui possèdent certainement des courbes exceptionnelles, en quelque manière qu'on les transforme. Pour ces surfaces les définitions de $p_n^{(1)}$ et $p_n^{(2)}$ que nous avons données, sont en défaut. On pourrait vraiment les modifier de sorte qu'elles s'étendent aussi à ces cas; mais il ne convient pas de nous arrêter ici sur des recherches qui sont encore incomplètes.

---

(65) ENRIQUES, *Introduzione...*, n. 41.

(66) Sur la surface du cinquième ordre ayant deux contacts avec elle-même (nn. 22, 24) un système tel que $|C|$ est fourni par les sections planes de la surface ($\pi = 6$, $n = 5$; $\pi' = 12$, $n' = 16$); on trouvera $p_n^{(1)} = 2$, $p_n^{(2)} = 1$, tandis qu'on avait $p^{(1)} = 2$, $p^{(2)} = 0$.

Un autre exemple digne de remarque nous est donné par la surface, du sixième ordre qui passe deux fois par les six arêtes d'un tetraèdre. Cette surface dont nous aurons à parler plus tard, n'a pas de systèmes canonique ($p_g = 0$), et par suite $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ n'ont aucun sens; pourtant si l'on part du système des sections planes de la surface ($\pi = 4$, $n = 6$; $\pi' = 4$, $n' = 6$) on trouve $p_n^{(1)} = 1$, $p_n^{(2)} = 0$.

26. - Le genre numérique.

Nous allons maintenant définir un nouvel invariant numérique d'une surface, qui jouit aussi d'une grande importance.

Partons d'un système $|C|$ situé sur la surface, et de son système adjoint $|C'|$. Nous avons remarqué jadis (n. 16) que la série $g_{2\pi-2}$ découpée par $|C'|$ sur la courbe générale C de $|C|$, n'est pas nécessairement complète; au contraire elle peut avoir un certain défaut δ_0, et alors sa dimension se réduit à $\pi - 1 - \delta_0$ (et la dimension de $|C'|$ se réduit à $p_g + \pi - 1 - \delta_0$).

De même les séries découpées par les systèmes $|C'+C|$, $|C'+2C|$,... sur la courbe peuvent avoir des défauts positifs δ_1, δ_2, ... La succession des nombres positifs δ_0, δ_1, δ_2, ... n'est pas pourtant illimitée, car nous savons (n. 19) qu'on peut toujours choisir un nombre i assez élevé, pour que les systèmes $|C'+iC|$, $|C'+(i+1)C|$,... découpent sur C une série complète. Il y a donc lieu à considerer la somme

$$\Delta = \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_{i-1}$$

formée avec les défauts des séries découpées sur la courbe générale d'un système $|C|$ par les systèmes $|C'|$, $|C'+C|$,... qui sont adjoints à $|C|$, $|2C|$,....

Eh bien, cette somme Δ, qui est tout-à-fait déterminée par le système $|C|$, ne change pas lorsqu'on remplace le système $|C|$ par un autre système quelconque de la surface; en d'autres termes, Δ est un *nouvel invariant* de la surface ([67]). Bien que Δ lui-même entre dans plusieurs questions, toutefois en nous conformant à l'usage établi, nous introduirons au lieu de Δ un nouveau caractère, le *genre numérique* p_n, qui est défini par la relation

$$p_g - p_n = \Delta\,.$$

On obtient donc le genre numérique d'une surface en retranchant du genre géométrique la somme des défauts des séries, qui sont découpées sur la courbe générale d'un système linéaire par les systèmes adjoints à celui-ci et à ses multiples.

D'après cette définition on a

$$p_n \leqslant p_g\;;$$

p_n peut même être négatif, tandis que p_g ne l'est jamais.

([67]) ENRIQUES, *Introduzione...*, n. 40.

Par exemple une surface réglée ayant les sections planes de genre π, a, comme nous avons remarqué, $p_g = 0$; de plus, si $|C|$ est le système des sections planes, on trouve $\delta_0 = \pi$, $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = 0$, et par suite $\Delta = \pi$, $p_n = -\pi$; *le genre numérique d'une surface réglée est le genre des sections planes de celle-ci précédé du signe négatif.*

La définition de p_n que nous venons de donner, peut aussi se présenter sous la forme projective; nous verrons par là que ce nouveau caractère ne se distingue pas du genre numérique introduit par CAYLEY, ZEUTHEN et NOETHER ([68]), et cela donnera raison du nom que nous avons attribué à p_n.

Il suffit, à cet effet, de supposer que le système $|C|$, dont nous nous servons pour calculer Δ, soit formé par les sections planes d'une surface F de l'espace ordinaire, dont nous envisageons, à présent, les caractères projectifs, l'ordre n, etc. Les systèmes $|C'|$, $|C'+C|$, ..., $|C'+iC|$ sont alors découpés sur F par les surfaces Φ^ν d'ordre $\nu = n-3$, $n-2$, ..., $n-3+i$ adjointes à F. La remarque d'après laquelle les systèmes $|C'+iC|$, $|C'+(i+1)C|$,... découpent sur C une série complète (pour i assez élevé), se traduit maintenant dans la propriété du système des Φ^ν de découper sur un plan général *toutes* les courbes d'ordre ν adjointes à la section de F, lorsque $\nu \geqslant n-3+i$; tandis que pour les valeurs de $\nu < n-3+i$ les Φ^ν découpent sur le plan une partie seulement des courbes adjointes, si δ_{i-1}, δ_{i-2}, ... sont supérieurs à zéro. Or les courbes d'ordre ν adjointes à la section plane générale de F forment un système qui a la dimension

$$\varrho_\nu = \binom{\nu+2}{2} - 1 - k\,,$$

où k est une constante qui dépend seulement des singularités de la section nommée, c'est-à-dire des courbes multiples de la F; ν peut avoir une valeur quelconque $\geqslant n-3$. Il s'ensuit (par un calcul bien simple) que la dimension du système des Φ^ν pour $\nu \geqslant n-3+i$ est

$$r_\nu = \binom{\nu+3}{3} - 1 - k\nu + k'\,, \tag{1}$$

où k' est une nouvelle constante qui dépend des courbes et des points multiples isolés de F. Le second membre de la (1), pour les valeurs de $\nu < n-3+i$, ne fournit plus (en général) la dimension exacte, *effective*,

([68]) Voir les citations au n. 4.

du système des Φ^ν (car alors il faut faire attention aux défauts δ_{i-1}, $\delta_{i-2}, \ldots$); il fournit seulement un caractère qu'on pourrait appeler *dimension virtuelle* (numérique), et qui coïncide avec la dimension *effective* seulement dans le cas où $\delta_{i-1} = \delta_{i-2} = \ldots = 0$.

Précisément on trouve, sans difficulté, que la dimension effective du système des Φ^{n-4} est

$$r_{n-4} = \binom{n-1}{3} - 1 - k(n-4) + k' + \sum_0^{i-1} \delta_h ,$$

d'où l'on déduit sur le champ (en ayant égard à la définition $p_g - p_n = \sum\limits_0^{i-1} \delta_h$):

$$p_n = \binom{n-1}{3} - k(n-4) + k' .$$

Cette relation s'énonce par le théorème:

Le genre numérique d'une surface n'est autre chose que la dimension virtuelle du système des surfaces adjointes d'ordre $n-4$, *augmentée d'une unité.*

C'est précisément cette dimension augmentée de 1 qui, d'après les auteurs cités, fournit la définition de p_n.

Au sujet des considérations qui précèdent il ne sera pas inutile d'ajouter quelques remarques.

Nous sommes parvenus à la rélation (1) sans préciser les singularités (courbes et points multiples) de la surface F, qu'on avait à considérer; k et k' dépendent de ces singularités, il est vrai, mais les expressions de k et k' en fonction de celles-ci n'ont aucune importance, du moins dans les considérations théoriques que nous venons de faire. Il en serait autrement si l'on voulait calculer en effet p_n pour une surface donnée. Mais même dans ce cas on pourrait éviter la determination directe de k et k', si l'on parvenait à déterminer par une voie quelconque les dimensions des systèmes des Φ^ν en correspondance aux valeurs assez élevées de ν; car nous venons de voir, en conclusion, que *lorsque* ν *parcourt la série croissante des nombres entiers* (à partir d'une certaine limite), *ces dimensions parcourent une progression arithmétique du troisième ordre, laquelle prolongée aussi aux valeurs inférieures de* ν, *contient* $p_n - 1$ *parmi ses termes.*

A la même conclusion arrivent aussi CAYLEY et NOETHER directement, en calculant les expressions de k et k' au moyen des singularités de la surface, et en les substituant dans la formule (1) (*formule de postulation*) ([69]).

([69]) Voir à ce propos: NOETHER, *Sulle curve multiple di superficie algebriche*, « Annali di Matem. », serie II, t. 5° (1871), pag. 172.

Dès que ce calcul est fait, une voie se présente pour démontrer l'invariance de p_n; il suffit en effet de refaire un calcul analogue avec les caractères d'une surface transformée de F, et de comparer les résultats. C'est la voie que les auteurs cités ont suivie. Nous avons remarqué plus haut les difficultés qu'on y rencontre; nous venons de voir maintenant comment on peut les éviter.

27. - Deux nouvelles définitions du genre numérique; la série caractéristique d'un système linéaire.

La définition que nous avons donnée plus haut du caractère $p_g - p_n$, à l'aide d'un système $|C|$ et du système adjoint $|C'|$, peut même se présenter sous la forme suivante.

La série que $|C'|$ découpe sur la courbe général de $|C|$ peut avoir, nous l'avons dit, un certain défaut δ_0. Ce défaut ne reste pas invariable en général, lorsqu'on remplace le système $|C|$ et son adjoint $|C'|$, par un nouveau système $|D|$ et par son adjoint $|D'|$. Considérons toutes les valeurs que δ_0 peut prendre en correspondance avec les différents systèmes situés sur la surface. On démontre que ces valeurs ont un *maximum*, qui est naturellement un invariant de la surface; mais ce n'est pas un nouvel invariant; au contraire ce maximum est précisément $p_g - p_n$. On a donc le théorème ([70]):

Le défaut de la série découpée sur la courbe générale d'un système linéaire par le système adjoint, peut dépendre du système que l'on choisit sur la surface; mais dans tous les cas ce défaut atteint un maximum, qui est égal à la différence entre les genres géométrique et numérique de la surface.

Si l'on compare la définition de $p_g - p_n$ qui résulte ainsi, avec celle que nous avons donnée ci-dessus, on voit qu'on peut choisir toujours sur une surface un système $|D|$ tellement, que les séries découpées sur la courbe D par $|D'+D|$, $|D'+2D|$,... résultent complètes ([71]). On peut même démontrer qu'on parvient à un tel système $|D|$, en prenant un multiple assez élevé d'un système $|C|$ quelconque de la surface.

Dans la dernière définition de $p_g - p_n$ on fait attention à la série découpée par $|C'|$ sur C. Or, sur la courbe C on trouve une autre série remarquable, que nous avons définie plus haut (n. 7); c'est la *série carac-*

([70]) ENRIQUES, *Introduzione...*, n. 40. On peut vérifier ce théorème sur les surfaces *hyperelliptiques* ($p_g = 1$, $p_n = -1$); voir à ce sujet HUMBERT, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques*, l. c., nn. 130, 144.

([71]) ENRIQUES, l. c.; pour les surfaces hyperelliptiques voir HUMBERT, l. c., n. 144. Pour les surfaces reglées voir ci-dessus, n. 26.

téristique g_n^{r-1} découpée sur la courbe générale du système $|C|$ ∞^r, par les autres courbes du système. Nous allons maintenant nous occuper de cette série; sera-t-elle toujours complète? ou bien, dans le cas contraire, qu'est-ce qu'on peut dire de son défaut?

On suppose naturellement ici que le système $|C|$ soit complet; car, dans l'hypothèse contraire, si $|C|$ était contenu dans un système $\infty^{r+\delta}$ du même degré n, la série caractéristique g_n^{r-1} de $|C|$ serait contenue à son tour dans la série caractéristique $g_n^{r+\delta-1}$ du nouveau système, et aurait par suite un défaut $\geqslant \delta$. Or, si $|C|$ est complet, la série caractéristique peut être complète, ou bien ne l'être pas; cela dépend de la surface sur laquelle le système est situé. C'est le premier cas qui se présente, par exemple, si la surface est rationnelle; nous l'avons remarqué plus haut pour les systèmes de courbes planes (n. 11), et il s'agit ici naturellement d'une propriété invariable par rapport aux transformations birationnelles. La même propriété est verifiée sur les surfaces générales de l'ordre n, etc. Considérons au contraire une surface réglée irrationnelle, qui ne soit pas un cône, par exemple la surface du quatrième ordre ayant deux droites directrices doubles; les sections planes de cette surface forment bien un système linéaire complet, et pourtant la série caractéristique g_4^2 n'est pas complète; au contraire elle a le défaut 1. Quel est donc le lien qui passe entre le défaut de la série caractéristique et les invariants d'une surface donnée?

Si l'on considère plusieurs systèmes linéaires complets sur une même surface, et l'on fait attention aux défauts de leurs séries caractéristiques, on trouvera parfois que ces défauts diffèrent l'un de l'autre. Que l'on prenne le maximum parmi les défauts qui correspondent à tous les systèmes de la surface; ce maximum, qui est fini et existe toujours (comme on peut le démontrer), est naturellement un invariant de la surface. Sera-t-il un invariant nouveau? On pourrait le penser. Eh bien, il n'en est pas ainsi; car on montre que ce maximum est précisément égal à la différence $p_g - p_n$. On a donc le théorème suivant ([72]):

Le défaut de la série caractéristique d'un système complet situé sur une surface, peut dépendre du système que l'on choisit sur la surface; mais dans tous les cas ce défaut atteint un maximum, qui est égal à la différence entre les genres géométrique et numérique de la surface.

([72]) Castelnuovo, *Alcuni risultati...*, n. 7; on y trouvera la démonstration seulement pour le cas $p_g = p_n$; l'Auteur se propose d'exposer prochainement la démonstration complète. On peut vérifier le théorème sur les surfaces hyperelliptiques (Humbert, l. c., n. 114), et sur les surfaces réglées (Segre, « Mathem. Annalen », 34, n. 3).

28. - Les surfaces régulières.

Les deux théorèmes qui précèdent donnent sur le champ les propriétés fondamentales des surfaces qui ont $p_g = p_n$, surfaces que nous appellons *régulières.* On a en effet:

a) *Sur une surface régulière le système adjoint à un système linéaire quelconque (irréductible) découpe sur la courbe générale de celui-ci la série canonique complète;* il a la dimension $p_g + \pi - 1$, si π est le genre de la dernière courbe.

b) *Sur une surface régulière la série caractéristique de tout système linéaire complet est elle-même complète.*

Chacun des deux théorèmes peut servir à caractériser une surface régulière. Pour ce qui concerne le premier, on peut même dire davantage, car *en général la connaissance d'un seul système* ∞^r ($r \geqslant 3$), *sur les courbes duquel le système adjoint découpe la série canonique complète, est suffisante pour affirmer que la surface est régulière* ([73]). Les mots *en général* se rapportent aux restrictions suivantes qu'on rencontre dans la démonstration: 1) le système n'a pas de courbes fondamentales propres; 2) les courbes du système qui passent par un point de la surface, ne passent pas en conséquence par d'autres points variables avec celui-ci. Est-ce qu'il y a là des restrictions nécessaires?

29. - Sur quelques classes de surfaces irrégulières.

La nécessité de considérer les deux caractères p_g et p_n d'une surface, dépend de cela qu'il y a de nombreux exemples de surfaces (*irrégulières*) ayant $p_g > p_n$. Nous avons déjà cité à ce propos la surface réglée à sections de genre π, pour laquelle on a $p_g = 0$, $p_n = -\pi$. Mais on connaît maintenant deux familles très étendues de surfaces irrégulières.

La première famille, qui comprend aussi les surfaces réglées, se compose des surfaces qui contiennent un faisceau irrationnel de courbes, c'est-à-dire un système ∞^1 pas linéaire, tel que par tout point général de la surface passe une seule courbe du système. *La connaissance d'un faisceau irrationnel sur une surface suffit toujours pour affirmer que la surface est irrégulière.* En d'autres termes: *sur une surface régulière tout faisceau de courbes est un système linéaire* ([74]).

([73]) CASTELNUOVO, *Alcuni risultati...*, n. 6.

([74]) CASTELNUOVO, *Alcuni risultati...*, n. 10. La connaissance d'un faisceau irrationnel suffit aussi pour reconnaître que la surface possède des intégrales de différentielles totales de première espèce.

Pour construire la surface la plus générale contenant un faisceau irrationnel, il suffit de transformer une surface réglée irrationnelle à l'aide d'une transformation $(1, n)$ rationnelle en un seul sens (exprimant les coordonnées d'un point de la surface réglée par des fonctions rationnelle des coordonnées d'un point de la surface transformée ([75])).

Une seconde famille de surfaces irrégulières s'obtient en considérant les surfaces dont les points correspondent, élément par élément, aux couples de points d'une courbe quelconque de genre $p > 0$. Ainsi, si l'on part d'une courbe elliptique ($p = 1$), on parvient à la surface réglée elliptique ($p_n = 0$, $p = -1$); si l'on part de la courbe de genre $p = 2$, on obtient ([76]) une surface hyperelliptique ($p_g = 1$, $p_n = -1$); etc.

Il existe certainement d'autres familles de surfaces irrégulières, mais jusqu'à présent aucune, à ce que nous croyons, n'a formé le sujet d'une étude particulière.

30. - Sur de nouveaux systèmes invariants qui appartiennent à une surface.

Nous avons parlé jusqu'à présent d'un seul système invariant situé sur une surface donnée, à savoir du système canonique $|K|$. Mais on peut tout de suite introduire de nouveaux systèmes invariants, car il suffit de considérer les multiples $|K_i| = |iK|$ du système canonique. Il ne vaudrait pas même la peine de faire attention à ces nouveaux systèmes, s'il n'arrivait parfois de rencontrer des systèmes analogues sur des surfaces qui ne possèdent pas de système canonique ($p_g = 0$). Dans ce cas pourtant on ne peut définir $|K_i|$ comme un multiple de $|K|$, car celui-ci n'existe plus; mais il suffit de recourir à la définition de $|K|$, laquelle s'étend sur le champ. Nous avons démontré que, si $|C|$ est un système quelconque sur une surface, et $|C'|$ est son adjoint, le système résiduel $|K| = |C' - C|$ ne dépend pas du système $|C|$ d'où l'on part; de même l'on voit directement que le système $|K_i| = |iC' - iC|$ ne dépend pas de $|C|$ (à des courbes exceptionnelles près), et peut donc s'obtenir aussi en retranchant le système $|iD|$ du système $|iD'|$, où $|D'|$ est l'adjoint de $|D|$ ([77]). Le système $|K_i|$ jouit donc de la propriété d'invariance; on va l'appeler *système i-canonique*; i est un nombre entier, positif, quel-

([75]) On trouvera des exemples de telles surfaces dans une Note de M. CASTELNUOVO, *Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie*, « Rendic. Istituto Lombardo », serie II, vol. 24, pag. 135.

([76]) HUMBERT, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques*, « Journal de Mathém. », 4e série, t. IX; voir aussi pour $p=3$ deux Notes du même auteur dans les « Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc. », février 1895.

([77]) ENRIQUES, *Introduzione...*, n. 39.

conque. Outre que par la relation $|K_i| = |iC' - iC|$, ce système est aussi défini par la relation $|K_i| = |C^{(i)} - C|$ (à des courbes exceptionnelles près), où $C^{(i)}$ est le système que l'on obtient de $|C|$ en appliquant de suite i fois l'opération d'adjonction. Le système *i-canonique* nous fournit de nouveaux caractères invariants de la surface; tels sont par exemple le nombre P_i des courbes i-canoniques qui sont linéairement indépendantes, le genre de ces courbes, etc. Pour $i = 1$, $P_i = P_1$ nous donne le genre géométrique p_g de la surface; pour $i = 2$ on a un caractère P_2 qu'on pourrait appeler *bigenre*, et qui va jouer (comme on verra) un rôle fondamental dans la théorie des surfaces rationnelles, etc. Quelques-uns de ces nouveaux caractères peuvent s'exprimer en fonction des anciens; pas tous pourtant; c'est ce que nous allons reconnaître au sujet de P_2.

Mais remarquons d'abord que, si une surface F de l'ordre n est donnée (par ses caractères projectifs) dans l'espace ordinaire, le système i-canonique sur F peut être découpé par des surfaces de l'ordre $i(n-4)$, qui se comportent d'une façon *convenable* le long des courbes multiples et dans les points multiples de F. Préciser le comportement des surfaces *i-adjointes* dans le cas général, exigerait beaucoup de détails relatifs aux singularités élevées; qu'on nous permette de nous borner au cas $i = 2$, dans l'hypothèse que la surface F ne possède d'autres singularités qu'une courbe double, et des points d'ordre $k = 3, 4, \ldots$, qui sont d'ordre $k(k-1)/2$ pour la courbe double. *Dans ce cas le système bicanonique est découpé par les surfaces d'ordre* $2(n-4)$ *qui passent deux fois par la courbe double de* F.

Revenons maintenant aux relations entre le système canonique $|K|$ et le système i-canonique $|K_i|$. Si le premier système existe, le second existera de même, quel que soit i, car on a $|K_i| = |iK|$, et en conséquence $P_i \geqslant p_g$; donc, si $p_g > 0$ on a aussi $P_i > 0$. Supposons, au contraire, qu'on ait $p_g = 0$; $|K|$ n'existe plus. Alors il y a à distinguer deux cas. Il peut arriver en effet que $|K_i|$ n'existe non plus, quel que soit i; c'est ce qu'on peut vérifier tout de suite sur le plan, sur une surface réglée quelconque, plus généralement sur toute surface contenant un système $|C|$ de genre π, dont deux courbes ont plus que $2\pi - 2$ intersections variables; dans cette hypothèse, en effet, le système $|iC|$ ne peut être contenu dans le système $|iC'|$. Mais il peut arriver au contraire que $|K_i|$ existe, en relation avec quelques valeurs de i, lors même que $|K|$ n'existe pas; en d'autres termes, il peut arriver que l'on ait $p_g = 0$, $P_i > 0$ $(i > 1)$. C'est là une propriété singulière, qui n'a pas son analogue dans la théorie des courbes algébriques. Qu'elle se présente parfois, c'est ce que nous allons reconnaître sur quelques exemples, en nous bornant à la valeur $i = 2$.

Un premier exemple, bien simple, est fourni par *la surface du sixième* *ordre qui passe deux fois par les six arêtes d'un tetraèdre*, et en conséquence trois fois par les sommets de celui-ci ([78]); la surface a le genre géométrique $p_g = 0$, car il n'existe pas de surface du second ordre passant simplement par les six arêtes. Il existe au contraire une surface bi-adjointe de l'ordre 4, qui est formée par les quatre faces du tetraèdre; par suite l'on a $P_2 = 1$. La dernière surface ne découpe pas la surface donnée en dehors des lignes multiples; on dira donc que la courbe bicanonique correspondante a l'ordre zéro.

Voici un second exemple ([79]). Considérons dans l'espace une droite d, une section conique k ne rencontrant pas la droite, et quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 en de positions générales. Construisons maintenant une surface de l'ordre 7 qui passe trois fois par d et deux fois par k, avec la condition ultérieure que deux nappes de la surface touchent en A_i le plan $A_i d$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. On démontre tout d'abord qu'une telle surface existe; ensuite qu'elle a le genre $p_g = 0$ et le bigenre $P_2 = 2$; enfin que les courbes bicanoniques sont ∞^1 courbes du quatrième ordre et de genre 1, découpées par les plans passant par la droite d.

31. - Sur quelques relations entre les caractères invariants.

Les caractères principaux d'une surface que nous venons de définir $(p_g, p_n, P_2, p^{(1)})$, quoique indépendants deux à deux, satisfont à quelques inégalités, qu'il est bon de connaître. Nous avons remarqué déjà les deux suivantes, qui découlent de la définition,

$$p_g \geqslant p_n , \qquad P_2 \geqslant p_g .$$

On peut même dire davantage, si l'on fait attention à ce que le système bicanonique est l'adjoint du système canonique; en effet, si l'on suppose que celui-ci soit irréductible, on obtient, lorsque $p_g > 1$,

$$p_g + p^{(1)} \geqslant P_2 \geqslant p_n + p^{(1)} .$$

Cette relation, qui devient une égalité pour les surfaces régulières, ne subsiste pas toujours si $p_g = 1$, même si l'on recourt à la définition virtuelle de $p^{(1)}$. Précisément, en nous bornant au cas $p_g = p_n = 1$ ([80]),

---

([78]) ENRIQUES, *Introduzione...*, n. 39; CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero*, n. 15.
([79]) CASTELNUOVO, l. c.
([80]) Voir pour ce cas ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere uno*, nn. 4, 5.

on trouve

$$P_2 \geqslant p^{(1)} + 1 , \qquad \text{ou} \qquad P_2 = p^{(1)} ,$$

selon qu'il existe, ou n'existe pas, une courbe canonique d'ordre > 0 (en dehors des courbes exceptionnelles).

Par suite le minimum de $p^{(1)}$ pour les surfaces régulières de genre 1, est 1. Il y a deux espèces de telles surfaces pour lesquelles le minimum est atteint; elles correspondent aux valeurs $P_2 \geqslant 2$, $P_2 = 1$ ([81]). Les surfaces de la seconde espèce sont surtout remarquables. On peut les représenter sur une surface F, d'un certain ordre n, ne possédant aucune courbe exceptionnelle; la F n'est pas rencontrée par la surface adjointe de l'ordre $n-4$, en dehors des courbes multiples. Sur F tout système linéaire complet $|C|$, qui n'a pas de points-base, jouit d'une propriété remarquable; *si π est le genre de $|C|$, la dimension r de $|C|$ a la même valeur π, et deux courbes C se rencontrent en $2\pi - 2$ points* ($r=\pi$, $n=2\pi-2$). *Le système $|C|$ est l'adjoint de lui-même.*

Revenons maintenant aux relations d'inégalité entre les caractères d'une surface, et considérons p_g et $p^{(1)}$, en supposant, par simplicité, que le système canonique soit irréductible ($p_g > 1$).

M. NOETHER ([82]) a démontré qu'on a toujours

$$p^{(1)} \geqslant 2p_g - 3 .$$

Si le minimum de $p^{(1)}$ est atteint, les courbes canoniques sont hyperelliptiques (et *viceversa*); elles se rencontrent deux à deux en

$$\frac{p^{(1)}-1}{2} = p_g - 2$$

couples de points conjugués. Par suite, si $p_g > 2$, on peut prendre comme équation de la surface (ou d'une transformée de celle-ci)

$$z^2 = f(x, y) ,$$

où f est un polynôme. On peut même préciser davantage ([83]), car *on peut s'arranger de manière que:*

([81]) Un exemple de surfaces de la première espèce est fourni par la surface du cinquième ordre du n. 23. Quant aux surfaces de la seconde espèce, on a tout d'abord la surface générale du quatrième ordre, ensuite la surface du sixième ordre qui passe doublement par l'intersection de deux surfaces de l'ordre 2 et 3; etc.

([82]) *Zur Theorie...*, « Math. Ann. », 8, pag. 252.

([83]) ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche*, « Rendic. Accad. Lincei », 1896 [questo volume, XIV].

1) *ou bien f ait le degré* 6 *en x (et le degré totale $2n > 6$),*
2) *ou bien f ait le degré total* 8 *ou* 10 *(respect. $p_g = 3, 6$).*

Dans le cas 1) les plans $y =$ const. découpent sur la surface un faisceau de courbes du genre 2.

Qu'on écarte maintenant les surfaces pour lesquelles

$$p^{(1)} = 2p_g - 3 \ ;$$

on démontre alors que $p^{(1)}$ ne peut descendre au dessous de $3p_g - 6$, à savoir

$$p^{(1)} \geqslant 3p_g - 6 \ ;$$

et précisément ([84]):

Toute surface ayant

$$p^{(1)} = 3p_g - 6 \qquad\qquad (p_g > 3)$$

peut être représentée par une équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

du degré 4 par rapport à x, y (ou par une transformée de celle-ci); sauf dans le cas de certaines surfaces du genre $p_g = 4$ (surface générale du cinquième ordre), $p_g = 5$, $p_g = 7$. Dans le cas général, les plans $z =$ const. découpent sur la surface un faisceau de courbes du genre 3 (et d'ordre 4).

CHAPITRE VI.

SYSTÈMES LINÉAIRES SPÉCIAUX ET NON-SPÉCIAUX. EXTENSION AUX SURFACES DU THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH

Avant de quitter la théorie générale des surfaces, il faut que nous consacrions quelques mots aux questions qui se rapportent à l'extension du théorème de RIEMANN-ROCH aux surfaces.

Mais d'abord examinons quelle est la vraie nature de ce théorème, lorsqu'on se borne aux courbes.

([84]) CASTELNUOVO, *Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie*, Nota II, « Rendic. Istit. Lombardo », 1896.

32. - Séries spéciales et non-spéciales sur une courbe.

Par rapport à la série canonique g_{2p-2}^{p-1} appartenant à une courbe de genre p, les séries situées sur la même courbe se répartissent en deux familles ([85]). À la première famille appartiennent les séries qui sont contenues dans la série canonique, et même celle-ci; on les appelle ***séries spéciales***; les séries spéciales ont naturellement l'ordre $\leqslant 2p-2$ et la dimension $\leqslant p-1$. L'autre famille est formée par les séries qui ne sont pas contenues dans la série canonique; ce sont les ***séries non-spéciales***, dont l'ordre et la dimension n'ont pas de limite supérieure.

Si l'on veut voir clairement la différence qui passe entre ces deux familles, il convient de recourir aux séries complètes.

Soit g_n^r une série complète sur une courbe du genre p; alors:

1) *si g_n^r est non-spéciale, on a la relation*

$$r = n - p ,$$

qui permet de calculer un des trois caractères n, r, p à l'aide des autres;

2) *si, au contraire, g_n^r est spéciale, l'égalité précédente est à remplacer par l'inégalité*

$$r > n - p .$$

Et, inversement, si la dernière inégalité subsiste entre les caractères d'une série quelconque (complète ou incomplète), on peut affirmer que la série est spéciale.

La distinction que nous venons de faire, peut même se présenter sous la forme suivante. Regardons $n-p$ comme la *dimension virtuelle* (théorique) d'une série complète d'ordre n sur une courbe de genre p, et comparons la dimension virtuelle avec la *dimension effective* r que la série possède en effet. Alors nous voyons que, si la série est non-spéciale, les deux dimensions coïncident, et la série est, pour ainsi dire, ***régulière***; si au contraire la série est spéciale, la dimension effective est supérieure à la dimension virtuelle, et la série est irrégulière.

Pour une série spéciale complète g_n^r, il y a lieu à considérer la différence entre les deux dimensions

$$i = r - (n-p) = p - n + r .$$

On démontre que *i est précisément le nombre des groupes canoniques linéai-*

([85]) BRILL et NOETHER, *Ueber die algebraischen Functionen...*, « Math. Ann. », 7.

rement indépendants qui contiennent un groupe général de la série g_n^r. C'est là le théorème connu qui porte le nom de RIEMANN-ROCH. Le nombre i est un caractère de la série g_n^r, qu'on pourrait appeler le *degré de spécialité*; pour une série non-speciale on a $i = 0$, pour la série canonique g_{2p-2}^{p-1}, $i = 1$; etc.

En profitant de la notion des séries résiduelles (n. 9), on peut énoncer le théorème de RIEMANN-ROCH sous la forme suivante, qui est due à MM. BRILL et NOETHER, et qui se prête le mieux aux applications géométriques:

Toute série spéciale complète g_n^r *située sur une courbe de genre* p, *a, par rapport à la série canonique, une série résiduelle* $g_{n'}^{r'}$ *dont les caractères ont les valeurs suivantes*

$$n' = 2p - 2 - n\,, \qquad r' = p - 1 - (n - r) = i - 1\,.$$

33. - Quelques remarques sur les systèmes linéaires de courbes planes.

La répartition des séries en deux familles s'étend tout de suite aux systèmes linéaires de courbes sur une surface, et donne lieu à la notion de *systèmes spéciaux* et *systèmes non-spéciaux*, dont les premiers sont contenus dans le système canonique (et ont par suite la dimension $\leqslant p_g - 1$, le genre $\leqslant p^{(1)}$, ...), tandis que les seconds n'y sont pas contenus. Or on saurait s'attendre de trouver pour les systèmes non-speciaux une *régularité* analogue à celle, que nous avons rencontrée dans les séries non-speciales. Mais il en est tout autrement. C'est ce que nous allons reconnaître tout d'abord dans le cas le plus simple, sur le *plan* ($p_g = 0$), où tous les systèmes sont non-spéciaux.

Un système $|C|$ complet de courbes planes d'ordre m est entièrement défini, dès que l'on a fixé les points-base du système, et les ordres de multiplicité que les courbes C ont en ces points. Or, pour calculer la dimension de $|C|$, du moins avec quelque approximation, on peut d'abord évaluer le nombre des conditions, que chaque point-base, séparé des autres, présente aux courbes d'ordre m; on additionnera les nombres qui correspondent à tous les points-base, et on retranchera la somme du nombre $\frac{1}{2}m(m+3)$, qui exprime la dimension du système formé par toutes les courbes de l'ordre m. Désignons par ϱ le résultat de ce calcul; est-ce que ϱ nous fournira exactement la dimension r de $|C|$? Certainement si les points-base présentent des conditions toutes indépendantes aux courbes d'ordre m; c'est ce qui arrive, par exemple, s'il n'y a pas de points-base, ou si ceux-ci se trouvent en des points généraux du plan; on a alors la relation $r = \varrho$. Mais il n'en est plus ainsi, si ω parmi les conditions imposées par les points-base sont une conséquence des autres; car on trouve alors $r = \varrho + \omega$. Un exemple de ce cas nous est fourni par le système des courbes d'ordre m, qui passent par les $m\mu$ intersections d'une d'entre elles avec une courbe générale d'ordre $\mu < m$; on a en effet

$$r = \frac{(m-\mu)(m-\mu+3)}{2} + 1\,,$$

$$\varrho = \frac{m(m+3)}{2} - m\mu\,,$$

et, par suite,

$$\omega = r - \varrho = \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}\,.$$

Quoique le nombre ϱ puisse, dans bien de cas, différer de la dimension exacte r d'un système linéaire, il convient pourtant d'y faire attention, car il est un nouvel invariant du système (par rapport aux transformations birationnelles). Nous appelons ϱ la *dimension virtuelle* du système $|C|$, r la *dimension effective*. En conséquence nous répartissons les systèmes linéaires complets de courbes planes (qui sont tous non-spéciaux) en deux familles ([86]):

1) la première famille comprend les *systèmes réguliers*, pour lesquels la dimension effective est égale à la dimension virtuelle, $r = \varrho$; ils correspondent, en une certaine façon, aux séries non-spéciales (ou régulières) sur une courbe;

2) la seconde famille comprend les systèmes *surabondants*, dont la dimension effective surpasse la dimension virtuelle, $r = \varrho + \omega$; $\omega > 0$ est la *surabondance* du système. Il ne convient pas de regarder ces systèmes comme les analogues des séries spéciales; au contraire, ils en diffèrent par bien de propriétés. Par exemple, en cela que sur une courbe de genre zéro il n'y a pas de séries spéciales, tandis que sur le plan ($p_g = p_n = 0$) nous trouvons des systèmes surabondants; en cela, encore, que l'ordre et la dimension d'une série spéciale ne peuvent surpasser certaines limites, tandis que le degré, la dimension, le genre d'un système surabondant peuvent être aussi élevés, que l'on désire. Il convient plutôt de regarder la *surabondance*, comme une *cause d'irrégularité* d'une autre nature que la *spécialité*, considérée sur les courbes, bien qu'elle ait le même effet d'augmenter la dimension effective par rapport à la dimension virtuelle.

([86]) CASTELNUOVO, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane*, l. c., n. 1.

La distinction que nous avons faite entre les systèmes réguliers et surabondants, se traduit en une distinction entre les séries caractéristiques de ces systèmes. On a en effet le théorème ([87]):

Un système est régulier ou bien surabondant, selon que la série caractéristique du système est non-spéciale ou bien spéciale; d'où il s'ensuit, par exemple, qu'un système surabondant de courbes de genre π a le degré $\leqslant 2\pi - 2$ et la dimension effective $\leqslant \pi$ ([88]).

En général, si l'on désigne (comme d'ordinaire) par n et r le degré et la dimension effective d'un système complet, on a pour un système régulier l'égalité

$$\pi - n + r - 1 = 0\,, \tag{1}$$

tandis que pour les systèmes surabondants on a

$$\pi - n + r - 1 = \omega > 0 \tag{2}$$

(ω étant la surabondance);

dans tous les cas

$$\varrho = n - \pi + 1 \tag{3}$$

est la dimension virtuelle du système.

34. - Systèmes réguliers sur une surface.

La distinction que nous venons de faire entre les systèmes *réguliers* et *surabondants* sur le plan (ou sur les surfaces rationnelles), peut maintenant se transporter sur une surface quelconque. Ici l'on rencontre pourtant une complication, qui dépend de la répartition des systèmes en spéciaux et non-spéciaux, dont nous avons parlé plus haut. Pour éviter cette difficulté nous nous bornons tout d'abord aux systèmes *non-spéciaux* (à savoir, aux systèmes qui ne sont pas contenus dans le système canonique).

Soit $|C|$ un système non-spécial, complet, dont nous désignerons les caractères par n, r, π, suivant l'habitude. Envisageons l'expression

$$\pi - n + r - 1$$

que nous avons déjà considérée sur le plan. Elle peut prendre différentes

([87]) CASTELNUOVO, l. c., n. 18.

([88]) SEGRE, *Sui sistemi lineari*, « Circolo Matem. di Palermo », t. I, 1887.

valeurs, selon le système $|C|$ auquel elle se rapporte; mais on démontre ([89]) que parmi toutes ces valeurs il y a *un minimum, qui est précisément le genre numérique* p_n *de la surface* (pour le plan on a $p_n = 0$). Eh bien, nous appelons *régulier* tout système (non-spécial), dont les caractères satisfont à la relation

$$\pi - n + r - 1 = p_n \; ; \tag{4}$$

surabondant tout système pour lequel on a

$$\pi - n + r - 1 = p_n + \omega \, , \tag{5}$$

où $\omega > 0$ désigne la *surabondance* du système. On va considérer tout d'abord les systèmes réguliers, car ils sont les plus simples, et ils satisfont à des lois générales fort remarquables. En voici quelques unes ([90]).

La série caractéristique d'un système complet régulier a le défaut $p_g - p_n$, c'est-à-dire le défaut maximum qui appartient aux systèmes complets (n. 27).

Le système canonique découpe sur la courbe générale d'un système régulier une série complète, dont la dimension est $p_g - 1$, et l'ordre est $2\pi - 2 - n$; c'est la série résiduelle de la série caractéristique par rapport à la série canonique.

En particulier: *si la surface a le genre géométrique* $p_g = 0$, *la série caractéristique d'un système régulier est non-spéciale*; c'est ce qui arrive par exemple sur le plan, ou sur les surfaces réglées.

On peut construire un système régulier dont la dimension est aussi grande que l'on veut; à cet effet on commencera par construire dans l'espace ordinaire une surface F, qui soit en correspondance birationnelle avec la surface donnée, et qui n'ait pas de points multiples *isolés* (n. 15); ensuite on conduira les surfaces adjointes à F. On démontre que ces surfaces découpent sur F un système régulier, aussitôt que leur ordre est assez élevé. Si, par exemple, la F était une surface générale de l'ordre n, on verrait aisément que les surfaces générales d'un ordre quelconque $> n - 4$ découpent sur F un système régulier non-spécial.

La définition de la *surabondance* ω que nous avons donnée, est tout-à-fait arithmétique; nous sommes en mesure maintenant d'en reconnaître la signification géométrique et d'en justifier le nom.

Mais il faut d'abord que nous introduisons un nouveau caractère d'un

([89]) Pour les surfaces régulières on trouvera démontré ce théorème dans les *Ricerche di geometria...* de M. ENRIQUES, IV, 2; pour une surface quelconque voir CASTELNUOVO, *Alcuni risultati...*, n. 8. Il est à remarquer que ce théorème fournit une nouvelle définition de p_n.

([90]) CASTELNUOVO, l. c.

système linéaire quelconque $|C|$ (spécial ou non-spécial) sur la surface; caractère qui devient la *dimension virtuelle* du système (n. 33), dès que la surface est rationnelle, et qui par suite sera désigné dans tous les cas par le même nom.

Construisons à cet effet un système *régulier*, $|D|$, assez ample pour contenir $|C|$; c'est ce que nous pouvons faire de plusieurs façons. Pour déduire le système $|C|$ du nouveau système $|D|$, il faudra en général retrancher de $|D|$ une courbe γ convenable, et imposer certains points-base au système résiduel $|D-\gamma|$. Il se présente maintenant un moyen pour calculer la dimension r de $|C|$; car il suffit de retrancher de la dimension de $|D|$ le nombre des conditions qu'il faut imposer aux courbes D, pour qu'elles contiennent la courbe γ et les points-base nommés. Or, si nous nous bornons d'abord à une première approximation, nous pouvons supposer: 1) que la série découpée par $|D|$ sur la courbe γ soit complète et non-spéciale; 2) que les conditions imposées par les points-base nommés soient toutes indépendantes entre elles et des précédentes. En exécutant le calcul dans ces hypothèses nous parvenons à un résultat, ϱ, qui ne coïncide pas généralement avec la dimension vraie, *effective*, r de $|C|$, mais qui pourtant ne manque pas d'intérêt. On démontre en effet que l'on parvient au même résultat ϱ, si, dans les mêmes hypothèses, on calcule la dimension de $|C|$ en partant d'un système régulier quelconque, autre que $|D|$, qui contienne $|C|$. Par conséquent ϱ est un vrai caractère du système $|C|$; nous l'appellerons *la dimension virtuelle* de $|C|$. Il s'exprime du reste, aisément, à l'aide des autres caractères n, π de $|C|$, et de p_n, car on a

(6) $$\varrho = p_n + n - \pi + 1\,,$$

relation qui comprend, en particulier, la (3) du n. 33.

