Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO

Memorie scelte di geometria, Vol. II: 1898-1910

Zanichelli, Bologna, 1959. (pubblicate a cura dell'Accademia Nazionale dei Lincei)

EDIZIONE NAZIONALE OPERE DI
FEDERIGO ENRIQUES

L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

FEDERIGO ENRIQUES

MEMORIE SCELTE DI GEOMETRIA

PUBBLICATE A CURA

DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Volume secondo

1899 - 1910

SCUOLA NORMA UPERIORE BIBLIOTECA PISA

NICOLA ZANICHELLI EDITORE

BOLOGNA 1959

XXV.

SUR LES PROBLÈMES QUI SE RAPPORTENT À LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES RENFERMANT PLUSIEURS INCONNUES (1)

« Math. Ann. », Bd. LI (1899),

pp. 134-153.

1. – Les problèmes dont il s'agit dans ce Mémoire se rapportent à la *résolution* des équations algébriques. Il n'y a donc pas ici de questions nouvelles; rien de plus ancien, rien de plus conforme au but pratique dont l'Algèbre elle-même tire son origine. Et pourtant lorsqu'on parle de *résoudre* une équation, on pense d'ordinaire au cas *déterminé* où celle-ci ne renferme qu'une seule inconnue; le cas *indéterminé*, où elle en renfermerait plusieurs, on ne l'envisage pas, le plus souvent, en toute son étendue, ou bien on l'envisage à des points de vue différents qui déguisent la vraie nature du problème.

Cela tient peut être à une double origine des théories qui nous occupent, en tant qu'elles se rapportent aux deux cas.

D'un côté les problèmes classiques de résolution posés par les anciens algébristes amènent à la théorie *algébrique* de GALOIS. Mais de l'autre côté ce sont surtout des recherches *analytiques*, d'ABEL, de JACOBI, de RIEMANN, etc., qui donnent naissance aux études sur les équations entre plusieurs variables; ici le point de vue algébrique est plus récent; encore il ne se rattache pas d'une manière immédiate à celui qui domine les découvertes de GALOIS.

Nous nous proposons d'envisager les équations renfermant plusieurs inconnues suivant le même esprit que l'on attache au cas déterminé, c'est-à-dire suivant l'esprit de la résolution. Des problèmes se présen-

---

(1) Cet article reproduit les matières traitées dans la conférence tenue par M. ENRIQUES au Congrès international des Mathématiciens à Zürich (août 1897) [cfr. « Verhandlungen des ersten internat. Math.-Kongresses in Zürich » (9-11 Aug. 1897), Leipzig, Teubner, 1898, pp. 145-146].

tent ainsi qui ne sont pas tout-à-fait nouveaux, mais qui revêtent pourtant une forme nouvelle. Entre ces problèmes il y en a de ceux dont l'énoncé est bien simple; quelques-uns même qu'on ne douterait de placer à côté de la question classique se rapportant à l'équation du cinquième degré.

Malheureusement la plupart de ces problèmes demeurent aujourd'hui sans réponse, et les contributions qu'on a portées dans ce champ de recherches ressemblent en vérité à de rares flambeaux au milieu d'une obscurité épaisse. Elles montrent les difficultés plutôt qu'elles ne nous aident à les vaincre!

C'est même à cause de cela que le sujet ne nous paraît pas indigne de tous les efforts.

2. – Il faut rappeler, en commençant, les conceptions fondamentales de GALOIS se rapportant aux équations $f(x) = 0$ qui renferment une seule inconnue. Peu de mots suffiront.

Chaque équation $f(x) = 0$ définit en général une *irrationalité* particulière; celle-ci dépend entièrement d'un certain groupe de substitutions qui lui appartient. C'est ce groupe qui joue le rôle fondamental dans notre théorie. Il opère en échangeant entre elles les racines de l'équation $f = 0$, dont le nombre montre ce que j'appelle le *degré* de l'irrationalité; il donne, par sa composition, la vraie nature de celle-ci.

Mais au sujet du mot « irrationalité » quelques remarques semblent utiles. En effet l'on peut prendre ce mot dans deux sens différents:

1) ou bien dans une acception *arithmétique*, lorsque l'on a en vue les *valeurs* des racines de l'équation donnée $f(x) = 0$;

2) ou bien dans une acception plus proprement *algébrique*, lorsque l'on se rapporte aux *opérations* (définies seulement d'une manière théorique) dont dépend le calcul de ces racines.

Il faut encore ajouter, pour éviter toute indétermination, que les opérations nommées sont à effectuer sur des quantités que l'on suppose *connues* d'avance. Ainsi, tout d'abord, sur les coefficients de f. Ensuite sur les quantités que l'on peut en tirer par des opérations rationnelles, qui engendrent le *domaine de rationalité* (KRONECKER) de ces coefficients. Enfin sur d'autres quantités, fournies par le procédé même de la résolution de $f(x) = 0$, qui viennent *adjointes*, l'une après l'autre, au domaine de rationalité primitif, et entrainent par leur adjonction un élargissement de celui-ci jusqu'à comprendre toutes les racines dont on demandait la valeur.

Que l'on envisage maintenant l'irrationalité de l'équation $f(x) = 0$, dans la dernière acception du mot, c'est-à-dire comme une opération; on en tirera une généralisation des notions de GALOIS, qui est d'ailleurs

fort connue. Il suffit de penser que les coefficients de f au lieu de rester fixes, peuvent varier en dépendant, supposons d'une manière rationnelle, de certains paramètres $u_1 \dots u_r$, que l'on laissera tout-à-fait arbitraires. L'opération irrationnelle qui consiste à résoudre l'équation $f(x) = 0$, permettra alors d'établir un lien fonctionnel entre ces paramètres et x; nous aurons défini par suite la *fonction algébrique* $x(u_1 \dots u_r)$.

Pourtant la vraie nature de celle-ci résultera souvent plus simple, que ne le montrerait l'opération par laquelle elle est engendrée. En effet, en résolvant la $f(x, u_1 \dots u_r) = 0$, il arrivera de rencontrer des opérations, à effectuer sur les coefficients de f, qui demeureront toujours les mêmes pour les différentes valeurs des paramètres, et qui, par suite, ne compliqueront pas la nature de la fonction algébrique $x(u_1 \dots u_r)$. On pourra toujours considérer ces opérations (*arithmétiques*) comme effectuées d'avance, en ajoutant de convenables *irrationnelles numériques* au domaine de rationalité engendré par les coefficients de f. Par cette adjonction le groupe algébrique de $f = 0$ (au sens de GALOIS) se trouve réduit au *groupe de monodromie* de la fonction $x(u_1 \dots u_r)$, c'est-à-dire au groupe des permutations engendrées sur les branches de x par les tours fermés effectués dans la variété $(u_1 \dots u_r)$.