Cela posé, revenons maintenant à notre système $|C|$ non-spécial, dont nous désignons par r et ϱ les dimensions effective et virtuelle. Si nous comparons ces caractères à l'aide des relations (4), (5) et (6), nous trouvons sur le champ que, si $|C|$ est régulier, on a $\varrho = r$; si, au contraire, $|C|$ est surabondant, avec la surabondance ω, alors $\varrho < r$, et précisément:

$$r - \varrho = \omega\,.$$

Donc *la surabondance d'un système non-spécial est la différence entre la dimension effective et la dimension virtuelle du système,* d'accord avec ce que nous avons reconnu sur le plan.

Une autre interprétation, celle-ci tout-à-fait géométrique, peut être donnée du caractère ω sur les surfaces régulières ($p_g = p_n = p$). On y parvient en considérant le groupe des n intersections variables de deux courbes générales du système donné $|C|$, et les courbes du système adjoint $|C'|$ qui passent par ce groupe. En effet tandis que le nombre de ces dernières courbes, qui sont linéairement indépendantes, est $2p$, si le système $|C|$ est régulier, le même nombre est $2p+\omega$, si le système $|C|$ a la surabondance ω. Par suite ([91]):

La surabondance d'un système non-spécial $|C|$ *sur une surface régulière de genre* (*géom.* $=$ *num.*) p, *est l'excès sur* $2p$ *du nombre des courbes adjointes* C' *linéairement indépendantes, qui passent par les intersections variables de deux* C. On vérifiera le théorème tout de suite sur le plan.

Remarque. – Supposons que la surface F (régulière ou non) soit donnée dans l'espace ordinaire, et ne possède que des singularités ordinaires. D'après le *Restsatz* (n. 12), tout système $|C|$ sur F peut être construit à l'aide des surfaces adjointes (ou sous-adjointes), d'un ordre assez élevé, qui passent par une courbe fixe γ et par les points-base de $|C|$. Alors la *dimension virtuelle* ϱ de $|C|$ (et par suite sa surabondance ω) peut être calculée d'après les *formules de postulation* de M. NOETHER (n. 26).

35. - Systèmes spéciaux.

Les propriétés que nous venons d'énoncer sur les systèmes non-spéciaux, s'étendent aussi aux systèmes spéciaux, pourvu que l'on ait égard à un nouveau caractère qui se présente dans ce cas, et qui est tout-à-fait analogue au caractère i, que nous avons introduit dans l'étude des séries spéciales. Un système spécial complet $|C|$ est contenu, par définition, dans le système canonique $|K|$; il y a donc lieu à considérer le nombre i des courbes canoniques linéairement indépendantes qui contiennent la courbe générale de $|C|$; ce nombre i, qui désigne, pour ainsi dire, le *degré de spécialité* de $|C|$, est le nouveau caractère. Si $|C|$ est non-spécial, on a $i=0$; si $|C|$ est le système canonique, alors $i=1$; etc. Au lieu de i, on peut aussi considérer la dimension r_1 du système $|C_1| = |K-C|$ résiduel de $|C|$ par rapport au système canonique; on a naturellement

$$r_1 = i - 1 .$$

À l'aide du caractère i nous pouvons étendre de la façon suivante les formules que nous avons trouvées à propos des systèmes non-spéciaux. Désignons par n, π, r, i les caractères d'un système spécial $|C|$, et par

---

([91]) ENRIQUES, *Ricerche di geometria...*, IV, 2.

p_n le genre numérique de la surface; on a alors

$$\pi - n + r - 1 \geqslant p_n - i ,$$

et précisément si

$$\pi - n + r - 1 = p_n - i + \omega , \tag{7}$$

on appelle $\omega \geqslant 0$ la *surabondance* du système; pour $i = 0$ on retombe dans la formule des systèmes non-spéciaux. On voit d'ici qu'*un système est certainement spécial si*

$$\pi - n + r - 1 < p_n ;$$

mais, à cause de ω, on ne peut dire que cette relation soit aussi nécessaire; au contraire de ce qui arrivait sur les courbes, où l'inégalité $n - r < p$ pouvait servir de définition d'une série spéciale complète.

On peut écrire l'égalité (7) de façon à mettre en évidence la dimension r du système $|K - C|$. On parvient au résultat suivant:

Sur une surface de genre numérique p_n, tout système spécial complet ayant les caractères n, r, π, possède, par rapport au système canonique, un système résiduel dont la dimension est

$$r_1 = p_n - (\pi - n + r) + \omega , \tag{8}$$

où ω (surabondance du premier système) désigne un nombre $\geqslant 0$.

Il faut regarder ce théorème comme l'extension aux surfaces du théorème de Riemann-Roch énoncé pour les courbes, car celui-ci nous donnait aussi la dimension r_1 de la série résiduelle d'une série g_n^r par rapport à la série canonique $\big(r_1 = p - 1 - (n - r)\big)$. Pour les surfaces nous voyons que la formule est compliquée par la présence du nombre ω, qui n'a pas son analogue dans la théorie des courbes [92] [93].

---

[92] L'extension du théorème de R.-R. aux surfaces est due à M. Noether (« Comptes Rendus de l'Ac. des Sc. », 1886), dans l'hypothèse sousentendue que la série caractéristique du système $|C|$ soit complète; nous savons à présent que cette hypothèse est vérifiée toujours sur une surface régulière ($p_g = p_n = p$). M. Noether présente la relation du théorème sous la forme

$$r_1 \geqq p + n - \pi - r ;$$

c'est M. Enriques (*Ricerche di geometria...*, IV, 2) qui a montré la signification géométrique de la différence ω entre les deux membres de l'inégalité; voir à ce propos les lignes qui suivent ci-dessus.

[93] Outre la dimension r_1 du système $|K - C|$, résiduel de $|C|$ par rapport au système canonique, on peut exprimer aussi les autres caractères n_1 (degré), π_1 (genre), ω_1 (surabondance), du nouveau système à l'aide des caractères du système $|C|$. On n'a qu'à recourir aux relations

L'égalité (7) peut encore se transformer en introduisant la dimension virtuelle ϱ du système $|C|$, que nous avons définie plus haut pour un système quelconque à l'aide de la relation (6) du n. 34. On trouve ainsi la relation

$$r - \varrho = \omega - i\,,$$

laquelle nous dit que *pour un système spécial la surabondance s'obtient en ajoutant le caractère i à la différence entre les dimensions effective et virtuelle du système.* Cette définition de ω se réduit à celle que nous avons exposée au sujet des systèmes non-spéciaux, lorsque $i = 0$.

Pour les surfaces régulières ($p_g = p_n = p$) on peut même étendre aux systèmes spéciaux la seconde définition de la surabondance, que nous avons énoncée pour les systèmes non-spéciaux. On n'a qu'à remplacer, dans celle-ci, ω par $\omega - i$.

36. - Aperçu sur les considérations qui précèdent.

En ayant égard aux complications que peut présenter un système linéaire de courbes sur une surface algébrique, il ne paraîtra pas inutile que nous résumons ici brièvement les remarques, que nous venons de faire à ce sujet.

Si n et π désignent le degré et le genre d'un système complet $|C|$ sur une surface de genre numérique p_n, il faut faire attention d'abord à la dimension virtuelle de $|C|$, qui est fournie par l'expression

$$\varrho = p_n + n - \pi + 1\,.$$

Ensuite on doit avoir égard à deux causes d'irrégularité, dont l'effet est de modifier la dimension effective r de $|C|$ par rapport à la dimension virtuelle ϱ. Ces deux causes ont du reste des effets opposés, qui parfois peuvent s'éliminer. Elles peuvent agir soit séparément, soit en même temps. Elles sont:

1) la *surabondance*, qui fait *augmenter* la dimension du système ($r = \varrho + \omega$); elle peut se présenter sur une surface quelconque, et pour

du n. 9. On trouvera ainsi

$$\pi_1 = p^{(1)} - 3(\pi - 1) + 2n\,,$$
$$n_1 = p^{(1)} - 1 - 4(\pi + 1) + 3n\,,$$
$$\omega_1 = \omega\,,$$

où $p^{(1)}$ est le genre du système canonique (*Curvengeschlecht*). Voir à ce sujet ENRIQUES, l. c.

des systèmes de dimension, de genre, et d'ordre aussi élevés que l'on veut; rien d'analogue n'a lieu pour les séries linéaires sur une courbe;

2) la *spécialité*, à laquelle on doit, au contraire, une *diminution* de la dimension ($r = \varrho - i$); propriété d'autant plus remarquable que, dans la théorie des séries linéaires sur une courbe, la cause analogue a pour effet d'augmenter la dimension ($r = n - \pi + i$). Sur les surfaces, du reste (de même que sur les courbes), on n'a lieu à considérer cette cause d'irrégularité que pour les systèmes ayant leurs caractères n, π et r inférieurs à certaines limites (qui sont respectivement $p^{(2)}$, $p^{(1)}$ et $p_g - 1$).

Les seuls systèmes sur lesquels ni l'une ni l'autre de ces causes n'agissent, sont les *systèmes réguliers* ($r = \varrho$, $\omega = i = 0$).

CHAPITRE VII.

SUR LES SURFACES RATIONNELLES ET SUR QUELQUES PLANS DOUBLES

Nous consacrons ce dernier Chapitre de notre Monographie à l'étude de la classe des surfaces rationnelles; classe remarquable aussi parce que les recherches auxquelles elle a donné lieu, ont conduit, par extension naturelle, à des recherches sur les surfaces algébriques générales. Nous dirons ensuite quelques mots sur les plans doubles.

La théorie des surfaces rationnelles a commencé par l'étude de quelques surfaces, particulières au point de vue projectif, qui pouvaient se représenter birationnellement sur le plan; on cherchait de lire sur la représentation les principales propriétés de telles surfaces. Ainsi l'on trouve considérée tout d'abord la surface du second ordre (PLUECKER, 1847; CAYLEY et CHASLES, 1861), et quelques ans plus tard la surface générale du troisième ordre (CREMONA, CLEBSCH, 1865); suivent la surface réglée du troisième ordre, la surface de STEINER, etc.

Ayant reconnu sur ces exemples le profit que l'on pouvait tirer de la représentation d'une surface pour l'étude de celle-ci, ayant appris à vaincre les difficultés qui pouvait présenter, au premier abord, la lecture des propriétés de la surface sur la représentation, le problème (projectif) d'étudier une surface d'après sa représentation connue, pouvait se regarder comme résolu d'avance dans tous les cas. Cependant un autre problème (appartenant celui-ci à la *Géométrie sur une surface*) se présentait: déterminer si une surface, donnée par quelqu'un de ses caractères, est rationnelle, ou bien ne l'est pas.

C'est à CLEBSCH et à M. NOETHER qu'on doit les propositions fondamentales sur ce sujet. CLEBSCH ([94]) a montré comment on pouvait établir le caractère rationnel d'un grand nombre de surfaces, en représentant d'abord ces surfaces sur *un plan double* (voir n. 38), et en cherchant ensuite les conditions de rationalité d'un plan double. M. NOETHER ([95]) a accompli ces recherches, et a donné le théorème capital ([96]), d'après lequel est rationnelle toute surface contenant un faisceau linéaire de courbes rationnelles.

On est parvenu plus tard à étendre ces propositions, ainsi qu'en ajouter d'autres d'un caractère très général, que nous allons exposer dans les pages suivantes. Mais il faut pourtant remarquer que la plupart des nouveaux résultats s'appuyent en conclusion sur les théorèmes de CLEBSCH et NOETHER.

37. - Quelques propriétés des surfaces rationnelles.

Les propriétés générales des surfaces que nous venons d'étudier dans les Chapitres précédents, fournissent des propriétés des surfaces rationnelles dès qu'on particularise les genres de la surface ($p_g = p_n = 0$). Ces mêmes propriétés, du reste, peuvent se déduire de l'étude directe des systèmes de courbes planes; et la dernière voie est naturellement préférable au point de vue de la simplicité.

D'une manière ou d'autre, on parviendra aux propositions suivantes que nous réunissons ici, bien que quelques unes d'entre elles aient été déjà énoncées.

Sur une surface rationnelle:

a) *la série caractéristique de tout système linéaire, est complète;*

b) *la série* (*canonique*) *découpée sur la courbe générale d'un système linéaire par le système adjoint, est elle-même complète.*

Chacun de ces deux théorèmes revient à dire qu'*une surface rationnelle a les deux genres p_g, p_n égaux*; *chacun peut se déduire de l'autre.*

c) *Sur une surface rationnelle il existe des systèmes linéaires dont la série caractéristique est non-spéciale, et parmi ceux-ci il y a des systèmes de genre π dont le degré $n > 2\pi - 2$*; tel est, par exemple, le système formé par toutes les courbes planes d'un ordre donné.

Le théorème c) nous dit que *le genre géométrique p_g ($= p_n$) d'une surface rationnelle est nul.* Il nous dit davantage: non seulement il n'y a

---

([94]) *Ueber den Zusammenhang...*, « Math. Annalen », 3, 1870.

([95]) *Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen*, « Sitzungsber. d. phys. medicin. Soc. zu Erlangen », 1878; *Ueber eine Classe...*, « Math. Annalen », 33.

([96]) *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen*, « Math. Ann. », 3, 1870.

pas de système canonique sur la surface, mais ni le système bicanonique, ni le système i-canonique (i quelconque) n'existent non plus; de sorte que l'on a (en adoptant les mêmes désignations qu'au n. 30):

$$p_g = 0\,, \quad P_2 = 0\,, \quad P_3 = 0\,, \quad \ldots.$$

Nous verrons bientôt que ces conditions ne sont pas, du reste, toutes indépendantes.

e) *Sur une surface rationnelle il existe des systèmes linéaires de genre* π *quelconque.* Pour $\pi = 0$ on trouve des systèmes ayant la dimension r, et le degré $n = r - 1$ aussi hauts que l'on veut; il n'en est plus ainsi pour $\pi > 0$, car *un système de courbes de genre* 1 *a la dimension et le degré* $\leqslant 9$; *tandis que pour un système de genre* $\pi > 1$, *la dimension ne peut surpasser* $3\pi + 5$, *ni le degré ne peut surpasser* $4\pi + 4$; mais on peut atteindre ces *maxima* ([97]).

Sans insister ultérieurement sur les propriétés des surfaces rationnelles, nous allons aborder maintenant une question très importante, qui est, en quelque sorte, l'inverse des précédentes: il s'agit de décider si une surface donnée est rationnelle, par l'examen de quelques caractères connus de la surface. Le problème, ainsi posé, n'est pas bien défini; il faudra particulariser les caractères de la surface que l'on regarde connus; c'est ce que nous allons faire de plusieurs façons.

38. - On connaît le degré d'un système linéaire de courbes situées sur la surface.

Souvent c'est la connaissance d'un système linéaire de courbes sur la surface, qui permet de décider la rationalité de celle-ci; parfois même (dans les cas les plus simples) la connaissance d'un caractère du système (par exemple, du degré n, ou du genre π) suffit; d'après le caractère auquel on fait attention, on parvient à des classes différentes de résultats.

Supposons, tout d'abord, qu'il existe sur la surface un système $|C|$ dont le *degré* soit $n > 0$; la dimension r du système sera $\geqslant 2$ et $\leqslant n + 1$. Examinons successivement les premières valeurs qu'on peut attribuer à n.

1) Les premiers cas que nous rencontrons, correspondent à $n = 1$,

---

([97]) Pour $\pi = 1$ le théorème dépend de la réduction des systèmes de courbes elliptiques planes à des types bien connus; voir les travaux de MM. BERTINI (« Annali di Matematica », serie 3ª, t. 8, 1877), GUCCIA (1886), MARTINETTI (1887) (« Rendic. Circolo Mat. di Palermo », t. I), JUNG (« Rendic. Istituto Lombardo », 1887-88). Pour $\pi > 1$ les limites supérieures de n et r ont été assignées par M. CASTELNUOVO (*Massima dimensione...*, « Annali di Matem. », s. 2ª, t. 18, 1890).

$r = 2$, et $n = 2$, $r = 3$; ceux-ci conduisent à des surfaces rationnelles, ainsi qu'on voit sur le champ.

2) Arrêtons-nous plutôt sur le cas le plus intéressant, où l'on a $n = 2$, $r = 2$. Si nous faisons correspondre à chaque courbe C du système, une droite d'un plan, nous allons représenter deux points conjugués de la surface (intersection de deux C) sur un point général du plan; la surface de cette façon se représente sur un *plan double*, c'est-à-dire sur une surface dont l'équation peut s'écrire sous la forme $z^2 = R(x, y)$, R étant une fonction rationnelle (que l'on peut supposer entière). C'est donc la question de la rationalité d'un plan double que nous rencontrons maintenant.

Un plan double est entièrement défini par sa *courbe de diramation* (*Uebergangscurve*) $R(x, y) = 0$, qui est le lieu d'un point dont les deux points correspondants sur la surface coïncident. Quelle particularité doit présenter la courbe de diramation pour que le plan double soit rationnel (représentable sur le plan simple)? La question, abordée par CLEBSCH, a été entièrement résolue par M. NOETHER ([98]). Voici la réponse:

Afin qu'un plan double soit rationnel, il faut et il suffit que la courbe de diramation puisse être ramenée, par une transformation birationnelle du plan, à l'une des trois courbes qui suivent:

a) *courbe d'un certain ordre n ayant un point multiple d'ordre $n - 2$;*

b) *courbe du quatrième ordre;*

c) *courbe du sixième ordre ayant deux points triples infiniment prochains.*

Les dégénérations de ces trois cas sont admises, excepté la scission a_1) de la courbe d'ordre n en n droites d'un faisceau, b_1) de la courbe du quatrième ordre en quatre droites d'un faisceau, c_1) de la courbe du sixième ordre en six droites d'un faisceau, ou en trois coniques d'un faisceau avec deux contacts fixes; car ces dégénérations amènent, à des plans doubles, qui représentent des surfaces réglées ([99]).

Venons maintenant aux valeurs > 2 du degré n, mais supposons en même temps $r > 2$, car jusqu'à present on ne sait rien sur la rationalité des plans triples, ... ($n = 3$, ..., $r = 2$). Supposons plus précisément qu'on puisse construire une surface F d'ordre n de l'espace ordinaire,

---

([98]) Mémoires cités.

([99]) La correspondance qui passe entre les points d'un plan double rationnel et les couples de points d'un plan simple, donne lieu, sur celui-ci, à une *involution de* (∞^2) *couples de points*. Or les types de ces involutions qui sont distinctes par rapport aux transformations birationnelles, ont été déterminés par M. BERTINI (*Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie del piano*, « Annali di Matem. », s. 2ª, t. 8, 1877); il correspondent naturellement aux trois types de plans doubles. La possibilité de l'existence d'autres types, en dehors des précédents, qui n'était pas exclue par le Mémoire de M. BERTINI, a été écartée par des recherches ultérieures (KANTOR, CASTELNUOVO).

dont les sections planes appartiennent au système $|C|$ donné, qui a le degré n et la dimension r.

Il s'agit d'examiner dans quel cas la surface F est rationnelle. La question a été résolue entièrement pour les valeurs les plus petites de n (>2).

3) On sait par exemple que *toute surface de l'ordre* $n = 3$ *est rationnelle, abstraction faite du cône général du troisième ordre.*

4) On sait aussi qu'*une surface de l'ordre* $n = 4$ *ayant des lignes multiples* (au moins une droite double) *est rationnelle, excepté les surfaces réglées de genre* > 0. *Parmi les surfaces du quatrième ordre qui n'ont pas de courbes multiples, il y a seulement quatre familles de surfaces rationnelles, qui ont été déterminées par* M. NOETHER [100]. Une d'entre elles se compose des surfaces du quatrième ordre ayant un point triple. Les trois autres familles correspondent à un point double singulier que la surface possède, par lequel la surface est projectée sur un des trois plans doubles rationnels que nous venons de citer; le premier de ces cas remarquables a été signalé par M. CREMONA.

5) Pour $n \geqslant 5$ on n'a que des résultats incomplets; c'est pourquoi nous n'y insistons pas pour le moment, en nous réservant d'indiquer comment la détermination des surfaces rationnelles d'un ordre donné saurait maintenant s'aborder.

39. - On connaît le genre d'un système linéaire de courbes situées sur la surface.

Une autre série de recherches correspond à la classification des systèmes de courbes de la surface, faite d'après le *genre* π. Pour les premières valeurs de π on a des résultats qu'il est bon de rappeler.

1) Un théorème bien connu de M. NOETHER se rapporte au cas $\pi = 0$ [101]:

Toute surface contenant un système linéaire ∞^1 *de courbes rationnelles* $(\pi = 0)$, *est rationnelle.*

En particulier: *toute surface de l'espace ordinaire dont les sections planes sont rationnelles, est rationnelle;* et on peut ajouter (grâce à un théorème de M. PICARD [102]) que la *surface est réglée, à moins qu'elle ne soit la sur-*

---

(100) *Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung,* « Math. Annalen », 33, 1888.

(101) L. c., « Math. Annalen », 3.

(102) *Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales,* « Journal f. Mathem. », 100, 1885; voir aussi GUCCIA, « Rendic. Circolo Mat. di Palermo », t. I, 1886.

face de STEINER (du quatrième ordre, avec un point triple et trois droites doubles).

2) Si $\pi = 1$, la connaissance d'un système ∞^1 de courbes ne suffit pas pour en conclure la rationalité de la surface (on peut le vérifier sur de nombreux exemples); mais si l'on connaît un système linéaire ∞^2 de courbes elliptiques ($\pi=1$), on peut énoncer un résultat intéressant ([103]):

Toute surface contenant un système linéaire ∞^2 de courbes elliptiques peut se transformer birationnellement en un plan, ou bien en une surface réglée elliptique. Dans ce dernier cas il existe sur la surface donnée un faisceau elliptique de courbes rationnelles, qui découpent en un seul point variable chaque courbe du système ∞^2; c'est le faisceau correspondant à la série des génératrices de la surface réglée.

En particulier ([104]): *toute surface de l'espace ordinaire dont les sections planes sont de courbes elliptiques, est rationnelle, ou bien elle est une surface réglée.* Dans le premier cas l'ordre de la surface ne peut surpasser 9.

3) Pour $\pi = 2$ on a un résultat analogue au précédent, pourvu que l'on ait égard à la restriction $n > 2$ ([105]):

Toute surface contenant un système linéaire de courbes de genre 2 dont la dimension $r \geqslant 2$, et le degré $n > 2$, peut se transformer birationnellement en un plan, ou bien en une surface réglée dont le genre peut assumer les valeurs 2 ou 1. Dans le cas de la surface réglée du genre 2, les génératrices de celle-ci sont découpées en un seul point par toute courbe du système donné. Si au contraire la surface réglée est elliptique, ses génératrices sont rencontrées en plus d'un point par les courbes du système ∞^2.

Toute surface de l'espace ordinaire dont les sections planes ont le genre 2, est rationnelle (et contient un faisceau de coniques), ou bien elle est réglée ([106]).

4) Les derniers théorèmes s'étendent de suite à toute surface qui contient un système ∞^2 de courbes *hyperelliptiques*, dont le genre π est aussi haut que l'on veut ([107]):

Toute surface contenant un système linéaire ∞^2 de courbes hyperelliptiques de genre π, dont la série caractéristique est non-spéciale, peut se transformer birationnellement en un plan, ou bien en une surface réglée dont le

---

([103]) CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche* « Rendic. della R. Acc. d. Lincei », 1894; la démonstration est rapportée par M. ENRIQUES dans le Mémoire *Sui sistemi lineari di superficie algebriche...*, n. 8, « Math. Annalen », 46 [questo volume, X].

([104]) CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve ellittiche*, « Rendic. della R. Acc. d. Lincei », 1894; voir aussi ENRIQUES, *Sui sistemi lineari...*, n. 5.

([105]) CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche che contengono una rete...*, l. c.; ENRIQUES, l. c., n. 8.

([106]) ENRIQUES, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche...*, « Rendic. della R. Acc. d. Lincei », 1893; « Math. Annalen », 39 [questo volume, IV, X].

([107]) Voir pour ces résultats les Mémoires cités de MM. CASTELNUOVO et ENRIQUES.

genre a une des deux valeurs π, 1. Au sujet de ce dernier cas, il y a lieu de faire une remarque analogue à la précédente.

Toute surface de l'espace ordinaire dont les sections planes sont des courbes hyperelliptiques est rationnelle (*et contient un faisceau de coniques*) *ou bien elle est réglée.*

5) Pour $\pi = 3$, le cas hyperelliptique excepté, on n'a jusqu'à présent que des résultats incomplets ([108]).

40. - Quelques résultats qui se ramènent aux précédents.

Si l'on connaît sur une surface un système linéaire assez ample de courbes, on peut parfois en déduire un autre qui se trouve dans les conditions considérées plus haut, à l'aide d'une méthode qui a été employée avec succès par M. DEL PEZZO ([109]), et qui consiste à imposer de nouveaux points-base (simples, doubles,...) aux courbes du système. Au point de vue projectif, cela revient à considérer la surface de l'espace S_r (à r dimensions), dont les sections par les S_{r-1} forment le système donné, et à projecter la surface par quelques-uns de ses points, de ses plans tangents, etc.

Par ce moyen on voit sur le champ que *toute surface de l'espace* S_r ($r \geqslant 3$) *ayant l'ordre* $n = r - 1$, *ou* $n = r$, *est rationnelle, excepté le cône elliptique qui peut se présenter dans le second cas;* on peut même assigner des propriétés projectives intéressantes de ces surfaces ([110]).

Un autre résultat, qu'on a obtenu par la même méthode ([111]), complète en quelque sorte le théorème cité plus haut, d'après lequel un système linéaire de genre $\pi > 1$ sur une surface rationnelle, a la dimension $\leqslant 3\pi + 5$:

Si un système linéaire de courbes de genre $\pi \geqslant 1$ *sur une surface a la dimension* $r \geqslant 3\pi + 5$, *la surface est rationnelle, ou bien elle peut se représenter sur une surface réglée de genre* π, *dont les génératrices rencontrent en un seul point les courbes du système. C'est le second cas qui se présente toujours si* $r > 3\pi + 5$ *pour* $\pi > 1$, *ou* $r > 9$ *pour* $\pi = 1$.

On pourrait même, à ce qu'il paraît, obtenir des résultats plus expressifs en relation avec des valeurs inférieures de r.

([108]) CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere* 3, « Atti dell'Acc. d. Scienze di Torino », vol. 35, 1890.

([109]) *Sulle superficie di ordine n immerse nello spazio di* $n+1$ *dimensioni* (« Rendic. Accad. di Napoli », 1885); *Sulle superficie dell'n° ordine immerse nello spazio di n dimensioni* (« Rendic. Circolo Mat. di Palermo », t. I, 1887).

([110]) DEL PEZZO, l. c.

([111]) ENRIQUES, *Sulla massima dimensione...*, « Atti dell'Acc. d. Scienze di Torino », vol. 29 [questo volume, VI].

41. - Méthode des systèmes adjoints successifs.

La méthode que nous venons d'exposer, ne se prête pas, dans la plupart des cas, à examiner si une surface, possédant un système donné de courbes, est rationnelle. L'imposition de nouveaux points-base au système amènera d'ordinaire à un nouveau système, dont la dimension résultera aussi petite que l'on voudra, mais dont le degré et le genre seront encore trop grands pour qu'on puisse en tirer quelque conclusion. Or, un procédé de *reduction* ne peut nous satisfaire, s'il ne conduit nécessairement à un système de genre ou de degré assez petits, toutes les fois que la surface considérée est rationnelle; car seulement dans ce cas il nous permettra de décider si une surface donnée est rationnelle, ou bien ne l'est pas. Un tel procédé nous est fourni par l'opération *d'adjonction*, que nous avons définie dans un Chapitre précédent.

Soit $|C|$ un système linéaire de courbes sur la surface donnée; formons le système adjoint $|C'|$, ensuite le système $|C''|$ adjoint de celui-ci, que nous appelons le *second adjoint* de $|C|$, et ainsi de suite. Or, par rapport à la succession des systèmes $|C|$, $|C'|$, $|C''|$, ..., deux cas peuvent se présenter:

1) ou bien la succession a un terme; on parvient donc à un dernier système $|C^{(i)}|$ qui n'admet plus de système adjoint;

2) ou bien la succession est illimitée; chacun des systèmes qui la composent admet le système adjoint.

C'est naturellement le premier cas qui va se présenter, lorsque la surface considérée est rationnelle; on le voit sur le champ, si l'on opère sur de systèmes de courbes planes. Mais on ne peut pas dire inversement que la condition 1) soit toujours *suffisante*, pour affirmer la rationalité de la surface; car il faut ajouter encore la condition de *régularité* de la surface ($p_g = p_n$). En effet le dernier système $|C^{(i)}|$ aura alors (on le démontre) le genre 0 ou 1, et on pourra appliquer les résultats du n. 39.

En conclusion, pour reconnaître le caractère rationnel d'une surface, il faut d'abord vérifier qu'elle est régulière (pour cela il suffit en général d'examiner si la série découpée par $|C'|$ sur la courbe C est complète (n. 28)).

Ensuite il faut vérifier si la succession $|C|$, $|C'|$, $|C''|$,... a un terme. Ce procédé exige, à ce qu'il paraît, un nombre d'opérations qu'on ne peut pas assigner *a priori*, avant de conduire à une réponse définitive sur la nature de la surface proposée. C'est là un défaut sérieux, que nous tâcherons d'éviter. On y réussit en remarquant que tous les systèmes adjoints peuvent se déduire des deux premiers $|C|$ et $|C'|$ par de simples opérations d'addition et de soustraction; on a en effet (en vertu du théorème fondamental, n. 16):

$$|C''| = |2C' - C|, \qquad |C'''| = |3C' - 2C|, \quad \text{etc.}$$

C'est donc la considération des systèmes $|C|$ et $|C'|$ qui suffit pour trancher la question de la rationalité de la surface. Voici comment il faudra procéder.

a) Il faut d'abord reconnaître que $|C'|$ ne contient pas $|C|$;

b) il faut encore que $|2C'|$ ne contienne pas $|2C|$; cette condition renferme la précédente, mais elle n'en découle pas.

Toute vérification ultérieure est superflue; en effet on démontre que si la dernière condition est remplie, la succession $|C|$, $|C'|$, $|C''|$,... a un terme; par suite la surface est rationnelle. On a donc le théorème suivant ([112]):

Sur une surface régulière on suppose connu un système linéaire $|C|$ *de courbes* (du moins ∞^3), *ainsi que son système adjoint* $|C'|$; *pour que la surface soit rationnelle, il faut et il suffit que le système* $|2C'|$ *ne contienne pas le système* $|2C|$.

Nous allons voir tout de suite quelques corollaires de ce théorème; mais remarquons d'abord que la condition nommée est certainement remplie lorsque *le degré n du système* $|C|$ *est supérieur à* $2\pi - 2$ (*π étant le genre de* $|C|$).

42. - Rationalité d'une surface déduite de la connaissance de ses invariants numériques.

La conséquence la plus importante que l'on peut tirer du théorème répond à la question suivante: la classe des surfaces rationnelles sera-t-elle entièrement définie par des valeurs particulières des nombres invariants (p_g, p_n, P_2, P_3, ...)? Clebsch s'était posé la question analogue pour la classe des courbes rationnelles; il l'a résolue en remarquant qu'une courbe est rationnelle si son genre est nul, et *viceversa*. Nous allons voir que pour les surfaces la réponse est analogue, bien qu'il y ait à envisager plus d'un caractère.

Rappelons d'abord que pour une surface rationnelle on a

$$p_n = p_g = P_2 = P_3 = \ldots = 0\ ;$$

c'est ce qui résulte des définitions de ces caractères. Ces conditions ne

([112]) Castelnuovo, *Sulle superficie di genere zero*, l. c.

sont pourtant pas toutes indépendantes, mais il ne faut penser non plus que l'une d'elle entraine de suite les autres (comme il arrive pour les courbes). En effet les surfaces réglées irrationnelles, par exemple, ont

$$p_g = P_2 = P_3 = \ldots = 0\,,$$

mais $p_n < 0$; et l'on connaît de même des surfaces non-rationnelles avec $p_n = 0$. On était vraiment porté à croire que les deux conditions $p_n = p_g = 0$ suffiraient à caractériser la classe des surfaces rationnelles; et c'est seulement lorsqu'on a trouvé des exemples contraires, qu'on a vu qu'il en était tout autrement; ce sont les exemples que nous avons déjà cités au n. 30 ($p_n = p_g = 0$, $P_2 > 0$).

C'est le théorème du paragraphe précédent qui nous fournit la réponse à notre question; car les hypothèses qu'on y fait se traduisent par les relations $p_g = p_n$, $P_2 = 0$ (qui découlent de $p_n = 0$, $P_2 = 0$). On a donc le résultat ([113]):

Afin qu'une surface soit rationnelle, il faut et il suffit que le genre numérique p_n et le bigenre P_2 s'évanouissent ($p_n = P_2 = 0$).

43. - Détermination des surfaces rationnelles d'un ordre donné.

On peut faire une application du théorème dernier à la détermination de toutes les surfaces rationnelles de l'ordre n dans l'espace ordinaire; cela, du moins, en théorie, car l'exécution pratique exige des notions qu'on ne possède pas pour le moment. La question est réduite à l'analyse des singularités (courbes et points multiples), qu'on peut attribuer à une surface de l'ordre n, ayant égard aux conditions: 1) que le genre numérique de la surface soit nul, 2) qu'il n'existe pas de surfaces biadjointes de l'ordre $2(n-4)$, en dehors de celles qui sont formées par la surface donnée avec une autre surface d'ordre $n-8$. Ainsi la difficulté est ramenée à déterminer l'influence exercitée par une singularité connue sur le genre numérique d'une surface, et le comportement d'une surface biadjointe dans la même singularité. C'est ce qu'on peut faire dans les cas les plus simples; ainsi:

Si une surface F de l'ordre n possède une courbe double ayant l'ordre d et le genre π, et possède en outre t points triples, qui sont triples aussi pour la dite courbe (et n'a pas d'autres singularités), les conditions de rationalité de la surface sont les deux suivantes:

([113]) CASTELNUOVO, l. c.

1) *on doit avoir la relation*

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}-(n-4)d+2t+\pi-1=0\,,$$

2) *il ne doit pas exister de surfaces d'ordre* $2(n-4)$ *qui passent doublement par la courbe double de* F (*en dehors des surfaces qui contiennent la* F).

44. - Surfaces les points desquelles ont des coordonnées qui s'expriment en fonctions rationnelles de deux paramètres.

Le théorème fondamental du n. 41 nous permet aussi de répondre à une question, qui se présente tout d'abord dans l'étude des surfaces rationnelles. La définition que nous avons donnée de ces surfaces, se traduit par les deux conditions suivantes:

1) les coordonnées x, y, z du point général de la surface s'expriment en fonctions rationnelles de deux paramètres α, β (qui peuvent être regardés comme les coordonnées d'un point du plan),

$$x=f_1(\alpha,\beta)\,,\qquad y=f_2(\alpha,\beta)\,,\qquad z=f_3(\alpha,\beta)\;; \tag{1}$$

2) inversement les paramètres α, β s'expriment rationnellement en fonctions de x, y, z,

$$\alpha=\varphi_1(x,y,z)\,,\qquad \beta=\varphi_2(x,y,z)\,. \tag{2}$$

Or supposons que, pour une surface donnée, la première condition soit remplie, en d'autres termes supposons que les (1) subsistent; et tâchons de déduire les (2) des (1) par des opérations d'élimination. Si l'on peut effectuer le passage, ce qui arrive dans bien de cas, la surface est rationnelle, d'après la définition. Mais il peut arriver, au contraire, qu'on ne puisse pas déduire les (2) des (1), parce qu'à un point (x, y, z) de la surface correspondent $n>1$ points (α, β) du plan. Est-ce qu'il faudra conclure dans ce cas que la surface n'est pas rationnelle? Ou bien, au contraire, pourra-t-on introduire, au lieu de α et β, deux nouveaux paramètres α', β' (fonctions rationnelles des premiers), de telle façon que x, y, z s'expriment rationnellement à l'aide de α', β', et *vice-versa* α', β' s'expriment rationnellement à l'aide de x, y, z? Dans ce dernier cas la surface serait naturellement rationnelle, et la particularité qu'on vient de remarquer à l'égard de α et β, dépendrait seulement du choix spécial des paramètres.

Or on soupçonnait bien qu'il en était ainsi; car dans le même sens avait été résolue, par M. LÜROTH, la question analogue qui se rapporte aux courbes. Mais la démonstration de M. LÜROTH, à ce qu'il paraît, ne peut pas s'étendre aux surfaces.

Voici comment on réussit à démontrer le théorème.

À tout point (x, y, z) de la surface correspondent (nous l'avons dit) $n > 1$ points (α, β) du plan; à toute courbe algébrique de la surface correspond une courbe algébrique du plan, et à un système linéaire de courbes sur celle-là, un système linéaire de courbes sur celui-ci. Or, des propriétés connues de ces derniers systèmes on peut déduire des propriétés des premiers systèmes. Ainsi l'on voit par exemple que sur la surface tout système linéaire complet a la série caractéristique complète, d'où il résulte que les deux genres p_g, p_n de la surface sont égaux. On voit, de plus, que sur la surface existent des systèmes de genre π avec le degré $> 2\pi - 2$, d'où il s'ensuit

$$p_g = P_2 = P_3 = \ldots = 0\,.$$

Les deux conditions ($p_n = P_2 = 0$) pour la rationalité d'une surface sont donc remplies. C'est ce qui affirme le théorème suivant ([114]):

Si les coordonnées du point général d'une surface peuvent s'exprimer rationnellement en fonctions de deux paramètres, la surface est rationnelle.

On peut présenter ce théorème sous une autre forme, pourvu que l'on remarque que les groupes de n points (α, β) correspondants aux points (x, y, z) de notre surface, forment sur le plan une *involution*, c'est-à-dire, un système ∞^2 de groupes, dont chaque groupe est entièrement déterminé par un de ses points:

Toute involution sur le plan est rationnelle.

45. - Rationalité d'une surface déduite de la connaissance d'une série, pas linéaire, de courbes.

Jusqu'ici nous nous sommes bornés à considérer des systèmes linéaires de courbes. Or il y a des cas, où la connaissance d'une série ∞^1 non-linéaire de courbes sur une surface, série telle que par le point général de la surface il passe plus d'une courbe de la série, peut suffire pour reconnaître la rationalité de celle-ci. Voici quelques exemples.

([114]) CASTELNUOVO, *Sulla razionalità delle involuzioni piane*, « Math. Ann. », 44, 1893.

a) Un premier exemple regarde le cas où sont rationnelles les courbes de la série, ainsi que la série elle-même (en y considérant la courbe comme élément): on a alors le théorème suivant qui se déduit sur le champ du théorème sur les involutions planes (ainsi que celui-ci s'ensuit de celui-là):

Toute surface qui contient une série rationnelle de courbes rationnelles, est rationnelle [115].

Ce théorème comprend, comme un cas particulier, le théorème de M. NOETHER, relatif aux surfaces ayant un système *linéaire* ∞^1 de courbes rationnelles; pour le retrouver il suffit, en effet, de supposer que par le point général de la surface passe une seule courbe de la série.

b) Un second théorème envisage une série dont le degré (nombre des intersections variables de deux courbes) est 1:

Toute surface qui contient une série algébrique de courbes, dont le degré est 1, *et telle que par le point général de la surface passent* $i > 2$ *courbes de la série, est rationnelle* [116].

Si, les autres hypothèses restant les mêmes, on suppose $i = 2$, la surface peut se représenter birationnellement sur la variété formée par les couples de points d'une courbe, dont le genre est égal à celui de la série.

c) Au théorème qui précède se rattache le suivant [117]:

Qu'il existe sur une surface deux séries algébriques de courbes, telles que deux courbes générales, appartenant à de séries différentes, se rencontrent en un seul point variable; alors, si par le point général de la surface il passe plus d'une courbe de chacune des séries, la surface est rationnelle, et les courbes des séries sont elles-mêmes rationnelles. Si par le point général de la surface passe une seule courbe de la première série, et plus d'une de la seconde, la surface peut être transformée birationnellement en une surface réglée; si enfin par le point passe une seule courbe de chaque série, la surface peut se représenter sur la variété des couples de points de deux courbes.

---

[115] CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche*, l. c.

[116] HUMBERT, « Comptes Rendus », 1893; *Sur quelques points de la théorie...*, « Journal de Mathématiques », 4e s., t. X; CASTELNUOVO, *Sulla linearità delle involuzioni...*, « Atti dell'Acc. d. Sc. di Torino », vol. 28, 1893.

[117] CASTELNUOVO, l. c.

46. - Surfaces admettant un groupe continu de transformations birationnelles en elles-memes.

Pour accomplir, autant que possible, cette revue des résultats obtenus au sujet des surfaces rationnelles, il faut que nous disons encore quelques mots sur les surfaces qui admettent un groupe continu de transformations birationnelles en elles-mêmes, au point de vue de leur caractère rationnel.

M. Picard [118] a abordé, le premier, le problème des groupes de transformations d'une surface en elle-même, et il est parvenu à des résultats extrêmement remarquables, qui ne trouvent pas ici leur place, car ils concernent principalement certaines classes de surfaces irrationnelles. Pour notre but il suffit en effet d'énoncer les théorèmes suivants, qui donnent l'extension naturelle du résultat bien connu de M. Schwarz relatif aux courbes:

Toute surface qui admet un groupe continu transitif de transformations birationnelles en elle-même, groupe dépendant de deux paramètres, est rationnelle, si les transformations ne sont pas échangeables deux à deux.

Toute surface qui admet un groupe continu transitif de transformations birationnelles en elles-mêmes, groupe dépendant de plus de deux paramètres, est rationnelle, ou bien peut se transformer en une surface réglée elliptique [119].

47. - Plans doubles du genre un.

Dans le n. 38 nous avons parlé des *plans doubles*, c'est-à-dire des champs algébriques

$$x, \quad y, \quad \sqrt{f(x, y)},$$

où f désigne un polynôme; nous avons énoncé les résultats de Clebsch et Noether sur la nature de la courbe de diramation $f(x, y) = 0$, lorsque le plan double est rationnel, et en conséquence $\sqrt{f(x, y)}$ devient une fonction rationnelle de deux nouveaux paramètres, par une substitution rationnelle convenable sur x, y.

---

(118) Voir les Mémoires cités dans l'Introduction.

(119) Castelnuovo et Enriques, « Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc. », 1895 [questo volume, XI[; voir aussi dans le même recueil (1895) une Note de M. Painlevé. Au sujet des énoncés que nous rapportons ici, il est bon de remarquer que nous appelons *transitif* (d'après M. Lie) un groupe qui puisse changer un point en un autre point arbitrairement fixé; et que le second théorème dit un peu plus de celui qu'on trouve dans les « Comptes Rendus ».

Le problème se pose maintenant de classifier les plans doubles supérieurs (d'après leurs courbes de diramation). Les résultats obtenus jusqu'ici sur ce sujet se bornent au cas des plans doubles, dont les genres p_n et P_2 (et par suite $p^{(1)}$, p_g, P_3, ...) ont la valeur 1. On a le théorème [120]:

Les plans doubles dont les genres (p_n, P_2) *ont la valeur* 1, *se répartissent en quatre classes, selon que leur courbe de diramation peut être ramenée, par une transformation birationnelle du plan, à l'une des courbes suivantes:*

1) *courbe générale de l'ordre* 6;

2) *courbe de l'ordre* 8 *douée de deux points du quatrième ordre;*

3) *courbe de l'ordre* 10 *douée d'un point de l'ordre* 7 *et de deux points triples infiniment prochains à celui-là;*

4) *courbe de l'ordre* 12 *douée d'un point de l'ordre* 9 *et de trois points triples infiniment prochains à celui-là.*

Florence, 13 février 1896.

---

[120] ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere uno*, l. c.

XVIII.

SULLE IRRAZIONALITÀ DA CUI PUÒ FARSI DIPENDERE LA RISOLUZIONE D' UN' EQUAZIONE ALGEBRICA $f(x\,y\,z) = 0$ CON FUNZIONI RAZIONALI DI DUE PARAMETRI [1]

« Math. Ann. », Bd. IL (1897),

pp. 1-23.

Introduzione.

1. – Nella teoria della risoluzione delle equazioni algebriche con più variabili, si presentano successivamente due problemi generali:

1) data un'equazione

$$f(x_1\,x_2\,...\,x_n) = 0$$

decidere se e come essa possa *risolversi* ponendo $x_1, x_2, ..., x_n$ funzioni razionali di $n - 1$ parametri e (eventualmente anche) di determinate funzioni irrazionali di questi parametri;

2) assegnare le irrazionalità numeriche che vengono a comparire nei coefficienti delle anzidette funzioni razionali, considerato come campo di razionalità (nel senso di KRONECKER) quello definito dai coefficienti dell'equazione

$$f(x_1\,x_2\,...\,x_n) = 0\,.$$

Questo secondo problema si collega al primo, riferito ad equazioni con un numero maggiore di variabili, perchè se nell'equazione $f = 0$ si suppone che i coefficienti varino dipendendo razionalmente da più para-

[1] I principali resultati contenuti in questo lavoro sono stati riassuntivamente enunciati in una nota inserita nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », dec. 1895 [questo volume, IX].

metri, le nominate irrazionalità numeriche divengono irrazionalità algebriche, funzioni di questi parametri.

In ordine al primo problema le equazioni algebriche

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = 0$$

vengono distribuite in *classi*, ponendosi in una medesima classe due equazioni che si possono trasformare l'una nell'altra mediante una trasformazione birazionale sulle $x_1, x_2, \dots, x_n$.

In ordine al secondo problema si possono distribuire le equazioni

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = 0$$

di una data classe in più *sotto-classi*, ponendo in una medesima sottoclasse due equazioni che si possono trasformare l'una nell'altra mediante una trasformazione birazionale su $x_1, x_2, \dots, x_n$, *a coefficienti razionali.*

Per brevità diremo che due equazioni sono trasformabili l'una nell'altra se appartengono alla medesima classe, e che sono trasformabili, l'una nell'altra, *razionalmente,* se appartengono alla medesima sottoclasse; vale a dire, è sottinteso che la parola « trasformazione » denoti nel seguito « trasformazione birazionale » e che l'aggettivo « razionale » ad essa aggiunto, si riferisca alla razionalità dei coefficienti della trasformazione.

2. – La più semplice risoluzione che un'equazione algebrica

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = 0$$

può ammettere, è una risoluzione con funzioni razionali di $n-1$ parametri, ottenuta ponendo

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = x_1(u_1 \dots u_{n-1}) \,, \\ x_2 = x_2(u_1 \dots u_{n-1}) \,, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = x_n(u_1 \dots u_{n-1}) \,, \end{cases}$$

dove le espressioni del 2° membro sono razionali.

Le formule (1) saranno *in generale invertibili,* cioè permetteranno di esprimere inversamente i parametri $u_1, \dots, u_{n-1}$ come funzioni razionali delle $x_1, \dots, x_n$ legate dalla relazione $f = 0$: ma può darsi invece che le formule (1) non sieno invertibili univocamente, per modo che ad un gruppo di valori $x_1, \dots, x_n$ corrispondano più gruppi di valori $u_1, \dots, u_{n-1}$.

Se le (1) sono invertibili, esse stabiliscono una trasformazione dell'equazione

$$f(x_1 \dots x_n) = 0$$

nell'equazione lineare

$$x_n = 0\,.$$

Per $n = 2$ (LÜROTH) e per $n = 3$ (CASTELNUOVO) è stato dimostrato che, se un'equazione $f = 0$ ammette una risoluzione con funzioni razionali non invertibili, essa ammette altresì una (altra) risoluzione con funzioni razionali invertibili; perciò tutte le equazioni

$$f(x_1 \dots x_n) = 0 \qquad (n = 2 \ \text{o}\ n = 3),$$

risolubili con funzioni razionali, formano l'unica classe che ha per tipo l'equazione $x_n = 0$.

Dunque per $n = 2$, $n = 3$, il problema di determinare le equazioni $f(x_1 \dots x_n) = 0$ risolubili con funzioni razionali si riduce al problema di caratterizzare la anzidetta classe di equazioni.

Tale problema è notoriamente risoluto: per $n = 2$ da CLEBSCH; per $n = 3$ dal sig. CASTELNUOVO: si hanno infatti, nel 1° caso un carattere (il *genere*), nel 2° caso tre caratteri (il *genere geometrico* e *numerico* ed il *bigenere*), e l'annullarsi dei generi costituisce la condizione caratteristica della nominata classe di equazioni (risp. per $n = 2$, $n = 3$).

Sorge ora la questione:

Da quali irrazionalità si può far dipendere la risoluzione con funzioni razionali delle equazioni aventi i generi nulli?

E quindi: A quante sotto-classi o tipi di sotto-classi dànno luogo le nominate equazioni?

Riferiamo tale questione ai casi $n = 2$, $n = 3$.

I) Per $n = 2$, la questione è stata posta e risoluta dal sig. NOETHER (²):

Un'equazione

$$f(x\,y) = 0$$

risolubile con funzioni razionali d'un parametro (ossia di genere zero), può essere risoluta in tal modo *razionalmente* o coll'*estrazione di un radicale quadratico* (da aggiungersi al campo di razionalità dei coefficienti).

(²) *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen*, « Mathem. Annalen », Bd. 3.

Pertanto si hanno due tipi di sotto-classi di equazioni

$$f(x\,y) = 0$$

di genere zero (l'equazione lineare e l'equazione quadratica).

Si noti che, se una equazione $f(x\,y) = 0$ è stata risoluta con funzioni razionali non invertibili (di un parametro), si può, *razionalmente*, ottenere una (nuova) risoluzione di essa con funzioni razionali invertibili.

II) In questo lavoro ci proponiamo di trattare il problema analogo a quello sopra enunciato, per le equazioni fra tre variabili: « da quali irrazionalità si possa far dipendere la risoluzione di una equazione

$$f(x\,y\,z) = 0$$

con funzioni razionali invertibili di due parametri (supposta possibile) »: la questione analoga che si riferisce alla risoluzione dell'equazione $f(x\,y\,z) = 0$ con funzioni razionali non invertibili, comporta in qualche caso una soluzione più semplice, come verrà notato.

Il resultato a cui perveniamo può essere riassunto nell'enunciato:

Se un'equazione

$$f(x\,y\,z) = 0$$

è risolubile con funzioni razionali di due parametri (ossia ha tutti i generi nulli), si può sempre farne dipendere la effettiva risoluzione con funzioni razionali invertibili, da operazioni razionali (di eliminazione), dall'*estrazione di radicali quadratici e cubici*, e dalla risoluzione di una delle *equazioni per la bisezione degli argomenti*:

a) delle *funzioni abeliane di genere* 3,

b) o di *funzioni abeliane di genere* 4,

c) o delle *funzioni iperellittiche di genere* p $(= 1, 2, 3, \ldots)$.

Il procedimento su cui è fondato il presente studio conduce a distinguere le equazioni $f(x\,y\,z) = 0$, risolubili con funzioni razionali, in 4 *famiglie*: quelle della prima famiglia (due tipi di sotto-classi analoghe a quelle delle equazioni di genere zero tra due variabili) si risolvono coll'estrazione d'un radicale quadratico (al più); quelle della seconda famiglia dànno luogo a più tipi di sotto-classi, e la loro risoluzione si riattacca al caso *a*) dell'enunciato, o all'estrazione di radicali quadratici e cubici; quelle della terza e quarta famiglia dan luogo a due tipi di sotto-classi, e la loro risoluzione si riattacca risp. ai casi *b*) e *c*) dell'enunciato.

Si aggiunga che delle equazioni della 2ª famiglia può sempre ottenersi una risoluzione con funzioni razionali, astrazione fatta dalla condizione d'invertibilità, colla sola estrazione di radicali quadratici e cubici.

3. – Nell'ultima parte del lavoro i resultati ottenuti vengono applicati allo studio della risoluzione dell'equazione in 4 variabili

$$f(x_1\,x_2\,x_3\,x_4) = 0\,, \tag{1}$$

e dànno luogo alle seguenti conclusioni:

a) Quando le equazioni

$$f(x_1\,x_2\,x_3\,a) = 0\,,$$

ottenute dalla (1) col dare ad x_4 un valore costante, sono risolubili con funzioni razionali, l'equazione (1) può sempre essere risoluta esprimendo x_1, x_2, x_3, x_4 come funzioni di tre parametri costruite con operazioni razionali e coll'estrazione di radicali quadratici e cubici.

b) Quando sono risolubili con funzioni razionali (di due parametri) tutte le equazioni

$$f(x_1\,, x_2\,, x_3\,, ax_3+b) = 0$$

(in x_1, x_2, x_3), la (1) è risolubile ponendo x_1, x_2, x_3, x_4 funzioni di tre parametri u, v, w e di un radicale quadratico che porta sopra un polinomio (di particolar forma) in u, v, w.

c) Quando sono risolubili con funzioni razionali (di due parametri) tutte le equazioni in x_1, x_2, x_3

$$f(x_1\,, x_2\,, x_3\,, ax_2+bx_3+c) = 0\,,$$

la (1) può risolversi ponendo x_1, x_2, x_3, x_4 funzioni razionali di tre parametri (astrazion fatta dalla condizione d'invertibilità).

Nella risoluzione della

$$f(x_1\,x_2\,x_3\,x_4) = 0\,,$$

nei casi precedenti, si ottengono semplificazioni corrispondentemente al fatto che le equazioni in 3 variabili di cui l'enunciato discorre appartengono all'una piuttosto che all'altra famiglia.

Del resto non è affatto escluso che della nominata equazione $f(x_1\,x_2\,x_3\,x_4) = 0$, nei casi sopra enunciati, possa ottenersi con diverso procedimento una risoluzione più semplice. Gli esempi in proposito che ho considerato provano soltanto questo, che: se tutte le equazioni $f(x_1\,x_2\,x_3\,a)=0$ sono risolubili con funzioni razionali, non si può, in alcuni casi, risolvere $f(x_1\,x_2\,x_3\,x_4) = 0$ ponendo x_1, x_2, x_3, x_4 funzioni razionali di x_4 e di due altri parametri u, v, come avverrebbe se l'anzidetta risoluzione delle equazioni

$f(x_1\, x_2\, x_3\, a) = 0$ si effettuasse razionalmente, o irrazionalmente in modo tale che le irrazionalità numeriche introdotte non venissero a dipendere dal parametro a.

4. – Nella introduzione che precede, le questioni formanti oggetto di questo lavoro sono state esposte diffusamente in una forma puramente algebrica: è infatti l'interesse algebrico che in esse sembra a noi prevalente.

Nel corso del lavoro, dovendo ricorrere a procedimenti geometrici, faremo anche uso del linguaggio geometrico. Parleremo dunque della classe delle superficie razionali, e di sotto-classi di questa classe; di irrazionalità da cui può farsi dipendere la rappresentazione piana d'una superficie razionale; diremo che una superficie razionale viene trasformata *razionalmente* in un'altra data (o razionalmente rappresentata su di essa), ecc. ecc., in luogo di riferire le anzidette locuzioni alle corrispondenti equazioni.

Potremo ancora considerare indifferentemente, in luogo di superficie dello spazio ordinario S_3, superficie appartenenti ad iperspazi: ciò corrisponde ad estendere le considerazioni relative ad equazioni $f(xyz) = 0$ a sistemi equivalenti di equazioni tra più variabili.

Distinzione delle superficie razionali in 4 famiglie.

5. – Sia F una superficie razionale, d'un certo ordine n, in S_3, o in uno spazio più elevato S_r $(r > 3)$. Si dice *punto multiplo proprio* (o *isolato*) per F, un punto O di essa tale che la sezione di F con un piano (o iperpiano) per O abbia un genere inferiore a quello della sezione generica.

La superficie F può essere trasformata *razionalmente* in un'altra superficie, ad essa riferita punto per punto, priva di punti multipli propri.

Il procedimento che può servire ad effettuare una tale trasformazione è quello che andiamo ad esporre, riservandoci di giustificare subito dopo, le affermazioni su cui esso riposa.

Ecco dunque il procedimento in parola.

Si considerino tutte le ipersuperficie V_m di un ordine m assai elevato dello S_r (o S_3) cui F appartiene: *i punti multipli propri di F essendo in numero finito*, le V_m passanti per essi formano un sistema lineare ampio quanto si vuole (preso m assai grande); questo sistema si lascia staccare razionalmente da quello di tutte le V_m. Si riferiscano proiettivamente le sezioni di F colle indicate V_m (considerate come elementi del sistema lineare che esse formano) agli iperpiani di un conveniente S_ϱ, e si trasformi così la F in una nuova superficie F' di cui le sezioni iperpiane rappresentino quindi le nominate sezioni della F colle V_m.

Ad ogni punto multiplo proprio di F (punto base pel sistema delle V_m) corrisponde sopra F' una curva (semplice o multipla) e in generale anche un certo numero di punti multipli propri su di essa.

La F' non possiede altri punti multipli propri che quelli provenienti nel detto modo dai punti multipli propri di F. Applichiamo ora ad F' una trasformazione analoga a quella fatta subire ad F, ciò che può farsi pure razionalmente. *Dopo un numero finito di operazioni il procedimento ha termine* e si arriva ad una superficie, trasformata di F, priva di punti multipli propri.

Dobbiamo giustificare le affermazioni sulle quali riposa la validità del procedimento indicato.

La cosa è molto facile, posto che si tratta d'una superficie F razionale.

Rappresentiamola punto per punto sul piano, e sia $|C|$ il sistema delle immagini delle sue sezioni iperpiane: ad un punto multiplo proprio di F corrisponde sul piano una *curva fondamentale propria* di $|C|$, ossia una curva che presenta *una* condizione alle C che debbono contenerla, e diminuisce il genere delle curve residue. Si può escludere che qualcuna di tali curve sia ridotta all'intorno d'un punto base di $|C|$; basta per ciò (eventualmente) trasformare $|C|$ in guisa che esso abbia tutti i punti base distinti; ciò è possibile per un noto teorema del sig. NOETHER ([3]). Ora una curva fondamentale propria per $|C|$ è egualmente curva fondamentale propria del sistema $|mC|$ multiplo di $|C|$ secondo un qualsiasi intero m, sistema rappresentativo del sistema delle sezioni di F con tutte le V_m.

Il procedimento di trasformazione fatto subire alla superficie F si traduce sul piano rappresentativo nel modo seguente:

1) si moltiplichi il sistema $|C|$ per un conveniente intero m e si stacchino da esso le curve fondamentali proprie di $|C|$ ed $|mC|$: perchè questo sia possibile, preso m assai grande, occorre provare che le dette curve sono in numero finito;

2) una curva X fondamentale propria per $|C|$ può costituire una o più curve fondamentali proprie per il sistema innanzi costruito

$$|C'| = |mC - X - \ldots|\,;$$

in tal caso ciascuna di queste curve fondamentali proprie deve essere staccata da un multiplo conveniente del sistema $|C'|$: occorre provare che,

---

([3]) *Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function...*, « Mathem. Annalen », Bd. 9, e *Rationale Ausführung der Operationen...*, ibid., Bd. 23. Cfr. anche BERTINI, *Sopra alcuni teoremi fondamentali delle curve piane algebriche*, « Rendic. Istituto Lombardo », 1888.

ripetendo convenientemente queste operazioni, si arriva ad un sistema privo di curve fondamentali proprie.

In definitiva tutto ciò che basta provare per la giustificazione del procedimento sopra indicato è contenuto nella affermazione seguente: si può prendere un multiplo così elevato del sistema $|C|$, che, estratte da esso una o più volte le curve fondamentali proprie di $|C|$ o le loro parti irriducibili, si ottenga un sistema residuo per cui tali curve o parti irriducibili non sono più fondamentali.

Questa affermazione si giustifica per assurdo con un semplice calcolo numerico.

Si neghi l'affermazione precedente. Allora da un sistema $|mC|$, multiplo di $|C|$, si possono sempre estrarre curve fondamentali (proprie) pel sistema, finchè la dimensione del sistema stesso lo permette. Ammettiamo dunque tale ipotesi.

Indicato con s l'ordine delle curve piane C, e con $h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$ le molteplicità dei punti base di $|C|$, si ha che la dimensione del sistema $|mC|$, m-plo di $|C|$, vale (almeno)

$$\frac{ms(ms+3)}{2} - \sum_i \frac{mh_i(mh_i+1)}{2},$$

ossia

$$m^2\,\frac{s^2 - \sum h_i^2}{2} + m\,\frac{3s - \sum h_i}{2},$$

dove

$$s^2 > \sum h_i^2 .$$

Al crescere di m, il valore dell'espressione precedente dipende essenzialmente dal 1º termine, il quale diviene (da un certo punto in poi) maggiore di

$$m\,\frac{3s - \sum h_i}{2} + sm .$$

Allora, nella ipotesi sopra enunciata, si deve poter estrarre dal sistema $|mC|$, d'ordine sm, sm curve fondamentali proprie; il sistema residuo, per m assai alto, viene ad avere una dimensione quanto si vuole elevata, mentre, l'ordine di ciascuna curva fondamentale di $|C|$ essendo $\geqslant 1$, l'ordine di tale sistema residuo sarebbe nullo (o negativo).

Tale assurdo prova ciò che sopra è stato enunciato. E rimane quindi stabilito che:

Ogni superficie razionale può essere trasformata razionalmente in un'altra priva di punti multipli propri.

6. – Sia F una superficie razionale priva di punti multipli propri, e indichiamone con n l'ordine: possiamo supporre che F sia (o sia stata proiettata da punti esterni) in S_3.

Supposto che le sezioni piane di F abbiano il genere $\pi > 1$, consideriamo le $\infty^{\pi-1}$ superficie φ_{n-3}, d'ordine $n - 3$, aggiunte ad F: queste superficie possono essere determinate *razionalmente*, data F, poichè la determinazione di una di esse, passante per $\pi - 1$ punti generici dati, è algebrica e univoca (data F): il problema concreto di assegnare le equazioni delle φ_{n-3}, con operazioni di eliminazione, a partire dall'equazione di F, è analogo a quello che il sig. NOETHER ha risoluto per le curve algebriche piane (4); questo problema a noi, non importa qui di trattare.

Accade, in generale ($\pi > 3$), che le superficie φ_{n-3} segano su F (fuori della curva multipla) un sistema lineare di curve irriducibili, *semplice*, cioè tale che le curve di esso passanti per un punto generico di F non passano in conseguenza per altri punti variabili col primo; in tal caso questo sistema è anche privo di curve fondamentali proprie (5).

Allora se riferiamo proiettivamente gli elementi (curve) del sistema (o ciò che è lo stesso le φ_{n-3}) agli iperpiani $S_{\pi-2}$ di un $S_{\pi-1}$, si ottiene *razionalmente* una superficie F', trasformata di F, ancora priva di punti multipli propri.

Noi proietteremo (eventualmente) la F' in S_3, e applicheremo ad F' (se è possibile) una trasformazione analoga a quella operata su F, costruendo una nuova superficie F'', ecc.

Otteniamo razionalmente una serie di superficie, l'una trasformata della precedente col procedimento indicato,

$$F\,, F'\,, F''\,, F'''\,, \ldots :$$

si tratta di decidere se il procedimento avrà termine dopo un numero finito di operazioni, e a quale ultima superficie ci condurrà.

Per esaminare la questione, supponiamo rappresentata la superficie razionale F sopra un piano, e sia $|C|$ il sistema delle immagini delle sezioni piane di F (immagini aventi un certo ordine m): vediamo di costruire sul piano i successivi sistemi $|C'|$, $|C''|$,... rappresentativi (delle sezioni piane) risp. di F', F'',....

---

(4) *Rationale Ausführung...*, l. c.

(5) CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero*, « Memorie della Società Italiana delle Scienze », ser. III, t. X, 1896.

Tale costruzione si effettua subito, giacchè un teorema noto (6) ci avverte che $|C'|$ non è altro che il sistema delle curve d'ordine $m-3$ aggiunte alle C, spogliato eventualmente di parti fisse, ossia il *sistema aggiunto* a $|C|$: analogamente $|C''|$ è il sistema aggiunto a $|C'|$, ecc.

Gli ordini delle curve di tali sistemi decrescono dall'uno all'altro di 3 (almeno), quindi il procedimento di aggiunzione si esaurisce.

L'ultimo sistema aggiunto, $|C^\nu|$ (∞^1 almeno), si compone di curve razionali o ellittiche, o di gruppi di curve razionali o ellittiche d'un fascio.

Per conseguenza la serie delle superficie

$$F, F', F'', \ldots,$$

necessariamente si arresta. Però essa può aver termine o quando ha termine la serie dei successivi sistemi aggiunti a $|C|$, se questi sistemi sono tutti irriducibili e semplici, o prima. Nel primo caso, l'ultima superficie F^ν della serie è una superficie a sezioni razionali o ellittiche. Per esaminare il secondo caso bisogna domandarsi quand'è che il procedimento di aggiunzione applicato nel piano, a partire dal sistema $|C|$ irriducibile, semplice e privo di curve fondamentali proprie, può condurre ad un sistema lineare riducibile, o non semplice. La risposta a tale questione è la seguente (7):

Nel procedimento di aggiunzione applicato a $|C|$ il primo sistema non più irriducibile, semplice, che può incontrarsi è:

a) un fascio di curve razionali o un sistema costituito con gruppi di curve di un tal fascio, se il penultimo sistema aggiunto è costituito da curve iperellittiche;

b) oppure una rete di curve ellittiche (trasformabile in una rete di cubiche con 7 punti base);

c) oppure un sistema lineare ∞^3 di curve di genere due, trasformabile nel sistema delle sestiche con 8 punti base doppi.

Se ne ricava che, se la serie delle superficie

$$F, F', F'', \ldots$$

non termina con una superficie a sezioni razionali o ellittiche, essa termina con una superficie a sezioni iperellittiche, oppure con una superficie la cui successiva trasformata (secondo il procedimento indicato) è un

(6) ENRIQUES, *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche*, III, 3, « Memorie dell'Accademia di Torino », 1893 [questo volume, V] e *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche*, 31, « Memorie della Società Italiana delle Scienze », 1896 [questo volume, XIII].

(7) Cfr. l'aggiunta del sig. CASTELNUOVO alla mia memoria *Sui piani doppi di genere uno*, « Memorie della Società Italiana delle Scienze », 1896 [questo volume, XVI].

piano doppio con quartica limite, rappresentato sul piano semplice dalla rete di curve ellittiche, o un cono quadrico doppio con sestica limite, rappresentato sul piano semplice dal sistema ∞^3 delle curve di genere due.

Possiamo dire che negli ultimi due casi il piano o risp. il cono doppio chiudono la serie delle superficie F, F', F'',..., e sono superficie (doppie) trasformate di F, ottenute razionalmente.

Anzi, nel riassumere i resultati stabiliti, possiamo considerare i piani doppi con quartica limite come superficie a sezioni ellittiche (d'ordine 2), e però possiamo enunciare che:

Le superficie razionali prive di punti multipli propri si distinguono in 4 famiglie secondochè il procedimento d'aggiunzione a partire dalle loro sezioni piane (*o iperpiane*) *conduce a rappresentare la superficie, senza aggiunta di irrazionali numerici:*

1) *sopra una superficie a sezioni razionali,*

2) *o sopra una superficie a sezioni ellittiche* (d'ordine $n \geqslant 2$) *che, per $n > 2$, è priva di punti doppi,*

3) *o sopra una superficie a sezioni iperellittiche possedente un fascio razionale di coniche,*

4) *o sopra un cono quadrico doppio con sestica di diramazione.*

I 4 tipi di superficie qui enumerati possono dunque riguardarsi come tipi a cui si possono sempre ricondurre le superficie razionali con una trasformazione effettuata senza aggiunta di irrazionalità.

Procediamo ad esaminare partitamente le irrazionalità da cui dipende la rappresentazione piana delle superficie delle 4 famiglie enumerate.

Le irrazionalità da cui può farsi dipendere la rappresentazione piana delle superficie razionali delle 4 famiglie.

7. – 1ª *famiglia.* Tipo di questa famiglia sono le superficie a sezioni razionali; dunque (in S_3) il *piano,* la *quadrica,* le *rigate razionali* d'ordine > 2, e la *superficie romana di* STEINER [8] (del 4º ordine con un punto triplo ecc.).

Per rappresentare una quadrica sul piano basta la proiezione da un suo punto, e la determinazione di un punto della quadrica esige [generalmente] l'estrazione d'un radicale quadratico.

Una rigata razionale d'ordine > 2 si può rappresentare sul piano, riferendo proiettivamente gli elementi (generatrici) del suo fascio di rette

[8] Cfr. PICARD, *Sur les surfaces dont toutes les sections planes sont unicursales,* « Crelle's Journal », Bd. C, 1886.

alle rette d'un fascio nel piano, e proiettando da un qualsiasi asse ciascuna generatrice sulla retta corrispondente del detto piano. La prima operazione esige in sostanza la rappresentazione punto per punto d'una sezione piana della rigata sopra una retta, ossia la rappresentazione sulla retta d'una curva razionale; essa si effettua dunque razionalmente o estraendo un radicale quadratico ([9]).

Infine la superficie di STEINER si rappresenta sul piano razionalmente con proiezione dal punto triplo.

In conclusione, dunque:

Le superficie razionali della 1ª *famiglia si possono rappresentare sul piano estraendo (al più) un radicale quadratico.*

8. – 2ª *famiglia.* Tipo di questa famiglia sono le superficie razionali a sezioni ellittiche: possiamo (razionalmente) renderle normali in uno spazio assai elevato; esse divengono allora superficie (non rigate) d'un certo ordine n in S_n, dove $9 \geqslant n \geqslant 2$. Tali superficie sono state studiate dal sig. DEL PEZZO ([10]).

Dobbiamo analizzarle partitamente a seconda del loro ordine n.

a) $n = 2$, « piano doppio con quartica di diramazione ».

La sua rappresentazione sul piano semplice è stata data dal CLEBSCH ([11]). L'equazione da cui tale rappresentazione dipende è quella che serve a separare le tangenti doppie della quartica, vale a dire è l'equazione per la bisezione dell'argomento delle funzioni abeliane di genere 3.

b) $n = 3$, « superficie cubica ».

Essa si rappresenta sul piano doppio con quartica limite per proiezione da un suo punto: la determinazione di un suo punto importa la risoluzione di un'equazione del 3° grado, ossia l'estrazione d'un radicale quadratico e d'un radicale cubico.

Dopo ciò, la rappresentazione della superficie sul piano semplice può effettuarsi mediante la risoluzione dell'equazione delle tangenti doppie alla quartica limite del piano doppio, semplificata però in questo caso perchè della nominata equazione è data una radice (è data la tangente doppia della quartica sezione del piano tangente alla superficie cubica nel centro di proiezione scelto) ([12]).

([9]) NOETHER, l. c., « Mathem. Annalen », Bd. 3.

([10]) *Sulle superficie dello n° ordine immerse nello spazio ad n dimensioni*, « Circolo Matematico di Palermo », t. I. Cfr. anche il mio lavoro nei « Mathem. Annalen », Bd. 46 [questo volume, X].

([11]) *Ueber den Zusammenhang...*, « Mathem. Annalen », Bd. 3.

([12]) Il consueto modo di SCHLAEFLI per rappresentare la superficie cubica sul piano conduce a risolvere *l'equazione delle* 27 *rette* della superficie, equazione studiata dai sig. KLEIN e BURKHARDT, e da loro risoluta.

c) $n = 4$, « superficie del 4° ordine F_4 normale in S_4, che, per proiezione da un punto esterno, dà una superficie del 4° ordine di S_3 dotata di conica doppia ».

La superficie viene rappresentata sul piano doppio con quartica limite per proiezione da un punto della conica doppia: la determinazione di un tal punto esige (al più) l'estrazione d'un radicale quadratico; dopo ciò la questione di rappresentare la superficie sul piano semplice è ricondotta al caso *a*), dove però la relativa equazione appare semplificata, essendo data una coppia di tangenti doppie alla quartica limite; è noto, anzi, che la nominata equazione si riduce ad un'equazione di 5° grado e all'estrazione di 4 radicali quadratici: infatti tale circostanza è rappresentata geometricamente dal fatto che la costruzione di due rette sghembe sopra una superficie cubica F_3 di cui è data una retta r, dipende dalla separazione dei 5 piani tritangenti alla F_3 passanti per r, ecc.

d) $n = 5$, « superficie F_5 del 5° ordine normale in S_5 ».

Questa superficie F_5 si può rappresentare sul piano razionalmente. Basta procedere nel seguente modo.

Si proietti da punti esterni la F_5 in S_3: la superficie proiezione, del 5° ordine, possiede una curva doppia del 5° ordine dotata di punto triplo (triplo per la superficie) ([13]). A questo punto triplo corrisponde su F_5 una terna di punti che viene così determinata razionalmente: si seghi ora F_5 con un S_3 passante per i 3 punti della terna nominata; costruiremo in tal modo razionalmente su F_5 una coppia di punti. Proiettiamo F_5 dalla coppia di punti in S_3: la superficie proiezione è una superficie cubica su cui è data (razionalmente) una coppia di rette sghembe; ora questa superficie cubica (e quindi F_5) si rappresenta sul piano razionalmente, col noto procedimento del sig. SCHLÄFLI, usando della congruenza lineare di rette che ha come direttrici le rette della coppia nominata.

e) $n = 6$, « superficie F_6 del 6° ordine in S_6 ».

Per rappresentarla sul piano basta fissarne un punto O, proiettarla dal piano tangente in esso sopra una quadrica, e quindi proiettare la quadrica da un suo punto che può essere fissato razionalmente come immagine di un punto infinitamente vicino ad O sulla superficie obiettiva.

Vediamo da che si può far dipendere la determinazione di un punto della superficie F_6 di S_6.

Basta evidentemente determinare su F_6 una retta.

Ora (e ciò che si afferma qui vien subito verificato esaminando la rappresentazione piana di F_6 col sistema delle cubiche per 3 punti base, non in linea retta) sopra F_6 vi sono 6 rette, le quali si distribuiscono in

([13]) Cfr. CLEBSCH, CREMONA e soprattutto CAPORALI, *Sulle superficie del 5° ordine dotate di una curva doppia del 5° ordine*, « Annali di Matematica », serie II, t. 7.

due terne; quelle di una terna sono incidenti a quelle dell'altra e sghembe fra loro. Dunque l'equazione del 6° grado da cui dipende la separazione delle 6 rette su F_6 si spezza in due equazioni del 3° grado (corrispondenti alle due terne) separabili coll'estrazione d'un radicale quadratico.

Mediante la risoluzione di equazioni siffatte si può quindi rappresentare la F_6 sul piano.

f) $n = 7$, « superficie F_7 del 7° ordine in S_7 ».

La F_7 (come risulta dalla sua rappresentazione piana) contiene 3 rette: due sghembe fra loro e l'altra incidente ad esse; da quest'ultima retta (che è costruibile razionalmente) la F_7 vien proiettata in una superficie di VERONESE di S_5, e quindi, da punti esterni, nella superficie di STEINER in S_3; dunque (vedi *a*)), la F_7 si può rappresentare sul piano razionalmente.

g) $n = 8$, « superficie F_8 dell'8° ordine in S_8 ».

Vi sono due tipi di superficie F_8: la superficie rappresentabile sul piano col sistema delle cubiche con un punto base, e quella rappresentabile col sistema delle quartiche con due punti base doppi: ambedue possono rappresentarsi sul piano razionalmente.

Invero la F_8 di 1ª specie possiede una retta da cui viene proiettata in una rigata del 5° ordine di S_6, la quale si rappresenta sul piano razionalmente. Invece la F_8 di 2ª specie possiede una rete di quartiche dotata di un punto base semplice, e da questo punto viene proiettata nella F_7 di S_7 che, come abbiam visto, si rappresenta sul piano razionalmente.

h) $n = 9$, « superficie F_9 del 9° ordine in S_9 ».

La rappresentazione piana della F_9 può farsi dipendere dalla determinazione di un suo punto, dal quale la F_9 vien proiettata su una F_8 di S_8.

Vediamo come si può determinare un punto della F_9, risolvendo soltanto un'equazione di 4° e una di 3° grado, mentre a priori apparirebbe soltanto la possibilità di far dipendere la determinazione di un punto di F_9 dalla risoluzione di un'equazione di 9° grado.

Notiamo per questo che la relazione tra una cubica e la sua hessiana nel piano (rappresentativo di F_9), si rispecchia in una relazione per la quale ad ogni sezione iperpiana di F_9 corrisponde un'altra sezione iperpiana, razionalmente determinabile, che chiameremo la hessiana della prima.

Ora fra le sezioni iperpiane di F_9, che sono curve ellittiche, si distinguono quelle equianarmoniche: la sezione hessiana corrispondente ad una sezione equianarmonica di F_9 si spezza in 3 cubiche secantisi due a due in *un* punto. In un fascio di sezioni iperpiane di F_9 ve ne sono 4 equianarmoniche: se ne può determinare *una* risolvendo una equazione del 4° grado; dopo ciò si potranno separare i 3 punti doppi della sua curva hessiana su F_9 (spezzata in 3 cubiche) risolvendo un'equazione del 3° grado:

dunque colla risoluzione delle menzionate equazioni di 4° e 3° grado (che importano l'estrazione di radicali quadratici e cubici) si può determinare un punto di F_9, e quindi rappresentare la F_9 sul piano.

Riassumendo i resultati ottenuti avremo il seguente enunciato:

Le superficie razionali della 2ª *famiglia si possono rappresentare senza introdurre irrazionalità:*

1) *sopra il piano semplice,*

2) *o sopra il piano doppio con quartica di diramazione,*

3) *o sopra la superficie cubica di* S_3,

4) *o sopra la superficie del* 4° *ordine con conica doppia di* S_3 (o, ciò che è lo stesso, sulla superficie normale del 4° ordine in S_4, di cui questa è proiezione),

5) *o sopra la superficie del* 6° *ordine a sezioni ellittiche di* S_6,

6) *o sopra la superficie del* 9° *ordine a sezioni ellittiche di* S_9.

La rappresentazione piana di queste superficie razionali della 2ª *famiglia si può sempre ottenere estraendo radicali quadratici e cubici e risolvendo un'equazione per la bisezione delle funzioni abeliane di genere* 3.

Osservazione. – Sia data una superficie F e sopra di esse una rete di curve ellittiche. Allora (seguendo il sig. CASTELNUOVO) ([14]) si può rappresentare la F sopra una involuzione del piano, nel modo seguente.

Si prenda su F un punto O e si considerino le curve (ellittiche) C della rete passanti per O: esse formano un fascio razionale. Indicando con n l'ordine delle nominate curve C, resta determinata su ciascuna C una serie completa g_n^{n-1}: la serie segata sulla C dai piani (o iperpiani) del suo spazio, resa completa. Il punto O contato $n-1$ volte dà luogo ad *un* gruppo della g_n^{n-1} che ha un punto residuo O'. Variando la C nel fascio, O' descrive su F una curva razionale K coordinata ad O.

Prendiamo ora un punto O' sulla K; la curva razionale K' ad esso coordinata su F, descriverà una serie razionale ∞^1. Possiamo far corrispondere le curve della serie alle rette d'un fascio nel piano, riferendo queste rette ai punti della K: ciò si effettua razionalmente, perchè la K (pel modo di costruzione) è già rappresentata sopra il fascio delle curve C per O, e quindi sul fascio delle tangenti (ad esse e) ad F in O. Dopo ciò possiamo riferire punto per punto ciascuna K' alla corrispondente retta del fascio nel piano; anche ciò si effettua (in modo analogo) razionalmente. Ne risulta una rappresentazione della F sopra una involuzione del piano, rappresentazione costruita razionalmente appena è dato il punto O di F.

Deduciamo:

Una superficie razionale della 2ª *famiglia può essere rappresentata sopra*

([14]) *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche*, « Rendic. Accad. dei Lincei », 1894.

una involuzione piana coll'introduzione delle sole irrazionalità occorrenti a fissarne un punto; ossia coll'estrazione di radicali quadratici e cubici (al più).

Vale a dire:

Un'equazione della 2a famiglia può essere risoluta con funzioni razionali non invertibili, mediante la sola estrazione di radicali quadratici e cubici: le irrazionalità superiori, di cui si è discorso, compariscono solo quando si voglia una risoluzione di essa con funzioni razionali invertibili.

9. – 3a *famiglia.* Tipo di questa famiglia sono le superficie, a sezioni iperellittiche, contenenti un fascio lineare di coniche.

La rappresentazione piana di tali superficie è stata data dal signor NOETHER ([15]), il quale ha dimostrato l'esistenza di una curva unisecante le coniche del fascio sopra la superficie, curva da cui dipende (razionalmente) la menzionata rappresentazione.

Per vedere da quali irrazionalità si possa far dipendere la costruzione della unisecante e quindi la rappresentazione della superficie, basterà estendere ciò che CLEBSCH ([16]) ha fatto per la superficie del 4° ordine con retta doppia. Procediamo dunque nel modo seguente. Cominciamo dal riferire proiettivamente gli elementi (coniche) del fascio sulla superficie, alle rette di un fascio nel piano: tale riferimento di un ente razionale ad un fascio di raggi, esige (al più) l'estrazione di un radicale quadratico. Dopo ciò proiettiamo (da un punto del suo piano) ciascuna conica sulla corrispondente retta: con questa costruzione (effettuabile razionalmente) si rappresenta la data superficie sopra un piano doppio con curva di diramazione C_{2n}, d'un certo ordine $2n$, dotata di un punto $(2n-2)$-plo, O.

Una curva, sopra la superficie, unisecante le coniche del fascio, dà nel piano una curva d'un certo ordine m, avente il punto O come $(m-1)$-plo, e tangente, ovunque la incontra, alla C_{2n}.

Per $m = 2n - 2$ possiamo risolvere il problema della determinazione di una F_m siffatta, colla estrazione di radicali quadratici e la risoluzione di un'equazione per la bisezione delle funzioni iperellittiche inerenti a C_{2n}. Supponiamo qui, dapprima, che C_{2n} sia irriducibile; denotiamo con p il genere di essa curva. Si prendano su C_{2n} $n-1$ punti generici che possono determinarsi (con altrettante estrazioni di radicali quadratici) sopra $n-1$ rette uscenti da O. Allora (come è noto) vi sono 2^{2p} curve C_{2n-2}, d'ordine $2n-2$, aggiunte a C_{2n}, che toccano C_{2n} negli $n-1$ punti assegnati ed altrove in p punti: la separazione di queste C_{2n-2} dipende appunto

---

([15]) L. c., « Mathem. Annalen », Bd. 3.

([16]) *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen...*, « Mathem. Annalen », Bd. 1; *Ueber den Zusammenhang...*, ibid., Bd. 3.

dalla risoluzione di un'equazione per la bisezione degli argomenti delle funzioni abeliane (iperellittiche) inerenti a C_{2n} ([17]).

Lievi modificazioni occorrono pel caso che C_{2n} sia riducibile. In tal caso lo spezzamento di C_{2n} può supporsi consistere soltanto nello staccarsi da essa di un certo numero h di rette distinte per O, in guisa che la residua curva C_{2n-h} sia irriducibile ed abbia O come punto $(2n-h-2)$-plo: invero nella curva di diramazione d'un piano doppio si può sempre contare una volta sola (al più) le componenti multiple, e d'altra parte se da C_{2n} si staccasse una curva unisecante le rette per O (fuori di O) tale curva fornirebbe già sopra la data superficie una unisecante delle coniche del fascio ivi considerato.