C'est donc précisement ce groupe de monodromie qui définit la nature de *l'irrationalité* en question, en tant qu'elle est envisagée comme une opération proprement *algébrique* à effectuer sur les paramètres.

3. – Que l'on ait maintenant à résoudre une équation algébrique $f(x_1 \dots x_n) = 0$ renfermant plusieurs (à savoir n) inconnues.

Une première méthode se présente. On peut envisager x_1, $x_2 \dots x_{n-1}$ comme des paramètres, et calculer ensuite la valeur de x_n capable de satisfaire à l'équation; le calcul dépend alors d'une opération irrationnelle bien déterminée. Mais il est aisé de se convaincre que l'irrationalité introduite par cette méthode n'est pas, en général, la plus simple qui suffit à notre but. Ainsi p. e. s'il faut résoudre une équation générale du deuxième ou du troisième degré, le procédé indiqué nous amène à une irrationalité quadratique ou respect. cubique, tandis qu'en choisissant de nouveaux paramètres il sera toujours possible d'exprimer $x_1, x_2, \dots, x_n$ par des fonctions rationnelles de ceux-ci (supposé $n > 2$ dans le dernier cas).

On voit donc clairement quelle est la nature du problème qui se présente ici.

Il s'agit pour chaque équation proposée $f(x_1 \dots x_n) = 0$ de chercher la résolution *la plus simple* que l'on obtiendra en exprimant les inconnues par des paramètres choisis d'une manière convenable. « Le choix des paramètres » voilà la question.

4. – Mais il importe de fixer tout d'abord les limites de la question elle-même. La *simplicité* dont on parle, qui est d'ailleurs tout-à-fait relative, est conçue dans une acception purement *algébrique*. Par suite on ne saurait faire rentrer dans notre champ de recherches, quelques problèmes qui poursuivent un but parallèle, au point de vue *analytique*; ainsi p. e. la résolution d'une équation renfermant deux inconnues par des fonctions *holomorphes* (elliptiques ou automorphes) d'un paramètre (CLEBSCH, POINCARÉ), ou bien encore les intéressants essais de MM. PICARD et PAINLEVÉ concernant la résolution de certaines équations remarquables avec trois inconnues.

Or il est aisé de se convaincre que l'on pourra toujours envisager le problème qui nous occupe, sous la forme suivante:

Soit une équation donnée

$$f(x_1\, x_2 \ldots x_n) = 0\,,$$

renfermant n inconnues.

On demande s'il est possible de la résoudre, en posant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fonctions rationnelles de $n-1$ paramètres $u_1, \ldots, u_{n-1}$ et d'une *fonction algébrique connue* de ceux-ci

$$X(u_1 \ldots u_{n-1})\,.$$

En d'autres termes, on demande de calculer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en opérant sur $n-1$ paramètres, à l'aide de telle ou telle autre opération irrationnelle algébrique dont on connait le degré, ou bien encore le groupe, etc.

Dans le cas le plus simple on obtiendra la résolution proposée par des fonctions rationnelles, c'est-à-dire sans effectuer aucune opération irrationnelle. Lorsque cela n'est pas possible il faudra essayer si l'on y parvient à l'aide d'une racine carrée, etc.

5. – On peut généraliser le problème de la résolution d'*une* équation, en posant la question analogue qui se rapporte à des *systèmes de plusieurs équations*. Toutefois il ne s'agit pas d'une généralisation effective, car (d'après KRONECKER) on pourra toujours remplacer le système donné par une ou plusieurs équations, moyennant un procédé d'élimination de quelques inconnues, et il suffira en suite, de résoudre chacune des équations qui seront obtenues de la sorte.

La considération de tels systèmes pourrait donc être laissée tout-à-fait de côté, s'il n'arrivait parfois de remplacer avec avantage une équation unique donnée par un système équivalent composé de plusieurs équations.

Revenons au cas d'une équation unique.

6. – Nous avons déjà remarqué que chaque résolution particulière d'une équation donnée, dépend du choix des paramètres que l'on introduit. Or, puisqu'on se rapporte à des résolution algébriques, les paramètres seront à leur tour des fonctions algébriques des inconnues. Deux cas pourront se présenter:

1) ou bien ces fonctions algébriques seront aussi *rationnelles*,

2) ou bien elles seront *irrationnelles*.

Il s'agit d'une distinction très importante, car, suivant qu'il arrive le premier cas ou le deuxième, chaque système de solutions correspond à *un seul* système de valeurs des paramètres, ou à *plusieurs*. Or, c'est là un défaut serieux en beaucoup de questions, lorsque la dernière circonstance se présente, on ne saurait tout de suite comparer deux solutions données et reconnaître si elles sont vraiment deux solutions différentes.

Nous appelerons *simple* toute résolution d'une équation lorsque les paramètres introduits seront des fonctions rationnelles des inconnues; puisque, en ce cas, en faisant varier les paramètres on trouvera *une seule fois* chaque système de solutions.

Maintenant un problème se présente:

Étant donnée une équation et une résolution de celle-ci qui ne soit pas simple, obtenue à l'aide d'irrationalités connues, on demande, s'il est possible, de résoudre l'équation d'une manière simple par des irrationalités de la même nature.

À cet énoncé général se rattachent quelques résultats particuliers très intéressants.

Soit l'équation avec deux inconnues $f(xy) = 0$. *Si on peut la résoudre par des fonctions rationnelles* (d'un paramètre), *on pourra toujours en tirer une résolution simple, obtenue de même par des fonctions rationnelles.* C'est le théorème bien connu de M. LÜROTH [2].

Il a été récemment étendu par M. CASTELNUOVO [3] au cas des équations $f(xyz) = 0$ qui renferment trois inconnues:

Si la $f(xyz) = 0$ *peut se résoudre d'une manière rationnelle, on peut aussi choisir les paramètres de telle façon qu'ils résultent à leur tour des fonctions rationnelles des inconnues* (de sorte que les formules de la résolution seront invertibles).

La même propriété subsistera-t-elle aussi pour la résolution rationnelle d'une équation renfermant un nombre d'inconnues quelconque (> 3)? Cette question très délicate demeure en suspens.

---

[2] *Beweis eines Satzes über rationale Curven*, ces « Annalen », Bd. 9.

[3] *Sulla razionalità delle involuzioni piane*, ces « Annalen », Bd. 44 (1893).

Revenons au cas d'une équation $f(xy) = 0$.