Denoteremo ora con p il genere di C_{2n-h}. Ciò posto, si prenda su ciascuna delle h rette per O facenti parte di C_{2n}, una delle due intersezioni con C_{2n-h}; si hanno così h punti di C_{2n-h}: ulteriormente si fissino (come innanzi) su C_{2n-h}, $n-1-h$ punti, e si considerino le curve C_{2n-h-2} d'ordine $2n-h-2$ aggiunte a C_{2n-h} che passano per questi $n-1-h$ punti e toccano ivi la C_{2n-h}, e che passano inoltre (semplicemente) per gli h punti prima nominati: queste C_{2n-h-2} segano su C_{2n-h} una serie g_{2p}^{p}; fra esse vi sono $2p$ C_{2n-h-2} che toccano (fuori dei punti fissati) la C_{2n-h} in p punti; tali curve toccano, ovunque la incontrano, la C_{2n} di diramazione del piano doppio. La loro determinazione dipende dalla risoluzione di una equazione per la bisezione degli argomenti delle funzioni iperellittiche inerenti a C_{2n-h}.

Come abbiamo innanzi accennato, una curva unisecante le rette per O (fuori di O) e tangente alla C_{2n} di diramazione del piano doppio ovunque la incontra, rappresenta due curve unisecanti le coniche del fascio sopra la data superficie F, curve staccabili coll'estrazione di un radicale quadratico. Data una di queste curve unisecanti, si può rappresentare la superficie F sul piano, proiettando ogni conica di F sopra una retta del suo piano dal punto della nominata unisecante posto sopra la conica.

Concludiamo che:

Le superficie razionali della 3ª *famiglia si possono rappresentare sul piano coll'estrazione di radicali quadratici e la risoluzione di un'equazione per la bisezione degli argomenti delle funzioni iperellittiche di genere* (opportuno) p.

10. – 4ª *famiglia.* Tipo di questa famiglia è il cono quadrico doppio con sestica di diramazione (di genere 4).

([17]) Cfr. CLEBSCH e GORDAN, *Theorie der Abel'schen Functionen*, S. 265. L'equazione, come è noto, si riduce ad una equazione di grado $2p+2$ e all'estrazione di radicali quadratici. Questo fatto fondamentale risale a RIEMANN. Cfr. a questo proposito vari lavori nei «Mathematische Annalen», di WEBER (Bd. 13), NOETHER (Bd. 14, 16), e, per $p=2$, di BURKHARDT (Bd. 35).

Questo cono quadrico doppio si riduce (per proiezione da un suo punto) al piano doppio con sestica di diramazione dotata di due punti tripli infinitamente vicini: la rappresentazione di questo piano doppio sul piano semplice è dovuta al sig. NOETHER ([18]), che l'ha ottenuta mediante la determinazione delle cubiche aggiunte alla sestica che la toccano ovunque la incontrano, cubiche spezzate nella retta dei due punti tripli e in una conica per essi. Veramente il sig. NOETHER (l. c., p. 85) nota soltanto come, data *una* tal conica tritangente alla detta sestica, il piano doppio dato si riconduce al piano doppio con quartica limite; ma, se in luogo di una sola, vengono date più, $\varrho > 1$, convenienti coniche tritangenti, il piano doppio si può ricondurre (razionalmente) ad una superficie a sezioni ellittiche d'ordine $\varrho+1$, e quindi (p. e. per $\varrho = 4$) rappresentarsi razionalmente sul piano semplice. Dunque la rappresentazione sul piano semplice del cono quadrico doppio con sestica di diramazione di genere 4, si può ottenere determinando i piani tritangenti alla nominata sestica. Perciò *il problema della rappresentazione piana delle superficie della* 4ª *famiglia si può ridurre alla risoluzione dell'equazione per la bisezione degli argomenti delle funzioni abeliane di genere* 4 inerenti alla sestica, equazione da cui dipende la separazione dei $2^3(2^4 - 1)$ piani tritangenti alla sestica stessa ([19]).

11. – Riassumendo:

La rappresentazione piana delle superficie razionali si può far dipendere, oltrechè da operazioni razionali e dall'estrazione di radicali quadratici e cubici, dalla risoluzione di una delle equazioni per la bisezione degli argomenti:

delle funzioni abeliane di genere 3 *o* 4,

o delle funzioni iperellittiche di genere p $(= 1, 2, \ldots)$.

Applicazioni alle varietà con un sistema lineare di superficie razionali.

12. – I resultati ottenuti innanzi permettono una applicazione immediata alle varietà algebriche V (di tre dimensioni) che posseggono un *fascio* di superficie razionali, cioè un sistema di superficie razionali siffatto che per il generico punto della varietà passi *una* superficie del sistema.

Ci limiteremo al caso più notevole in cui il fascio (considerato come un ente ∞^1 di cui le superficie sono gli elementi) sia razionale. Possiamo

([18]) *Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen*, « Sitzungsberichte der physik. medicin. Soc. zu Erlangen », 1878, 14 Januar.

([19]) Cfr. CLEBSCH e GORDAN, *Theorie der Abel'schen Functionen*, S. 264; WEBER, « Math. Ann. », Bd. 13; NOETHER, ibid. Bd. 28, 33; SCHOTTKY, « Crelle's Journal », Bd. 103.

allora riferire proiettivamente gli elementi (superficie) del fascio su V agli iperpiani (S_3) passanti per un piano fisso di S_4 (o agli iperpiani d'un fascio in uno spazio più elevato) e rappresentare ciascuna superficie su una superficie del corrispondente iperpiano; *purchè questa operazione si compia razionalmente*, si otterrà una trasformazione birazionale facente passare dalla data varietà ad una varietà avente come sezioni iperpiane di un fascio le superficie costruite: questa trasformazione risulterebbe invece irrazionale, se nell'eseguire l'operazione precedente comparissero delle irrazionalità numeriche, giacchè, al variare della superficie nel dato fascio su V, queste irrazionalità verrebbero a dipendere da un parametro.

Ciò posto, esaminiamo partitamente i 4 casi che si ottengono corrispondentemente alle 4 famiglie cui le superficie del fascio su V possono appartenere.

13. – *a*). Se le dette superficie appartengono alla 1ª famiglia, si può anzitutto trasformare V in una varietà W di S_4 le cui sezioni iperpiane d'un fascio sieno a sezioni razionali: ciascuna di queste superficie F si può rappresentare *razionalmente* sul piano, appena se ne sia determinato un punto. Si otterrà dunque la rappresentazione di W sopra S_3, rappresentando le dette superficie F risp. sopra i piani per una retta in S_3, purchè si costruisca su W una curva unisecante le F.

Ora una tale curva esiste sempre: infatti si seghi W con un iperpiano generico; questo iperpiano sega le F secondo curve razionali formanti un fascio razionale sulla superficie φ sezione di W coll'iperpiano; come il sig. NOETHER [20] ha dimostrato, esiste sempre una curva unisecante quelle del fascio su φ, questa curva sega in *un* punto le F. Risulta così provato che:

Le varietà (di tre dimensioni) contenenti un fascio razionale di superficie razionali della 1ª famiglia si possono rappresentare punto per punto su S_3, rappresentando le nominate superficie sui piani per una retta in S_3.

14. – *b*). Si abbia una varietà V con un fascio razionale di superficie razionali della 2ª famiglia: si può supporre che la varietà sia in S_4, e le superficie del fascio sieno le sezioni iperpiane per un piano fisso, e sieno superficie F a sezioni ellittiche di un certo ordine $n \leqslant 9$, incluso il caso $n = 2$ in cui la V si riduce ad un S_3 doppio con superficie limite d'un certo ordine $2m$ dotata di retta $(2m - 4)$-pla. Per $n = 5$ o per $n = 7, 8$, la V si può rappresentare su S_3 rappresentando punto per punto le F sopra i piani d'un fascio.

Per $n = 4$ si può rappresentare ciascuna F sopra un piano doppio

[20] L. c., «Mathem. Annalen», Bd. 3.

con quartica limite, razionalmente, appena si sia determinato un punto della conica doppia di F: ora le coniche doppie delle superficie F formano una superficie su cui si può costruire una unisecante di quelle coniche ([21]) (se le dette coniche sono spezzate l'affermazione vale ancora); dunque per $n = 4$ si può sempre rappresentare la varietà V sullo S_3 doppio con superficie di diramazione d'un certo ordine $2m$ dotata di retta $(2m - 4)$-pla.

Concludiamo che:

Una varietà V con un fascio di superficie razionali F della 2ª famiglia si può rappresentare:

1) *sopra lo S_3 in modo che le F vengano rappresentate sui piani d'un fascio;*

2) *o sopra lo S_3 doppio con superficie di diramazione d'un certo ordine $2m$ dotata di retta $(2m - 4)$-pla, rappresentando le F sui piani doppi per questa retta (dotati di quartica limite);*

3) *o sopra una varietà di un certo ordine m in S_4, dotata di piano $(m - 3)$-plo, rappresentando le F sulle superficie cubiche sezioni della varietà cogli iperpiani pel detto piano;*

4) *o sopra una varietà di S_4 possedente un fascio di superficie sezioni del 6° ordine a curve sezioni ellittiche, immagini delle F;*

5) *o sopra una varietà di S_4 possedente un fascio di superficie sezioni del 9° ordine a curve sezioni ellittiche, immagini delle F.*

Se vi è su V una curva unisecante le F, la V nei casi 4), 5) si può rappresentare nel modo 1) sullo S_3 semplice, e nel caso 3) si può rappresentare nel modo 2) sopra uno S_3 doppio con superficie di diramazione d'un certo ordine $2m$ dotata di retta $(2m - 4)$-pla.

Infatti le superficie razionali a sezioni ellittiche degli ordini 6 e 9 si possono rappresentare sopra un piano, razionalmente, dato un loro punto; mentre, dato un punto di una superficie cubica, questa vien proiettata da esso sul piano doppio con quartica limite.

È dubbio se tali riduzioni possono ottenersi in generale. Certo è soltanto che i casi 2) e 3) dell'enunciato non possono sempre ridursi al caso 1). Per convincersene basta considerare il fascio generale di superficie cubiche di S_3, e riconoscere (come è facile) che non è possibile trasformarlo in un fascio di piani mediante una trasformazione cremoniana.

15. – *c*). *Una varietà V con un fascio di superficie razionali della 3ª famiglia si può rappresentare sopra una varietà contenente una congruenza (d'indice 1) di coniche* (cioè un sistema ∞^2 di coniche tale che per un punto generico ne passi una): la congruenza sarà razionale se è razionale il fascio delle superficie considerate.

([21]) NOETHER, l. c.

La dimostrazione dell'enunciato è immediata, posto che già sappiamo potersi trasformare ogni superficie della 3ª famiglia, razionalmente, in una superficie con un fascio di coniche; basta notare che una serie di fasci di coniche appartenenti alle superficie d'un fascio dà appunto luogo ad una congruenza (d'indice 1).

Come corollario si ha subito:

Una varietà V con un fascio razionale di superficie razionali della 3ª famiglia si può rappresentare sopra lo S_3 doppio con superficie di diramazione d'un certo ordine $2n$ dotata di punto $(2n-2)$-plo.

Omettiamo la ovvia dimostrazione.

Digressione. – Notiamo piuttosto un'altra forma (alquanto più comprensiva) che si può dare facilmente ai resultati precedenti:

Una varietà V che contenga una congruenza (*d'indice* 1) *di curve razionali, si può trasformare in una varietà con una congruenza di coniche.*

Questo teorema appare come una diretta estensione del teorema del sig. NOETHER relativo alle superficie con un fascio di curve razionali (l. c.), e si può dimostrare collo stesso procedimento, generalizzato. È da notarsi che le coniche della congruenza su V possono essere riferite alle rette d'un cono di S_4 (o, in particolare, d'una stella di S_3) se esiste su V una superficie che le seghi in *un* punto: una tale superficie esiste sempre se le dette curve sono d'ordine dispari (cfr. NOETHER, l. c.); ma nel caso opposto non esiste sempre, neppure se la congruenza è razionale: infatti si hanno esempi in proposito relativi alle congruenze di coniche di S_3, di cui il sig. MONTESANO ha assegnato i tipi irriducibili per trasformazioni birazionali ([22]).

Un corollario della precedente osservazione ci permette di affermare che:

Una congruenza (d'indice 1) *di curve razionali d'ordine dispari in S_3 si può sempre trasformare birazionalmente in una stella di rette.*

16. – *d*). Si abbia una varietà V con un fascio razionale di superficie razionali, F, della 4ª famiglia: la V si può trasformare in una varietà doppia W riferendo le F ai coni quadrici doppi con sestica limite, d'un fascio: siccome questo fascio è razionale si può costruire una curva unisecante i detti coni quadrici (cfr. n. 13); si può quindi proiettare ciascun cono quadrico doppio, dal punto della curva unisecante che gli appartiene, sopra un piano doppio con sestica limite dotata di due punti tripli infinitamente vicini. Così si perviene al resultato:

Una varietà V con un fascio razionale di superficie razionali della 4ª fa-

---

([22]) MONTESANO, *Su i varii tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio*, « Rendic. dell'Accad. di Napoli », 1895.

miglia si può rappresentare sopra lo S_3 doppio dotato di superficie di diramazione d'un certo ordine $2n$ con due punti $(2n-3)$-pli infinitamente vicini (congiunti da una retta $(2n-6)$-pla).

17. – Si abbia una varietà V (algebrica, di tre dimensioni) contenente una *rete* di superficie razionali, F; cioè un sistema ∞^2 di esse, tale che per due punti generici di V ne passi *una* (sistema necessariamente razionale, essendo sottintesa la irriducibilità delle F ([23])). Le F passanti per un punto generico di V formano un fascio razionale: il punto base del fascio tien luogo di una curva unisecante le F. Per conseguenza, ricordando i resultati ottenuti per le varietà con un fascio di superficie razionali, possedenti una unisecante, si avrà:

Una varietà V con una rete di superficie razionali può sempre essere rappresentata:

1) *sopra lo S_3 semplice,*

2) *o sopra lo S_3 doppio con superficie di diramazione d'un certo ordine $2n$ con retta $(2n-4)$-pla,*

3) *o sopra lo S_3 doppio con superficie di diramazione d'un certo ordine $2n$ dotata di punto $(2n-2)$-plo,*

4) *o sopra lo S_3 doppio con superficie di diramazione d'un certo ordine $2n$ dotata di due punti $(2n-3)$-pli infinitamente vicini* (congiunti da una retta $(2n-6)$-pla).

Nel caso 2) si può rappresentare la V sopra una involuzione di S_3 (cfr. n. 8), ossia risolvere con funzioni razionali non invertibili di tre parametri, l'equazione della V.

Un resultato analogo si ottiene anche nei casi 3) e 4), col procedimento che andiamo ad indicare, sotto le condizioni che dal procedimento stesso appariranno necessarie.

Ragioniamo come se le superficie razionali F della rete su V sieno tutte prive di punti multipli propri: non è questa una restrizione che introduciamo, perchè, se tale ipotesi non fosse verificata, sarebbe facile dimostrare come si possa trasformare V in modo che contemporaneamente tutte le F della rete perdano i loro punti multipli propri.

Ciò posto, col procedimento di aggiunzione esposto, si può — nei casi 3), 4) che stiamo considerando — costruire razionalmente sopra ciascuna F un fascio (ultimo aggiunto) di curve C, fascio di curve razionali (3)), o fascio di curve ellittiche aggiunto al sistema ∞^3 di curve di genere due (4)).

Poniamoci nel caso 3) e supponiamo che le intersezioni delle superficie F (due a due) non si compongano delle curve razionali C, sopra nominate. Allora le curve C su V sono ∞^3: le C per un punto O di V

([23]) ENRIQUES, *Una questione sulla linearità ecc.*, « Rendic. dell'Accad. dei Lincei », 1893 [questo volume, III].

formano una serie ∞^1 razionale, essendovi una C sopra ogni F pel punto O, visto che le F per O formano un fascio razionale: tracciamo sopra una F una qualsiasi curva razionale K; le ∞^2 C che si appoggiano a K in un punto formano una serie razionale ∞^2 e (essendo la K arbitraria) invadono tutta la varietà V:

possiamo far corrispondere agli elementi C della detta serie razionale ∞^3, le rette d'una stella in S_3, e rappresentare ciascuna C sulla corrispondente retta, ciò che si effettua razionalmente avendosi sopra ogni C *un* punto ([24]), il punto in cui essa C si appoggia alla K. Così si viene a far corrispondere ad ogni punto di S_3 *un* punto di V_3.

Poniamoci invece nel caso 4), e supponiamo che le intersezioni delle F due a due, non si compongano delle curve ellittiche C. Queste C sono dunque ∞^3, e le ∞^1 C passanti per un punto O di V formano una serie razionale. Sopra ogni C per O si può costruire razionalmente un punto A residuo di O, contato $n-1$ volte, rispetto alla serie g_n^{n-1} determinata su C dagli iperpiani dello spazio cui essa appartiene: variando C per O, il punto A descrive una curva razionale K_0.

Ad ogni punto A di K_0 corrisponde analogamente una curva razionale K_A; e l'insieme di queste curve costituisce una superficie φ su V, che si può riferire, razionalmente, ad una involuzione sopra un piano.

È facile costruire una serie ∞^1 razionale di superficie φ su V; basta far variare il punto O sopra una curva razionale su V (p. e. appartenente ad una F): allora, se si fan corrispondere gli elementi φ della serie ai piani d'un fascio in S_3, e si rappresenta ciascuna φ sopra una involuzione appartenente al piano omologo (operazione che si compie razionalmente), si sarà in definitiva rappresentata V sopra una involuzione di S_3.

Concludiamo:

Se una varietà V contiene una rete di superficie razionali di cui le mutue intersezioni variabili non si compongono di curve razionali o ellittiche, la V può essere rappresentata sopra una involuzione di S_3, in modo che ad ogni punto di S_3 corrisponda un punto di V.

18. – Il precedente teorema dà luogo ad un corollario relativo alle varietà V possedenti un sistema lineare ∞^3 di superficie razionali F, le cui intersezioni, due a due, sieno irriducibili. In questo caso, se le intersezioni di due F sono razionali o ellittiche, si ha sopra ciascuna F una rete di curve razionali o ellittiche (segata dalle altre F), onde ciascuna F può essere riferita, razionalmente, ad una superficie razionale della 1ª o 2ª famiglia e quindi ad una involuzione piana.

Abbiamo dunque:

([24]) NOETHER, l. c.

Una varietà contenente un sistema lineare ∞^3 di superficie razionali ad intersezioni variabili irriducibili può essere rappresentata sopra una involuzione di S_3.

19. – Tutti gli enunciati precedenti possono essere tradotti sotto forma algebrica, come nell'introduzione.

Per averne l'espressione più semplice, giova supporre la V in S_4, e supporre che le superficie razionali formanti il fascio, o la rete, o il sistema lineare ∞^3, su V, sieno sezioni iperpiane di essa. Allora si può prendere risp. come fascio, rete, sistema ∞^3 degli iperpiani secanti, il fascio

$$x_4 = a ,$$

o la rete

$$x_4 = ax_3 + b ,$$

o la stella

$$x_4 = ax_1 + bx_2 + c,$$

dove a, b, c sono parametri. È inutile ripetere qui gli enunciati che si trovano nell'introduzione. Ci limitiamo a notare che, relativamente all'ultimo caso, si può sopprimere in esso la condizione di irriducibilità delle mutue intersezioni delle ∞^3 superficie razionali (segate su V dagli iperpiani d'una stella), giacchè tali intersezioni possono esser riducibili soltanto se la V è un cono (razionale). Pertanto siamo condotti ad enunciare il resultato:

Si abbia una equazione

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 ,$$

e si supponga che tutte le equazioni

$$f(x_1, x_2, x_3, ax_1+bx_2+cx_3) = 0$$

(dove a, b, c sono parametri fissi) *sieno risolubili ponendo x_1, x_2, x_3 funzioni razionali di due parametri; allora la equazione*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

si può risolvere ponendo x_1, x_2, x_3, x_4, funzioni razionali di tre parametri (fatta astrazione dalla condizione di invertibilità).

Come caso particolare desumeremo la possibilità di risolvere con funzioni razionali di 3 parametri: l'equazione generale del 3° grado in 4 variabili (resultato cui il sig. NOETHER è giunto direttamente nel modo più semplice); l'equazione

$$x_4^2 = f_4(x_1\, x_2\, x_3)$$

dove f_4 è un polinomio generale del 4° grado; l'equazione

$$x_4^2 = f(x_1\, x_2\, x_3)$$

dove f è un polinomio di 6° grado che posto $= 0$ rappresenta una superficie del 6° ordine con due rette triple infinitamente vicine, ecc. Ma le risoluzioni ottenute di tali equazioni sono tutte risoluzioni con funzioni razionali (di 3 parametri) non invertibili. Se, in altro modo, si possano risolvere le predette equazioni con funzioni razionali invertibili (di 3 parametri), è una questione che rimane tuttora insoluta.

XIX.

LE SUPERFICIE ALGEBRICHE DI GENERE LINEARE $p^{(1)} = 2$

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. VI (1° sem., 1897), pp. 139-144 (*).

1. – Il sig. NOETHER ha introdotto nella teoria delle superficie algebriche due caratteri fondamentali, che ultimamente hanno ricevuto una opportuna estensione: sono il genere superficiale p (già considerato dal CLEBSCH) ed il genere lineare $p^{(1)}$.

È noto come questi caratteri si definiscano.

Data una superficie F, d'un certo ordine n (in S_3), si considerino le superficie d'ordine $n-4$, φ_{n-4}, ad essa *aggiunte*, le quali segano su F (all'infuori delle curve multiple e di certe curve *eccezionali* trasformabili in punti semplici) le *curve canoniche* di F: p e $p^{(1)}$ sono rispettivamente il numero delle φ_{n-4} (o delle curve canoniche) linearmente indipendenti, ed il genere delle dette curve canoniche.

Nell'ipotesi che si considera come più generale, delle superficie *regolari*, il genere p si può valutare mediante le formule di postulazione del sig. NOETHER, estese ormai al caso in cui F abbia singolarità qualunque: si ha così ad ogni modo la definizione aritmetica di un carattere invariantivo della superficie, che si designa con p_n e si chiama *genere numerico*, in opposizione al carattere precedente p o p_g detto *genere geometrico*. Si preferisce usare semplicemente la lettera p e il nome « genere (superficiale) » quando, come si suppone nel seguito, $p_g = p_n$.

Quanto al genere lineare $p^{(1)}$ (genere delle curve canoniche: $p > 0$) si deve notare che si possono avere anche qui diverse definizioni nel caso in cui le curve canoniche sieno riducibili: noi intenderemo sempre che $p^{(1)}$ sia il genere *virtuale* delle curve canoniche, comunque composte.

(*) Nota presentata dal Socio L. CREMONA nella seduta del 21 febbraio 1897.

Il sig. NOETHER ha stabilito la disuguaglianza

$$p^{(1)} \geqslant 2p - 3$$

che vale sempre (come è facile vedere) comunque le curve canoniche sieno riducibili, purchè sia $p^{(1)} > 1$. Invece non si ha alcuna disuguagiianza analoga che fissi un massimo di $p^{(1)}$ dato p.

Perciò, quando si voglia procedere ad una classificazione effettiva delle superficie secondo i loro caratteri, converrà ordinare la classificazione secondo i valori del $p^{(1)}$, e cominciare dai valori più bassi che il $p^{(1)}$ può ricevere.

Ma il valore $p^{(1)} = 1$ è sotto molti rispetti eccezionale e dà luogo, come lo proveremo altrove (con esempi), ad infiniti tipi di superficie anche per valori fissati del genere p.

Cominceremo dunque ad esaminare le superficie di genere lineare

$$p^{(1)} = 2 \qquad \text{con } p > 0\,, \quad (p = 1,\ p = 2)\,.$$

E perverremo alla seguente conclusione:

Le superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)} = 2$ e di genere superficiale $(p_g = p_n =)p > 0$, possono riferirsi birazionalmente ad uno dei seguenti tipi:

(1) $$p^{(1)} = 2, \qquad p = 1 :$$

superficie F_6 del 6° ordine dotata di 3 rette cuspidali giacenti in un piano e passanti per un punto dove la F_6 ha un contatto del 5° ordine con se stessa;

(2) $$p^{(1)} = 2\,, \qquad p = 2 :$$

piano doppio $z^2 = f(x, y)$ con curva di diramazione $f(x, y) = 0$ del 10° ordine dotata di due punti 5-pli infinitamente vicini.

Diamo qui succintamente la dimostrazione del resultato.

2. – Dobbiamo richiamare anzitutto dalla teoria generale delle superficie il seguente fatto fondamentale.

Sopra una superficie di genere lineare $p^{(1)} > 1$ e genere superficiale $p > 0$ esiste (almeno) una effettiva curva canonica (d'ordine > 0) (1).

---

(1) Cfr. la mia Memoria *Sui piani doppi di genere uno*, « Mem. della Soc. it. delle Scienze, detta dei XL », 1896 [questo volume, XVI], § 4.

Il sistema canonico ammette un sistema lineare *aggiunto* [2], di cui la dimensione vale

$$P_2 - 1 = p + p^{(1)} - 1 ,$$

il genere (virtuale)

$$P_2^{(1)} = 3p^{(1)} - 2$$

il grado (virtuale)

$$P_2^{(2)} = 4(p^{(1)} - 1) .$$

Questo sistema è il *sistema doppio* (completo) del sistema canonico; P_2 dicesi il *bigenere* della superficie.

Analogamente il sistema bicanonico ammette un sistema aggiunto, *triplo* del sistema canonico, che vien detto *sistema tricanonico*: la dimensione del sistema tricanonico vale

$$P_3 - 1 = p + 3p^{(1)} - 3 ,$$

il genere (virtuale)

$$P_3^{(1)} = 6p^{(1)} - 5 ,$$

il grado (virtuale)

$$P_3^{(2)} = 9(p^{(1)} - 1)$$

(P_3 è il *trigenere* della superficie).

Se la superficie ha curve canoniche irriducibili (non si esclude che esse abbiano dei punti base comuni, i cui intorni vadano sommati ad esse) anche le curve bicanoniche e tricanoniche riescono irriducibili: di più le curve bicanoniche (cui una curva canonica presenta $p^{(1)}$ condizioni) non possono avere punti base (nemmeno in punti multipli) sopra una curva canonica e quindi non possono avere punti base sulla superficie; perciò i caratteri effettivi (genere e grado) del sistema bicanonico uguagliano in questo caso i caratteri virtuali.

3. – Ciò posto consideriamo le superficie F coi caratteri

$$p^{(1)} = 2 , \qquad p = 1 ,$$

---

[2] Cfr. la mia *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* (ibidem), [questo volume, XIII], cap. IV.

e supponiamo dapprima che sopra F (o su una conveniente trasformata di essa) si abbia una curva canonica irriducibile. Le ∞^2 curve bicanoniche (irriducibili) di F non sono iperellittiche, giacchè altrimenti, incontrandosi esse in due coppie di punti coniugati (variabili), darebbero luogo, come si verifica facilmente, ad un sistema completo ∞^3 invece che ∞^2 (sarebbe allora $p = 2$ non $p = 1$).

Perciò il sistema tricanonico su F è semplice, vale a dire le curve di esso passanti per un punto generico non passano in conseguenza per altri punti variabili col primo. Le curve tricanoniche incontrano la curva canonica in 3 punti; questi formano, sulla detta curva di genere 2, una serie g_3^1 che può avere al più un punto fisso, punto base semplice pel sistema tricanonico; segue che il genere effettivo delle curve tricanoniche uguaglia il suo valore virtuale $P_3^{(1)} = 7$. Se si considerano le curve tricanoniche di F che passano per un gruppo fissato della g_3^1, si ha un sistema lineare ∞^3 che non possiede altri punti base: un sistema irriducibile di genere 7, e grado 6. Questo sistema è semplice almeno quando si sia fissato un gruppo generico della g_3^1: per convincersene basta considerare la superficie F' di S_4, trasformata di F, che ha per sezioni iperpiane le curve tricanoniche; la F' ha l'ordine 9 o 8 (se il sistema tricanonico ha un punto base); vi è su F' una retta 3-pla o (risp.) 2-pla a immagine della curva canonica, e la proiezione della F' in S_3 fatta da un punto generico di questa retta riesce semplice se la F' non contiene ∞^1 curve sezioni di piani per a; ma in quest'ultimo caso il sistema bicanonico segato su F' dagli iperpiani per a sarebbe riducibile, ciò che si è escluso.

Possiamo dunque trasformare la data superficie F in una F_6, del 6° ordine, in S_3, in modo che le sezioni piane di F_6 sieno le curve tricanoniche passanti per 3 punti fissi della curva canonica su F: la F_6 possiederà 3 rette eccezionali, passanti per un punto O, corrispondenti ai 3 punti nominati. L'intorno del punto O rappresenterà su F_6 la curva canonica, e quindi le sezioni piane per O daranno le curve bicanoniche.

Le sezioni piane generiche di F_6 hanno il genere 7: quelle fatte con piani per O hanno il genere 4. Queste ultime si segano a due a due in 4 punti variabili, quindi O è un punto doppio di F_6: punto doppio particolare dove la superficie ha un contatto con se stessa; l'ordine del contatto (cioè il numero dei punti doppi infinitamente vicini ad O sopra ogni sezione per O) è $\varrho+2$, se ϱ denota la molteplicità di O per la curva doppia di F_6.

Esaminiamo questa curva doppia. Essa ha l'ordine 3, essendo 7 il genere delle sezioni piane di F_6; non può ridursi ad una retta tripla perchè altrimenti le curve canoniche, bicanoniche e tricanoniche si comporrebbero delle sezioni ellittiche di F_6 fatte coi piani per la retta tripla, e sarebbe $p^{(1)} = 1$.

Indichiamo con C_3 la curva doppia di F_6.

Vi sono ∞^2 superficie del 4° ordine biaggiunte ad F_6 seganti su di essa le curve bicanoniche; esse si spezzano nei piani per O ed in una superficie cubica fissa F_3 passante due volte per C_3: segue di qui che la C_3 è una cubica piana e che la F_3 si compone del piano di C_3 contato due volte e di un altro piano fisso α. Le condizioni che fissano il piano α possono soltanto essere espresse dal passaggio e dal contatto relativo a punti multipli propri della F_6, e siccome è facile vedere che la F_6 non ha altri punti siffatti all'infuori di O, si conclude che il piano α deve passare per O e toccare in O la superficie, ossia deve essere il piano osculatore ad F_6 nel punto O, dove la F_6 ha un contatto con se stessa.

Consideriamo la quadrica aggiunta alla F_6: essa si spezza nel piano di C_3 e in un altro piano fisso che, per le medesime ragioni, deve essere il piano α osculatore in O, prima considerato.

Ora se il piano α non fosse il piano di C_3, il che avverrebbe se C_3 non passasse per O, si avrebbe in α una curva del 6° ordine eccezionale, mentre la F_6 ha, come sappiamo, soltanto 3 rette eccezionali.

Dunque il piano di C_3 è il piano α e la C_3 ha in O almeno un punto doppio ($\varrho \geqslant 2$).

Il piano α contato due volte soddisfa alle condizioni imposte dal punto O alle superficie aggiunte, ma vi soddisfa appena se la C_3 ha in O la molteplicità $\varrho = 2$ e quindi la F_6 ha in O un contatto del 4° ordine con se stessa: siccome l'intorno di O deve rappresentare la curva canonica di F_6, la quadrica aggiunta (ossia il piano α) deve essere *superaggiunta* relativamente al punto O. Per ciò si esige che la C_3 abbia in O un punto multiplo di ordine $\varrho = 3$, ossia che la C_3 si componga di 3 rette per O nel piano α. Ed allora la F_6 possiede 3 curve eccezionali date dagli intorni delle 3 rette doppie: essa avrà dunque (come deve avere) 3 rette eccezionali se le 3 rette doppie nominate sono cuspidali.

Ora si domanda: esisterà effettivamente una superficie F_6 del 6° ordine, dotata di 3 rette cuspidali giacenti in un piano α e passanti per un punto O dove la F_6 abbia un contatto del 5° ordine con se stessa? e una tale F_6 avrà i caratteri $p = 1$, $p^{(1)} = 2$?

Le due domande ammettono risposta affermativa.

Possiamo costruire una F_6 dotata delle singolarità domandate nel modo seguente.

Si prendano in un fascio di raggi 3 rette a, b, c. Consideriamo una superficie cubica F_3 per a, b, c. Possiamo costruire un'altra F_3 passante per a, b, c ed avente colla prima un contatto del 5° ordine nel punto O comune alle 3 rette. Le due F_3 si toccano secondo le rette a, b, c come risulta dalla ordinaria rappresentazione piana di una di esse. Prendiamo il piano α delle rette a, b, c contato 3 volte ed un cono cubico Γ di vertice O: la coppia di F_3 e la superficie $\alpha^3+\Gamma$ dànno luogo ad un fascio di superficie irriducibili del 6° ordine: la superficie generica F_6 del fascio ha appunto in O un contatto del 5° ordine con se stessa, e possiede le a, b, c come rette cuspidali.

La F_6 dotata di queste singolarità ha anzitutto il genere geometrico $p_g = 1$ perchè possiede *una* quadrica aggiunta: per essa anche il genere numerico $p_n = 1$ perchè, le sue sezioni piane avendo il genere 7, la F_6 possiede ∞^7 superficie cubiche aggiunte cioè le superficie cubiche passanti per a, b, c, ed aventi in O un contatto del 4° ordine con una delle F_3 innanzi considerate (il numero di queste superficie si valuta tenendo presente la ordinaria rappresentazione piana della F_3). Infine la F_6 ha il genere lineare $p^{(1)} = 2$; ciò si desume dal fatto che il suo bigenere vale

$$P_2 = p^{(1)} + 1 = 3$$

giacchè si hanno ∞^2 superficie cubiche biaggiunte alla F_6, composte del piano α contato due volte e di un qualsiasi piano per O: di ciò si ha una conferma nel fatto che due curve bicanoniche di F_6 si segano in $4(p^{(1)}-1) = 4$ punti ecc.

4. – La riducibilità della curva canonica sopra la superficie che si considera ($p = 1$, $p^{(1)} = 2$) farebbe cadere in difetto il ragionamento svolto innanzi, non permettendo di escludere a priori che le curve bicanoniche (o le loro parti variabili) sieno iperellittiche con due punti base, o che essi si spezzino in coppie di curve di genere due di un fascio. Ma la presenza di nuovi tipi di superficie corrispondenti a questi casi, si escluderebbe a posteriori coll'analisi dei piani doppi con curva di diramazione d'ordine 10 o 8 cui tali superficie dovrebbero potersi riferire mediante il sistema bicanonico, o mediante il sistema aggiunto al fascio di curve di genere due.

5. – Passiamo a considerare le superficie di genere lineare $p^{(1)} = 2$ e di genere superficiale $p = 2$. Esse posseggono un fascio lineare di curve canoniche di genere 2. Le curve bicanoniche, aggiunte al fascio, sono ∞^3 e segano su ciascuna curva canonica la g_2^1 che le appartiene. Riferendo proiettivamente gli elementi (curve) del sistema bicanonico ai piani di S_3 la superficie si trasforma in (una quadrica possedente un fascio di rette autoresiduo, dunque in) un cono quadrico da contarsi due volte. Il cono quadrico doppio possiede una curva di diramazione dell'ordine 10 (poichè le coniche sezioni piane rappresentano curve di genere 4 sulla superficie iniziale); tale curva sega le generatrici del cono (immagini di curve del genere 2) in 5 punti.

Per proiezione il cono quadrico doppio dà luogo al:

piano doppio con curva di diramazione del 10^{o} ordine dotata di due punti quintupli infinitamente vicini.

Questo è il tipo delle superficie coi caratteri $p^{(1)} = 2$, $p = 2$, c.d.d.

Si noti che il ragionamento svolto non può cadere in difetto per la riducibilità delle curve canoniche, bastando, se mai, considerare il sistema aggiunto alle parti variabili di esse il cui genere non può essere < 2 giacchè per ogni superficie con un fascio di curve ellittiche si ha $p^{(1)} = 1$.

XX.

SULLE SUPERFICIE ALGEBRICHE DI GENERE LINEARE $p^{(1)} = 3$

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. VI (1° sem., 1897), pp. 169-174 (*).

1. – In una precedente Nota ho determinato le superficie di genere lineare $p^{(1)} = 2$ (e di genere superficiale $p > 0$).

Mi propongo di effettuare qui l'analoga ricerca per $p^{(1)} = 3$. Per semplicità mi riferirò ancora a superficie (regolari) di genere

$$p_n = p_g = p > 0\,,$$

e supporrò inoltre che esse abbiano curve canoniche irriducibili (senza escludere che il sistema canonico possa avere dei punti base i cui intorni vadano sommati alle curve canoniche).

In corrispondenza al valore $p^{(1)} = 3$ $(p > 0)$ si può avere

$$p = 3\,, \quad p = 2\,, \quad p = 1\,.$$

Ecco i relativi tipi di superficie ($p^{(1)} = 3$, $p > 0$, curve canoniche irriducibili):

(1) $$p^{(1)} = 3\,, \qquad p = 3\,:$$

piano doppio $z^2 = f(x\,y)$ *con curva di diramazione* $f(x\,y) = 0$ *di ordine 8;*

(2) $$p^{(1)} = 3\,, \qquad p = 2\,:$$

piano doppio $z^2 = f(x\,y)$ *con curva di diramazione* $f(x\,y) = 0$ *composta di*

(*) Nota presentata dal Socio L. Cremona nella seduta del 7 marzo 1897.

una retta r e di una curva del 9° ordine dotata di 3 punti tripli su r e di altri due punti tripli infinitamente vicini.

$$(3) \qquad p^{(1)} = 3 \,, \qquad p = 1 :$$

a) *superficie di ordine 8 dotata di una curva doppia d'ordine 14* (*che può degenerare*) *la quale è definita, nel caso generale, come la curva doppia d'una superficie di ordine 7, razionale, a sezioni ellittiche;*

b) *piano doppio* $z^2 = f(x\,y)$ *con curva di diramazione* $f(x\,y) = 0$ *di ordine 10, dotata di un punto quadruplo e di 4 coppie di punti tripli infinitamente vicini.*

2. – Le superficie coi caratteri

$$p^{(1)} = 3 \,, \qquad p = 3 \,,$$

si determinano subito.

Il sistema canonico (irriducibile) ha il grado $p^{(2)} = p^{(1)} - 1 = 2$ e però non ha punti base: la rete canonica riferita proiettivamente alla rete delle rette di un piano dà la rappresentazione della superficie su questo piano doppio; la curva di diramazione del piano doppio ha l'ordine 8.

3. – Si abbia una superficie F coi caratteri

$$p^{(1)} = 3 \,, \qquad p = 2 \,.$$

Il sistema bicanonico ha la dimensione

$$P_2 - 1 = 4 \,,$$

il genere

$$P_2^{(1)} = 7 \,,$$

il grado

$$P_2^{(1)} = 8 :$$

esso è irriducibile, tale essendosi supposto il sistema canonico. Una curva bicanonica sega le ∞^1 curve canoniche di F, ciascuna in 4 punti variabili, costituenti un gruppo della g_4^2 canonica, perciò il sistema bicanonico non ha punti base: segue che i precedenti caratteri di esso dati virtualmente sono anche i suoi caratteri effettivi. Dimostriamo che le curve canoniche sono iperellittiche, e perciò tutte le curve bicanoniche passanti per un punto della superficie F passano in conseguenza per un altro punto variabile col primo.

Facciamo la dimostrazione per assurdo.

Se le curve canoniche della superficie F non sono iperellittiche, in opposizione all'ipotesi precedente il sistema bicanonico è un sistema semplice, e la superficie F si può trasformare in una F_8 d'ordine 8 di S_4, a sezioni (iperpiane) di genere 7. La F_8 deve possedere un fascio autoresiduo di quartiche piane (canoniche) di genere 3, i cui piani (segandosi a due a due secondo una retta) hanno una retta fissa comune r.

Ora mostreremo (per assurdo) che una siffatta F_8 non può esistere.

In S_4 vi sono ∞^{34} varietà cubiche V_3; esse segano sulla F_8 (supposta esistente) un sistema lineare che è (tutto o in parte) il sistema 6-canonico (6-plo del sistema canonico), ossia il sistema aggiunto al sistema 5-canonico.

Il sistema 5-canonico di F_8 ha il genere

$$P_5^{(1)} = 5p^{(1)} + 10(p^{(1)} - 1) - 4 = 31\,,$$

e però il sistema 6-canonico ha la dimensione

$$P_6 - 1 = p + 31 - 1 = 32\,.$$

Segue che per F_8 passano almeno ∞^1 varietà cubiche V_3. Ora una V_3 per F_8 non può essere che un cono cubico di 2ª specie di asse r, perchè la V_3 contiene ∞^1 quartiche in altrettanti piani per r.

È dunque assurdo che esistano due V_3 per F_8, giacchè due coni cubici di asse r non possono aver comuni che piani per r.

È dunque assurda l'esistenza della F_8.

Segue che le curve canoniche della data superficie ($p^{(1)} = 3$, $p = 2$) sono iperellittiche, e le curve bicanoniche passanti per un punto (di una di esse) passano in conseguenza per un altro punto coniugato del primo.

Riferendo proiettivamente gli elementi (curve) del sistema bicanonico agli iperpiani di S_4, si ottiene ora (non più una F_8 semplice, ma) una F_4 (del 4º ordine) doppia (con una certa curva di diramazione) trasformata della data superficie F. La F_4 deve essere razionale normale in S_4, quindi a sezioni normali ellittiche; la F_4 è dunque la intersezione di due quadriche di S_4 (superficie di SEGRE).

Sulla F_4 le curve canoniche della data superficie F hanno per immagini (doppie) le coniche d'un fascio autoresiduo: i piani di queste coniche passano per una retta r, non appartenente ad F_4, e congiungente due punti doppi A, B di F_4,

Vi sono su F_4 (in generale 16 rette, nel nostro caso) 8 rette, di cui 4 passano per A, 4 per B. Prendiamo una retta a per A. Gli iperpiani per a segano su F_4 le cubiche C_3 di una rete omaloidica col punto base A.

Una conica C_2 sezione di F_4 con un piano per r ed una C_3, segano su un'altra C_3 un gruppo di 3 punti (incluso il punto A), e siccome sulla F_4 doppia $|C_2 + C_3|$ è il sistema aggiunto alla rete $|C_3|$, si vede così che le C_3 rappresentano, sulla superficie F riferita alla F_4 doppia, curve di genere 4.

Proiettiamo F_4 da a sopra un piano, essa verrà rappresentata su questo, punto per punto. La data superficie F verrà dunque rappresentata sul piano doppio π, e (siccome le rette del piano sono le proiezioni delle C_3) la curva di diramazione del detto piano doppio sarà una C_{10} del 10° ordine, della quale farà parte una retta a' immagine del punto A. Le immagini delle sezioni iperpiane di F_4, sul piano π, sono date dalle cubiche che passano per tre punti fissi $A_1 A_2 A_3$ di a' e per altri due punti fissi infinitamente vicini $B_1 B_2$ (corrispondenti al punto doppio B di F_4), alle quali cubiche si può aggiungere la parte fissa a'.

Si trae di qui che le 8 rette di F_4 incontrano ciascuna in 4 punti (inclusi i punti A o B) la curva di diramazione. Quindi la C_{10}, curva di diramazione del piano doppio π, ha 3 punti quadrupli in $A_1 A_2 A_3$ e due punti tripli infinitamente vicini in $B_1 B_2$. D'altra parte si verifica facilmente che: il piano doppio con curva di diramazione C_{10} dotata di due punti tripli infinitamente vicini (riuniti in B) e di 3 punti quadrupli su una retta r (facente parte di C_{10}) ha il genere superficiale

$$p = (p_g = p_n =)\, 2$$

e il genere lineare

$$p^{(1)} = 3\,,$$

avendosi, sul piano, come immagini delle curve canoniche le rette per B (aumentate della parte fissa eccezionale r).

4. – Passiamo alle superficie F coi caratteri

$$p^{(1)} = 3\,, \qquad p = 1\,.$$

Il sistema bicanonico ha la dimensione $P_2 - 1 = 3$, il genere 7 e il grado 8, come nel caso precedente. Questi caratteri virtuali sono anche per esso caratteri effettivi, giacchè stante la supposta irriducibilità della curva canonica il sistema bicanonico è irriducibile, ed inoltre esso non ha punti base sulla curva canonica, giacchè sega su questa curva la serie canonica completa $(p_g = p_n = p)$.

In generale il sistema bicanonico è semplice e si può quindi trasformare la F in una F_8 d'ordine 8 di S_3, a sezioni piane del genere 7. La F_8

deve possedere una curva doppia C_{14} dell'ordine 14, eventualmente riducibile a curve d'ordine minore con maggiore molteplicità.

Vediamo come si può caratterizzare la C_{14} nel caso generale.

La F_8 possiede una superficie biaggiunta φ_7, d'ordine 7, che presa insieme ad un piano dà una biaggiunta φ_8 d'ordine $8=2\cdot 8-8$. La φ_7 possiede la C_{14} come curva doppia. La φ_7, supposta irriducibile, è dunque una superficie a sezioni ellittiche, ed è una superficie razionale perchè per la C_{14} passa una superficie, φ_4, del 4° ordine.

D'altra parte si prenda una superficie φ_7, del 7° ordine, razionale, a sezioni ellittiche, e si consideri la sua curva doppia C_{14}. È facile provare che la C_{14} è curva doppia per una superficie irriducibile F_8, di ordine 8, coi caratteri

$$p^{(1)}=3\,, \qquad p_n=p_g=p=1\,.$$

Si può costruire una tale superficie F_8 considerando una superficie del sistema lineare determinato dalle φ_7 aumentata di un piano e dalla φ_4 (aggiunta a φ_7) contata due volte.

La F_8 così costruita ha effettivamente il genere

$$(p=)p_n=p_g=1\,,$$

ammettendo *una* superficie aggiunta del 4° ordine (anche secondo le formule aritmetiche); essa possiede una curva canonica del 4° ordine, questa è una quartica piana di genere $p^{(1)}=3$, come resta provato anche dal fatto che le curve bicanoniche, sezioni piane, di F_8 la segano in $2p^{(1)}-2=4$ punti.

Dunque il tipo generale delle superficie coi caratteri

$$p=1\,, \qquad p^{(1)}=3$$

è la superficie F_8 di ordine 8 avente come curva doppia, la curva C_{14} dell'ordine 14 doppia per una superficie razionale del 7° ordine; tutti i caratteri di questa curva doppia si possono valutare facilmente.

In questo tipo generale rientrano, eventualmente in corrispondenza a degenerazioni della C_{14} (e della φ_7), tutte le superficie coi nominati caratteri $p=1$, $p^{(1)}=3$ (curva canonica irriducibile) salvo quella, che dovremo considerare a parte, per cui il sistema bicanonico non riesce semplice: questa infatti non rientra nel precedente tipo, almeno se non si vogliono riguardare come possibili le degenerazioni della C_{14} per cui degenera anche la F_8 stessa, riducendosi ad una F_4 doppia.

5. – Procediamo dunque ad esaminare partitamente le superficie dotate dei caratteri $p^{(1)}=3$, $p=1$ (curva canonica irriducibile), sopra cui le curve bicanoniche passanti per un punto generico, passano in conseguenza per un altro punto variabile col primo. In questo caso la curva canonica di F riesce iperellittica, le curve bicanoniche segando su di essa la serie (completa) doppia della g_2^1. Riferendo proiettivamente gli elementi (curve) del sistema bicanonico di F si ottiene ora come trasformata di F, non più una F_8 semplice, ma una F_4, del 4° ordine, doppia.

La F_4 è una superficie normale di S_3 e contiene una conica autoresidua rispetto alle sezioni piane di F_4, immagine della curva canonica di F. Il piano della detta conica tocca in ciascun punto di essa conica la superficie F_4.

La curva di diramazione della F_4 incontra la conica e quindi il piano di essa in 8 punti; essa ha dunque l'ordine 8. Segue che le sezioni piane di F_4 hanno il genere due, ossia la F_4 è la superficie (razionale) del 4° ordine con retta doppia.

La F_4 si può rappresentare sopra un piano π, assumendo come immagine delle sue sezioni, le curve del 4° ordine C_4 che passano due volte per un punto O ed una volta per 8 punti $A_1 A_2 \dots A_8$ (1).

Poichè la F_4 possiede un piano tangente secondo una conica, fra le C_4 ve n'è una che si riduce ad una conica contata due volte, e perciò gli 8 punti $A_1 \dots A_8$ compongono 4 coppie di punti infinitamente vicini A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6, A_7A_8.

Su F_4 vi è una rete omoloidica di quartiche, immagini delle rette del piano π, essa rappresenta su F un sistema di grado $n = 2$ e di un certo genere π: le curve del sistema sono incontrate dalle curve bicanoniche (sezioni piane di F_4 contate due volte) in $2\{2(\pi - 1) - n\} = 8$ punti; dunque si ha $\pi = 4$. Segue che la curva di diramazione C_8 della F_4 viene rappresentata sul piano π da una curva del 10° ordine C_{10} dotata del punto quadruplo O e delle coppie di punti tripli infinitamente vicini A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6, A_7A_8.

Il piano doppio dotato della curva di diramazione C_{10}, fornisce effettivamente (come si può verificare) una superficie coi caratteri

$$p = p_g = p_n = 1\,, \qquad p^{(1)} = 3\,,$$

ed è, per ciò che abbiamo visto, il tipo delle superficie dotate di questi caratteri (curva canonica irriducibile) che hanno un sistema bicanonico non semplice.

Le verifiche relative ai caratteri dei piani doppi considerati in questa Nota, verifiche che abbiamo omesso di sviluppare, si compiono subito come corollario di alcuni resultati generali sui piani doppi, che avremo occasione di esporre altrove.

---

(1) CLEBSCH, *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen insbesondere der vierten und fünften Ordnung*, « Mathem. Annalen », Bd. 1; STURM, « Mathem. Annalen », Bd. 4.

XXI.

SUI GRUPPI CONTINUI DI TRASFORMAZIONI CREMONIANE DELLO SPAZIO

di Federigo Enriques e Gino Fano

« Annali di Matematica pura ed applicata », s. 2ª, to. XXVI (1897),

pp. 59-99.

Oggetto di questa Memoria è la classificazione dei gruppi continui di trasformazioni birazionali (o cremoniane) dello spazio, cioè la *riduzione* di essi *a tipi* determinati, *mediante trasformazioni birazionali.*

Fra questi gruppi si presentano subito quattro categorie, come naturale estensione dei gruppi cremoniani tipici del piano: i gruppi proiettivi, i gruppi conformi (gruppi di trasformazioni che mutano una sfera in una sfera) ed i gruppi (che si possono chiamare) *di* Jonquières *generalizzati,* cioè quelli che posseggono una stella invariante di rette o un fascio invariante di piani.

Lo studio dei gruppi di queste quattro categorie è stato in parte già effettuato (pei gruppi proiettivi e conformi), ed in parte (pei gruppi di Jonquières generalizzati) si potrebbe facilmente effettuare, riducendosi a casi già noti, valendosi cioè di una opportuna composizione dei gruppi binari e dei gruppi cremoniani di varietà a due dimensioni.

Appare dunque naturale che si cerchi — come noi appunto abbiamo cercato — di ricondurre birazionalmente i vari gruppi cremoniani a *tipi* appartenenti ad una delle quattro categorie nominate, o almeno di vedere in quali casi questa riduzione risulta possibile. E ciò accade invero per *tutti* i gruppi cremoniani, *fatta eccezione* soltanto per *due* tipi ben definiti di gruppi ∞^3, i quali si distaccano da tutti i rimanenti, e ciascuno dei quali si può caratterizzare in modo sufficiente. Ecco precisamente i risultati della nostra analisi.

I gruppi cremoniani primitivi sono riducibili (birazionalmente) a *gruppi proiettivi* o *conformi* (era nota soltanto la possibilità di eseguire questa riduzione mediante una trasformazione *puntuale*).

I gruppi imprimitivi sono riducibili a *gruppi di* Jonquières *generaliz-*

zati, fatta eccezione per *tre* tipi di gruppi (semplici, transitivi) ∞^3, nei quali le trasformazioni che lasciano fermo un punto generico dello spazio formano gruppi finiti oloedricamente isomorfi ai gruppi dei poliedri regolari (tetraedro, ottaedro, icosaedro). Tuttavia nel *caso tetraedrico* il gruppo ∞^3 si riduce ancora ad un *gruppo conforme.*

I gruppi corrispondenti al *caso ottaedrico* ed *icosaedrico* sono riducibili rispett. a due tipi ben definiti, composti il primo di ∞^3 *trasformazioni cubiche*, il secondo di ∞^3 *trasformazioni del* 7° *ordine.*

In conclusione: *i gruppi continui di trasformazioni birazionali dello spazio si possono ricondurre birazionalmente a gruppi proiettivi o conformi, oppure a gruppi di* JONQUIÈRES *generalizzati, o infine a due tipi ben definiti di gruppi* (semplici, transitivi) *rispett. dell'ordine* 3 *e* 7.

Proposizioni preliminari.

1. – Due osservazioni fondamentali ci saranno utili nel nostro studio. La prima è la seguente:

Ogni gruppo continuo di trasformazioni birazionali dello spazio o è algebrico, o è contenuto in un gruppo più ampio algebrico.

Questa proprietà spetta come è noto ai gruppi continui di trasformazioni birazionali di una qualsiasi varietà algebrica (PICARD, PAINLEVÈ, CASTELNUOVO e ENRIQUES). Essa ci permette di limitarci, senza introdurre con ciò restrizioni, alla considerazione di gruppi algebrici.

2. – La seconda osservazione fondamentale è la seguente:

Ogni gruppo continuo di trasformazioni birazionali dello spazio lascia invariati infiniti sistemi lineari (ampi quanto si vuole) *di superficie algebriche.*

Per costruire un tale sistema invariante rispetto ad un gruppo dato, basta p. e. partire da un qualsiasi sistema continuo (lineare o no) di superficie: i sistemi trasformati di questo formeranno un *corpo* di superficie aventi un certo ordine n, ed il minimo sistema lineare a cui questo corpo appartiene, od anche il sistema lineare completo determinato dal medesimo gruppo base, forniranno dei sistemi invarianti (cioè dei nuovi corpi) pel dato gruppo di trasformazioni (¹).

L'osservazione precedente si può anche enunciare dicendo che « ogni gruppo cremoniano dello spazio è simile ad un gruppo proiettivo di un certo spazio S_n »: invero, se si costruisce pel gruppo proposto un sistema

---

(¹) Cfr. ENRIQUES, *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane nel piano*, « Rendic. Accad. dei Lincei », maggio 1893 [questo volume, I].

lineare invariante di superficie algebriche avente una certa dimensione n ($\geqslant 3$), si ha subito una varietà razionale V_3 di S_n rappresentata sullo spazio ordinario da quello stesso sistema lineare di superficie, ed un gruppo proiettivo di S_n che opera sulla V_3 come il nostro gruppo cremoniano opera nello spazio.

Affinchè questa rappresentazione della V_3 riesca biunivoca, basta soltanto supporre che il sistema invariante costruito sia *semplice*, vale a dire che le superficie di esso passanti per un punto generico non passino in conseguenza per altri punti variabili: questa condizione, come è chiaro, può soddisfarsi in infiniti modi, data l'arbitrarietà che compare nella costruzione del sistema.

3. – Dalla similitudine dei gruppi cremoniani dello spazio S_3 con gruppi proiettivi di convenienti spazi S_n si deducono subito alcune conseguenze delle quali dovremo spesso far uso in seguito. Le enunciamo qui esplicitamente:

a) Ogni curva invariante per un gruppo cremoniano, il quale subordini su di essa almeno ∞^2 trasformazioni diverse, è una curva algebrica e razionale ([2]).

b) Ogni curva invariante per un gruppo cremoniano algebrico, il quale subordini su di essa almeno ∞^1 trasformazioni diverse, è una curva razionale ([3]).

c) Ogni superficie invariante per un gruppo cremoniano algebrico, il quale operi transitivamente sui punti di essa, è una superficie algebrica e razionale ([4]).

Queste proposizioni non sono che la traduzione immediata dei noti teoremi relativi alle curve e alle superficie con trasformazioni proiettive in sè, cui abbiamo alluso nelle citazioni precedenti.

d) Ogni curva (invariante) luogo di punti uniti per le trasformazioni cremoniane di un gruppo continuo, è una curva algebrica, oppure è contenuta in una superficie algebrica, luogo anch'essa di punti uniti.

Ogni superficie luogo di punti uniti per le trasformazioni di un gruppo cremoniano continuo è una superficie algebrica.

Per stabilire quest'ultima proposizione basta osservare che i punti uniti delle omografie di un S_n sono isolati, oppure costituiscono degli spazi lineari, e questi ultimi possono segare una varietà algebrica (inva-

---

([2]) Klein-Lie, « Comptes Rendus », 1870; Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. 3, S. 187.

([3]) L. c.

([4]) Enriques, *Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in se stesse*, « Atti Istituto Veneto », ser. VII, to. IV e V, 1893; Fano, *Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in se stesse*, « Rend. Acc. dei Lincei », febbraio 1895.

riante) V_3 soltanto secondo curve o superficie algebriche (luoghi di punti uniti su V_3).

Gruppi primitivi.

4. – I gruppi primitivi di trasformazioni puntuali dello spazio sono stati classificati dal sig. LIE ([5]), il quale ha dimostrato che ogni gruppo siffatto può essere ricondotto con una trasformazione puntuale:

a) al gruppo ∞^{10} delle trasformazioni conformi;

b) oppure ad uno dei seguenti gruppi proiettivi:

1) gruppo ∞^{15} di tutte le omografie;
2) gruppo ∞^{12} delle affinità;
3) gruppo ∞^{11} delle affinità equivalenti;
4) gruppo ∞^{10} di un complesso lineare non speciale;
5) gruppo ∞^{6} di una quadrica non specializzata (movimenti non euclidei);
6) gruppo ∞^{7} delle similitudini;
7) gruppo ∞^{6} dei movimenti (euclidei).

Questa riduzione vale in particolare anche per i gruppi cremoniani, in quanto si tratti di classificarli dal punto di vista gruppale. Ma nuovi tipi possono presentarsi (ed effettivamente si presentano) allorchè si tratta di trovare i gruppi cremoniani birazionalmente distinti. Può infatti accadere che la trasformazione puntuale che riconduce un gruppo cremoniano dato ad uno dei gruppi enumerati non sia birazionale.

5. – Si abbia un gruppo cremoniano algebrico, primitivo, Γ, ed un gruppo Γ' appartenente ad uno dei tipi *a*) o *b*), trasformato di Γ mediante una trasformazione puntuale. Per comodità di linguaggio designeremo con Σ e Σ' gli spazi in cui sono dati rispett. i due gruppi Γ e Γ'.

Qualunque sia il tipo di Γ', esistono certo in questo gruppo infinite trasformazioni, che lasciano fermi tutti i punti di una retta (di Σ'), senza lasciar fermi contemporaneamente tutti i punti di una superficie passante per questa retta. Di qui si trae che le curve C dello spazio Σ corrispondenti alle rette dello spazio Σ' debbono essere *algebriche*. Infatti le infinite trasformazioni di Γ che lasciano fissi tre punti di una C costituiscono un sottogruppo algebrico di Γ, pel quale la C è una curva di punti uniti non contenuta in una superficie di punti uniti (cfr. il lemma *d*, § 3). Ma possiamo anche riconoscere facilmente che le curve C [trasformate delle rette di Σ', o parti irriducibili (variabili) di queste trasformate]

([5]) *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. 3, S. 122-140.

sono *razionali*. Infatti le trasformazioni di Γ che lasciano invariata una C costituiscono un sottogruppo algebrico, le cui operazioni scambiano i punti di C in almeno ∞^1 modi (perchè lo stesso appunto accade in Σ', fissando una retta relativamente a Γ'): la razionalità delle C segue dunque dai lemmi a), b) del § 3.

Infine osserviamo che nello spazio Σ due punti individuano *una* C che passa per essi, poichè altrimenti tutte le trasformazioni di Γ che lasciano fermi i punti di una C dovrebbero lasciare ferma la superficie (passante per la detta C) luogo delle C che si appoggiano alla nominata in un punto fisso ed in un secondo punto variabile; mentre, se in Σ' si fissano tutti i punti di una retta, le trasformazioni di Γ' così ottenute non lasciano ferma alcuna superficie per questa retta.

6. – Ciò posto consideriamo le superficie F dello spazio Σ che corrispondono ai piani dello spazio Σ' nella trasformazione puntuale che fa corrispondere Γ a Γ': le F sono algebriche e razionali, poichè contengono una rete di curve razionali C: *esse formano un sistema lineare* ∞^3, perchè due punti di Σ individuano una C (sezione di due F) passante per essi (6); e questo sistema lineare $|F|$, ad intersezioni variabili razionali, è invariante rispetto al gruppo Γ se Γ' appartiene ad uno dei tipi b), ossia è un gruppo proiettivo. Se invece Γ' appartiene al tipo a), ossia è il gruppo conforme ∞^{10}, si vede facilmente che il sistema costruito sarà contenuto in un sistema lineare invariante ∞^4 (che indicheremo ancora con $|F|$) corrispondente al sistema delle sfere di Σ', e tale che le intersezioni variabili di due superficie sieno ancora razionali.

In ogni caso il detto sistema invariante $|F|$ è contenuto in *un* sistema lineare invariante completo, cioè determinato dal gruppo base.

Ora i sistemi lineari completi, almeno ∞^3, di superficie algebriche ad intersezioni variabili razionali si possono ricondurre con una trasformazione birazionale dello spazio ad uno dei seguenti tipi (7):

1) sistema di superficie d'ordine n con una retta base $(n-1)$-pla;
2) sistema delle quadriche tangenti in un punto ad un piano dato;
3) sistema delle quadriche per una conica, p. e. sistema delle sfere;
4) sistema dei piani.

Si può dunque assumere come tipo del gruppo Γ, trasformandolo bira-

(6) Cfr. ENRIQUES, *Una questione sulla linearità ecc.*, « Rendic. Accad. dei Lincei », giugno 1893 [questo volume, III].

(7) ENRIQUES, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche*, « Mathem. Annalen », Bd. 46 [questo volume, X]. La riduzione si applica ai sistemi *semplici* (vedi l. c.); ma tali sono appunto sempre i sistemi completi ad intersezioni razionali e di dimensione $\geqslant 3$, essendo completo il sistema di curve segato sopra una superficie qualunque del sistema dalle rimanenti.

zionalmente in Σ, un gruppo che lasci invariato un sistema lineare appartenente ad uno dei tipi 1), 2), 3), 4). Ma nei casi 1) e 2) questo gruppo non risulta primitivo, e quindi anche Γ non potrebbe essere tale. Concludiamo dunque che:

Ogni gruppo cremoniano primitivo dello spazio può ricondursi con una trasformazione birazionale:

1) *ad un gruppo proiettivo,*
2) *o ad un gruppo conforme.*

Resterebbero ora a determinare i singoli gruppi primitivi proiettivi e conformi. Quelli proiettivi sono noti, e sono quelli stessi enumerati come tipi di gruppi puntuali. Nel gruppo conforme totale (∞^{10}) si troverebbe un solo tipo di sottogruppo primitivo che non si lascia ricondurre birazionalmente (ma solo con una trasformazione [2, 1]) ad un gruppo proiettivo: tale è *il gruppo delle trasformazioni conformi che lasciano fissa una sfera data,* il quale nasce appunto con una trasformazione [1, 2] dal gruppo proiettivo (∞^6) di una quadrica non specializzata.

Gruppi algebrici semplicemente infiniti.

7. – Si abbia nello spazio un gruppo cremoniano algebrico ∞^1. Le traiettorie C dei vari punti saranno curve algebriche e razionali (§ 3, lemma *b*), formanti una congruenza del 1° ordine, e sopra ciascuna di queste curve vi saranno *due* punti uniti. Se questi punti coincidono per ogni C (se si tratta cioè di un gruppo parabolico) il luogo dei punti stessi sarà una superficie (che potrà anche ridursi ad una curva o all'intorno di un punto fisso) unisecante le curve C.

Escludiamo questo caso, e dimostriamo che anche in ogni altro caso esiste una varietà (superficie, curva, ecc.) unisecante le curve C della congruenza. Lo scopo della dimostrazione è di poter poi applicare un risultato noto ([8]), che permetterà di ricondurre con una trasformazione birazionale la congruenza delle curve C ad una stella di raggi.

Consideriamo perciò un gruppo proiettivo ∞^1 di un certo S_n equivalente al gruppo proposto (operante sopra una V_3 rappresentata birazionalmente sullo spazio), e chiamiamo ugualmente C le traiettorie di questo gruppo. Possiamo supporre che le C sieno prive di punti doppi; basta infatti osservare che, in caso opposto, questi punti doppi dovrebbero essere punti uniti per le omografie del gruppo; allora, considerando

([8]) Estensione di un teorema di NOETHER. Cfr. ENRIQUES, *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un' equazione algebrica* $f(xyz) = 0$ *ecc.*, « Mathem. Annalen », Bd. 49, n. 15 [questo volume, XVIII].

un sistema lineare invariante di varietà algebriche passanti per tutti quei punti uniti, si potrebbe trasformare la V_3 in un'altra varietà di un altro spazio, ed il gruppo proiettivo dato in un altro gruppo le cui traiettorie risulterebbero prive di punti doppi. (Il ragionamento cadrebbe in difetto se il gruppo proiettivo equivalente al gruppo dato fosse un gruppo di S_3, e si avesse una (vera) superficie come luogo di punti uniti; ma allora questa sarebbe un piano, ed il gruppo si comporrebbe di omologie, sicchè la conclusione sussisterebbe ancora).

Ciò posto, sia F il luogo dei punti uniti pel nostro gruppo proiettivo sulle traiettorie C appartenenti alla varietà (invariante) V_3. Dico che F non può essere una varietà unica irriducibile, bisecante le C, ma deve necessariamente spezzarsi in due luoghi (curve, superficie, ecc.) unisecanti le C. Supporremo perciò che F sia una varietà irriducibile bisecante le C; e faremo vedere che si cade in un assurdo.

Essendo la F un luogo di punti uniti pel nostro gruppo proiettivo, lo spazio lineare (minimo) S_r cui F appartiene risulterà tutto costituito di punti uniti; in particolare risulteranno anche costituite di punti uniti le rette che uniscono le coppie di punti uniti di una (qualunque) curva C. Ora ciò è assurdo, perchè lo spazio lineare (S_h) cui appartiene la C dovrebbe allora contenere anche infiniti iperpiani (S_{h-1}) uniti, e quindi sulla C stessa (generica) verrebbe subordinato dal gruppo ∞^1 soltanto un numero finito di trasformazioni (proiettive).

Resta dunque provata l'esistenza di un luogo di punti unisecante le traiettorie C del gruppo proiettivo su V_3, ovvero, ciò che è lo stesso, del gruppo cremoniano di S_3 (perchè appunto F dovrà spezzarsi in due parti, contenenti ciascuna *un* punto di ogni C).

Se ne deduce (come abbiamo già avvertito):

Ogni gruppo cremoniano ∞^1 algebrico dello spazio si può trasformare birazionalmente in guisa che le traiettorie dei punti divengano le rette di una stella.

La stella è naturalmente invariante per tale gruppo. Si noti che si può anche supporre che *il centro della stella sia unito sopra ogni singolo raggio*; basta far corrispondere all'intorno di questo punto uno dei luoghi di punti uniti delle traiettorie C.

Gruppi la cui riduzione si può far dipendere da quella dei gruppi ∞^1.

8. – *Gruppi doppiamente intransitivi.* I gruppi cremoniani algebrici doppiamente intransitivi portano un punto generico dello spazio nei punti di una curva algebrica C. Queste curve C si possono dunque considerare come le traiettorie di un sottogruppo ∞^1 (algebrico) del gruppo dato.

Si deduce:

Ogni gruppo cremoniano algebrico due volte intransitivo si può trasformare birazionalmente in guisa da lasciare invariate le rette di una stella (ma non sempre il centro di essa).

9. – *Gruppi integrabili.* I gruppi integrabili [9] posseggono sempre un sottogruppo ∞^1 invariante. Trattandosi di gruppi cremoniani algebrici, questo sottogruppo ∞^1 invariante dovrà pure essere algebrico se è unico, ed in caso diverso potrà essere scelto algebrico. Questa conclusione si ricava dall'esame dei gruppi proiettivi integrabili di cui il Lie [10] ha assegnato il tipo, tenendo sempre presente l'equivalenza dei gruppi cremoniani di S_3 a gruppi proiettivi che lasciano ferma una varietà razionale V_3 di uno spazio opportuno.

Ecco il ragionamento a cui conviene ricorrere.

Ogni gruppo proiettivo integrabile Γ' di S_n lascia fisso (almeno) un punto di S_n, una retta per questo punto, un piano per questa retta, ecc. Consideriamo il più ampio gruppo Γ definito da queste condizioni; gruppo che è certamente algebrico. Da esso si può staccare algebricamente (come è noto, e evidente) una successione di sottogruppi invarianti, le cui dimensioni decrescono di una unità per volta. Fra questi se ne troverà uno che ha comune col sottogruppo (algebrico) Γ' precisamente ∞^1 trasformazioni, le quali formeranno un sottogruppo algebrico invariante (∞^1) di Γ'.

Ciò posto, si deduce:

Ogni gruppo cremoniano algebrico integrabile si può trasformare birazionalmente in guisa da lasciar fissa una stella di rette.

Basta infatti considerare un sottogruppo algebrico ∞^1 invariante nel gruppo dato, e trasformare in una stella la congruenza delle sue traiettorie.

10. – *Corollario. Gruppi* ∞^2. I gruppi ∞^2 essendo integrabili [11], si può applicare ad essi il resultato precedente. Ma in questo caso si può anche dire di più.

Si abbia un gruppo cremoniano algebrico ∞^2 semplicemente intransitivo, tale cioè che i punti dello spazio descrivano, per effetto delle trasformazioni di esso, delle *superficie* F, che saranno algebriche e razionali, e formeranno un fascio. Il sottogruppo ∞^1 invariante del gruppo stesso (o, se questo gruppo è permutabile, un qualunque suo sottogruppo ∞^1 algebrico) darà luogo ad una congruenza invariante del 1° ordine di curve razionali C; sopra ogni F vi sarà un fascio invariante di tali curve.

---

[9] Lie, op. cit., Bd. 1, S. 265; Bd. 3, S. 679, 681.
[10] Op. cit., Bd. 1, S. 589; Bd. 3, S. 262, 681.
[11] Lie, op. cit., Bd. 1, S. 713.

Ora noi vogliamo dimostrare che le superficie F si possono trasformare birazionalmente nei piani di un fascio — ossia nei piani per una retta a —, facendo in pari tempo corrispondere alle curve C le rette di una stella col centro A su a.

Infatti si può procedere nel seguente modo. In primo luogo si può far corrispondere biunivocamente ad ogni F un piano α per a, ed alle C sopra una F le rette per A nel corrispondente piano α: ciò segue da un noto teorema del sig. NOETHER (12), applicato alle varietà ∞^2 delle curve C. In secondo luogo, considerando una superficie unisecante le C, si può riferire punto per punto ogni C alla retta corrispondente.

Con ciò si ottiene la trasformazione birazionale cercata, per la quale ogni F risulta rappresentata sul piano corrispondente.

Resta così stabilito che:

Ogni gruppo cremoniano algebrico ∞^2 si può trasformare birazionalmente in guisa da lasciare invariati i singoli piani d'un fascio, nonchè una stella di rette col centro sull'asse del detto fascio.

11. – *Gruppi semplicemente intransitivi.* Alle considerazioni svolte pei gruppi ∞^2 si collega la riduzione di tutti i gruppi cremoniani algebrici semplicemente intransitivi, cioè di quei gruppi pei quali i punti dello spazio descrivono *superficie* (razionali) F di un fascio. In un tal gruppo esiste infatti sempre un sottogruppo algebrico ∞^1, il quale darà sopra ogni F un fascio di traiettorie razionali C. Benchè questi fasci di curve C, sopra le singole F, non sieno ora (in generale almeno) invarianti rispetto all'intiero gruppo proposto, essi ci danno tuttavia il mezzo di trasformare contemporaneamente (come nel caso dei gruppi ∞^2) tutte le F nei piani per una retta, e questi piani (non i fasci di rette ottenuti su di essi) risulteranno invarianti pel gruppo trasformato.

Concludiamo dunque:

Ogni gruppo cremoniano algebrico semplicemente intransitivo si può ridurre birazionalmente ad un gruppo che lasci invariati i piani d'un fascio.

12. – *Gruppi transitivi imprimitivi, ∞^4 almeno, che lasciano invariata una serie ∞^1 di superficie.* Si abbia un gruppo cremoniano algebrico Γ, ∞^4 almeno, transitivo, il quale lasci invariata una serie ∞^1 di superficie F. Dimostriamo anzitutto che, se tale serie non è composta di superficie algebriche, se ne può sempre costruire un'altra, composta di superficie algebriche, la quale pure costituisca un sistema d'imprimitività pel gruppo Γ: anzi la nuova serie che verrà costruita risulterà un fascio, se era un fascio la prima.

---

(12) *Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen*, « Mathem. Annalen », Bd. 3.

Supponiamo dunque che le F non sieno algebriche.

Vi sono certo in Γ infinite trasformazioni, e, fra queste, ∞^1 costituenti un gruppo continuo algebrico, le quali lasciano fermo un punto generico P dello spazio, e quindi la superficie F (o ciascuna delle F) per questo punto. Vi è dunque sopra ogni F uno ed un solo fascio di curve algebriche razionali (traiettorie del gruppo ∞^1) considerato: invero, in ogni altro caso, o la F sarebbe luogo di punti uniti pel gruppo ottenuto fissando P, oppure sopra di essa si avrebbero, variando il punto P, fasci differenti di curve razionali; e in ambo i casi la F stessa dovrebbe essere algebrica.

Ora consideriamo gli infiniti fasci di curve algebriche C, appartenenti rispett. alle varie superficie F; essi danno luogo ad una congruenza (algebrica) di curve C, che sarà invariante pel gruppo Γ. Questa congruenza è certo del 1° ordine, se la serie delle F è un fascio; e, ogni qual volta sia del 1° ordine, essa è certo razionale, perchè le curve C incontreranno un piano generico secondo i gruppi di punti di una involuzione ([13]). Se invece la congruenza delle C è di ordine > 1, potremo pur sempre concludere che essa o è razionale (cioè riferibile ad un piano), oppure è riferibile (elemento per elemento) a una superficie rigata ellittica; ciò perchè, non potendo ora le C essere contemporaneamente fisse (cioè traiettorie) per nessun sottogruppo ∞^1 di Γ, esse verranno certo scambiate da questo gruppo (che è algebrico) in almeno ∞^4 (e basterebbe anzi in ∞^3) modi diversi ([14]).

Nel caso della rigata ellittica, alle generatrici di questa corrisponderanno ∞^1 fasci algebrici di curve C, e quindi ∞^1 superficie algebriche costituenti una serie invariante pel gruppo Γ.

Se invece la congruenza delle curve C è razionale, il gruppo Γ, in quanto opera sugli elementi (C) di questa congruenza, può essere rappretato con un gruppo proiettivo che operi sui punti di una superficie (razionale) φ di un conveniente spazio S_n (riferita alla congruenza). Questo gruppo proiettivo dovrà scambiare tra loro ∞^1 linee trascendenti W su φ, corrispondenti agli ∞^1 fasci di curve C che appartengono alle singole F; di qui si trae facilmente che il detto gruppo proiettivo operante sui punti di φ è precisamente ∞^2 e composto di operazioni permutabili, giacchè ognuna di quelle linee W (essendo trascendente) ammette solo ∞^1 trasformazioni proiettive in sè, e non può essere luogo di punti uniti per

([13]) Castelnuovo, *Sulla razionalità delle involuzioni piane*, « Rend. Acc. dei Lincei », ottobre 1893; « Math. Ann. », Bd. 44.

([14]) Castelnuovo e Enriques, *Sur les surfaces algébriques admettant un groupe continu de transformations birationnelles en elles-mêmes*, « Compt. Rend. de l'Ac. des Sc. », 1895 [questo volume, XI]. Cfr. anche: *Sur quelques récents résultats...*, « Math. Ann. », Bd. 48, § 46 [questo volume, XVII].

infinite proiettività che non lascino fermi anche tutti i punti di φ. Esisterà quindi su φ almeno un fascio invariante di curve razionali, corrispondentemente a un sottogruppo ∞^1 algebrico (certo esistente) del gruppo permutabile ∞^2 su φ. A questo fascio corrisponderà nella congruenza delle C una serie ∞^1 di superficie algebriche, composte ciascuna con ∞^1 C; e tale serie sarà invariante pel gruppo Γ. La serie stessa sarà un fascio se la congruenza delle C è del 1° ordine, e quindi certo se era un fascio la serie delle F.

Dunque, in ogni caso, i gruppi cremoniani, algebrici, transitivi, ∞^4 algebrici meno, che lasciano invariata una serie ∞^1 di superficie, lasciano invariata anche una serie ∞^1 di superficie *algebriche* (come avviene anche pei gruppi intransitivi). Dovremo ora distinguere i due casi, in cui la serie nominata sia un *fascio*, oppure una *serie d'indice* > 1.

13. – *Fascio invariante di superficie.* Si abbia un gruppo cremoniano Γ, ∞^4 almeno, il quale lasci invariato un fascio di superficie F.

Il gruppo Γ può essere supposto algebrico, giacchè in caso opposto basterebbe ampliarlo convenientemente. Similmente (per il § prec.) le superficie F possono supporsi algebriche, altrimenti basterebbe sostituire il fascio delle F con un altro fascio invariante di superficie algebriche.

Esiste in Γ un sottogruppo algebrico almeno ∞^1 che lascia ferme (tre e quindi) tutte le F; e se la sua dimensione è > 1, si potrà sempre costruire in esso un sottogruppo ∞^1 pure algebrico. Si avrà così su ogni F *un* fascio di curve C algebriche, razionali, traiettorie di quel sottogruppo ∞^1.

Di qui si trae (cfr. i §§ 10, 11) la possibilità di trasformare il fascio delle F in un fascio di piani, riferendo le C di ciascun fascio su una F alle rette di un fascio nel corrispondente piano.

Concludiamo:

Ogni gruppo cremoniano di dimensione > 3 *il quale lasci invariato un fascio di superficie si può trasformare birazionalmente in guisa da lasciare invariato un fascio di piani.*

14. – *Serie invariante di superficie d'indice* > 1. Il gruppo cremoniano Γ, ∞^4 almeno, ammetta invece un sistema d'imprimitività costituito da una serie ∞^1 di superficie F, d'indice > 1. Tanto il gruppo Γ come le superficie F possono supporsi algebrici. In Γ esiste un sottogruppo algebrico almeno ∞^1 che lascia ferme tutte le F, ed ha quindi come traiettorie le curve C, loro mutue intersezioni. Le curve C costituiscono dunque una congruenza (del 1° ordine) di curve razionali, riducibile ad una stella di rette (cfr. il § 7): tale congruenza è evidentemente invariante pel gruppo Γ.

Concludiamo perciò:

Ogni gruppo cremoniano di dimensione > 3, il quale lasci invariata una serie ∞^1 di superficie d'indice > 1, si può trasformare birazionalmente in un gruppo che lascia invariata una stella di rette.

Analisi dei casi residui.

15. – Quali casi irriducibili ai precedenti restano ancora da esaminare? Abbiamo esaurita dapprima la classificazione dei gruppi primitivi.

Fra i gruppi imprimitivi abbiamo già considerati quelli (una o due volte) intransitivi, e quelli integrabili; due categorie nelle quali rientrano in particolare i gruppi ∞^1 e ∞^2.

Non abbiamo detto nulla dei gruppi ∞^3 transitivi semplici (cioè non integrabili).

Passando ai gruppi imprimitivi di dimensione > 3, abbiamo considerato quelli pei quali si ha una serie invariante ∞^1 di superficie.

Dobbiamo invece ancora considerare i gruppi (transitivi) imprimitivi, ∞^1 almeno, che scambiano tra loro le curve di una congruenza invariante. Si possono tuttavia lasciare da parte quei casi in cui, esistendo anche una serie ∞^1 invariante di superficie, il gruppo rientrerebbe in un caso già esaminato.

Possiamo dunque limitarci a considerare i gruppi dotati di una congruenza invariante, i cui elementi (curve) vengono scambiati in modo primitivo (quindi, come vedremo, in almeno ∞^5 modi diversi). Segue da ciò che la congruenza in questione dovrà essere del 1° ordine (cioè per ogni punto dello spazio passerà una sola curva di essa). Invero si abbia per un gruppo una congruenza di curve invariante, d'ordine > 1. Fissata una curva C della congruenza, resterà fissa la superficie luogo di tutte le C che si appoggiano ad essa: se, per comodità d'intuizione, si trasporta il gruppo che opera sulle C in un piano, facendo corrispondere i punti di questo piano agli elementi (C) della congruenza, avremo nel piano un gruppo tale che, fissando un punto, resta pure fissa una linea variabile con esso: è noto che tale proprietà spetta soltanto ai gruppi imprimitivi. E poichè d'altra parte ogni gruppo primitivo di trasformazioni puntuali del piano è almeno ∞^5 ([15]), così vediamo appunto che le curve C della congruenza invariante dovranno pure venir scambiate in almeno ∞^5 modi diversi.

Dunque, riassumendo le conclusioni precedenti, i casi non riducibili a quelli già trattati e che perciò dobbiamo ancora esaminare sono i seguenti:

([15]) Lie, op. cit., Bd. 3, S. 35.

a) gruppi semplici transitivi ∞^3 (algebrici);

b) gruppi transitivi, imprimitivi, che lasciano invariata una congruenza di curve del 1° ordine, scambiando gli elementi (curve) di questa congruenza in modo primitivo (∞^5 almeno).

Esamineremo dapprima il secondo di questi casi, lasciando per ultime le considerazioni relative ai gruppi ∞^3, le quali più si allontanano dall'ordine di idee seguito fin qui.

Gruppi transitivi che posseggono una congruenza invariante del 1° ordine i cui elementi (curve) vengono scambiati in modo primitivo.

16. – Trattandosi di gruppi cremoniani algebrici, le curve C della congruenza invariante e la congruenza stessa χ sono algebriche.

Lo possiamo vedere così.

Fissando un punto generico P dello spazio si stacca dal gruppo proposto G (che è almeno ∞^5) un sottogruppo *algebrico* (almeno ∞^2) Γ, pel quale resta ferma la curva C della congruenza χ che contiene P stesso. Se i punti della C vengono ancora scambiati in almeno ∞^1 modi dalle trasformazioni di Γ, la C è algebrica e razionale [§ 3, lemmi *a*), *b*)].

Se invece tutti i punti della C risultano già fissi per lo stesso sottogruppo Γ (o pel gruppo continuo massimo che vi è contenuto due volte, se Γ è un gruppo misto) la C è ancora algebrica, oppure è contenuta in *una* superficie algebrica F passante per P, di cui tutti i punti risulteranno uniti quando sia fisso P [§ 3, lemma *d*)].

In questa seconda ipotesi, la curva C della congruenza χ che passa per un punto qualunque di F, essendo luogo di punti uniti pel medesimo sottogruppo Γ del gruppo proposto G, dovrà appartenere tutta ad F. Se ne trae quindi l'esistenza di un fascio invariante di superficie F, ciascuna delle quali conterrebbe infinite curve C della congruenza proposta; e ciò contraddice alla premessa che il nostro gruppo G debba operare sulla detta congruenza in modo primitivo.

Le curve C della congruenza invariante χ sono dunque algebriche, e anzi razionali, perchè ciascuna di esse è fissa per un sottogruppo di G che deve scambiarne i punti almeno in ∞^1 modi (G essendo transitivo).