Que l'on possède une résolution de celle-ci par une racine carrée; à savoir que l'on ait

$$x = \varphi(t, \sqrt{\chi(t)}), \qquad y = \psi(t, \sqrt{\chi(t)})$$

où φ, ψ, χ sont des fonctions rationnelles, et supposons que la résolution dont il s'agit ne soit pas simple. Cela revient à dire qu'à chaque couple $x\,y$ satisfaisant à la $f = 0$ correspondent plusieurs valeurs de t; mais il pourra arriver que l'on trouve une fonction rationnelle $\tau(xy)$ qui dépende aussi de t d'une manière rationnelle; alors on sera tout de suite ramené à une résolution simple de la $f = 0$ par la substitution

$$\tau = \tau(t).$$

Eh bien, *en dehors de ce cas tout-à-fait clair, l'équation* $f(x\,y) = 0$ *pourra se résoudre, d'une manière simple, sans aucune irrationalité,* c'est-à-dire par des fonctions rationnelles invertibles d'un nouveau paramètre.

C'est là un théorème de M. PAINLEVÉ [4] bien qu'il l'énonce vraiment d'une manière un peu différente.

J'ai cherché de l'étendre en envisageant des irrationalités plus élevées, et je suis parvenu à la proposition générale suivante [5].

S'il est possible de résoudre une équation donnée $f(xy) = 0$ *par une irrationalité de degré n, et si la résolution dont on parle n'est pas simple, ou bien on obtiendra une nouvelle résolution simple (elle aussi de degré n) en effectuant une substitution rationnelle sur le paramètre, ou bien il sera possible de résoudre l'équation d'une manière simple par une irrationalité de degré moindre que n.* Par conséquent *lorsqu'on veut une résolution de l'équation* $f(xy) = 0$ *par une irrationalité qui ait le plus petit degré possible, il suffit d'envisager des résolutions* (simples) *où le paramètre est une fonction rationnelle de* $x\,y$.

La proposition se trouve établie par un procédé géomètrique s'appuyant sur une remarque de M. SEGRE. Il y a lieu de se poser des questions analogues se rapportant au cas de trois inconnues. Mais la proposition même de M. PAINLEVÉ, ne saurait s'étendre à ce cas. En effet on peut demontrer (v. n. 14) que l'équation $f(xyz) = 0$ du quatrième degré se résout par une seule racine carrée portant sur une fonction rationnelle

---

(4) *Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre,* ch. II, « Annales de l'École Normale », 1891.

(5) *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche,* « Rendic. Circolo Matematico di Palermo », 1896 [queste *Memorie,* vol. I, XV].

de deux paramètres; mais ceux-ci, de quelque façon qu'on les choisisse, ne seront jamais des fonctions rationnelles de x, y, z, le polynome f demeurant le plus général de son degré.

7. – Au problème de la résolution des équations algébriques se rattache par des liens très étroits celui de la *transformation*. On peut en dire davantage. Puisque toute résolution n'est en dernière analyse qu'une transformation, les deux problèmes sont au fond le même problème. Mais comme ils répondent à un esprit de recherche un peu différent, ils amènent aussi à des questions différentes. Qu'il nous soit permis, pourtant, de marquer les limites de la théorie de la transformation en tant qu'elle est envisagée comme préalable à la théorie de la résolution, et de revendiquer à celle-ci maintes questions que l'on envisage d'ordinaire au point de vue de celle-là.

On dit qu'une équation

$$\varphi(y_1 y_2 \dots y_n) = 0$$

est une transformée rationnelle de l'équation

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = 0$$

lorsqu'on passe de celle-ci à celle-là à l'aide d'une substitution rationnelle

$$x_i = x_i(y_1 y_2 \dots y_n) . \tag{1}$$

Si $\varphi = 0$ est résolue d'une certaine manière, on obtient des formules (1) une résolution de $f = 0$ par les mêmes irrationalités.

Il arrive en général que les formules (1) soient reversibles; on dit alors que chacune des deux équations $f = 0$, $\varphi = 0$ est la transformée birationnelle de l'autre.

Les deux équations présentent en ce cas exactement la même difficulté de résolution.

D'après cette remarque il convient à notre but de ranger les équations en *classes* en posant (d'après RIEMANN) dans une même classe deux équations dont l'une est la transformée birationnelle de l'autre. Une classe est représentée par une équation *type* que l'on peut choisir dans celle-ci d'une manière arbitraire.

Assigner un critérium pour reconnaître si on peut passer par une transformation birationnelle d'une équation à une autre donnée; en

d'autres termes juger si deux équations données appartiennent ou non à la même classe, voilà le but de la théorie de la transformation.

Elle amène ainsi à envisager des *caractères* (nombres entiers) et des *modules* (variables d'une manière continue) appartenant à chaque classe; ce sont là des *invariants* d'une équation vis-à-vis des transformations birationnelles.

Pour ce qui concerne les équations entre deux variables, la théorie a atteint son but. En effet ces équations, rangées d'après leur genre, peuvent se transformer en certaines équations types ayant un nombre déterminé de modules que l'on sait assigner.

Malheureusement il n'en est plus ainsi lorsqu'on passe aux équations renfermant un plus grand nombre d'inconnues.

Rapportons-nous au cas des équations $f(xyz) = 0$. On rencontre ici, tout d'abord, deux caractères essentiels; ce sont le premier genre p et le second genre $p^{(1)}$, envisagés par M. NOETHER ([6]). Le premier pourtant se dédouble, suivant qu'on le prend dans une acception arithmétique ou algébrique (géométrique); ainsi il donne lieu à deux caractères p_n et p_g qui peuvent bien différer entre eux, et qui demeurent toujours des invariants de l'équation proposée.

Aux caractères nommés il convient d'ajouter le double genre P_2, le triple genre P_3 ...; une série de caractères, dont nous avons établi l'invariance vis-à-vis des transformations birationnelles ([7]), et dont le profit est demontré par de récentes recherches ([8]).

Sans nous arrêter, avec quelques détails, sur ce sujet, il nous suffira de rappeler que les caractères susnommés p_n, p_g, $p^{(1)}$, P_2, ... résultent à présent définis en tous cas. Pourtant il n'est pas assez de ces caractères pour atteindre la classification demandée, car on rencontre (en correspondance des premières valeurs au moins) plusieurs familles irréductibles d'équations ayant les mêmes genres p_n, p_g, $p^{(1)}$, P_2, P_3, ..., chaque famille donnant lieu à une infinité de classes définies par un certain nombre de modules. Voilà pourquoi nous affirmions tout à l'heure que la théorie de la transformation, en ce qui concerne les équations avec trois inconnues, n'est pas achevée. Et on est même plus éloigné du but lorsque l'on a à faire avec un plus grand nombre d'inconnues.

Remarque. – Nous avons parlé jusqu'ici de transformations birationnelles. Les transformations *simplement rationnelles* (qui ne sont pas reversibles) semblent appelées aussi à jouer un rôle, en apparence même

---

([6]) *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens...*, I, II, ces « Annalen », Bd. 2, 8.

([7]) ENRIQUES, *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche*, « Memorie della Società italiana delle Scienze (dei XL) », 1896 [queste *Memorie*, vol. I, XIII].

([8]) CASTELNUOVO et ENRIQUES, *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques*, voir ces « Annalen », Bd. 48 [queste *Memorie*, vol. I, XVII].

plus important, dans notre théorie. En effet, il suffit que l'on puisse envisager l'équation $\varphi(y_1\ y_2\ \dots\ y_n) = 0$ comme une transformée simplement rationnelle de $f(x_1\ x_2\ \dots\ x_n) = 0$, pour que le problème qui consiste à résoudre $\varphi = 0$, se trouve abaissé par la résolution de $f = 0$; le cas pourtant excepté où la dernière résolution (qui est toujours plus aisée de la première) s'obtiendrait elle même d'une manière rationnelle.

Malheureusement c'est toujours cette circonstance désavantageuse qui se présente à l'égard de $f = 0$, l'équation $\varphi = 0$ étant donnée d'une façon générale. De sorte que la théorie de la résolution des équations ne saurait tirer aucune aide des transformations simplement rationnelles, sauf en de cas tout-à-fait particuliers.

Ces cas pourtant sont bien dignes de remarque, et M. PAINLEVÉ (9) leurs a consacré de belles recherches concernant les équations entre deux variables.

9. – Nous allons examiner maintenant avec quelques détails les questions de résolution qui se rapportent aux équations

$$f(x\ y) = 0$$

renfermant deux inconnues.

Nous pouvons poser le problème général suivant:

I) Déterminer les différentes résolutions d'une équation donnée

$$f(x\ y) = 0\ .$$

Pour nous borner aux résolutions simples, formons d'une manière générale une fonction rationnelle

$$t = t(x\ y)\ .$$

Elle donne lieu à une irrationalité $x(t)$ (ou $y(t)$) tout-à-fait définie, par laquelle on obtient une certaine résolution de

$$f(x\ y) = 0\ .$$

Or les caractères de cette irrationalité dépendront, en partie de la nature de f, en partie du choix de la fonction $t(xy)$. Le degré, par exemple, dépendra surtout du choix de t, et pourra même recevoir toutes les valeurs au dessus de certaines limites (pourvu que l'on forme $t(xy)$ d'une

(9) Voir le ch. II du Mémoire cité sur les équations différentielles.

façon convenable); mais au dessous de ces limites quelques valeurs seulement seront possibles (en particulier une valeur minimum) en correspondance de la nature de f; ce seront précisement celles-ci qu'il importera d'assigner. Le problème qui se présente ainsi n'est pas complètement résolu; la réponse se borne aujourd'hui à quelques cas généraux.

On sait p. e. que l'équation la plus générale du degré n se résout par une irrationalité du degré $n-1$, et qu'on ne pourrait déscendre au dessous de cette valeur.

On sait de même que le moindre degré de l'irrationalité dont dépend la résolution d'une équation tout-à-fait générale du genre p, est (d'après RIEMANN) la moitié de p ou de $p+1$, augmentée d'une unité.

Mais enfin, au-delà de certaines limites, il ne faut plus faire attention au degré comme au caractère le plus important d'une irrationalité; c'est plutôt à son groupe qu'il convient de se rapporter. Alors d'autres questions extrêmement intéressantes prennent naissance.

Suivant nos remarques, le groupe de l'irrationalité $x(t)$ dépend du choix de t, et de la nature de f. Il s'agit de délimiter l'influence respective de ces deux éléments. Arrivera-t-il que certaines particularités de f entraînent des particularités communes à tous les groupes en question, de quelque manière que l'on choisisse $t(xy)$?

C'est par la négative qu'il faut répondre à ce doute, car il s'ensuit d'un théorème de M. KNESER [10] que « le groupe de $x(t)$ demeurera toujours le groupe total, et par suite l'irrationalitè $x(t)$ n'aura aucune particularité, lorsque $t(xy)$ est choisi d'une façon générale, bien que f soit douée de particularités quelconques ».

C'est donc seulement par un choix convenable de $t(xy)$ que l'on donnera lieu à des irrationalités $x(t)$ dignes de remarques. Mais on ne saurait particulariser de la sorte le groupe de $x(t)$, au-de-là de certaines limites, sans entraîner des particularités de la f elle-même. Ainsi, par exemple, que l'on cherche à résoudre l'équation $f(xy) = 0$ par une irrationalité *imprimitive*. Il suffit vraiment de former $t(xy)$ en posant

$$t = \varphi(\tau) \qquad (\tau = \tau(xy)),$$

où φ désigne une fonction rationnelle et τ est elle-même une fonction rationnelle de x, y; mais en ce cas l'irrationalité $x(t)$ qui intervient dans la résolution de $f = 0$ peut être remplacée tout simplement par la $x(\tau)$. Mais si l'on repousse de pareilles irrationalités en quelque sorte réductibles, on ne saurait choisir toujours $t(xy)$ de façon à engendrer une résolution

---

[10] *Die Monodromiegruppe einer algebraischen Gleichung bei linearen Transformationen der Variabeln*, ces « Annalen », Bd. 28, 1884.

de $f=0$ par une irrationalité imprimitive; une pareille résolution n'est possible que lorsque $f=0$ est la transformée simplement rationnelle d'une autre équation dont le genre est >0. Ainsi la particularité dont l'on voulait douer le groupe de $x(t)$ revient à la nature de la f elle-même.

Il s'agirait maintenant de distinguer, parmi les caractères que l'on peut attribuer à l'irrationalité $x(t)$, ceux qu'il sera permis de fixer d'avance quelque soit f, et ceux qui au contraire entraîneraient des particularités de l'équation. Or il n'est pas aisé de répondre à une question de si haute importance, même en ce bornant à quelques cas d'un intérêt remarquable.

Par exemple, en faisant attention aux facteurs de composition du groupe de $x(t)$, on est amené à se demander si, par un choix convenable de $t(x\,y)$, on saurait toujours s'arranger de manière que ces facteurs résultent des nombres premiers; car il s'ensuivrait que toute équation $f=0$ pourrait se résoudre par des seules extractions de racines. Vraiment il n'est pas à croire qu'une telle possibilité subsiste, mais comment démontrer qu'elle ne subsistera pas?

10. – Les questions posées précédemment supposaient donnée l'équation $f(x\,y)=0$; il s'agissait de la résoudre et d'assigner la nature des irrationalités dont la résolution viendrait dépendre. Or on peut renverser le problème en se proposant de:

II) former toutes les équations dont la résolution s'obtient par des irrationalités de nature connue.