L'algebricità della congruenza segue poi immediatamente dal fatto che una curva algebrica, per effetto delle trasformazioni d'un gruppo cremoniano algebrico, deve descrivere un sistema algebrico. La congruenza, essendo del 1° ordine, sarà anche razionale [per la razionalità delle involuzioni piane ([16])], ciò che d'altronde si vedrebbe qui direttamente.

([16]) CASTELNUOVO, lav. cit.; « Rend. Acc. dei Lincei », ottobre 1893; « Math. Ann. », Bd. 44.

Vogliamo ora dimostrare che si può trasformare birazionalmente la congruenza delle curve C in una stella di rette. Sappiamo che perciò occorre (e basta) stabilire l'esistenza di una superficie algebrica unisecante le C.

Considerato un piano α, i cui punti vengano riferiti agli elementi (C) della congruenza, sappiamo che si può rappresentare su questo piano il gruppo primitivo che opera sulle C mediante ([17]):

a) il gruppo proiettivo totale ∞^8;

b) o il gruppo proiettivo ∞^6 che lascia ferma una retta;

c) o il gruppo proiettivo speciale ∞^5 che lascia ferma una retta (ed è sottogruppo invariante del precedente).

La corrispondenza tra la congruenza delle C e il piano α, che serve a stabilire questa rappresentazione, è birazionale ([18]).

Indichiamo con G' il gruppo proiettivo [appartenente al tipo *a*), *b*) o *c*)] che opera sul piano α considerato.

Il gruppo G' e il nostro gruppo cremoniano G saranno isomorfi; ma può ben darsi che questo isomorfismo non sia oloedrico, che cioè all'identità in G' corrispondano in G infinite operazioni, formanti un sottogruppo invariante, che sarebbe però algebrico e due volte intransitivo. Esso permetterebbe quindi di costruire una unisecante delle curve C (sue traiettorie), e di ridurre così la congruenza di esse ad una stella di rette (§ 8).

Possiamo dunque supporre che fra G' e G interceda un isomorfismo oloedrico (in senso gruppale), pel quale ad ogni trasformazione di G' (in particolare all'identità) corrisponda *una* o un numero discreto di trasformazioni in G.

Il gruppo G sarà quindi esso stesso ∞^5, o ∞^6, o ∞^8.

Senza preoccuparci tuttavia della sua dimensione, noi distingueremo, rispetto a G, tre casi diversi, da un altro punto di vista:

1) Fissando una curva C, si ha un sottogruppo di G che scambia i punti di questa curva in soli ∞^1 modi.

Il gruppo che si ha sulla C (continuo o misto che sia) possiede una coppia unità di punti. Se questa, per ogni C, risultasse costituita da due punti coincidenti, sarebbe senz'altro costruito razionalmente sopra ogni C *un* punto, che è quanto ci occorre.

Possiamo dunque escludere questo caso, e limitarci a mostrare che la coppia unita che si ha sopra una C tenuta ferma, o è comune a tutte le C, o descrive al variare della C stessa una superficie riducibile, com-

---

([17]) LIE, op. cit., Bd. 3, S. 35.

([18]) Cfr. FANO, *Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni proiettive in se stesse*, « Rend. Circ. Matem. di Palermo », to. X, pag. 1 e seg.

posta di due altre unisecanti la congruenza; cosicchè in ogni caso la congruenza delle C risulterà riducibile ad una stella di rette.

Facciamo la dimostrazione per assurdo; supponiamo cioè che la coppia unita di una C descriva una curva K o una superficie F irriducibile (bisecante le C). La K o la F costituiranno in ogni caso un luogo invariante pel gruppo G.

Nel 1° caso, considerando le infinite superficie generate dalle C che escono da uno stesso punto generico di K, si ottiene subito pel gruppo G un sistema d'imprimitività costituito da una serie ∞^1 invariante di superficie; e questo è un caso che a noi non occorre esaminare.

Nel 2° caso il gruppo G opera sulla superficie F in modo primitivo, e lascia invariante su di essa una serie ∞^2 di coppie di punti (la serie delle coppie unite considerate sulle C). Ora la F è razionale (perchè G subordina su di essa — come nella congruenza delle C — almeno ∞^5 trasformazioni diverse) ([19]); perciò si dovrebbe ottenere sopra un piano rappresentativo di essa un gruppo cremoniano primitivo il quale lasci invariante una serie ∞^2 di coppie di punti (sia cioè tale che, fissato un punto generico, risulti fisso di conseguenza qualche altro punto o gruppo di punti variabile col primo). D'altra parte i gruppi cremoniani primitivi del piano si riducono ai tipi *a*), *b*), *c*) sopra enumerati, pei quali non è invariante alcuna serie ∞^2 di coppie di punti; ecco dunque l'assurdo, da cui scaturisce la riducibilità della F che dovevasi dimostrare.

Nell'ipotesi 1) la congruenza delle C è dunque certo riducibile a una stella di rette.

2) Fissando una C, si ha un sottogruppo di G che scambia i punti di questa C in ∞^2 modi.

Allora il gruppo (binario) ∞^2 delle trasformazioni sulla C, lascia fisso *un* punto della curva ([20]), e questo punto, al variare della stessa C, ci darà il luogo (algebrico) unisecante le curve della congruenza, che occorre per ridurre la congruenza stessa ad una stella di rette.

3) Fissando una C si ha un sottogruppo di G che opera sui punti della C in modo ∞^3.

Allora ci possiamo ridurre al caso precedente staccando da G un conveniente sottogruppo.

Consideriamo perciò ancora il gruppo G' operante proiettivamente nel piano α. Possiamo supporre che G' appartenga ad uno dei tipi *b*) o *c*); se no basterebbe staccare da G' (e conseguentemente da G) il sottogruppo che si ottiene fissando una retta del piano α.

Supponendo dunque che G' appartenga al tipo *b*) o *c*), ossia possegga

---

([19]) CASTELNUOVO e ENRIQUES, l. c.

([20]) LIE, op. cit., Bd. 3, S. 17.

una retta unita, imponiamo su questa uno, o due, o tre punti uniti fissi; staccheremo così da G', e quindi da G, dei sottogruppi le cui dimensioni andranno decrescendo da 5 (o 4) in giù. Fra questi sottogruppi, arrestandoci a tempo, ne troveremo certo uno tale, che le trasformazioni di esso che lasciano ferma una C operino sopra questa in modo ∞^2, e lascino quindi fermo *un* punto della C stessa; punto che verrà così razionalmente individuato.

Riassumendo pertanto i risultati dell'analisi fatta, concludiamo: *Ogni gruppo cremoniano algebrico che lascia invariata una congruenza del 1° ordine scambiando le curve di essa in modo primitivo, può essere ricondotto birazionalmente ad un gruppo che scambi (del pari primitivamente) le rette di una stella invariante,* e operi anzi *proiettivamente* su questa stella. Quest'ultima parte segue immediatamente dalla riducibilità, più volte ricordata, dei gruppi primitivi di trasformazioni birazionali del piano (o della stella) a gruppi proiettivi.

Gruppi semplici, transitivi ∞^3.

17. – *Generalità.* Si abbia un gruppo cremoniano ∞^3 Γ, algebrico, transitivo, semplice.

Si considerino due punti generici A e B dello spazio. Vi sarà *una*, oppure un numero finito ($\geqslant 2$) di trasformazioni di Γ che fanno corrispondere B ad A, secondochè, fissando il punto A per le trasformazioni di Γ, si ottiene l'identità soltanto, oppure un gruppo finito d'ordine > 1.

Riferiamoci al primo caso. Tenendo fisso il punto A e facendo variare B, i punti dello spazio vengono a corrispondere biunivocamente alle trasformazioni del gruppo. Pensiamo queste trasformazioni una prima volta come *elementi* (*punti*) di una varietà (razionale) V_3, una seconda volta come *operazioni*, le quali agiscano per moltiplicazione (in un dato senso) sulle trasformazioni stesse concepite come elementi di V_3, e producano quindi sugli elementi (o punti) di questa varietà un certo gruppo transitivo $\bar{\Gamma}$.

Abbiamo allora in V_3 quella che si può chiamare la *rappresentazione canonica* del gruppo. Veramente si ottengono in V_3 due rappresentazioni canoniche *coniugate* (e quindi due gruppi *coniugati*) secondo il senso fissato per la moltiplicazione innanzi considerata; ma è indifferente assumere l'una o l'altra di esse. — Se poi in un modo qualunque si riferisce birazionalmente la V_3 allo spazio (S_3), si ottiene una rappresentazione canonica del gruppo Γ nello spazio; e questo ci fornisce un *tipo*, a cui il gruppo stesso può essere ricondotto con una trasformazione cremoniana.

Supponiamo invece che abbia luogo il 2° caso, cioè che un punto generico dello spazio venga trasformato in se stesso da un numero finito $n > 1$ di operazioni del gruppo Γ. Tenendo ancora fermo A e facendo variare B, si otterrà allora una corrispondenza $(n, 1)$ (razionale in un solo senso) fra la varietà V_3, i cui elementi sono le trasformazioni di Γ, e lo spazio S_3. Ai punti dello spazio vengono ora a corrispondere biunivocamente non più i singoli punti di V_3, bensì i gruppi di punti di una involuzione (razionale) su questa varietà; involuzione che sarà invariante rispetto al gruppo $\bar{\Gamma}$. Ciascun gruppo (P) di questa involuzione resta fisso per un gruppo finito di operazioni contenute in $\bar{\Gamma}$ (corrispondenti alle operazioni di Γ che lasciano fermo un punto di S_3). Questo gruppo finito opera transitivamente sui punti di (P) stesso; e applicando a (P) le ∞^3 operazioni di $\bar{\Gamma}$, si genera appunto l'involuzione considerata. Sui gruppi di punti di questa involuzione [che sono i trasformati di (P)] il gruppo $\bar{\Gamma}$ opera come Γ operava a sua volta sui punti dello spazio S_3. Riferendo pertanto in un altro modo qualunque — che converrà poi scegliere opportunamente — gli elementi (gruppi) della stessa involuzione ai punti dello spazio S_3, si otterrà anche per questo caso un *tipo*, a cui il gruppo cremoniano Γ potrà essere birazionalmente ricondotto.

Le considerazioni svolte fin qui mostrano che il problema della determinazione dei gruppi cremoniani (algebrici, transitivi, semplici) ∞^3 si può spezzare in due parti distinte:

1) in primo luogo dovremo assegnare le diverse rappresentazioni canoniche (birazionalmente distinte) di questi gruppi (cfr. § 18). Ciò equivale a determinare quei gruppi nei quali un punto generico dello spazio risulta fisso per la sola trasformazione identica;

2) in secondo luogo, sopra ciascuna delle varietà V_3 corrispondenti alle nominate rappresentazioni canoniche, dovremo costruire tutte le possibili involuzioni invarianti (§ 19). E per questo dovremo prender le mosse dall'esame dei vari sottogruppi finiti di ciascun gruppo canonico (in quanto ogni gruppo di una di quelle involuzioni si potrà generare con uno di questi sottogruppi finiti).

18. – *Rappresentazioni canoniche.* Si abbia un gruppo cremoniano Γ, algebrico, semplice, ∞^3. Come abbiamo detto innanzi, pensiamo le trasformazioni di esso una prima volta come *elementi* (punti) di una varietà (algebrica) V_3, una seconda volta come *operazioni* che agiscono per moltiplicazione sulle trasformazioni stesse pensate come elementi di V_3, e producono quindi su questa varietà le ∞^3 trasformazioni di un gruppo transitivo $\bar{\Gamma}$ (sicchè in $\bar{\Gamma}$ stesso esisterà *una* trasformazione nella quale si corrispondono due punti generici di V_3).

La composizione gruppale di Γ, e quindi di $\bar{\Gamma}$, è (come per ogni gruppo semplice ∞^3) quella stessa del gruppo proiettivo binario ([21]). Segue da ciò che in Γ (o in $\bar{\Gamma}$) una trasformazione generica è permutabile con ∞^1 soltanto, e perciò tutti i sottogruppi ∞^1 di Γ sono algebrici e razionali; essi vengono rappresentati su V_3 dalle linee razionali C di una congruenza del 1° ordine. In Γ esistono pure ∞^1 sottogruppi a due dimensioni, algebrici e razionali anche questi, perchè contenenti infiniti sottogruppi ∞^1 algebrici; essi dànno luogo su V_3 ad ∞^1 superficie razionali F, che si segano due a due secondo curve C.

Tutte le curve C e tutte le superficie F su V_3 hanno almeno un punto base comune: il punto che rappresenta la trasformazione identica di Γ. Ma può darsi che le C e le F abbiano più d'uno, diciamo n punti comuni (certo in numero finito): questi punti rappresenteranno allora le trasformazioni di un sottogruppo finito G_n, invariante entro Γ, e comune a tutti i sottogruppi ∞^1 e ∞^2 di Γ stesso. Si può anzi dir subito che G_n dovrà essere un gruppo ciclico, appunto perchè contenuto (invariantivamente) in gruppi cremoniani algebrici, continui, semplicemente infiniti.

Dopo esser dunque partiti dalla considerazione che i nostri gruppi ∞^3 (Γ) sono oloedricamente isomorfi (in senso gruppale) al gruppo proiettivo binario, vediamo ora che sotto l'aspetto algebrico essi possono tuttavia differirne per la presenza di un sottogruppo ciclico invariante di ordine $n > 1$, il quale non compare invece (com'è noto) nel gruppo proiettivo binario. Ove pertanto un tal sottogruppo sia effettivamente contenuto in Γ, è chiaro ch'esso dovrà corrispondere, nell'isomorfismo fra Γ e il gruppo binario ∞^3, alla sola trasformazione identica di quest'ultimo. Perciò i gruppi cremoniani semplici ∞^3 si distingueranno in due *specie*, secondochè contengono o no un sottogruppo ciclico invariante (di ordine > 1); vale a dire, secondochè la corrispondenza d'isomorfismo che intercede fra essi ed il gruppo proiettivo binario è una corrispondenza birazionale — e perciò $[1, 1]$ —, oppure una corrispondenza $[n, 1]$ razionale in un senso solo. Esaminando più da vicino questo secondo caso, vedremo fra poco che esso può presentarsi soltanto per $n = 2$; saranno dunque due soli i gruppi canonici (birazionalmente distinti) di cui andiamo ora in cerca.

Ciò premesso, proponiamoci di trovare effettivamente, per i gruppi di prima e di seconda specie così definiti, le rappresentazioni canoniche cui alludevamo alla fine del prec. § 17.

a) *Gruppi della* 1ª *specie.* Riprendiamo la considerazione della varietà V_3 e del gruppo $\bar{\Gamma}$ su di essa, e facciamo operare le ∞^3 trasformazioni di questo gruppo sulle superficie F e sulle curve C, loro mutue intersezioni. Si otterranno così (da ciascuna F ∞^1, e quindi) in tutto ∞^2 super-

([21]) LIE, op. cit., Bd. 3, S. 714-16.

ficie, che si segheranno due a due secondo curve razionali, e tre a tre in *un* punto. Questo sistema ∞^2 di superficie è dunque certo quadratico, e sarà perciò contenuto in un sistema ∞^3 lineare, anzi omaloidico; esso e quest'ultimo saranno invarianti pel gruppo $\bar{\Gamma}$.

Riferendo ora proiettivamente il detto sistema omaloidico (∞^3) di superficie al sistema dei piani dello spazio S_3, ci procureremo in S_3 un gruppo *proiettivo* trasformato di $\bar{\Gamma}$ (e di Γ). Ma di gruppi proiettivi semplici ∞^3 *transitivi* si hanno in S_3 due tipi soltanto ([22]): il gruppo ∞^3 di una cubica gobba, ed il gruppo delle omografie (biassiali) che lasciano ferma una quadrica e tutte le generatrici di un determinato sistema sopra di essa. Fra questi due, è anche chiaro che il gruppo proiettivo dianzi ottenuto in S_3 sarà precisamente del secondo tipo, perchè in questo caso soltanto vi è una sola trasformazione del gruppo che fa corrispondere fra loro due punti generici di S_3.

Concludiamo perciò:

I gruppi cremoniani algebrici, semplici, ∞^3, della 1ª specie, ammettono come rappresentazione canonica il gruppo delle omografie (biassiali) dello spazio S_3, che lasciano fissa una quadrica e tutte le generatrici di un determinato sistema sopra di essa ([23]).

Quindi: *Il detto gruppo proiettivo è il tipo a cui può ricondursi birazionalmente ogni gruppo cremoniano ∞^3 (algebrico, semplice, transitivo) della 1ª specie, nel quale non esista alcuna trasformazione non identica che lasci fisso un punto generico.*

b) Gruppi della 2ª specie (in cui si ha un G_n ciclico invariante). Ritorniamo alla solita rappresentazione canonica su V_3; e, come nel caso precedente, facciamo agire le operazioni di $\bar{\Gamma}$ sulle superficie F e sulle curve C, loro mutue intersezioni. Otteniamo ancora ∞^2 superficie che si segano due a due secondo curve razionali, e tre a tre in gruppi di n punti. Questi gruppi di n punti (T, $T\pi$, $T\pi^2$, ..., $T\pi^{n-1}$) nascono, per effetto delle operazioni T di $\bar{\Gamma}$, dal gruppo-base G_n ($1, \pi, \pi^2, \ldots, \pi^{n-1}$) delle superficie F e delle curve C, e formano un'involuzione *ciclica* I_n: la stessa involuzione che si ottiene facendo agire sui punti (T) di V_3 le operazioni del gruppo ciclico G_n concepite, non più come trasformazioni di $\bar{\Gamma}$, ma come trasformazioni del gruppo coniugato (ossia per moltiplicazione a destra invece che a sinistra) (cfr. § 17). Sugli elementi (gruppi) della I_n il gruppo $\bar{\Gamma}$ opererà come il gruppo canonico di 1ª specie operava nel caso *a*) sui punti di V_3.

([22]) Cfr. p. es. FANO, *Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè*, « Memorie della R. Accad. di Torino », ser. II, tom. XLVI; v. in part. § 5.

([23]) Questo stesso gruppo ci darà dunque la rappresentazione canonica (su S_3) del gruppo proiettivo binario; cosa che può anche verificarsi direttamente (cfr. FANO, l. c.).

Il nostro sistema ∞^3 di superficie risulterà contenuto, come nel caso precedente, in un sistema lineare ∞^3 invariante rispetto a $\bar{\Gamma}$, di cui due superficie si segheranno ancora secondo una curva razionale, ma tre superficie avranno a comune tutto un gruppo di n punti dell'involuzione ciclica I_n.

Riferiamo ancora proiettivamente questo sistema lineare ∞^3 di superficie al sistema dei piani dello spazio S_3. La V_3 si trasformerà in uno spazio S_3 moltiplo (n-plo), nel quale al gruppo $\bar{\Gamma}$ corrisponderà un gruppo proiettivo; e, poichè la I_n è un'involuzione *ciclica*, così (per una nota proprietà delle equazioni abeliane in cui le radici formano un unico periodo) il detto spazio multiplo sarà del tipo:

$$x \quad y \quad z \quad \sqrt[n]{f(xyz)}$$

dove f è un certo polinomio. Infine, poichè alle rette dello spazio multiplo S_3 corrispondono su V_3 curve *razionali*, segue da una nota formula di ZEUTHEN che il polinomio f dovrà essere di 2° grado. In conclusione dunque la V_3 viene rappresentata sopra uno spazio n-plo (ciclico):

$$x \quad y \quad z \quad \sqrt[n]{f(xyz)}$$

avente la *quadrica* di diramazione:

$$f(xyz) = 0 \; ;$$

in modo che alle ∞^3 trasformazioni del gruppo $\bar{\Gamma}$ su V_3 corrispondono in questo spazio multiplo certe ∞^3 trasformazioni proiettive (formanti un gruppo semplice, transitivo), le quali dovranno lasciar ferma la superficie di diramazione. Ma, se $n > 2$, la superficie di diramazione totale si compone, oltrechè della quadrica $f = 0$, anche del piano all'infinito (contato $n - 2$ volte); e quindi non esiste nessun gruppo proiettivo, transitivo, ∞^3, che la lasci invariata. Si trae di qui che deve essere $n = 2$, come avevamo preannunziato.

Ora, se $n = 2$, la V_3 viene ad esser così rappresentata sullo spazio *doppio* con quadrica di diramazione:

$$x \quad y \quad z \quad \sqrt{f(xyz)} \; ;$$

il quale a sua volta nasce per proiezione (da un punto esterno A) della quadrica Q_3 di S_4, che ha per equazione:

$$u^2 = f(xyz) \, .$$

Di più, alle trasformazioni proiettive dello spazio (doppio) $u = 0$ che lasciano invariata la quadrica $f(xyz) = 0$ corrispondono le trasformazioni proiettive di Q_3 che mutano in se stesso lo spazio $u = 0$. Noi potremo dunque assumere addirittura la stessa quadrica Q_3 come varietà canonica V_3 pei gruppi di 2ª specie, intendendo che il gruppo $\overline{\Gamma}$ operante sopra tale varietà sia un gruppo proiettivo di S_4, che lasci fermo, insieme alla quadrica considerata, lo spazio $u = 0$, e quindi anche il polo (A) di esso. Nello spazio $u = 0$ si avrà un gruppo proiettivo ∞^3 (di 1ª specie) subordinato di $\overline{\Gamma}$ e in corrispondenza [1, 2] con $\overline{\Gamma}$ stesso, il quale lascerà invariata la sezione Q_2 di Q_3; questo gruppo proiettivo (e però anche $\overline{\Gamma}$) dovrà pure lasciar ferme tutte le generatrici di uno dei due sistemi sopra Q_2 [cfr. il caso *a*)].

Concludiamo perciò:

I gruppi cremoniani ∞^3 della 2ª specie ammettono come rappresentazione canonica il gruppo delle omografie di S_4 che lascia invariata una quadrica (non specializzata):

$$u^2 = f_2(xyz) \ ;$$

una sua sezione iperpiana (quindi anche il relativo polo), *e tutte le generatrici di un determinato sistema sopra tale sezione.*

Questi gruppi posseggono un sottogruppo invariante G_2 e sono in corrispondenza d'isomorfismo [2, 1] *col gruppo proiettivo binario.*

Il gruppo proiettivo (canonico) della Q_3 è notoriamente equivalente ad un gruppo conforme di S_3, al quale si può ridurre proiettando Q_3 da un suo punto sopra un S_3, e ponendo successivamente in questo spazio un'opportuna proiettività (reale o no). Da questa osservazione si trae che:

Ogni gruppo cremoniano ∞^3 (algebrico, semplice, transitivo) della 2ª specie, nel quale non esista, all'infuori dell'identità, nessuna trasformazione che lasci fisso un punto generico, si può ricondurre birazionalmente ad un gruppo conforme, il quale muti in se stessa una sfera e ciascuna delle sue generatrici (immaginarie) di un determinato sistema.

OSSERVAZIONE. – Data l'equivalenza dei gruppi cremoniani di S_3 coi gruppi proiettivi di convenienti spazi S_n $(n \geqslant 3)$ che trasformano in se stesse varietà razionali a 3 dimensioni, si può domandare di porre in relazione i risultati precedenti, e particolarmente quello relativo alla possibile esistenza, entro un gruppo semplice ∞^3, di un sottogruppo invariante G_2, con quanto è già noto relativamente ai gruppi proiettivi ∞^3. Si deve anzi avere così un nuovo modo di giungere alle stesse proposizioni gruppali già stabilite (salvo poi compiere la ricerca delle rappresentazioni canoniche dei nostri gruppi). — Or bene, nessuna difficoltà si oppone a tale procedimento. Infatti un noto teorema di STUDY ([24]) dà il modo di costruire tutti i gruppi proiettivi semplici ∞^3 di un S_n; scrivendo le equazioni di tali gruppi ([25]), si vede che vi compariscono quattro parametri a, b, c, d legati dalla relazione $ad - bc = 1$, la quale risulta in particolare soddisfatta quando si ponga

$$b = c = 0\,, \qquad a = d = \pm 1\,.$$

Per $a = d = +1$ si ha in ogni caso (nel gruppo ∞^3) l'identità, mentre per $a = d = -1$ si ha ancora l'identità oppure un'involuzione invariante, secondochè le dimensioni degli spazi minori che sono fissi pel gruppo (secondo il teorema di STUDY) hanno o non hanno tutte la stessa parità.

19. – *Involuzioni invarianti per gruppi canonici.* Passiamo ora alla seconda parte del compito che ci siamo assegnato alla fine del § 17; proponiamoci cioè di costruire per i gruppi di 1ª e 2ª specie (di cui già abbiamo dato le rappresentazioni canoniche) le diverse involuzioni invarianti, che si ottengono partendo dai loro sottogruppi finiti. Questi sottogruppi si possono considerare *a priori* come noti, perchè devono corrispondere in isomorfismo oloedrico, o tutt'al più emiedrico (nel caso di un gruppo di 2ª specie) ai gruppi finiti di proiettività binarie, ed è noto che questi ultimi sono ciclici o diedrici, oppure appartengono ai tre tipi che prendono il nome dai poliedri regolari (tetraedro, ottaedro, icosaedro).

a) Nel caso dei gruppi di 1ª specie l'isomorfismo di cui si tratta sarà certo oloedrico; pertanto, tenendo presenti le considerazioni svolte da principio (n. 17), avremo:

Dato nello spazio un gruppo cremoniano ∞^3 (*algebrico, semplice, transitivo*) *della* 1ª *specie, le trasformazioni di esso che lasciano fermo un punto generico devono formare un gruppo finito oloedricamente isomorfo ad un gruppo binario ciclico o diedrico, o ad uno dei gruppi dei poliedri regolari.*

E tutti questi casi possono effettivamente presentarsi.

Consideriamo infatti il gruppo proiettivo canonico di 1ª specie in S_3, del quale sappiamo che lascia fissa una quadrica Q_2 e le sue generatrici di un determinato sistema T. In questo gruppo Γ esistono sottogruppi finiti oleodricamente isomorfi ad un qualunque gruppo binario finito G: basta prendere infatti quelle trasformazioni di Γ che subordinano operazioni di un tal gruppo binario nella schiera ∞^1 di generatrici di Q_2 che è coniugata a T. Il sottogruppo (finito) di Γ così ottenuto dà luogo (in

---

([24]) Cfr. LIE, op. cit., Bd. 3, S. 785. Cfr. anche FANO, Mem. cit. («Acc. di Torino»), § 2.

([25]) FANO, Mem. cit., § 3.

infiniti modi) ad un insieme di punti (P), il quale, per effetto delle omografie del gruppo complessivo Γ, genera un'involuzione (razionale) invariante rispetto a Γ stesso. Basta ora riferire gli elementi (gruppi) dell'involuzione ai punti dello spazio (S_3), per ottenere in questo un gruppo cremoniano (di 1ª specie), nel quale le trasformazioni che lasciano fermo un punto generico formino un gruppo finito oloedricamente isomorfo a G.

b) Passiamo ora ai gruppi di 2ª specie, e consideriamo perciò di nuovo il gruppo proiettivo Γ' di S_4 che lascia invariata una quadrica Q_3, uno spazio S_3 $(u = 0)$ col polo A e la quadrica sezione Q_2, nonchè tutte le generatrici di un determinato sistema T sopra Q_2.

Anche qui, ogni gruppo proiettivo finito, il quale operi sulla schiera ∞^1 delle generatrici di Q_2 coniugata a T, può considerarsi come subordinato di un gruppo proiettivo finito G (ad esso oloedricamente isomorfo) dello spazio S_3 $(u = 0)$, per il quale sieno fissi la quadrica Q_2 e il sistema T su di essa. A quest'ultimo gruppo corrisponderà (in isomorfismo emiedrico) un sottogruppo finito di G' di Γ', *contenente il sottogruppo invariante* G_2 *di* Γ' *stesso, e quindi* (l'operazione non identica di questo G_2, ossia) *l'omologia armonica I di centro A e spazio* $u = 0$. Se ora costruiamo su Q_3 un insieme generico di punti (P'), invariante rispetto a G', e su cui G' operi transitivamente, questo insieme risulterà costituito da un certo numero di coppie dell'involuzione (omologia armonica) I; e applicando a quest'insieme di punti tutte le trasformazioni di Γ', ne dedurremo una certa involuzione, composta mediante la I, la quale sarà invariante rispetto a Γ'. Ora, è chiaro che sugli elementi (gruppi) di questa involuzione Γ' opererà, non già come un gruppo di 2ª specie, ma come un gruppo di 1ª specie; infatti, poichè l'involuzione stessa è composta mediante la I, così l'*operazione* I lascerà fermi tutti i gruppi di essa, opererà cioè sul sistema di questi gruppi come la trasformazione identica, *privando* (per così dire) il gruppo ∞^3 subordinatovi da Γ' del proprio G_2 invariante.

Se si vuole dunque ottenere su Q_3 un'involuzione invariante rispetto a Γ', sulla quale Γ' stesso operi come un gruppo di 2ª specie, bisognerà costruire l'insieme (P') *partendo da un sottogruppo finito G' di Γ' il quale non contenga la trasformazione involutoria I*. Abbiamo così una vera *limitazione* nella scelta del gruppo finito G' (entro Γ'); limitazione che ha per iscopo di eliminare fin d'ora tutti quei casi, nei quali si ricadrebbe in un gruppo di 1ª specie.

È anche facile constatare l'effettiva esistenza di gruppi finiti G' non contenenti l'operazione I; tali sono invero tutti i sottogruppi ciclici di Γ' d'ordine dispari (i quali non contengono addirittura nessuna operazione involutoria). Ma si può anche aggiungere che è questo il solo caso possibile; e ciò si desume facilmente dal fatto che « G' deve contenere la trasformazione I ogni qualvolta contiene un'operazione (ciclica) a periodo pari ».

Quest'ultima proprietà si stabilisce subito nel modo seguente. Sia π una operazione ciclica a periodo $2n$ contenuta in G'. La π^n sarà un'involuzione; e, come tale, se non coincide colla I, dovrà subordinare un'involuzione anche nello spazio S_3 fisso ($u = 0$). Quest'ultima involuzione (di S_3) lascerà fisse tutte le rette di una congruenza lineare, avente per direttrici due generatrici u, v del sistema coniugato a T sulla quadrica Q_2; per conseguenza la π^n lascerà invariate le infinite coniche sezioni di Q_3 coi piani per A che si appoggiano alle u, v. Ora, sopra ciascuna di queste coniche la π^n subordina l'involuzione avente come punti doppi le intersezioni colle stesse u, v; questa involuzione non potrà dunque differire da quella che ha per centro di collineazione A, che viene cioè subordinata sulle stesse coniche dalla I. Sarà perciò in ogni caso $\pi^n \equiv I$; ossia la I starà nel gruppo G', come si voleva dimostrare.

Ora, se il sottogruppo finito G' di Γ' (su Q_3) non contiene la I, esso è *oloedricamente* isomorfo al gruppo G subordinato nello S_3 fisso, e quindi anche ad un certo gruppo proiettivo binario; siccome poi G' non deve contenere alcuna operazione a periodo pari, così questo gruppo binario, e quindi G' stesso, non potranno essere altro che gruppi ciclici di ordine dispari.

Pertanto, tenendo presenti le osservazioni già svolte precedentemente, avremo:

Dato nello spazio un gruppo cremoniano ∞^3 (algebrico, transitivo, semplice) della 2ª specie, le trasformazioni di esso che lasciano fermo un punto generico dovranno in ogni caso formare un sottogruppo ciclico d'ordine dispari ($\geqslant 1$).

20. – *Classificazione dei gruppi cremoniani ∞^3 (algebrici, ecc.).* Ecco ora come si delinea lo schema dello studio dei nostri gruppi cremoniani ∞^3 (algebrici, semplici, transitivi):

1) gruppi di 1ª o 2ª specie del *tipo ciclico*, cioè gruppi nei quali fissando un punto generico, si ha un gruppo finito ciclico (§ 21). (Pei gruppi di 2ª specie è solo possibile il caso del gruppo ciclico d'ordine dispari);

2) gruppi di 1ª specie:
- α) del *tipo diedrico* (§ 23);
- β) del *tipo tetraedrico* (§ 25);
- γ) del *tipo ottaedrico* (§ 26);
- δ) del *tipo icosaedrico* (§ 27).

Cominceremo dal 1º caso, e esamineremo poi separatamente il gruppo del tipo diedrico, e i gruppi del tipo di ciascuno dei poliedri regolari (tutti di 1ª specie).

21. – *Caso ciclico. Ogni gruppo cremoniano* ∞^3 *del tipo ciclico* (*sia esso di 1ª o di 2ª specie*) *può ricondursi birazionalmente ad un gruppo che lascia invariata una stella di rette.*

a) Cominciamo col dimostrare la proposizione pei gruppi di 1ª specie. Riferiamoci perciò alla loro rappresentazione canonica, data dal gruppo proiettivo Γ di S_3 che lascia ferma una quadrica Q_2 e tutte le generatrici di un sistema T sopra di essa. Bisogna ora costruire nel modo più generale un'involuzione I_n invariante rispetto a Γ, il cui gruppo generico (P) risulti generato da un sottogruppo finito ciclico di Γ stesso. E poichè Γ si può considerare come ottenuto dal gruppo cremoniano proposto mediante una trasformazione [1, n] (razionale in un solo senso) la quale faccia corrispondere ai punti di S_3 i gruppi della nominata involuzione I_n, *tutto si ridurrà a far vedere che, costruita l'involuzione* I_n, *esiste nello spazio* (S_3) *della quadrica* Q_2 *una congruenza del 1º ordine di curve razionali, invariante rispetto al gruppo* Γ, *con varietà unisecante, e appartenente a quell'involuzione* (tale cioè, che la curva della congruenza passante per un punto generico contenga sempre anche gli $n-1$ punti coniugati di questo).

Ora, noi possiamo procurarci subito, e in modo assai semplice, una congruenza lineare di *rette* soddisfacente alle condizioni richieste (ossia invariante, e appartenente all'involuzione I_n: l'esistenza di superficie unisecanti è in questo caso evidente).

Infatti ogni gruppo di punti (P) generato da un sottogruppo ciclico di Γ appartiene ad una retta a, la quale si appoggia a due generatrici (distinte) u, v del sistema T; e questa retta a [che contiene già ∞^1 gruppi di punti trasformati di (P)] descrive, per effetto delle varie omografie di Γ, l'intera congruenza lineare di direttrici u e v.

Questa congruenza lineare sarà dunque invariante rispetto a Γ; inoltre ogni retta di essa conterrà (come la a) infiniti gruppi di punti trasformati di (P), cioè infiniti gruppi dell'involuzione I_n, sicchè appunto quella congruenza apparterrà a questa involuzione.

b) Passiamo al caso dei gruppi di 2ª specie, e riprendiamo perciò il gruppo proiettivo Γ' di S_4, che lascia invariata una quadrica Q_3, la sua sezione Q_2 con uno spazio S_3, e le generatrici di *un* sistema T sopra Q_2. Ricordiamo pure che questo gruppo Γ' risulta isomorfo (in corrispondenza [2, 1]) col gruppo Γ (canonico di 1ª specie) che ne viene subordinato nello S_3 fisso.

Consideriamo su Q_3 una involuzione I'_n invariante rispetto a Γ', generata partendo da un gruppo ciclico, d'ordine dispari, (P'): proiettando sullo S_3 fisso dal polo A di questo spazio, avremo anche in S_3 una involuzione I_n invariante rispetto a Γ [generata dal gruppo (P) proiezione di (P')]. Ora noi abbiamo veduto come si possa costruire in S_3 una congruenza lineare di rette, di direttrici u, v, invariante rispetto a Γ, e appartenente alla I_n. Una tale congruenza verrà proiettata da A su Q_3 secondo una congruenza di coniche, pure del 1° ordine, appartenente alla I'_n e invariante rispetto a Γ': la congruenza delle coniche sezioni di Q_3 coi piani per A che si appoggiano alle rette (unisecanti) u e v.

L'esistenza di una siffatta congruenza relativa all'involuzione I'_n su Q_3 permette di ritenere stabilito anche pei gruppi di 2ª specie lo stesso teorema enunciato al principio di questo §, in forza delle medesime (ovvie) osservazioni che abbiamo fatte pei gruppi di 1ª specie.

22. – *Discussione dei casi ulteriori.* La discussione del caso diedrico e dei casi dei poliedri regolari (relativi soltanto, come sappiamo, a gruppi di 1ª specie) si esaurirà più speditamente ricorrendo a più convenienti rappresentazioni canoniche, che equivalgono d'altronde (e devono equivalere) a quella data innanzi (§ 18).

Abbiamo veduto che i gruppi di 1ª specie sono birazionalmente isomorfi al gruppo proiettivo binario. E quest'ultimo si può a sua volta rappresentare sul gruppo Γ delle omografie che trasformano in sè una curva razionale normale di un ordine qualunque n, appartenente ad uno spazio S_n.

Supponiamo ora che si abbia in S_3 un gruppo cremoniano ∞^3, tale che le operazioni di esso che lasciano fermo un punto generico M formino un certo gruppo finito G.

A G corrisponderà in Γ un gruppo oloedricamente isomorfo G', le cui omografie lasceranno invariata la curva C_n, nonchè determinati gruppi di punti sopra questa. Per una conveniente scelta dell'ordine n, potremo dunque supporre che rimanga fisso sulla curva precisamente un gruppo di n punti, ossia il gruppo (P) sezione di essa con un certo iperpiano α. Indichiamo con A il polo di α rispetto alla C_n; anche A sarà fisso per le operazioni di G'. Ora le ∞^3 omografie di Γ porteranno (P) in certi ∞^3 gruppi di punti su C_n, ed A nei punti di una varietà (razionale) V_3. Noi potremo riferire questa varietà allo spazio S_3 da cui siamo partiti, assumendo anzitutto come omologhi il punto A (che è fisso per G') e il punto M (fisso per G); e facendo poi corrispondere fra loro due altri punti qualunque A' (di V_3) e M' (di S_3) quando A e M si possono portare rispett. in essi con operazioni che a lor volta si corrispondono nell'isomorfismo fra Γ e il gruppo cremoniano proposto. Questa corrispondenza fra lo spazio S_3 e la varietà V_3 trasforma evidentemente il gruppo cremoniano proposto nel gruppo proiettivo subordinato da Γ su V_3; epperò questo secondo gruppo sarà equivalente al primo ogni qualvolta la corrispondenza veduta fra V_3 e S_3 sia birazionale (ossia univoca in ambo i sensi). Quando questa condizione sia soddisfatta, è chiaro che una qualunque (ulteriore) rappresentazione spaziale di V_3 ci darà in S_3 un *tipo* a cui potrà ricondursi il gruppo ∞^3 proposto.

Ora, una volta scelto il punto A invariante rispetto a G (e sceltolo pure ad arbitrio, se ve n'è più d'uno invariante per questo stesso gruppo), è chiaro che ad ogni punto M' di S_3 corrisponderà su V_3 un solo punto A'; ma perchè anche, inversamente, ad ogni punto A' corrisponda un solo M' (in particolare dunque ad A il solo punto M), è necessario (e sufficiente) che A — e con esso il gruppo (P) su C_n — non risultino fissi per nessuna trasformazione di Γ che sia fuori di G'. Questa condizione è però soddisfatta per ogni insieme (P) di n (> 2) punti di C_n invariante rispetto a un gruppo G' diedrico o del tipo di uno dei poliedri regolari (fatta solo eccezione per $n = 6$ nel caso tetraedrico); non importerà dunque tenerne conto (nel caso tetraedrico faremo $n = 4$). Essa non potrebbe però rendersi soddisfatta nel caso ciclico, donde appunto la necessità di trattare questo caso a parte (come abbiamo fatto).

Pertanto, dato il gruppo finito G e supposto che il suo corrispondente nel campo binario lasci fermo un insieme di n elementi, converrà scegliere una curva razionale normale avente precisamente l'ordine n, e su questa tra gli ∞^n gruppi di n punti (sezioni iperpiane) prenderne uno (P) che sia invariante (soltanto) rispetto a G (omologo di G in Γ). Considerando poi il polo A di questa sezione iperpiana, applicheremo ad A stesso tutte le ∞^3 omografie che lasciano fissa la C_n, ottenendo così una varietà (razionale) V_3, che cercheremo di rappresentare sopra S_3 nel modo più opportuno. Il gruppo che così verrà a corrispondere a Γ sarà il *tipo* cercato (a cui potrà ricondursi il gruppo proposto).

23. – *Caso diedrico. Ogni gruppo cremoniano ∞^3 del tipo diedrico può ricondursi birazionalmente ad un gruppo che lascia invariata una stella di rette.*

Per dimostrare questo teorema, cominciamo col costruire, nel modo indicato innanzi, un gruppo proiettivo equivalente al gruppo cremoniano proposto. E dimostriamo precisamente che, se un punto generico di S_3 risulta fisso per un gruppo diedrico G_{2n} d'ordine $2n$ (> 4), possiamo ridurci al gruppo proiettivo che le ∞^3 omografie di S_n trasformanti in se stessa una data C_n (razionale, normale) subordinano sulla varietà V_3 delle corde di questa curva. Infatti, sopra la C_n ogni G_{2n} diedrico lascia fissi due gruppi di n punti, che sempre appartengono ad una (stessa) involuzione g_n^1 (ciclica) dotata di due punti n-pli. L'iperpiano determinato da uno qualunque di quei gruppi di n punti (su C_n) appartiene dunque al fascio di due iperpiani osculatori; e il polo di esso sarà perciò un punto di una corda della C_n.

Con ciò il teorema enunciato può ritenersi dimostrato, perchè la V_3 delle corde di C_n può appunto rappresentarsi sopra S_3 in modo che alle corde stesse corrispondano le rette di una stella (che sarà invariante rispetto al gruppo ∞^3).

In particolare per $n = 3$, si trova anche come tipo il gruppo proiettivo ∞^3 di una cubica gobba.

La dimostrazione precedente cade in difetto per $n = 2$, ma anche in questo caso si può costruire una congruenza del 1° ordine invariante e con superficie unisecante. Basta procedere nel modo che brevemente accenniamo.