Il semble même que de la réponse à cette dernière question on saurait tirer la réponse à la première, mais il faut remarquer pourtant à ce propos, que les équations en quelque sorte les plus générales qui se trouvent résolues par une irrationalité donnée, renferment cette résolution comme une résolution tout-à-fait singulière.

Commençons à envisager un cas bien particulier du problème posé: il s'agit de determiner les *équations que l'on peut résoudre sans aucune irrationalité*, cela revient à dire par des fonctions rationnelles d'un paramètre.

Elles sont complètement déterminées, car on sait bien, d'après CLEBSCH, qu'*elles forment la classe dont le genre est* 0. Que l'on veuille former ensuite les *équations résolubles par une racine carrée, à savoir* les équations *hyperelliptiques*. On peut demander p. e. de former toutes les *équations hyperelliptiques ayant un certain genre p donné*, et l'on obtiendra alors *le type*

$$y^2 = f(x)$$

où f est un polynome du degré $2p+2$.

En laissant de côté les équations hyperelliptiques il est aisé d'envi-

sager d'autres exemples qui amènent à des cas particuliers du problème général où l'on obtient sans difficulté la réponse. Il suffira de citer le cas des équations résolubles par une racine quelconque dont l'ordre est plus grand que 2.

Mais envisageons plutôt le problème général. Que l'on donne le groupe d'une irrationalité $X(t)$; il s'agit de former les fonctions algébriques $X(t)$, en d'autres termes les équations $\varphi(Xt) = 0$ appartenant à ce groupe. Pour préciser on peut même chercher les équations $\varphi = 0$ nommées ayant un certain genre p. Or on peut transformer le problème de la manière suivante.

L'équation à former étant désignée par

$$\varphi(Xt) = 0\,,$$

que l'on envisage sa résolvante de GALOIS en considérant t comme un paramètre; soit

$$\psi(Yt)$$

un facteur irréductible de celle-ci.

On aura X fonction rationnelle de Y et t. L'équation $\psi = 0$ est transformée en elle-même par un groupe de transformations birationnelles

$$Y_2 = \Theta(Y_1 t) \qquad (t_2 = t_1 = t);$$

le groupe en question correspond justement au groupe de monodromie de X.

Ainsi le problème posé se ramène à celui de déterminer les fonctions algébriques Y, ou les équation $\psi = 0$, admettant un certain groupe de transformations birationnelles en elles-mêmes.

Le dernier problème a été envisagé par M. HURWITZ [11], sous une forme géométrique. Mais ces recherches fort intéressantes nous apprennent seulement à construire la surface de RIEMANN la plus générale, qui correspond à un groupe donné; elles montrent ainsi l'existence d'une telle surface, c'est-à-dire l'existence d'une équation algébrique $\psi = 0$ satisfaisant aux conditions demandées, sans nous donner les moyens de la former effectivement.

Une fois que toutes les équations $\psi(Yt) = 0$ seraient connues, il faudrait encore former leur transformées simplement rationnelles $\varphi(X\,t) = 0$, dont le genre p est assigné. Cela s'effectue aisément, car nous sommes

---

[11] *Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich*, ces « Annalen », Bd. 41.

en un cas particulier du problème résolu par M. PAINLEVÉ [12], pourvu que le genre P de ψ soit aussi connu; or c'est ce que l'on peut supposer, car il y a tout au plus un nombre fini de valeurs que l'on peut donner à P, en correspondance de la valeur assignée de p et du groupe de X.

11. – Au problème de la résolution des équations renfermant deux inconnues se rattachent quelques cas remarquables de résolution où l'on a un plus grand nombre d'inconnues. Il s'agit d'un procédé de réduction que nous allons expliquer par quelques exemples. C'est ainsi que nous serons amenés a parler d'un problème arithmétique, qui se présente ici.

Soit l'équation

$$f(x_1\, x_2 \ldots x_n) = 0 \qquad (n > 2).$$

Nous avons déjà remarqué que l'on peut envisager quelques unes des inconnues comme des paramètres; si tous les paramètres (à savoir $n-1$) sont choisis de la sorte, la dernière inconnue résulte une fonction algébrique tout-à-fait déterminée de ceux-ci, et il se peut que l'irrationalité introduite ainsi pour la résolution de la $f = 0$, ne soit pas telle qu'on l'avait demandée.

Que l'on envisage à présent $n-2$ inconnues seulement, $x_3, \ldots, x_n$, comme des paramètres, auxquels on attribuera pour le moment des valeurs constantes; on aura une équation en x_1, x_2

$$\bar{f}(x_1\, x_2) = 0\,.$$

Supposons qu'elle se trouve résolue à l'aide d'une irrationalité donnée, $X(t)$; c'est-à-dire qu'il soit possible de choisir un nouveau paramètre $t(x_1\, x_2)$ de telle façon que l'on ait

$$(1) \qquad x_1 = \varphi(Xt)\,, \qquad x_2 = \psi(Xt)\,,$$

où φ, ψ désignent des fonctions rationnelles.

En s'arrêtant aux apparences il semblerait tout d'abord que les formules (1) donnent aussi une résolution de l'équation

$$f(x_1\, x_2 \ldots x_n) = 0$$

à l'aide de la seule irrationalité X. Il n'en est rien. En effet les coefficients de φ, ψ ne seront pas en général des quantités rationnelles dans

[12] L. c.

le domaine défini par les coefficients de f; ils renfermeront au contraire des irrationnelles numériques, et ces derniers déviendront des irrationnelles *algébriques* lorsqu'on fera varier les paramètres $x_3, \ldots, x_n$.

On voit par suite que le procédé de réduction indiqué ne saurait s'appliquer sans d'autres remarques; mais il amène à se poser les deux questions suivantes:

1) de quelles irrationnelles numériques, a savoir de quelles opérations arithmétiques peut-on faire dépendre la résolution de l'équation

$$\bar{f}(x_1\, x_2) = 0$$

obtenue à l'aide de l'irrationalité algébrique X?

2) comment ces irrationnelles dépendront-elles algébriquement des paramètres $x_3, \ldots, x_n$; et, en particulier, sera-t-il possible de s'arranger de manière qu'elles n'en dépendent pas du tout?

12. – Arrêtons nous sur le cas le plus simple où l'équation

$$\bar{f}(x_1\, x_2) = 0$$

saurait être résolu d'une manière rationnelle, c'est-à-dire en posant x_1, x_2 fonctions rationnelles d'un paramètre t.

De quelles opérations arithmétiques pourra-t-on faire dépendre une telle résolution?