Poichè un G_4 diedrico in una forma di 1ª specie è costituito dalle quattro proiettività che mutano in se stessa una quaderna di elementi (non armonica, nè equiarmonica, e senza elementi multipli), così siamo condotti, in questo caso, a rappresentare il gruppo proposto (di S_3) sul gruppo proiettivo Γ di una C_4 razionale normale in S_4, facendo corrispondere birazionalmente ai punti dello spazio S_3 i punti di una varietà V_3 (del 6ª ordine) generata per effetto delle operazioni del gruppo Γ da un punto generico di S_4.

Ora affermiamo che vi sono sulla V_3 *tre* congruenze di coniche, ciascuna delle quali è del primo ordine, e invariante rispetto a Γ.

Consideriamo sulla V_3 un punto generico P; il suo iperpiano polare segherà la C_4 in quattro punti A, B, C, D. Separiamo i quattro punti in due coppie, p. e. nelle coppie AB, CD, e costruiamo su C_4 la coppia MN che le separa armonicamente entrambe. È facile verificare che il punto P apparterrà al piano proiettante MN dal punto O intersezione dei due piani osculatori alla C_4 rispett. in M e in N. Questo piano MNO resta fermo per ∞^1 omografie di Γ, le quali subordinano su di esso un gruppo del pari ∞^1 avente come traiettorie delle coniche (mutuamente tangenti nei punti M e N); vi sarà quindi nel piano stesso una conica (traiettoria del gruppo) passante per P e giacente sulla V_3. Siccome la quaderna $ABCD$ può essere divisa in coppie in tre modi diversi, così si ottengono per P *tre* coniche giacenti su V_3; e per separarle occorre l'introduzione di una irrazionalità cubica. Ma una volta separate le tre coniche passanti per un (particolare) punto P di V_3, si possono separare *razionalmente* le tre coniche passanti per ogni altro punto, giacchè ognuna di queste proviene da *una* di quelle che contengono P, per effetto di ∞^1 omografie di Γ. Si avranno dunque sulla V_3 tre congruenze del 1° ordine di coniche, invarianti rispetto a Γ.

Resta da costruire per ciascuna di esse una superficie unisecante.

A tal fine, fissata l'attenzione sopra una (χ) delle nominate congruenze, si consideri il sottogruppo ∞^2 Γ_1 di Γ ottenuto fissando un certo punto H di C_4. Una conica generica γ di χ è mutata in se stessa da una sola operazione (non identica) di Γ_1, cioè dall'involuzione che scambia i punti comuni a γ e alla C_4 ed ha H come punto doppio; tale involuzione lascia fermi *due* punti R, S, su γ. Ora, per effetto delle ∞^2 operazioni di Γ_1, ciascuno dei due punti R, S, descrive una diversa superficie irriducibile giacente su V_3, la quale incontra in *un* punto (di contatto) le coniche di χ. Ognuna delle due superficie così ottenute ci fornisce la varietà unisecante della congruenza, di cui andavamo in cerca.

24. – *Irriducibilità dei casi ulteriori.* Da quanto precede risulta che ogni gruppo cremoniano ∞^3 (algebrico, transitivo, semplice) nel quale le operazioni che lasciano fermo un punto formano un gruppo ciclico o diedrico (incluso il caso della sola identità) si può ridurre birazionalmente ad un gruppo che lascia invariata una stella di rette.

Una tale riduzione non è più possibile nei casi ulteriori; si dimostra infatti che *un gruppo cremoniano* ∞^3 (Γ) *corrispondente ad uno dei tre gruppi dei poliedri regolari non lascia invariata alcuna congruenza* (*algebrica, di curve razionali*) *del 1° ordine.*

Infatti, supposto che sia invariante una congruenza siffatta, le trasformazioni del gruppo Γ che lasciano fermo un punto generico P dovranno anche lasciar ferma *la* curva di quella congruenza che passa per questo punto. Queste stesse trasformazioni saranno dunque contenute nel gruppo (algebrico) ∞^1, continuo o misto, formato da tutte le trasformazioni di Γ che lasciano ferma la curva considerata (per P). Il gruppo delle trasformazioni di Γ che lasciano fermo P risulta quindi contenuto (come sottogruppo finito) in un gruppo ∞^1, e perciò deve essere ciclico o diedrico, contro l'ipotesi.

Osservazione. – Il ragionamento precedente non esclude che per un gruppo ∞^3 di uno dei tipi dei poliedri regolari si abbia una congruenza invariante d'ordine $h > 1$; ma esso prova altresì che in tal caso il gruppo G_n (d'ordine $n = 12,\ 24,\ 60$) ottenuto col fissare un punto generico di S_3 deve contenere un sottogruppo ciclico o diedrico d'ordine n/h. Si trae di qui che l'ordine di una qualsiasi congruenza invariante per il gruppo considerato è $\geqslant 3$ nei primi due casi (tetraedrico e ottaedrico), e $\geqslant 6$ nel caso icosaedrico. Questi valori minimi (3, 3, 6) sono effettivamente raggiunti.

Accertato così che i gruppi ∞^3 corrispondenti ai casi dei poliedri regolari non si possono ridurre (come gli altri gruppi ∞^3) ad avere una stella invariante di rette, converrà cercare anzitutto se è possibile ricondurli a qualcuno degli altri tipi di gruppi che ci si sono già presentati (gruppi con un fascio invariante di piani, gruppi proiettivi e conformi).

Possiamo però vedere subito che *i gruppi* ∞^3 *corrispondenti ai tre casi dei poliedri regolari non posseggono alcun fascio invariante di superficie* (algebriche), e però non possono certo ridursi ad avere un fascio invariante di piani.

Infatti, nell'ipotesi contraria, ogni superficie del fascio invariante sarebbe fissa per un sottogruppo ∞^2, Γ_1, del gruppo proposto (Γ). In Γ_1 sarebbe a sua volta contenuto *un* sottogruppo invariante ∞^1, il quale determinerebbe sulla superficie un fascio di traiettorie razionali. Ora questo fascio, per effetto delle ∞^3 operazioni del gruppo totale Γ, descriverebbe (come si vede facilmente) una congruenza del 1º ordine, invariante rispetto a Γ; e noi abbiamo già riconosciuto che una tale congruenza non può esistere.

Dunque *i nostri gruppi* ∞^3 *residui non sono riducibili* (*birazionalmente*) *a gruppi di* JONQUIÈRES *generalizzati*. Potranno essi ridursi a gruppi proiettivi o conformi (dello spazio S_3)? È facile rispondere alla domanda, perchè i gruppi ∞^3 (semplici) proiettivi e conformi dello spazio S_3 (questi ultimi equivalenti a gruppi proiettivi di una quadrica non specializzata in S_4) sono completamente noti ([26]). Dalla enumerazione di essi risulta subito che nessun gruppo proiettivo semplice di S_3 corrisponde (nel senso fissato) ad uno dei tre casi dei poliedri regolari. Si trova invece un gruppo conforme (e precisamente un gruppo che lascia invariata una quartica di 2ª specie) come corrispondente al caso tetraedrico; questo gruppo costituisce anzi, come vedremo fra poco, il tipo più generale relativo al detto caso. Ma neppure tra i gruppi conformi non si ha alcun gruppo semplice ∞^3 corrispondente ad uno dei casi dell'ottaedro o dell'icosaedro. Concludiamo perciò che *i gruppi cremoniani* (algebrici, semplici, transitivi) ∞^3 *del tipo ottaedrico ed icosaedrico si staccano in modo essenziale da tutti gli altri gruppi cremoniani primitivi ed imprimitivi*, in quanto essi (soltanto) sono irriducibili a gruppi di JONQUIÈRES generalizzati, oppure a gruppi proiettivi o conformi.

25. – *Caso tetraedrico. Ogni gruppo cremoniano* ∞^3 *del tipo tetraedrico può ricondursi birazionalmente ad un gruppo conforme che lascia invariata una quartica di 2ª specie.*

Per ottenere questa riduzione, costruiamo nel modo già indicato (§ 22) un gruppo proiettivo equivalente al gruppo proposto.

Poichè si hanno in una forma di 1ª specie delle *quaderne* di punti (*equianarmoniche*) invarianti rispetto ad un gruppo proiettivo tetraedrico G_{12} (e non per altre trasformazioni proiettive), possiamo riferirci ad una curva C_4 razionale normale in S_4. Su questa curva le ∞^3 quaderne equi-

([26]) FANO, Mem. cit. (« Acc. di Torino »), §§ 5, 6.

anarmoniche determinano iperpiani (S_3), i cui poli hanno per luogo la quadrica fondamentale della polarità rispetto alla C_4 stessa. Questo fatto si può considerare come noto; e si può anche verificare facilmente in modo diretto, ricordando che la condizione perchè una forma binaria biquadratica risulti equianarmonica è data dall'annullarsi del suo invariante quadratico.

Del resto l'ordine della varietà luogo dei poli delle quaderne equianarmoniche su C_4 può essere valutato *a priori* col procedimento seguente, che ci servirà anche negli altri casi.

Anzitutto l'ordine (x) di questa varietà di punti equivale alla classe dell'inviluppo degli iperpiani polari. Ora, se applichiamo ad un S_{n-1} qualunque di S_n le ∞^3 trasformazioni proiettive che lasciano fissa una data C_n, abbiamo un inviluppo di iperpiani (S_{n-1}) la cui classe è data in generale dal numero degli elementi (S_{n-1}) che passano per 3 punti qualunque di S_n, in particolare per 3 punti di C_n: E questo numero vale

$$x = \frac{n(n-1)(n-2)}{s},$$

designando con s il numero delle trasformazioni del gruppo che lasciano fermo lo spazio S_{n-1} considerato da principio. Nel nostro caso si ottiene dunque (essendo $n = 4$, $s = 12$):

$$x = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{12} = 2. \qquad \text{c. d. d.}$$

Il gruppo cremoniano proposto, equivalendo ad un gruppo proiettivo di una quadrica di S_4 (contenente una C_4 fissa), sarà anche equivalente ad un gruppo conforme di S_3, come afferma l'enunciato.

26. – *Caso ottaedrico.* Poichè ogni gruppo ottaedrico (G_{21}) in una forma di 1ª specie trasforma in sè *un* insieme di *sei* elementi ripartibili in tre coppie mutuamente armoniche, così potremo ora riferirci ad una C_6 razionale normale di S_6, e considerare su questa le ∞^3 sezioni iperpiane costituite da terne di coppie due a due armoniche: il gruppo cremoniano proposto sarà equivalente al gruppo che le ∞^3 proiettività di S_6 che lasciano fissa la C_6 subordinano sulla varietà V_3 luogo dei poli di quegli ∞^3 iperpiani (S_5).

Poichè il gruppo ottaedrico contiene 24 operazioni, l'ordine della varietà V_3, valutato col procedimento del § prec., sarà:

$$x = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{24} = 5.$$

La teoria delle forme binarie ci dà il modo di scrivere le equazioni della detta V_3 e di assegnarne quindi la rappresentazione in S_3, costruendo così un tipo del nostro gruppo cremoniano ([27]).

Ma poichè la V_3 è del 5° ordine e su di essa non può esistere alcun fascio (invariante) di piani (§ 24), essa avrà le curve sezioni (cogli S_4) ellittiche, e rientrerà quindi in una categoria di varietà già studiata ([28]). Così potremo concludere *a priori* che la V_3 dovrà venire proiettata univocamente sopra uno spazio S_3 da una sua conica (certo esistente) ([29]), e che in questa rappresentazione le immagini delle superficie sezioni iperpiane della V_3 saranno superficie cubiche. Ora, vi sono in S_3 più tipi di sistemi lineari ∞^6 di superficie cubiche, ad intersezioni ellittiche, capaci di rappresentare una V_3 del 5° ordine di S_6; ma fra questi tipi ve n'è uno solo cui corrisponde una V_3 non contenente una congruenza del 1° ordine di rette. Siccome la nostra V_3 non può contenere una siffatta congruenza, che certo risulterebbe invariante pel gruppo proiettivo ∞^3 (§ 24), così concludiamo che la rappresentazione della V_3 deve precisamente condurre a quel tal caso, cioè al caso di un sistema lineare di superficie cubiche definito da una quartica base di 2ª specie.

Si trae di qui, che: *Ogni gruppo cremoniano ∞^3 del tipo ottaedrico può ricondursi birazionalmente ad un gruppo di trasformazioni cubiche caratterizzato dal trasformare in se stesso il sistema lineare delle superficie di 3° ordine passanti per una quartica di seconda specie.*

Osservazione. – Sopra la nostra V_3 di S_6 esiste una congruenza di rette del 3° *ordine* invariante rispetto al gruppo proiettivo considerato;

([27]) Così dovremo poi fare nel caso icosaedrico. Qui, valendosi delle condizioni perchè una forma binaria sestica sia ottaedrica — sia cioè covariante sestico T di una e quindi di ∞^1 forme biquadratiche — (Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen*, pag. 440, 447), si troverebbe che la nostra V_3^5 è intersezione di cinque quadriche:

$$x_0x_4 - 4x_1x_3 + 3x_2^2 = 0 \qquad x_2x_6 - 4x_1x_5 + 3x_3^2 = 0$$

$$x_0x_5 - 3x_1x_4 + 2x_2x_3 = 0 \qquad x_1x_6 - 3x_2x_5 + 2x_3x_4 = 0$$

$$x_0x_6 - 9x_2x_4 + 8x_3^2 = 0\ ,$$

e può rappresentarsi su S_3 (per proiezione da un piano osculatore alla C_6) col sistema lineare ∞^6 di superficie cubiche:

$$k_0x_0^3 + x_0^2(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3) +$$
$$+ k_4x_0(4x_1x_3 - 3x_2^2) +$$
$$+ k_5(12x_1^2x_3 - 9x_1x_2^2 - 2x_0x_2x_3) + k_6(36x_1x_2x_3 - 27x_2^3 - 8x_0x_3^2) = 0\ .$$

([28]) Enriques, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche*, « Rend. Accad. dei Lincei », 1894 (pag. 481 e 536) [questo volume, VII, Nota I e II]. Cfr. anche Mathem. Annalen », Bd. 46 [questo volume, X].

([29]) Quando la V_3 si proietti da un piano osculatore alla C_6 [cfr. la nota ([27])], questa conica si riduce a una retta (tangente alla C_6) contata due volte.

essa viene rappresentata in S_3 dalla congruenza delle corde della quartica fondamentale, che è a sua volta invariante pel gruppo cubico di S_3.

Le rette di quella congruenza del 3° ordine su V_3 contengono rispett. i poli dei gruppi delle ∞^2 involuzioni I_6^1 di forme ottaedriche, del tipo $x_1x_2(k_1x_1^4 + k_2x_2^4)$, sulla curva C^6. La congruenza è del 3° ordine, corrispondentemente al fatto analitico che ogni forma ottaedrica può ridursi al tipo $x_1x_2(k_1x_1^4+k_2x_2^4)$ — o anche $x_1x_2(x_1^4+x_2^4)$ — in tre modi diversi (scegliendo cioè una qualunque delle tre coppie armoniche che ne sono parte come coppia di riferimento $x_1=0$, $x_2=0$).

27. – *Caso icosaedrico.* Poichè ogni gruppo icosaedrico (G_{60}) in una forma di 1ª specie è definito dal trasformare in se stesso un certo gruppo di 12 elementi di questa forma, potremo riferirci in questo caso alla curva C_{12} razionale normale di S_{12}. Dovremo considerare le ∞^3 sezioni iperpiane di essa che costituiscono gruppi *icosaedrici* (cioè invarianti per gruppi proiettivi icosaedrici sulla C_{12}), e la varietà V_3 luogo dei poli di questi iperpiani.

Il gruppo cremoniano proposto dovrà operare nello spazio come il gruppo proiettivo della C_{12} opera sopra questa V_3.

L'*ordine della* V_3, valutato secondo la formola del § 25, è:

$$x = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{60} = 22\,.$$

Della V_{22}^3 possiamo scrivere le equazioni, mediante la teoria delle forme binarie. Valendoci di queste equazioni dimostreremo che:

La V_3 *viene proiettata univocamente* (sopra uno spazio S_3) *da ogni* S_6 *osculatore alla* C_{12}. *Le immagini delle sue sezioni iperpiane risultano superficie del* 7° *ordine componenti un sistema lineare* ∞^{12}.

Ne dedurremo quindi che il gruppo cremoniano proposto si può ridurre birazionalmente ad un gruppo di trasformazioni del 7° ordine, che lascia invariato il detto sistema lineare.

Rappresentata la nostra C_{12} colle equazioni parametriche ($i=0$, $1, 2, \ldots, 12$)

$$x_i = \lambda^{12-i}\mu^i\,,$$

è noto che ogni punto (x) dello spazio S_{12} ha come iperpiano polare rispetto a questa curva l'iperpiano di coordinate

$$\xi_i = (-1)^i \binom{12}{i} x_{12-i}\,,$$

il quale sega la C_{12} nei 12 punti rappresentati dall'equazione

$$\sum_i (-1)^i \binom{12}{i} x_i \cdot \lambda^i \mu^{12-i} = 0 .$$

I punti della nostra V_{22}^3 sono i poli degli iperpiani le cui sezioni con C_{12} costituiscono gruppi icosaedrici. Oar le condizioni perchè sia icosaedrico il gruppo di 12 punti (di C_{12}) rappresentato dall'ultima equazione, ovvero (cambiando λ in $-\lambda$) dalla:

$$f(\lambda, \mu) \equiv \sum \binom{12}{i} x_i \lambda^i \mu^{12-i} = 0 . \tag{1}$$

sono espresse simbolicamente da

$$(ff)^4 \equiv 0 ,$$

e portano alle 17 equazioni ([30])

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{\lambda} \binom{8}{\lambda}\binom{8}{\varrho-\lambda} \{x_\lambda x_{\varrho+4-\lambda} - 4x_{\lambda+1}x_{\varrho+3-\lambda} + 3x_{\lambda+2}x_{\varrho+2-\lambda}\} = 0 \\ (\varrho = 0, 1, 2, \ldots, 16), \end{array} \right. \tag{2}$$

dove la somma va estesa a quei valori di λ (zero incluso) che sono $\leqslant \varrho$ e $\leqslant 8$, e tali ancora che $\varrho - \lambda \leqslant 8$.

Si può dunque affermare che *le 17 equazioni* (2) *rappresentano la* V_3^{22}, la quale (in particolare) riesce intersezione parziale delle 9 quadriche (le cui equazioni sono ottenute dalla (2) per $\varrho = 0, 1, \ldots, 8$):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0x_4 - 4x_1x_3 + 3x_2^2 = 0 \\ x_0x_5 - 3x_1x_4 + 2x_2x_3 = 0 \\ 7x_0x_6 - 12x_1x_5 - 15x_2x_4 + 20x_3^2 = 0 \\ x_0x_7 - 6x_2x_5 + 5x_3x_4 = 0 \\ 5x_0x_8 + 12x_1x_7 - 42x_2x_6 - 20x_3x_5 + 45x_4^2 = 0 \\ x_0x_9 + 6x_1x_8 - 6x_2x_7 - 28x_3x_6 + 27x_4x_5 = 0 \\ x_0x_{10} + 12x_1x_9 + 12x_2x_8 - 76x_3x_7 - 21x_4x_6 + 72x_5^2 = 0 \\ x_0x_{11} + 24x_1x_{10} + 90x_2x_9 - 130x_3x_8 - 405x_4x_7 + 420x_5x_6 = 0 \\ x_0x_{12} + 60x_1x_{11} + 534x_2x_{10} + 380x_3x_9 - 3195x_4x_8 - 720x_5x_7 + 2940x_6^2 = 0 \end{array} \right. \tag{3}$$

([30]) GORDAN-KERSCHENSTEINER, *Vorlesungen über Invariantentheorie*, Bd. 2, S. 212.

Si consideri ora lo spazio (S_8) Σ di equazioni: $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$, osculatore alla C_{12} nel punto $x_0 = ... = x_{11} = 0$. Vedremo facilmente che l'intersezione delle 9 quadriche (3) (esclusa la parte che sta nell'iperpiano $x_0 = 0$) viene proiettata univocamente da Σ; ne seguirà che tale intersezione (residua) è irriducibile e quindi, contenendo la V_3^{22}, coincide con questa. La stessa V^{22} risulterà perciò proiettata univocamente (da Σ, e quindi) da ogni S_8 osculatore a C_{12}.

Un S_9 generico passante per Σ si rappresenta con equazioni del tipo

$$\frac{x_0}{a_0} = \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3},$$

dove le a sono certe costanti. Ora, queste equazioni, congiunte alle (3), dànno un sistema che è soddisfatto da un solo gruppo di valori dei mutui rapporti delle $x_i (x_0 \neq 0)$, poichè dalle stesse (3) seguono (per $x_0 \neq 0$) le $x_4, x_5, ..., x_{12}$ espresse razionalmente mediante x_0, x_1, x_2, x_3. La varietà intersezione delle nove quadriche (3) è dunque incontrata da un S_9 generico passante per Σ in *un* (solo) punto esterno allo spazio $x_0 = 0$. Escludendo pertanto da questa varietà la parte di essa (certo esistente) che è contenuta in $x_0 = 0$, dovrà restare una varietà a tre dimensioni proiettata univocamente da Σ, ad es. sullo S_3 fondamentale opposto ($x_4 = ... = x_{12} = 0$). Questa parte sarà appunto, come già abbiamo notato, la nostra V_3^{22}.

La corrispondenza biunivoca che così risulta stabilita fra la variteà V_3^{22} e lo spazio S_3 ($x_4 = ... = x_{12} = 0$) sul quale l'abbiamo proiettata (da Σ) sarà rappresentata dalle stesse equazioni che, in forza delle (3), esprimono le $x_4, ..., x_{12}$ mediante x_0, x_1, x_2, x_3; vale a dire ogni punto di questo S_3 sarà proiezione di quel punto di V_{22}^3 (completamente individuato, finchè $x_0 \neq 0$) che ha le stesse x_0, x_1, x_2, x_3, e per cui le $x_4, ..., x_{12}$ sono così definite:

$$x_4 = \frac{1}{x_0}\{4x_1x_3 - 3x_2^2\}$$

$$x_5 = \frac{1}{x_0^2}\{3x_1(4x_1x_3 - 3x_2^2) - 2x_0x_2x_3\}$$

$$x_6 = \frac{1}{7x_0^3}\{36x_1^2(4x_1x_3 - 3x_2^2) + 9x_0x_2(4x_1x_3 - 5x_2^2) - 20x_0^2x_3^2\}$$

$$x_7 = \frac{1}{x_0^3}\{18x_1x_2(4x_1x_3 - 3x_2^2) - x_0x_3(20x_1x_3 - 3x_2^2)\}$$

$$x_8 = \frac{1}{x_0^3}\{-3(4x_1x_3 - 15x_2^2)(4x_1x_3 - 3x_2^2) - 32x_0x_2x_3^2\}$$

$$x_9 = \frac{1}{x_0^4}\{-27x_1(4x_1x_3 - 3x_2^2)^2 + 108x_0x_2x_3(4x_1x_3 - 3x_2^2) - 80x_0^2x_3^3\}$$

$$x_{10} = \frac{1}{x_0^5}\{-216x_1^2(4x_1x_3 - 3x_2^2)^2 + 225x_0x_2(4x_1x_3 - 3x_2^2)^2 + $$
$$+ 288x_0x_1x_2x_3(4x_1x_3 - 3x_2^2) - 8x_0^2x_3^2(100x_1x_3 - 63x_2^2)\}$$

$$x_{11} = \frac{1}{x_0^6}\{-1296x_1^3(4x_1x_3 - 3x_2^2)^2 + 1620x_0x_1x_2(4x_1x_3 - 3x_2^2)^2 + $$
$$+ 1728x_0x_1^2x_2x_3(4x_1x_3 - 3x_2^2) + 285x_2^0x_3(4x_1x_3 - 3x_2^2)^2 - $$
$$- 2400x_0^2x_1x_3^2(4x_1x_3 - 3x_2^2) - 576x_0^2x_1x_2^2x_3^2 + 640x_0^3x_2x_3^3\}$$

$$x_{12} = \frac{1}{x_0^6}\{-7776x_1^2x_2(4x_1x_3 - 3x_2^2)^2 - $$
$$- 3375x_0(4x_1x_3 - 3x_2^2)^3 + 15120x_0x_1x_3(4x_1x_3 - 3x_2^2)^2 + $$
$$+ 10368x_0x_1x_2^2x_3(4x_1x_3 - 3x_2^2) - $$
$$- 16128x_0^2x_2x_3^2(4x_1x_3 - 3x_2^2) - 4608x_0^2x_1x_2x_3^3 + 6400x_0^3x_3^4\}.$$

Ciò posto, è pur chiaro che il sistema lineare rappresentativo della V_3^{22} si otterrà ponendo nell'equazione lineare generale:

$$\sum k_i x_i = 0 ,$$

in luogo di $x_4, \ldots, x_{12}$ le loro espressioni mediante x_0, x_1, x_2, x_3. Moltiplicando ancora tutti i termini dell'equazione per la potenza massima x_0^6 che compare a denominatore, e ponendo per brevità:

$$f = 4x_1x_3 - 3x_2^2 ,$$

avremo:

$$k_0k_0^7 + x_0^6\{k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3\} + $$
$$+ k_4x_0^5 f + k_5x_0^4\{3x_1f - 2x_0x_2x_3\} + $$
$$+ x_0^3\{k_6[36x_1^2 f + 9x_0x_2(f - 2x_2^2) - 20x_0^2x_3^2] + $$
$$+ k_7[18x_1x_2f - x_0x_3(5f + 12x_2^2)] + $$
$$+ k_8[3f(12x_2^2 - f) - 32x_0x_2x_3^2]\} + $$
$$+ k_9x_0^2\{-27x_1f^2 + 108x_0x_2x_3f - 80x_0^2x_3^3\} + $$
$$+ k_{10}x_0\{-216x_1^2f^2 + 9x_0x_2f(25f + 32x_1x_3) - 8x_0^2x_3^2(25f + 12x_2^2)\} + $$

$$+ k_{11}\{-1296x_1^3f^2 + 108x_0x_1x_2f(15f + 16x_1x_3) +$$
$$- 9x_0^2x_3(35f^2 + 200x_2^2f + 64x_1x_2^2x_3) + 640x_0^3x_2x_3^3\} +$$
$$+ k_{12}\{-7776x_1^2x_2f^2 + 27x_0f(-125f^2 + 560x_1x_3f + 384x_1x_2^2x_3) +$$
$$- 2304x_0^2x_2x_3^2(7f + 2x_1x_3) + 6400x_0^3x_3^4\} = 0\,.$$

Alle sezioni iperpiane della varietà V_3^{22} corrispondono dunque superficie del 7° ordine aventi a comune una conica doppia $x_0 = f = 0$ e una retta (semplice) $x_0 = x_1 = 0$ tangente a questa conica; lungo questa retta tutte le superficie del sistema sono toccate dallo stesso piano $x_0 = 0$. L'intersezione loro con questo piano, all'infuori di quella conica e di questa retta (ciascuna contata due volte), comprende una retta variabile del fascio $x_0 = x_1 + \lambda x_2 = 0$.

Il punto fondamentale $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ è triplo per tutte queste superficie, e il relativo cono tangente si riduce al piano $x_0 = 0$ contato tre volte.

Concludiamo dunque: *Ogni gruppo cremoniano* ∞^3 *del tipo icosaedrico si può ricondurre birazionalmente ad un gruppo di trasformazioni del* 7° *ordine che lasciano invariato un sistema lineare* ∞^{12} *di superficie d'ordine* 7, *le quali si toccano convenientemente nei punti di una curva base costituita da una conica doppia e da una retta semplice* (tangente alla conica in un punto che è triplo per quelle superficie).

Il gruppo tipico contiene entro di sè un gruppo proiettivo ∞^2 che lascia invariata una cubica gobba ed un punto di essa. Questa circostanza permetterebbe di andare più innanzi nello studio del gruppo.

Bologna-Roma, maggio 1897.

INDICE

Introduzione . . . . pag. 475
Proposizioni preliminari . . . . » 476
Gruppi primitivi . . . . » 478
Gruppi algebrici semplicemente infiniti . . . . » 480
Gruppi la cui riduzione si può far dipendere da quella dei gruppi ∞^1.
Gruppi doppiamente intransitivi . . . . » 481
Gruppi integrabili . . . . » 482
Gruppi ∞^2 . . . . » 482
Gruppi semplicemente intransitivi . . . . » 483

Gruppi transitivi imprimitivi, ∞^4 almeno, che lasciano invariata una serie ∞^1 di superficie . . . . pag. 483
Fascio invariante di superficie . . . . » 485
Serie invariante di superficie d'indice > 1 . . . . » 485
Analisi dei casi residui . . . . » 486
Gruppi transitivi che posseggono una congruenza invariante del 1° ordine i cui elementi (curve) vengono scambiati in modo primitivo . . . » 487
Gruppi semplici, transitivi, ∞^3.
Generalità . . . . » 490
Rappresentazioni canoniche . . . . » 491
Involuzioni invarianti per gruppi canonici . . . . » 496
Classificazione dei gruppi cremoniani ∞^3 (algebrici, ecc.) . . . . » 498
Caso ciclico . . . . » 499
Discussione dei casi ulteriori . . . . » 500
Caso diedrico . . . . » 501
Irriducibilità dei casi ulteriori . . . . » 503
Caso tetraedrico . . . . » 504
Caso ottaedrico . . . . » 505
Caso icosaedrico . . . . » 507

XXII.

SUI PIANI DOPPI DI GENERE LINEARE $p^{(1)} = 1$

NOTA I.

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. VII (1° sem., 1898), pp. 234-240 (*).

1. – I caratteri di una superficie algebrica: *genere superficiale, numerico e geometrico, genere lineare e bigenere* (¹), verranno denotati rispettivamente con p_n, p_g, $p^{(1)}$, P.

Studieremo superficie

$$z^2 = f(xy)\,,$$

ossia *piani doppi* $\{xy\sqrt{f(xy)}\}$, dove la *curva di diramazione* $f(xy) = 0$, se pure riducibile, può supporsi non contenere parti multiple.

Abbiamo dimostrato che per una superficie qualunque si ha

$$P \geqslant p_n + p^{(1)}$$

purchè esista sopra la superficie una effettiva *curva canonica* (d'ordine > 0), e risulta anche

$$P \leqslant p_g + p^{(1)}$$

se $p^{(1)} > 0$.

Abbiamo già determinato (²) tutti i piani doppi pei quali

$$p_n = P = 1$$

(*) Presentata dal Socio L. CREMONA nella seduta del 17 aprile 1898.

(¹) Cfr. il cap. VI della mia *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche,* « Memorie della Soc. It. d. Scienze », 1896 [questo volume, XIII],; oppure: CASTELNUOVO e ENRIQUES, *Sur quelques récents résultats...,* « Mathem. Annalen », Bd. 48 [questo volume, XVII].

(²) *Sui piani doppi di genere uno,* « Memorie della Soc. It. d. Scienze », 1896 [questo volume, XVI].

(e quindi anche $p_g = p^{(1)} = 1$), cioè i piani doppi che corrispondono a superficie di genere superficiale 1 sopra le quali *manca* la curva canonica.

Ci proponiamo ora di indicare, in questa Nota, la classificazione dei piani doppi per cui

$$p^{(1)} = 1 \quad \text{e} \quad P > 1\,,$$

fra i quali rientrano i piani doppi di genere superficiale 1 possedenti una effettiva curva canonica ellittica. La classificazione s'intende fatta assegnando i *tipi* cui i nominati piani doppi $\{xy\sqrt{f(xy)}\}$ possono ricondursi con una trasformazione birazionale su x, y.

I tipi dei piani doppi di genere lineare $p^{(1)} = 1$ e bigenere $P > 1$, sono i seguenti:

I. *Piani doppi con curva di diramazione C_{2n}, d'ordine $2n$ $(n > 3)$, dotata d'un punto O $(2n-4)$-plo o $(2n-3)$-plo e*

1) nessun'altra singolarità

$$p_n = p_g = n - 2\,, \qquad P = 2n - 5\,;$$

2) un punto 4-plo distinto da O

$$p_n = p_g = n - 3\,, \qquad P = 2n - 6\,;$$

3) r coppie di punti 3-pli infinitamente vicini allineate con O (che è essenzialmente $(2n-4)$-plo) sopra rette facenti parte di C_{2n}

$$p_n = n - 2 - r\,, \qquad p_g = p_n \quad \text{o} \quad p_g = 0\,, \qquad P = 2n - 5 - r\,;$$

4) r punti 4-pli infinitamente vicini ad O $(2n-4)$-plo, o r punti 3-pli infinitamente vicini ad O $(2n-3)$-plo $(3r \leqslant 2n-3)$

$$p_n = p_g = n - 2 - r\,, \qquad P = 2n - 5 - 2r\,;$$

5) r punti 4-pli infinitamente vicini ad O (essenzialmente $(2n-4)$-plo) ed inoltre h (> 0) coppie di punti 3-pli infinitamente vicini ad O sopra rette per O facenti parte di C_{2n} $(4r + 3h \leqslant 2n-4)$

$$p_n = p_g = n - 2 - r - h\,, \qquad P = 2n - 5 - 2r - h\,.$$

II. *Piani doppi di cui la curva di diramazione si compone di r curve C_{3s} con 9 punti s-pli comuni (appartenenti ad un fascio di* Halphen*), ed eventualmente anche (per r, s dispari ed $s > 1$) della cubica C_3 che passa* *pei 9 punti:*

$$p_n = 1\,, \qquad p_g = \left[\frac{r+1}{2}\right]$$

$$P = \frac{3r-4}{2} \qquad \text{per } s=1 \qquad (r \text{ pari})\,,$$

$$P = \left[\frac{3r}{2}\right] \qquad \text{per } s=2$$

$$P = \left[\frac{3r+1}{2}\right] \qquad \text{per } s=3$$

$$P = \left[\frac{3r+2}{2}\right] \qquad \text{per } s>3\,.$$

Viene qui designato in generale col simbolo $[\varrho]$ il massimo intero contenuto nel numero ϱ.

È notevole il fatto mostrato dagli esempi in cui $P > p_g + p^{(1)}$, fatto che non ha riscontro per $p^{(1)} > 1$.

Si osservino in particolare nella categoria I i piani doppi del tipo 3, di genere 0 o 1, aventi il bigenere $P = n - r$ o risp. $P = n - 6$; il conto delle costanti ne prova l'effettiva esistenza almeno per $n \leqslant 16$ o risp. $n \leqslant 27$.

Per $n = 5$ si ottiene un piano doppio del tipo 3 che non rientra nelle condizioni dell'enunciato, ma offre esempio di una superficie coi generi $p_n = -1$, $p_g = 0$ di cui il bigenere vale $P = 1$, la quale non può quindi essere riferita ad una rigata ellittica come le superficie note fin qui coi caratteri $p_n = -1$, $p_g = 0$.

2. – Alla ricerca dei piani doppi che hanno i caratteri assegnati

$$(p^{(1)} = 1,\ P > 1)\,,$$

dobbiamo far precedere alcune osservazioni relative alla determinazione delle curve canoniche e bicanoniche di un piano doppio di cui è data la curva di diramazione C_{2n} (d'ordine $2n$).

Le immagini delle curve canoniche, aumentate di eventuali componenti eccezionali che corrispondono a punti semplici della superficie, sono date da curve doppie C_{n-3} d'ordine $n-3$, assoggettate ad avere opportune singolarità nei punti multipli di C_{2n} (3).

(3) Cfr. il § 5 della mia Nota *Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche*, « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », 1896 [questo volume, XIV].

Se la C_{2n} ha punti multipli ordinari, distinti, è facile vedere ([4]) che ogni punto $2i$-plo per essa è $(i-1)$-plo per le C_{n-3}, ed ogni punto $(2i+1)$-plo di C_{2n} è del pari $(i-1)$-plo per le dette C_{n-3}.

È noto, fino dagli esempi presentatisi al sig. NOETHER, che le molteplicità imposte alle C_{n-3} possono aumentare se la C_{2n} ha punti multipli infinitamente vicini.

Volendo ricercare la molteplicità imposta alle C_{n-3} da un punto O, multiplo per C_{2n}, a cui sieno infinitamente vicini altri punti multipli, si faccia nel piano una trasformazione quadratica generale, avente in O un punto fondamentale. Allora ad O viene a corrispondere una retta fondamentale o, che entra come parte nella trasformata di C_{2n}, e precisamente deve essere contata un numero pari o dispari di volte secondo la molteplicità di O per C_{2n}. Nel primo caso, questa retta a, come componente della curva di diramazione d'un piano doppio può ugualmente esser tolta; ma nel secondo caso essa figura, essenzialmente, una volta, unita alla residua parte C' della detta trasformata. Ora la C' verrà ad avere su a dei punti multipli che corrispondono ai piani multipli di C_{2n} cadenti nell'intorno di O, ed hanno le stesse molteplicità di essi. Queste molteplicità si trovano aumentate di 1 per la $C' + a$. Di qui, se si considerano le trasformate delle C_{n-3} e si ritorna poi alle C_{n-3}, si deduce che le molteplicità che loro impongono i punti multipli di C_{2n} che cadono nell'intorno (di 1° ordine) di O, sono da valutarsi come se questi punti avessero per C_{2n} una molteplicità superiore di 1 a quella effettiva, da cui può resultare che le C_{n-3} debbano avere nel punto O stesso una molteplicità maggiore di quella innanzi assegnata. Con ciò si è tenuto conto dei punti multipli di C_{2n} che cadono nell'intorno di 1° ordine del punto O. Se si vuol tener conto dei punti multipli di essa che sono nell'intorno di 2° ordine, occorre far uso di una trasformazione quadratica applicata a C' prendendo come punto fondamentale uno dei punti multipli che la C' ha su a. Applicando successivamente questo processo di trasformazione, fino a *sciogliere* la singolarità della C_{2n} nel punto O, e ritornando sempre alla C_{2n}, è facile determinare in ogni singolo caso le molteplicità che vengono imposte alle C_{n-3} in O e nei punti multipli infinitamente vicini ad esso. Ma l'espressione generale di queste molteplicità, quando è data la composizione del punto O, si presenta un po' complicata, soprattutto nel caso in cui i punti multipli dell'intorno di O si succedano sopra rami non lineari.

Pel nostro scopo basta indicare il seguente resultato relativo al caso in cui i punti multipli di C_{2n}, infinitamente vicini ad ogni punto multiplo proprio O, si trovino sopra rami lineari passanti per O.

([4]) Cfr. *Introduzione...*, cap. VI.

Indicando con r, s, t, ... le molteplicità dei punti A, B, C, ... di C_{2n} che si succedono sopra un qualsiasi ramo lineare avente l'inizio in un punto r-plo O, e facendo uso del simbolo $[\varrho]$ per denotare la parte intera del numero ϱ, si ha:

Le C_{n-3} sono assoggettate alle condizioni di avere

1) la molteplicità $[i/2 - 1]$ in A;

2) la molteplicità *complessiva* $[(r+s)/2 - 2]$ in A, B (per modo che i rami lineari di curva per A, B, abbiano complessivamente riunite tante intersezioni colle C_{n-3});

3) la molteplicità complessiva $[(r+s+t)/2 - 3]$ in A, B, C, ecc.

Di qui si ricava in particolare che, nelle ipotesi introdotte: ogni punto $2i$-plo per C_{2n} ha sempre la molteplicità $i-1$ per le C_{n-3} e non maggiore; ogni punto $(2i+1)$-plo di C_{2n} risulta $(i-1)$-plo o i-plo, al più, per le C_{n-3}. Si ricava ancora che le singolarità più semplici della C_{2n}, abbassanti di 1 il genere (numerico) del piano doppio, sono: un punto 4-plo, o due punti 3-pli infinitamente vicini, ossia un punto [3, 3].

Passando ora alla determinazione delle immagini delle curve bicanoniche sul piano doppio che ha come curva di diramazione C_{2n}, osserveremo che qui sono anzitutto da distinguere due casi, secondochè le dette immagini B sono curve doppie e quindi d'ordine doppio delle C_{n-3}, ossia d'ordine $2n-6$ ($B \equiv C_{2n-6}$), oppure curve semplici d'ordine $4n-12$ ($B \equiv C_{4n-12}$); nel 2° caso esse non formano più, generalmente, un sistema lineare.

Le condizioni di molteplicità delle immagini B delle curve bicanoniche, relative ai punti multipli di C_{2n}, discendono dal fatto che il sistema bicanonico è doppio del canonico; quindi un punto ordinario $2i$-plo o $(2i+1)$-plo di C_{2n} sarà $2(i-1)$-plo per la $B \equiv C_{2n-6}$ (doppie), e $4(i-1)$-plo per le $B \equiv C_{4n-12}$ (semplici). Ma occorrono speciali riguardi quando si hanno punti multipli infinitamente vicini. Così se la C_{2n} ha un punto [3, 3] (pel quale le immagini C_{n-3} delle curve canoniche debbono passare semplicemente) le $B \equiv C_{2n-6}$ dovranno passare semplicemente per i due punti tripli infinitamente vicini che lo compongono e le $B \equiv C_{4n-12}$ dovranno passarvi doppiamente (5). E per noi basta limitarci all'osservazione relativa a questo caso.

3. – Veniamo ora alla determinazione dei piani doppi pei quali

$$p^{(1)} = 1\,, \qquad P > 1\,.$$

Le superficie corrispondenti posseggono ∞^{P-1} curve bicanoniche di cui il genere vale $3p^{(1)} - 2 = 1$; queste curve costituenti un sistema lineare sono dunque composte colle curve ellittiche K di un fascio, giacchè l'esi-

(5) Cfr. CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero*, § 15.

stenza di un sistema lineare ∞^2 di curve ellittiche irriducibili porterebbe l'annullarsi del genere e del bigenere della superficie, la quale anzi risulterebbe [6] razionale o riferibile ad una rigata ellittica.

Ora la superficie F che è immagine di un piano doppio di generi $p^{(1)} = 1$, $P > 1$, è trasformata in se stessa da un'involuzione (razionale) I, la quale trasformerà in se stessa ogni curva K del fascio nominato, o scambierà fra loro le curve K accoppiandole. In ogni caso le curve K avranno come corrispondenti, sul piano doppio, le curve L di un fascio, e le L saranno razionali (I) o ellittiche (II).

4. – Poniamoci nel primo caso. Effettuando all'occorrenza una trasformazione birazionale del piano, si può [7] supporre ridotto il fascio delle L ad un fascio di rette, avente un certo centro O. Allora la curva di diramazione C_{2n} del piano doppio avrà in O la molteplicità $2n - 4$, o, in particolare, $2n - 3$. Si può anche supporre la C_{2n} già ridotta (con trasformazioni quadratiche speciali aventi un punto fondamentale in O) ad avere soltanto punti multipli distinti da O, o punti multipli infinitamente vicini ad O che si succedono sopra rette per O. Infine si può supporre che la C_{2n} abbia l'ordine minimo tra quelle che si ottengono colle trasformazioni suindicate. È appena necessario avvertire che in C_{2n} debbono sempre essere comprese, *una volta*, quelle curve fondamentali (che nascono da punti del piano nelle trasformazioni precedenti) le quali verrebbero a figurare in essa un numero dispari di volte.

Date le ipotesi precedenti, le singolarità di C_{2n} che possono influire abbassando il genere del piano doppio, sono soltanto (cfr. n. 2): se O è $(2n - 4)$-plo dei punti 4-pli o dei punti [3, 3] (coppie di punti tripli infinitamente vicini), se O è $(2n - 3)$-plo dei punti tripli infinitamente vicini ad O o dei punti [3, 3]; ciascuna di queste singolarità abbasserà di 1 il genere del piano doppio, poichè i gruppi di $n - 3$ rette per O rappresentanti le curve canoniche, dovranno contenere come parte fissa la retta congiungente O con un siffatto punto singolare.

Ma, per la irriducibilità ad ordine minore delle C_{2n}, dovranno essere osservate le seguenti condizioni:

a) Se la C_{2n} ha un punto 4-plo A distinto da O, essa non possiede, oltre ad A ed O, alcun punto singolare influente sul genere. Infatti un tal punto non potrebbe essere fuori di OA, e d'altra parte neppure su OA senza che questa retta si staccasse *due* volte da C_{2n} e dovesse quindi esser tolta dalla C_{2n} stessa.

---

(6) CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche.* « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », 1894.

(7) NOETHER, *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen,* « Mathem. Ann. », 3,

b) Se la C_{2n} ha un punto 4-plo infinitamente vicino ad O, non può avere punti [3, 3] distinti da O.

c) La C_{2n} non può avere due punti 3-pli infinitamente vicini, distinti da O e non allineati con esso: se O è $(2n-3)$-plo la C_{2n} non può avere neppure un punto [3, 3] infinitamente vicino ad O (due punti 3-pli consecutivi su una retta per O) giacchè la sua congiungente con O si staccherebbe due volte da C_{2n} e dovrebbe quindi essere soppressa.

Restano così i seguenti casi tipici:

1) C_{2n} con O $(2n-4)$-plo o $(2n-3)$-plo, senza altri punti multipli o con un punto 4-plo A distinto da O.

Le curve canoniche sono date da tutti i gruppi di $n-3$ rette per O, o risp. dai gruppi di $n-4$ rette aumentati della parte fissa OA; quindi

$$p_g = p_n = n-2 \quad \text{o risp.} \quad p_g = p_n = n-3 \,.$$

In quanto alle curve bicanoniche, esse sono composte colle curve ellittiche K rappresentate doppiamente sopra le rette per A; esse vengono date dunque dai gruppi di $2(n-3)$ rette per O di cui fa parte, eventualmente, la OA contata due volte, perciò

$$P = 2n-5 \quad \text{o} \quad P = 2n-6 \,.$$

2) C_{2n} con O $(2n-4)$-plo, r punti 4-pli infinitamente vicini ad O, h punti [3, 3] infinitamente vicini ad O (su altrettante rette per O che si distaccano da C_{2n}), dove

$$4r + 3h \leqslant 2n-4 \,.$$

Le rette per O contenenti i punti 4-pli si staccano una volta da tutti i gruppi canonici C_{n-3} di $n-3$ rette per O e due volte dai gruppi bicanonici di $2(n-3)$ rette; le rette per O contenenti i punti [3, 3] si staccano pure una volta dai gruppi C_{n-3} ma pure una volta sola dai gruppi bicanonici; per conseguenza si trova

$$p_g = p_n = n-2-h-r \,, \qquad P = 2n-5-h-2r \,.$$

3) C_{2n} con O $(2n-4)$-plo ed h punti [3, 3] su rette per O che si distaccano dalla C_{2n}. In questo caso si trova (come precedentemente)

$$p_n = n-2-h \,, \qquad P = 2n-5-h \,, \qquad p_g = p_n \quad \text{o} \quad p_g = 0$$

se il p_n risulta negativo.

4) C_{2n} con O $(2n-3)$-plo ed r punti 3-pli infinitamente vicini ad O. Questo è un caso particolare del caso 2); ancora

$$p_g = p_n = n-2-r \,, \qquad P = 2n-5-2r \,.$$

NOTA II.

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. VII (1º sem., 1898),

pp. 253-257 (*).

5. – Discutiamo ora il caso II in cui le immagini L delle parti variabili irriducibili delle curve bicanoniche, sul piano doppio, sono curve ellittiche, costituenti un fascio. Seguendo il sig. BERTINI, questo fascio può essere ricondotto birazionalmente ad un fascio di curva C_{3s} (d'ordine $3s$) con 9 punti s-pli (fascio di HALPHEN). Indichiamo con C_{2n+6} la curva di diramazione del piano doppio così trasformato e con x_1, x_2 ... x_9 le sue molteplicità nei 9 punti base delle C_{3s}.

Le curve canoniche (unitamente a qualche curva eccezionale) verranno rappresentate da curve C_n passanti pei detti 9 punti con certe molteplicità $h_1, h_2, \dots h_9$, dove

$$x_i = 2h_i + \varrho_i$$

essendo $\varrho_i \leqslant 2$.

Ora poichè le C_{3s} rappresentano, sulla superficie, delle curve ellittiche K componenti un fascio, privo di punti base, esse non vengono incontrate dalle C_n nè dalla C_{2n+6}, sicchè

$$3ns - \sum h_i s = 0\,,$$

$$(2n + 6)\cdot 3s - \sum (2h_i + \varrho_i)\cdot s = 0\,,$$

ossia

$$3n - \sum h_i = 0$$

$$6n + 18 - 2\sum h_i - \sum \varrho_i = 0\,,$$

(*) Presentata dal Socio. L. CREMONA nella seduta del 1º maggio 1898.

da cui

$$\sum \varrho_i = 18\,, \qquad \varrho_i = 2\,, \qquad x_i = 2h_i + 2\,.$$

Calcoliamo ora il genere lineare $p^{(1)}$ del piano doppio che deve essere uguale ad 1, tenendo conto del numero virtuale delle intersezioni di due curve canoniche, il quale vale $p^{(1)} - 1$.

Se nella C_n non entrano parti eccezionali, si ottiene

$$n^2 - \sum h_i^2 = p^{(1)} - 1 = 0\,.$$

Ma se nella C_n entra una C_δ composta di curve eccezionali, e passante pei nominati punti h_i-pli di C_n colle molteplicità y_i ($\leqslant h_i$), si avrà

$$p^{(1)} - 1 = (n - \delta)^2 - \sum (h_i - y_i)^2 = 0\,.$$

D'altra parte, considerando le intersezioni di $C_{n-\delta}$, C_δ, si dedurrà

$$\sum h_i y_i \leqslant \delta(n - \delta)\,.$$

Si ricava

$$n^2 - \sum h_i^2 - \delta^2 - \sum y_i^2 \geqslant 0$$
$$n^2 - \sum h_i^2 > 0\,.$$

In ogni caso sussiste dunque la disuguaglianza

$$n^2 - \sum_1^9 h_i^2 \geqslant 0\,.$$

Ora, tenendo conto dell'eguaglianza

$$3n - \sum_1^9 h_i = 0\,,$$

si può concludere

$$h_1 = h_2 = \ldots = h_9 = \frac{n}{3}\,.$$

Infatti n^2 rappresenta il minimo valore della somma dei quadrati di 9 numeri h_i, tali che $\sum_1^9 h_i = 3n$, onde per altri valori dati ai numeri h_i riuscirebbe $n^2 - \sum h_i^2 < 0$.

Segue in particolare che n è divisibile per 3 ($2n+6 = 6m$), e $\delta = 0$, ossia non vi sono, sul piano doppio, curve eccezionali.

Ora poichè la $C_{2n+6} = C_{6m}$ deve avere le molteplicità $n/3$ nei 9 punti base s-pli per le C_{3s}, essa dovrà comporsi di un certo numero r di C_{3s}, ed eventualmente anche (per s dispari > 1) della cubica C_3 che passa i 9 punti nominati:

$$C_{6m} = rC_{3s} \qquad (6m = 3rs)$$

oppure

$$C_{6m} = rC_{3s} + C_3 \text{ [1]} \qquad (6m = 3rs + 3).$$

Allora le immagini delle curve canoniche sul piano doppio saranno curve $C_{3n} = C_{3m-3}$ composte colle C_{3s} e colle C_3,

$$C_{3m-3} = xC_{3s} + yC_3 .$$

L'equazione d'analisi indeterminata

$$3m - 3 = 3sx + 3y ,$$

deve essere risolta prendendo il massimo valore di x che è

$$x = \left[\frac{m-1}{s}\right],$$

ossia rispettivamente

$$x = \left[\frac{rs-2}{2s}\right] \quad \text{o} \quad x = \left[\frac{rs-1}{2s}\right].$$

Sarà quindi

$$p_g = x + 1 .$$

Tuttavia il numero virtuale delle C_{3m-3} è sempre 1, così il genere numerico del piano doppio vale in tutti i casi $p_n = 1$.

In quanto alla determinazione delle curve bicanoniche, e quindi del bigenere, del piano doppio, osserviamo che la C_{6m} di diramazione unita ad una C_{3m-6} aggiunta alle C_{3m-3} immagini delle curve canoniche, rappresenta appunto una curva bicanonica. Questa osservazione si può sta-

[1] Questo resultato non è a priori evidente come si potrebbe credere pel fatto che le C_{3s} debbono rappresentare curve ellittiche. Nella C_{2n+6} potrebbero invero entrare come parti delle componenti della C_3 supposta spezzata.

bilire, sia come corollario di una proposizione generale che si dimostra appoggiandosi alle proprietà fondamentali delle curve canoniche e bicanoniche, sia direttamente per questo caso, giacchè, indicata con $f(xy) = 0$ l'equazione della C_{6m}, si può verificare che il piano $z = 0$ fa parte di una superficie d'ordine $2(6m - 4)$ biaggiunta rispetto alla

$$z^2 = f(xy) .$$

Dalla osservazione precedente si ricava che le curve bicanoniche non sono rappresentate doppiamente, ma solo semplicemente sul nostro piano doppio; l'ordine delle immagini ($C_{12(m-1)}$) delle curve bicanoniche sarà dunque $4(3m - 3)$, essendo $3m - 3$ l'ordine delle immagini (doppie) delle curve canoniche, e similmente la molteplicità delle $C_{12(m-1)}$, in ogni punto $2m$-plo di C_{6m}, sarà $4(m - 1)$. Da ciò si deduce che le $C_{12(m-1)}$ debbono resultare composte colle C_{3s} ed eventualmente anche (per $s > 1$) colle C_3:

$$C_{12(m-1)} = uC_{3s} + vC_3 .$$

L'equazione d'analisi indeterminata in u, v,

$$12(m - 1) = 3su + 3v ,$$

deve essere risolta prendendo il massimo valore intero di u, che è

$$u = \left[\frac{4(m-1)}{s}\right],$$

ossia rispettivamente

$$u = \left[\frac{2rs - 4}{s}\right] \quad \text{o} \quad u = \left[\frac{2rs - 3}{s}\right].$$

Ma, in generale, non tutte le $C_{12(m-1)}$ così composte, saranno immagini di curve bicanoniche del piano doppio, e quindi il bigenere P potrà resultare inferiore ad $u + 1$.

Si osservi infatti, che ogni C_{3s} (entrando come parte variabile nell'immagine di qualche curva bicanonica) rappresenta *due* curve ellittiche K sopra la superficie riferita al piano doppio. Ora le K formano su questa superficie un fascio, avente un certo genere π, e le parti variabili delle curve bicanoniche costituiscono i gruppi di una serie lineare completa g_u^{P-1} nell'ente ∞^1 (fascio) che ha per elementi le K, onde se

$\pi > 0$

$$P - 1 < u .$$

Il genere π del fascio si può valutare tenendo conto del numero r delle C_{3s} che entrano a comporre la C_{6m}. Invero l'ente fascio contiene una g_2^1 costituita delle coppie di K rappresentate sopra una stessa C_{3s}; gli elementi di coincidenza della g_2^1 sono costituiti dalle C_{3s} che fanno parte di C_{6m} ed eventualmente anche (per $s > 1$) dalla cubica C_3 che passa pei 9 punti base delle C_{3s}; si avrà dunque

$$2 + 2\pi = r \qquad \text{o} \qquad 2 + 2\pi = r + 1 ,$$

secondo la parità o disparità di r, cioè

$$\pi = \left[\frac{r-1}{2}\right].$$

Ma poichè, in tutti i casi

$$u \geqslant 2 + 2\pi \qquad (\text{essendo } 3rs \geqslant 12) ,$$

la serie g_u^{P-1} è non speciale, sicchè

$$P - 1 = u - \pi .$$

Si deduce rispettivamente

$$P = \left[\frac{2rs-4}{s}\right] - \left[\frac{r-3}{2}\right] \qquad \text{o} \qquad P = \left[\frac{2rs-3}{s}\right] - \left[\frac{r-3}{2}\right].$$

Si presentano dunque i seguenti casi:

1) La C_{6m} è composta di $r = 2m$ cubiche d'un fascio ($s=1$, $r=2m$)

$$p_g = m = \left[\frac{r+1}{2}\right], \qquad P = 3m - 2 = \frac{3r-4}{2}.$$

2) La C_{6m} è composta di $r = m$ sestiche C_6 aventi 9 punti doppi

comuni

$$p_g = \left[\frac{r+1}{2}\right], \qquad P = \left[\frac{3r}{2}\right].$$

3) La C_{6m} è composta di rC_9 con 9 punti 3-pli comuni, ed eventualmente anche (per r dispari) della C_3 che passa per essi

$$p_g = \left[\frac{r+1}{2}\right], \qquad P = \left[\frac{3r+1}{2}\right].$$

4) La C_{6m} è composta di rC_{3s} $(s > 3)$ con 9 punti s-pli comuni, ed eventualmente anche (per r ed s dispari) della C_3 che passa per essi

$$p_g = \left[\frac{r+1}{2}\right], \qquad P = \left[\frac{3r+2}{2}\right].$$

XXIII.

SOPRA LE SUPERFICIE CHE POSSEGGONO UN FASCIO ELLITTICO O DI GENERE DUE DI CURVE RAZIONALI

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. VII (2º sem., 1898), pp. 281-286 (*).

Il sig. NOETHER (1) ha considerato le superficie algebriche che posseggono un *fascio* di curve razionali C, cioè una serie di curve razionali C dipendenti algebricamente da un parametro, tale che ogni punto generico appartenga ad *una* curva C. Egli ha dimostrato che « ogni superficie possedente un fascio di curve razionali C si può trasformare birazionalmente in una superficie possedente un fascio di coniche; quest'ultima superficie (e quindi la prima) si trasforma in una rigata se si può determinare una curva unisecante le coniche del fascio ». Ma l'esistenza di una siffatta curva unisecante viene stabilita soltanto se il genere p del fascio (considerato come ente algebrico ∞^1 che ha per elementi le C) è nullo, ossia se il fascio delle C è lineare. Resta dunque ancora insoluta la questione « se una superficie possedente un fascio irrazionale di curve razionali sia sempre riferibile ad una rigata (avente il genere p del fascio) ».

Tale questione viene qui risoluta affermativamente quando $p = 1$ o $p = 2$; viene dunque stabilito (con una concisa dimostrazione) il teorema:

Ogni superficie possedente un fascio ellittico o di genere due di curve razionali si può riferire ad una rigata (risp. ellittica o di genere due).

L'estensione del teorema per $p > 2$ formerà oggetto di una Nota ulteriore.

1. – Sia F una superficie possedente un fascio di genere p di coniche. Possiamo supporre che essa appartenga ad uno spazio S_n, dove n è grande

(*) Nota presentata dal Socio L. CREMONA nella seduta del 20 novembre 1898.

(1) *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler curven besitzen*, « Mathem. Annalen », Bd. 3.

quanto si vuole, e che le nominate coniche C di essa stieno in piani π non intersecanti ulteriormente la superficie. Si scelga una qualsiasi curva χ unisecante i piani π, e si proietti ogni conica C dal punto della χ che appartiene al suo piano, in un S_{n-1} fissato.

La superficie F viene così rappresentata sopra una rigata doppia φ di S_{n-1}, la curva di diramazione sopra φ è costituita da una curva K bisecante le generatrici, ed eventualmente anche da un certo numero ϱ di generatrici $a_1 \dots a_\varrho$. Queste debbon esser tangenti a K (o incontrare K in punti doppi) perchè ogni generatrice di ϱ che non tocchi K è proiezione doppia di una conica C irriducibile.

Supponiamo per semplicità che i ϱ punti di contatto non sieno doppi per K. Accenneremo poi alle modificazioni da introdurre nei ragionamenti successivi, quando valga l'ipotesi opposta.

Vogliamo costruire su φ una curva L, unisecante le generatrici, la quale passi per i punti di contatto $A_1 \dots A_\varrho$ della K con $a_1 \dots a_\varrho$, e tocchi la K stessa negli ulteriori punti d'incontro.

Si scelga sopra φ un sistema lineare di curve θ unisecanti le generatrici e privo di punti base. La dimensione r del sistema (completo) delle θ potrà supporsi grande ad arbitrio, giacchè il sistema stesso può sempre essere ampliato sommando alle curve primitive un certo numero di generatrici di φ (²).

Mediante il sistema scelto delle θ, si trasformi la rigata φ in modo che le dette θ vengano segate dagli iperpiani di un S_r; si avrà una rigata φ' di S_r, sulla quale la curva K e le generatrici tangenti $a_1 \dots a_\varrho$ di φ avranno come corrispondenti risp. una curva K' e ϱ generatrici tangenti $a'_1 \dots a'_\varrho$.

La curva K' può supporsi una curva normale dello spazio S_r, altrimenti la rigata doppia φ' potrebbe riguardarsi come proiezione di un'altra rigata doppia di S_{r+1} avente lo stesso numero di generatrici di diramazione (³), e si potrebbero riferire i ragionamenti che seguono a questa seconda rigata invece che a φ'. Ora, indicato con P il genere di K' (o di K), l'ordine di K' (supposto $r > P$), sarà

$$m = r + P .$$

Questo ordine m avrà la stessa parità o disparità di ϱ poichè la curva $K' + a'_1 + \dots + a'_\varrho$ costituisce la intera curva di diramazione della rigata doppia φ', e quindi $m + \varrho$ è pari.

(²) Cfr. SEGRE, *Courbes et surfaces réglées algébriques*, II, « Mathem. Annalen », Bd. 34.

(³) Per la costruzione di tale rigata cfr. SEGRE, l. c., pag. 4 (**).

Si considerino gli iperpiani passanti per i ϱ punti di contatto di $a'_1 \dots a'_\varrho$ con K', essi formano un sistema lineare la cui dimensione è (almeno) $r - \varrho$. Questi iperpiani incontrano ulteriormente K' in $m - \varrho$ punti.

La determinazione degli iperpiani del detto sistema che toccano K' in $(m - \varrho)/2$ punti (cioè che toccano K' in tutti i punti d'incontro cadenti fuori di quelli fissati) si può far dipendere, come è noto, da un problema di bisezione delle funzioni abeliane inerenti a K'. Questo problema ammette certo soluzioni se

$$r - \varrho \geqslant \frac{m - \varrho}{2}$$

ossia se si è preso

$$r \geqslant P + \varrho\,.$$

Ora (supposto appunto di aver preso $r \geqslant P+\varrho$) gli iperpiani di S_r che soddisfano alle condizioni richieste segano su φ' delle curve L', cui corrispondono sopra φ le curve L domandate. Infatti le L, unisecanti le generatrici di φ passano pei ϱ punti di contatto di K con $a_1 \dots a_\varrho$, e toccano ulteriormente la K stessa ovunque la incontrano.

2. – Ritorniamo alla superficie F, contenente un fascio di coniche C, che avevamo rappresentato sulla rigata doppia φ. Alle curve L di φ corrispondono sopra F certe curve λ, bisecanti le coniche C del fascio, che hanno il genere minimo fra tutte le bisecanti possibili. Avendo indicato con p il genere del fascio di coniche (che è il genere della rigata doppia φ) il genere delle λ, valutato secondo la formula di corrispondenza di ZEUTHEN sarà

$$2p - 1\,.$$

Le λ possono eventualmente essere spezzate in due curve unisecanti le C. È ciò che avviene sempre quando $p = 0$ (4). La presenza di una siffatta λ spezzata basta a riferire punto per punto la superficie F ad una rigata di genere p. Ci metteremo dunque nel caso più sfavorevole, supponendo di avere ottenuto una curva λ irriducibile $(p > 0)$.

La costruzione di una λ di genere $2p - 1$ su F è stata fatta nell'ipotesi che sulla rigata doppia φ le generatrici $a_1 \dots a_\varrho$ toccassero K in punti

(4) E così appunto si può riferire la F ad un piano. Cfr. il n. 9 del mio lavoro *Sulle irrazionalità...*, « Mathem. Annalen », Bd. 49 [questo volume, XVIII].

semplici. Nell'ipotesi opposta si riesce ugualmente allo scopo introducendo una leggiera modificazione: non basta più che le curve L passino per quei ϱ punti, ma per ciascun punto doppio si esige un contatto della L con K tale che il numero delle intersezioni di L e K, assorbite in quel punto, risulti dispari.

3. – Rappresentiamo nuovamente la superficie F sopra una rigata doppia scegliendo però la curva χ del n. 1, non più ad arbitrio, ma in modo che la proiezione di λ sia la curva di diramazione della rigata. Basta perciò determinare la χ come luogo dei poli delle corde delle coniche C che congiungono le intersezioni di λ colle dette C.

Si indichi con Φ la rigata doppia così ottenuta, e con λ' la sua curva di diramazione omologa a λ, alla quale eventualmente dovranno sommarsi alcune generatrici di Φ.

Procedendo come innanzi (coll'avvertenza che un punto comune a λ' e ad una generatrice di Φ è sempre un punto doppio) costruiremo su Φ una curva unisecante le generatrici e tangente alla curva di diramazione in ogni punto d'incontro. A questa curva corrisponderà sopra F una curva σ (eventualmente spezzata) di genere $2p-1$. La curva σ, come la λ, biseca, le coniche C; inoltre sopra ogni conica C le due coppie segate da λ e da σ si separano armonicamente. Possiamo esprimere questa relazione dicendo che λ e σ sono due *bisecanti armoniche delle coniche* C.

4. – Supponiamo ora $p=1$. Come nel caso generale si ottengono sopra la superficie F due bisecanti armoniche delle coniche C, aventi il genere minimo $2p-1$; in questo caso ciascuna di tali bisecanti è ellittica o si spezza in due unisecanti. Prendiamo in esame l'ipotesi più sfavorevole, in cui le due bisecanti λ e σ sieno irriducibili.

Possiamo costruire su F un fascio razionale costituito da coppie di coniche C, scegliendo una g_2' nell'ente ellittico ∞^1 che ha per elementi le C.

Ora ci proponiamo di costruire su F una involuzione (di coppie di punti) che trasformi ogni C nella coniugata, accoppiando dunque le C nel modo detto innanzi.

Si prendano in un modo particolare due C coniugate: sieno C_1 e C_2. Indichiamo con A_1A_1' e B_1B_1' le coppie di punti segate su C_1 risp. da λ e da σ: e indichiamo similmente con $A_2A_2^1$ e $B_2B_2^1$ le coppie segate da λ e da σ su C_2.

Facciamo corrispondere sulla curva ellittica λ i punti A_1A_2 (oppure A_1A_2'); otteniamo una involuzione razionale g_2^1; questa g_2^1 è notoriamente permutabile colla involuzione ellittica γ_2^1 e perciò contiene pure la coppia $A_1'A_2'$ (o risp. $A_1'A_2$). Ora se si prendono due altre C coniugate, generiche, i due punti in cui l'una di esse è segata da λ corrispondono ai due punti di sezione dell'altra in un modo che è razionalmente determinato, appena sia fissata su λ la nominata g_2^1 (la scelta di questa g_2^1 dipende da un'irrazionalità quadratica puramente *aritmetica*).

Associando i punti B_1B_2, $B_1'B_2'$ della curva ellittica σ, otterremo del pari sopra di essa una involuzione razionale g_2^1 permutabile coll'involuzione γ_2^1 segata dalle C, e mediante una tale g_2^1 risulterà fissato razionalmente un riferimento ordinato delle due coppie di punti segate da σ sopra due C coniugate.

Ciò posto, date due C coniugate generiche, ai quattro punti in cui l'una di esse è segata da λ e da σ si possono far corrispondere ordinatamente i quattro punti d'incontro dell'altra colle stesse due curve, e poichè le due quaterne di punti sono armoniche, e si corrispondono in esse le coppie di punti coniugati armonici, le due coniche C risultano riferite proiettivamente in un modo determinato.

Ora le coppie di punti omologhi di due C coniugate, danno luogo su F ad una involuzione I che accoppia le C coniugate, come appunto avevamo richiesto.

5. – Si costruisca una nuova superficie F' i cui punti corrispondano alle coppie dell'involuzione I ottenuta su F. Alle coniche C di F corrispondono su F' curve razionali C', e precisamente ogni C' corrisponde a due C coniugate. Le C' formano dunque su F' un fascio *lineare* di curve razionali. Allora (col sig. NOETHER) si può costruire su F' una curva unisecante le C' (cfr. anche il n. 2). A questa corrisponde sopra F una curva unisecante le C.

Tanto basta per affermare che la superficie F può essere riferita birazionalmente ad una rigata ellittica, di cui le generatrici corrispondono alle C.

6. – Il metodo precedente si fonda sopra la circostanza che « date due curve ellittiche λ e σ rappresentate doppiamente sopra uno stesso ente ellittico (o curva) γ, ogni g_2^1 di γ corrisponde (in due modi) ad una g_2^1 (coniugata di se stessa) tanto su λ che su σ ». L'ente ellittico γ era nel nostro caso il fascio delle coniche C della superficie F, nel qual fascio appunto avevamo scelto una g_2^1 qualsiasi.

Ora evidentemente basta pel nostro scopo aver constatato l'esistenza di una particolare g_2^1 di γ cui corrisponda tanto su λ come su σ una g_2^1 (coniugata di se stessa).

Osservato ciò, il metodo si estende senz'altro al caso in cui il genere p del fascio di coniche C, valga $p = 2$.

Infatti si ha il seguente lemma: *ogni curva di genere* 3 *rappresentata sopra una curva doppia di genere due, è iperellittica*; e perciò « se due curve λ e σ di genere $2p - 1 = 3$ sono rappresentate doppiamente sull'ente γ di genere $p = 2$, alla g_2^1 di γ corrisponde tanto su λ come su σ una g_2^1 (coniugata di se stessa) ».

Resta da giustificare il lemma precedente.

A tal fine (procedendo per assurdo) si dimostrerà che una curva di genere 3 non iperellittica non può essere riferibile ad una curva doppia di genere due, ossia non può contenere una involuzione di coppie di punti senza coincidenze. Per ciò basta considerare la quartica piana senza punti doppi (curva canonica di genere 3, non iperellittica), ed osservare come una involuzione sopra di essa viene subordinata da un'omologia piana armonica, di cui l'asse incontra la quartica in qualche punto unito.

XXIV.

SOPRA LE SUPERFICIE CHE POSSEGGONO UN FASCIO DI CURVE RAZIONALI

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. VII (2° sem., 1898),

pp. 344-347 (*).

1. – In questa Nota mi propongo di stabilire in tutta la sua generalità il teorema:

Una superficie algebrica possedente un fascio di curve razionali si può trasformare birazionalmente in una rigata, avente il genere p del fascio.

Questo teorema è stato dimostrato per $p = 0$ dal sig. NOETHER [1], e per $p = 1, 2$ in una mia Nota precedente.

Appunto il metodo che ivi ho adoperato, viene qui opportunamente esteso. La dimostrazione procede in modo conciso, come è consentito dai limiti imposti al presente scritto.

2. – Una superficie possedente un fascio di curve razionali può sempre trasformarsi (col sig. NOETHER) in una superficie possedente un fascio di coniche.

Sia F una superficie possedente un fascio di genere p (> 1) di coniche C. Come è indicato nella nostra Nota citata, possiamo ottenere sopra F, o una curva bisecante le C spezzata in due unisecanti, oppure due curve irriducibili λ e σ bisecanti armoniche delle C, aventi il genere minimo $2p - 1$. La prima ipotesi conduce subito (col sig. NOETHER) a rappresentare la F sopra una rigata. Esaminiamo dunque la seconda ipotesi.

Le due curve λ e σ sono riferite doppiamente ad un ente algebrico $\infty' \gamma$, di genere p, che è il fascio delle C o una curva i cui punti corrispondono biunivocamente agli elementi (C) del fascio. Poniamo ora che

---

(*) Nota presentata dal Socio L. CREMONA nella seduta del 18 dicembre 1898.

(1) *Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen,* « Mathem. Annalen », Bd. 3.

si possa costruire su γ una serie lineare g_n^1 cui corrisponda, tanto su λ come su σ, una g_n^1 (coniugata di sè stessa). La possibilità di questa costruzione verrà stabilita in seguito.

Aggruppiamo le curve C ad n ad n, secondo i gruppi della g_n^1; otteniamo così sopra F un fascio lineare di curve composte $C_1+C_2+...+C_n$. Tra i gruppi di C che abbiamo costruito consideriamone uno generico C_1, C_2, ..., C_n.

A questo gruppo (che è un gruppo della g_n^1 fissata su γ), corrispondono su λ due gruppi G_n, G'_n di una stessa g_n^1 ben determinata, i quali, presi insieme, costituiscono le $2n$ intersezioni di λ con $C_1+C_2+...+C_n$; precisamente G_n contiene un punto di C_1, un punto di C_2, ecc., mentre G'_n contiene le intersezioni residue.

In questo modo a due punti di C_1, intersezioni di λ, si possono far corrispondere ordinatamente, in un modo razionalmente determinato, due punti di C_2, due punti di C_3, ecc. Similmente ai due punti di C_1 intersezioni di σ si possono associare in modo razionalmente determinato i due punti di C_2, di C_3, ecc., intersezioni della stessa σ. Ora sopra ciascuna C le coppie segate da λ e da σ si separano armonicamente; quindi si viene a stabilire un riferimento razionalmente determinato di un gruppo armonico di C_1 ad un gruppo armonico di C_2, ecc. Le C_1 C_2 ... C_n risultano così riferite proiettivamente l'una all'altra. Ad un punto P_1 di C_1 corrisponde un punto P_2 di C_2 ..., un punto P_n di C_n.

I gruppi di punti analoghi a P_1, P_2 ... P_n formano sopra F una involuzione I_n. Riferiamo i gruppi di I_n ai punti d'una nuova superficie F'. Sopra F' si avrà un fascio *lineare* di curve razionali C', corrispondenti ciascuna ad n curve C: C_1, C_2 ... C_n. Si può costruire (col sig. NOETHER) una curva unisecante le C' su F'; a questa curva corrisponde su F una curva unisecante le C, la quale permette di riferire la F ad una rigata.

3. – Resta pertanto da stabilire il lemma di cui abbiamo fatto uso:

Se due curve λ e σ di genere $P = 2p - 1$ sono riferite ad una stessa curva doppia γ di genere $p > 1$ (senza punti di diramazione) [2], si può costruire su γ una g_n^1 cui corrisponda tanto su λ come su σ una g_n^1 (trasformata in se stessa dall'involuzione γ' di cui le coppie corrispondono ai punti di γ).

Anzitutto si noti che n deve esser pari, cioè $n = 2m$, perchè su λ (o su σ) una g_n^1 trasformata in se stessa dall'involuzione γ' deve possedere due gruppi uniti, costituiti ciascuno da $n/2$ coppie di γ'.

(²) È noto che esistono $2^{2p}-1$ curve di genere P, birazionalmente distinte, riferibili ad una stessa curva di genere p, senza punti di diramazione. Cfr. HURWITZ, *Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspuncten*, «Math. Annalen», Bd. 39.

Ora il problema proposto sembra ammettere soluzioni per $m \geqslant p-1$ come si desume da un opportuno conto di costanti. Ma volendo togliere ogni dubbio resultante dall'uso di procedimenti enumerativi forse non pienamente rigorosi, risolveremo il problema proposto per $m = P$.

Prendasi su γ un arbitrario gruppo G_P di $P = 2p-1$ punti; esso appartiene ad una serie completa non speciale g_{2p-1}^{p-1} che indicheremo con s.

A questa serie corrisponde su λ (e ugualmente su σ) una serie g_{4p-2}^{p-1} composta mediante la involuzione γ' di cui le coppie corrispondono ai punti di γ; la g_{4p-2}^{p-1} appartiene ad una serie completa (non speciale) g_{4p-2}^{2p-1}. Ora mediante la serie g_{4p-2}^{2p-1} si trasformi la curva λ in una curva d'ordine $4p-2$ di un S_{2p-1}; questa verrà trasformata in se stessa da un'involuzione proiettiva che ha uno spazio di punti uniti S_{p-1}, base pel sistema ∞^{p-1} degli iperpiani che segano su λ la g_{4p-2}^{p-1} sopra nominata; l'involuzione stessa ammetterà dunque un altro S_{p-1} di punti uniti, il quale sarà pure base per un sistema ∞^{p-1} di iperpiani seganti su λ un'altra serie g_{4p-2}^{p-1} composta colle coppie dell'involuzione γ'.

Cerchiamo che cosa corrisponde su γ alle serie considerate su λ. Otterremo come corrispondente alla g_{4p-2}^{2p-1} una serie non lineare contenuta nella serie completa g_{4p-2}^{3p-2} doppia della $g_{2p-1}^{p-1} \equiv s$; entro questa serie non lineare, e per conseguenza entro la g_{4p-2}^{3p-2}, si avrà, oltre la nominata $g_{2p-1}^{p-1} \equiv s$ contata due volte, un'altra g_{2p-1}^{p-1} (che designeremo con s') pure contata due volte, in corrispondenza alla seconda g_{4p-2}^{p-1} composta colle coppie di γ' che abbiamo costruito su λ.

Le due g_{2p-1}^{p-1} ottenute su γ, s ed s', non hanno gruppi comuni; un gruppo qualunque G della prima, ed un gruppo G' della seconda, non sono equivalenti, ma contati due volte appartengono ad una g_{4p-2}^{1} cui corrisponde sopra λ una g_{4p-2}^{1} trasformata in se stessa dall'involuzione γ'.

Ripetendo gli stessi ragionamenti in relazione alla curva σ, otterremo ancora su γ un'altra serie g_{2p-2}^{p-1} che designeremo con s'', non avente gruppi comuni con s, tale che un qualsiasi gruppo G di s ed un gruppo G'' di s'', contati due volte, appartengono ad una g_{4p-2}^{1} cui corrisponde sopra σ una g_{4p-2}^{1} trasformata in se stessa dall'involuzione γ'; la serie s'' come s' appartiene, contata due volte, alla serie completa g_{4p-2}^{3p-2} doppia della s.

Ora le serie complete s' ed s'' non hanno alcun gruppo comune, oppure coincidono; nel secondo caso una qualsiasi g_{4p-2}^{1} determinata da un gruppo di s e da un gruppo di s', contati due volte, dà ugualmente una g_{4p-1}^{1} tanto su λ che su σ, e quindi risolve il problema proposto. Ma in questo caso è anche facile vedere che λ e σ sono birazionalmente identiche.

Supponendo λ e σ birazionalmente distinte, avremo dunque su γ tre serie g_{2p-1}^{p-1}: s, s', s'', senza gruppi comuni, le quali, contate due volte, appartengono ad una stessa g_{4p-2}^{3p-2}, la risoluzione del problema proposto dipende dalla costruzione di una g_{4p-2}^{1} contenente tre gruppi di $2p-1$

punti, ciascuno contato due volte, contenuti risp. entro le serie s, s', s''. Tale costruzione si effettua in un numero finito di modi. Infatti si trasformi γ in una curva γ_1 d'ordine $4p-2$ di S_{3p-2}, mediante la nominata serie g_{4p-2}^{3p-2}; i gruppi della serie s verranno dati su γ_1 da iperpiani tangenti in $2p-1$ punti, formanti una certa serie s_1, ∞^{p-1}. Analogamente si avranno altre due serie ∞^{p-1} di iperpiani: s_1', s_1'', in corrispondenza alle serie s', s'' di γ; e le tre serie di iperpiani s_1, s_1', s_1'' non avranno, a due a due, alcun iperpiano comune. Ora uno spazio S_{3p-4} che sia comune a tre iperpiani appartenenti risp. alle serie s_1, s_1', s_1'' è base di un fascio d'iperpiani secante sopra γ_1 una g_{4p-2}^1 che contiene tre gruppi di $2p-1$ punti, ciascuno contato due volte, risp. contenuti in s, s', s''. Di tali S_{3p-4} ve n'è un numero finito che è il prodotto delle classi delle tre serie d'iperpiani considerate. Ciò si vede più chiaramente eseguendo una trasformazione per dualità. Infatti si hanno allora da determinare le rette dello S_{3p-4} che incontrano tre varietà V_{p-1}, di dimensione $p-1$, senza punti comuni; tali rette si ottengono segando una delle V_{p-1} colla varietà V_{2p-3} delle rette congiungenti i punti delle altre due.

Pertanto resta risoluto il problema proposto.

INDICE

Prefazione . . . . pag. VII

Federigo Enriques. Commemorazione di Guido Castelnuovo . . . » IX

I. Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane nel piano. « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. II (1º sem., 1893), pp. 468-473 » 1

II. Sopra un gruppo continuo di trasformazioni di Jonquières nel piano. « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. II (1º sem., 1893), pp. 532-538 . . . . » 9

III. Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica. « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. II (1º sem., 1893), pp. 3-8 . . . . » 17

IV. Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche. « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. II (2º sem., 1893), pp. 281-287 . . . . » 23

V. Ricerche di geometria sulle superficie algebriche. « Memorie Acc. Torino », s. 2ª, to. XLIV (1893), pp. 171-232 . . . . » 31

VI. Sulla massima dimensione dei sistemi lineari di curve di dato genere appartenenti ad una superficie algebrica. « Atti Acc. Torino », vol. XXIX (1893-1894), pp. 275-296 . . . . . . » 107

VII. Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche.
Nota I, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. III (1º sem., 1894), pp. 481-487 . . . . » 125
Nota II, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. III (1º sem., 1894), pp. 536-543 . . . . » 132

VIII. Sui fondamenti della Geometria projettiva. « Rend. Ist. Lomb. di sc., lett. ed arti », s. 2ª, vol. XXVII (1894), pp. 550-567 » 141

IX. Sulle irrazionalità da cui può dipendere la risoluzione di un'equazione algebrica $f(xyz)=0$ mediante funzioni razionali di due parametri. « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. IV (2º sem., 1895), pp. 311-316 . . . . pag. 163

X. Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche. « Math. Ann. », Bd. XLVI (1895), pp. 179-199 » 171

XI. Sur les surfaces algébriques admettant un groupe continu de transformations birationnelles en elles-mêmes. Par GUIDO CASTELNUOVO et FEDERIGO ENRIQUES. « Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », to. CXXI (1895), pp. 242-244 » 193

XII. Sopra le equazioni differenziali lineari del 4º ordine che divengono integrabili quando è noto un loro integrale particolare. « Rend. Ist. Lomb. di sc., lett. ed arti », s. 2ª, vol. XXIX (1896), pp. 257-269 . . . . » 197

XIII. Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche. « Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta "dei XL,,) », s. 3ª, to. X (1896), pp. 1-81 211

XIV. Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche. » Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. V (1º sem., 1896), pp. 191-197 . . . . » 313

XV. Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche. « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », to. X (1896), pp. 30-35 . . . . » 321

XVI. Sui piani doppi di genere uno. « Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta "dei XL,,) », s. 3ª, to. X (1896), pp. 201-222 . . . . » 327

XVII. Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques. Par GUIDO CASTELNUOVO et FEDERIGO ENRIQUES. « Math. Ann. », Bd. XLVIII (1896), pp. 241-316 . . . . . » 355

XVIII. Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un'equazione algebrica $f(xyz)=0$ con funzioni razionali di due parametri. « Math. Ann. », Bd. IL (1897), pp. 1-23 . . » 435

XIX. Le superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)}=2$. « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. VI (1º sem., 1897), pp. 139-144 . . . . » 461

XX. Sulle superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)}=3$. « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. VI (1º sem., 1897), pp. 169-174 . . » 469

XXI. Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio, di FEDERIGO ENRIQUES e GINO FANO. « Annali di Matematica pura ed applicata », s. 2ª, to. XXVI (1897), pp. 59-99 » 475

XXII. Sui piani doppi di genere lineare $p^{(1)}=1$.
Nota I, « Rend. Acc. Lincei », s. 5a, vol. VII (1o sem., 1898), pp. 234-240 . . . . pag. 513
Nota II, « Rend. Acc. Lincei », s. 5a, vol. VII (1o sem., 1898), pp. 253-257 . . . . » 520

XXIII. Sopra le superficie che posseggono un fascio ellittico o di genere due di curve razionali. « Rend. Acc. Lincei », s. 5a, vol. VII (2o sem., 1898), pp. 281-286 . . . . » 527

XXIV. Sopra le superficie che posseggono un fascio di curve razionali. « Rend. Acc. Lincei », s. 5a, vol. VII (2o sem., 1898), pp. 344-347 . . . . » 533