C'est M. NOETHER [13] qui a posé le problème et il lui a donné une réponse très simple. En effet, il résulte de son étude que:

Si une équation $f(x_1\, x_2) = 0$ *entre deux inconnues peut être résolue d'une manière rationnelle* (ce qui arrive si elle a le genre 0), *la résolution indiquée pourra toujours s'effectuer*:

a) *ou bien sans ajouter aucune irrationnelle numérique lorsque, le degré de* f *en* x_1 *ou en* x_2, *ou même le degré complexif, est impair*;

b) *ou bien* (tout au plus) *à l'aide d'une seule racine carrée, s'il arrive le contraire.*

Supposons maintenant que l'on ait $n = 3$; nous avons à résoudre l'équation

$$f(x_1\, x_2\, x_3) = 0\,,$$

et nous savons que l'équation $\bar{f} = 0$, où l'on attribue à x_3 une valeur constante, a le genre 0. On peut résoudre $\bar{f} = 0$ en posant x_1, x_2 fonc-

---

[13] *Über Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen,* ces « Annalen », Bd. 3.

tions rationnelles d'un paramètre convenable t, mais les coefficients de ces fonctions renfermeront *en général* une racine carrée qui portera aussi sur x_3, de sorte que l'on n'obtiendra pas ainsi une résolution rationnelle de $f(x_1\, x_2\, x_3) = 0$. Eh bien, c'est encore un résultat de M. NOETHER (l. c.): *par un choix convenable de* t *on pourra toujours s'arranger de manière que la racine susnommée ne vienne pas dépendre de* x_3, *de sorte que la méthode de réduction amène en ce cas à résoudre l'équation*

$$f(x_1\, x_2\, x_3) = 0$$

par des fonctions rationnelles de x_3 *et de t.*

On pourrait penser que ce beau théorème s'étendrait au cas d'une équation renfermant plus de trois inconnues.

Mais il n'en est pas ainsi. Lorsque $n > 3$, et l'équation

$$f(x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_n) = 0$$

envisagée en x_1, x_2, a le genre 0 et le degré pair, il peut bien arriver que la racine carrée qui figure dans les expressions de x_1, x_2 par le paramètre t, vienne toujours dépendre des autres inconnues, de quelque façon que l'on s'arrange. La méthode de réduction employée nous amène alors à résoudre la $f(x_1\, x_2 \ldots x_n) = 0$ non pas rationnellement, mais à l'aide d'une racine carrée portant sur une fonction rationnelle des paramètres $x_3, \ldots, x_n$.

13. – Du théorème cité de M. NOETHER découlent quelques conséquences qui se rapportent au cas où le procédé de réduction s'applique à une équation

$$f(x_1\, x_2 \ldots x_n) = 0$$

qui, envisagée en x_1, x_2, soit hyperelliptique. Nous ne nous y arrêterons pas. Et nous passerons, plutôt, à une question en quelque sorte générale qui trouve ici sa place.

Que l'on envisage l'équation

$$f(x_1\, x_2) = 0$$

ayant un certain genre p et un degré quelconque. Supposons d'abord $p > 1$. Sera-t-il possible d'assigner d'avance une résolution de l'équation $f = 0$ qui s'effectue d'une manière arithmétiquement rationnelle, à l'aide d'une irrationnalité algébrique dont le degré ne dépende pas de celui de f?

Il est aisé de repondre par l'affirmative, car il suffit d'envisager une

fonction *canonique* $\psi(x_1 x_2)$ pour obtenir, d'une façon arithmétiquement rationnelle, une résolution de $f=0$ par une irrationalité du degré $2p-2$.

Que pourra-t-on dire maintenant lorsque $p=1$?

Il n'y a plus ici de fonctions canoniques. Mais l'équation $f(x_1 x_2)=0$ se résout en une infinité de manières et on peut même assigner à loisir le degré de l'irrationalité dont la résolution vient dépendre (pourvu naturellement qu'il s'agisse d'un nombre >1). Chaque résolution pourtant, lorsque le degré en question est plus petit que celui de f, exige des opérations arithmétiques que l'on peut effectuer de différentes manières (p. e. à l'aide des équations pour la division des arguments des fonctions elliptiques), mais qui sont liées justement au degré de f. Ainsi, nous tirons la démonstration de quelques exemples, l'équation $f(x_1 x_2)=0$, supposée la plus générale entre celles du genre 1 et du degré n, ne saura se résoudre par des irrationalités de degré moindre que n, d'une manière arithmétiquement rationnelle.

Il est aisé de reconnaître les conséquences auxquelles les remarques précédentes nous amènent à l'égard du procédé de réduction. Nous allons les énoncer tout simplement en y joignant aussi celles dont nous avons déjà parlé qui se rapportent au cas de $p=0$. Voici le résultat:

Que l'on ait à résoudre une équation

$$f(x_1 x_2 \dots x_n)=0 \qquad (n>2),$$

et que l'on s'engage par la méthode de réduction expliquée, en choisissant $x_3, \dots, x_n$ *comme* $n-2$ *paramètres, et en considérant l'équation* $f(x_1 x_2)=0$ *que l'on obtient ainsi en* x_1, x_2. *Soit* p *le genre de cette équation. Lorsque* $p \neq 1$, *il est toujours possible de résoudre* $f(x_1 x_2 \dots x_n)=0$ *par une irrationalité dont le degré a la valeur absolue de* $2p-2$ *(ou moindre que celle-là), mais le cas* $p=1$ *est distingué de tous les autres d'une manière essentielle, car en ce cas le procédé de réduction nous amenera à une irrationalité dont on ne pourra d'avance fixer la valeur, qui en général ne sera pas moindre que le degré de* f *par rapport à* x_1 *ou à* x_2.

Remarque. – Pour s'assurer que l'exception relative au cas $p=1$ est vraiment essentielle il suffit d'envisager une surface (donnée par une équation $f(xyz)=0$ que l'on peut supposer du degré n en x, y), qui soit représentée point par point sur le plan, de manière qu'aux courbes $z=$ const. correspondent des courbes de degré $3n$, ayant 9 points-base de l'ordre n, c'est-à-dire des courbes composant un des faisceaux bien connus découverts par HALPHEN.

Enfin il faut encore remarquer explicitement qu'il y a bien de cas particuliers où l'on obtient quelques simplifications par rapport à l'énoncé général. Ainsi p. e., lorsque l'équation $f(x_1 x_2)=0$ est hyperelliptique

($p > 1$), l'équation $f(x_1 x_2 \dots x_n) = 0$ pourra toujours se résoudre par l'extraction successive de deux racines carrées, si p est impair.

14. – C'est à présent aux équations renfermant trois inconnues

$$f(x\,y\,z) = 0$$

que nous allons consacrer quelques mots. Commençons par des cas particuliers. La résolution des équations générales des premiers degrés $n = 1, 2, 3$ s'effectue par des fonctions rationnelles de la manière bien connue. Lorsque $n = 4$, une telle résolution n'est plus possible en général, puisque le genre de f est $= 1$.

Mais *l'équation la plus générale du quatrième degré, en trois inconnues, peut se résoudre à l'aide d'une seule racine carrée* (portant sur une fonction rationnelle de deux paramètres). Cette résolution peut se déduire d'une circonstance géométrique bien simple, puisque la surface de l'ordre 4 admet des sections planes unicursales, et les droites s'appuyant à deux courbes pareilles coupent en deux points la surface. La résolution obtenue de la sorte n'est pas simple, car (on le voit bien) les deux paramètres dont dépend le choix d'une droite du système nommé ne seront pas des fonctions rationnelles des coordonnées des points de la surface (puisqu'il y a plus qu'une droite passant par chaque point).

Il est donc naturel de chercher si l'on peut donner de notre équation une résolution différente, exigeant de même une racine carrée seulement, de sorte que les paramètres dépendent rationnellement des inconnues. Mais cela n'est pas possible dans le cas général.

On parvient à cette conclusion de la manière suivante.

Lorsque la résolution demandée est possible, l'équation peut être transformée en une autre de la forme

$$z^2 = f(xy)\ ;$$

ainsi nous avons une équation du quatrième ordre représentée sur un plan double

$$(x, y, \sqrt{f(xy)})\ .$$

Que l'on cherche maintenant tous les plans doubles que l'on peut représenter sur une surface du quatrième ordre. Il faut remarquer d'abord que leurs genres ont la valeur 1.

Or les plans doubles de tels genres se partagent en quatre classes [14];

[14] ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere uno*, « Memorie della Società italiana delle Scienze » (dei XL) », 1896 [queste *Memorie*, vol. I, XVI].

mais le type général de chaque classe ne correspond pas à une surface du quatrième ordre. Comme d'ailleurs il renferme le même nombre de modules, on voit que la surface générale du quatrième ordre ne saura pas être représentée sur un plan double.

Si maintenant nous laissons de côté les équations du quatrième degré, pour passer à celles dont le degré $n > 4$, nous ne sommes aujourd'hui en mesure de répondre à aucune question se rapportant aux résolutions *minima* qu'elles peuvent admettre. Il est aisé de résoudre l'équation du degré n par une irrationalité du degré $n-1$, mais on ne saurait dire s'il sera possible ou non de descendre au dessous de cette valeur (soit en considérant des résolutions simples, soit sans remplir cette condition).

15. – Passons maintenant à considérer les équations $f(x\,y\,z) = 0$ en tant qu'elles appartiennent à telle ou telle autre classe définie par les valeurs des genres. Ce point de vue est certainement plus important que celui qui prend comme point de départ le degré de l'équation.

Malheureusement les résultats obtenus dans ce champ se bornent à bien peu de chose.

Étant donnée une équation

$$f(x\,y\,z) = 0\,,$$

que l'on envisage ses caractères (genres)

$$p_n,\ p_g,\ p^{(1)},\ P_2,\ P_3,\ \ldots$$

déjà nommés.

Nous ne savons rien en ce qui concerne la question d'assigner la résolution du degré minimum appartenant à une équation dont les genres sont connus.

Peut-on, au moins, assigner une résolution de celle-ci ayant un certain degré donné d'avance qui ne dépende pas du degré de l'équation?

Que l'on suppose $p^{(1)} > 1$. Il faut alors repondre à la question posée par l'affirmative. En effet soit d'abord $p_g > 2$; il suffit en ce cas d'envisager la valeur $p^{(1)} - 1$; on obtiendra toujours une résolution de l'équation proposée dont le degré ne surpassera cette valeur. Si $p_g = 2$, il suffira d'envisager à sa place la valeur double $2p^{(1)} - 2$. Ces affirmations s'appuyent sur la considération des courbes canoniques de la surface représentée par l'équation (car ces courbes ont le genre $p^{(1)}$ et, lorsque $p_g > 2$, se coupent deux à deux en $p^{(1)} - 1$ points). Or comme cette considération fait défaut lorsque $p_g < 2$, il faut la remplacer par la considération d'autres courbes invariantes dont les caractères dépendent des genres $p_n, p_g, P_2, P_3, \ldots, p^{(1)}$. Comme nous avons supposé $p^{(1)} > 1$, il y a

toujours de telles courbes: ce seront les courbes bicanoniques, ou bien tricanoniques, etc. Elles nous permettront de conclure d'une manière générale que *l'on peut toujours assigner d'avance le degré d'une irrationalité suffisante à résoudre une équation* $f(xyz) = 0$ *dont on connait les genres, pourvu que l'on ait* $p^{(1)} > 1$, *et cela quel que soit le degré de* f. La valeur du degré susnommé, que l'on sait assigner, dépend essentiellement de $p^{(1)}$ et de p_n; elle croît lorsqu'on augmente $p^{(1)}$ ou lorsqu'on diminue p_n.

Il n'en est plus ainsi lorsque $p^{(1)} \leqslant 1$. En ce cas on n'est plus en mesure d'assigner le degré d'une irrationalité capable de résoudre l'équation $f(x\,y\,z) = 0$, qui ne dépende pas du degré de f. Vraiment il y aurait lieu d'établir de nouvelles distinctions et certains cas permettraient d'arriver à quelques conclusions.

Mais nous ne nous y arrêterons pas. Il nous suffira d'avertir que pour $p^{(1)} = 1$ l'exception est essentielle.

Remarque. – Les résolutions dont on parle ci-dessus sont obtenues d'une manière arithmétiquement rationnelle; elles se prêtent par suite au procédé de réduction que l'on peut essayer pour résoudre une équation renfermant $n > 3$ inconnues, en considérant dans celle-ci $n - 3$ inconnues comme des paramètres.

16. – Les remarques qui précèdent se rapportaient au problème de résoudre une équation $f(xyz) = 0$ que l'on supposait donnée. Comme nous l'avons fait pour ce qui concerne les équations renfermant deux inconnues, on peut ici encore renverser la question. Il s'agira donc de former toutes les équations $f(xyz) = 0$ qui admettent une certaine résolution à l'aide d'une irrationalité dont la nature est assignée d'avance.

Nous nous bornerons à dire quelques mots sur ce sujet, en prenant en considération deux cas particuliers bien simples.

Tout d'abord, on demande de déterminer toutes les équations entre trois inconnues qui se laissent résoudre d'une manière rationnelle, c'est-à-dire par des fonctions rationnelles. La réponse à cette question est fournie par un théorème de M. CASTELNUOVO [15].

Les équations que l'on peut résoudre d'une manière rationnelle sont caractérisées par ce que leurs genres p_n, P_2 (*et par suite tous les autres genres*) *s'évanouissent.*

Une question en quelque sorte successive à celle résolue par M. CASTELNUOVO, consiste à chercher toutes les équations $f(xyz) = 0$ que l'on peut résoudre à l'aide d'une seule racine carrée. Les genres de telles équations ne sont nullement déterminés, mais on peut supposer de les assigner

---

[15] *Sulle superficie di genere zero*, « Memorie della Società italiana delle Scienze (dei XL) », 1896.

d'avance. En se bornant à considérer des résolutions simples on sera donc amené à chercher les polynomes $f(x\,y)$ pour lesquels les genres de l'équation

$$z^2 - f(x\,y) = 0$$

prennent certaines valeurs données. Or nous montrerons ailleurs comment on peut aborder ce problème général. Nous nous bornerons ici à rappeler le résultat, déjà cité ([16]), concernant le cas très simple où il s'agit d'équations dont les genres p_n, P_2 (et par suite aussi tous les autres) ont la valeur 1:

Les équations ayant les genres $p_n = P_2 = 1$ *qui sont résolubles (simplement) à l'aide d'une seule racine carrée, peuvent se ramener à quatre types*

$$z^2 - f(x\,y) = 0\,,$$

où f *est un polynôme général du sixième degré, ou bien un polynôme du degré* 8, 10, 12, *ayant des particularités déterminées.*

17. – À la résolution d'une équation

$$f(x\,y\,z) = 0$$

par des irrationalités données, on peut rattacher un problème arithmétique analogue à celui dont nous avons parlé dans le cas de deux inconnues, à savoir le problème d'assigner les irrationnelles numériques dont la résolution elle même vient à dépendre. C'est le problème qui sert de fondement au procédé de réduction par lequel on cherche de ramener la résolution d'une équation proposée à celle d'une autre équation renfermant un plus petit nombre d'inconnues.

Nous avons déjà fait à cet égard une simple remarque (n. 15), ayant un certain degré de généralité. Nous nous bornerons ici à rappeler, en peu de mots, le résultat qui concerne la détermination des irrationnelles numériques dont vient à dépendre la résolution d'une équation

$$f(x\,y\,z) = 0$$

par des fonctions rationnelles (supposé qu'une telle résolution soit possible, c'est-à-dire que l'on ait $p_n = P_2 = 0$) ([17]).

([16]) *Sui piani doppi di genere uno*, l. c.

([17]) Voir dans ce même journal l'article: ENRIQUES, *Sulle irrazionalità...*, Bd. 49 [queste *Memorie*, vol. I, XVIII].

La question a été traitée d'abord par CLEBSCH, MM. KLEIN et BURKHARDT, M. NOETHER, à l'égard de bien de classes particulières d'équations $f = 0$. Or, par un procédé de réduction, on est toujours ramené à l'un de ces cas. De sorte que l'on arrive à la conclusion générale suivante:

La résolution rationnelle d'une équation $f(x\,y\,z) = 0$, *supposée possible, se ramène, à l'aide de racines carrées ou cubiques (tout au plus), à la résolution analogue d'une certaine équation de la forme* $z^2 = \varphi(x\,y)$, *où le polynôme* φ *a le degré* 4 *ou* 6 *en* x, y, *ou le degré* 2 *en* x *et un degré quelconque en* y. *D'après cette réduction, elle s'effectue à l'aide des irrationalités définies par une des équations pour la bisection de fonctions abéliennes du genre* 3 *ou* 4, *ou respect. de fonctions hyperelliptiques dont le genre* p *est celui de* φ. En ce dernier cas les irrationalités en question deviennent autant élevées que l'on veut, suivant la valeur de p.

Le théorème précédent donne lieu à des applications se rapportant à la résolution rationnelle de quelques équations qui renferment plus de trois inconnues. Encore, on est amené à de nouvelles questions tout-à-fait simples, qui demeurent pourtant sans réponse. Nous avons insisté sur celles-ci dans notre article cité du Bd. 49.

Bologne, octobre 1897.

XXVI.

UNA PROPRIETÀ DELLE SERIE CONTINUE DI CURVE APPARTENENTI AD UNA SUPERFICIE ALGEBRICA REGOLARE

« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XIII (1899), pp. 95-98.

1. – Esistono numerose classi di superficie sopra le quali si trova una serie continua di curve non contenuta (totalmente) in un sistema lineare; basta citare ad esempio le superficie con un fascio irrazionale di curve (in particolare le rigate), le superficie rappresentanti le coppie di punti d'una curva irrazionale, ecc.

Il sig. HUMBERT ha fatto vedere che tutte queste superficie posseggono integrali di differenziali totali di 1ª specie [1]. Io mi propongo di mostrare che esse hanno altresì il genere numerico diverso dal geometrico, precisamente

$$p_n < p_g;$$

ciò è stato già stabilito per alcune delle superficie predette, in particolare per quelle che posseggono un fascio irrazionale di curve [2].

Il teorema che viene qui dimostrato può essere enunciato sotto la forma più espressiva:

Sopra una superficie regolare ($p_n = p_g$) *ogni serie continua di curve è contenuta* (*totalmente*) *in un sistema lineare*, e quindi le curve di dato ordine che stanno sopra una tale superficie si distribuiscono in tanti sistemi lineari.

---

[1] *Sur une propriété d'une classe de surfaces algébriques* (« Comptes Rendus », 1893).

[2] Cfr. CASTELNUOVO, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica* (« Annali di Matematica », 1897).

2. – Si abbia sopra una superficie regolare F una serie continua (algebrica) di curve (algebriche) C che, senza introdurre restrizioni, riterremo irriducibili; possiamo supporre questa serie ∞^1, altrimenti basterebbe considerare le serie ∞^1 in essa contenute.

Denotiamo con π il genere virtuale delle curve C (che si ottiene sommando al genere effettivo di una C il numero dei suoi punti doppi variabili non singolari per F), e con n il numero delle intersezioni variabili di due C. Riterremo $n > 0$, escludendo così il caso in cui le C formino un fascio, caso già esaurito dalle ricerche del sig. CASTELNUOVO.

L'ente algebrico ∞^1 che ha per elementi le C può considerarsi come una curva L di un certo genere p.

Si consideri allora su L una serie lineare g^1_m ove $m \geqslant p + 1$, la quale può essere determinata partendo da un gruppo di m punti generici.

In corrispondenza alla g^1_m si ottiene sopra F una serie razionale ∞^1 di curve, composte ciascuna di m curve C. Per la sua razionalità questa serie risulta contenuta (totalmente) in un sistema lineare $[K]$ [3], che sarà irriducibile, essendo irriducibili le C [4].

Partendo da un'altra g^1_m generica di L, costruiremo analogamente su F un'altra serie razionale di curve, composte ciascuna con m curve C, la quale serie sarà contenuta totalmente in un sistema lineare $[K_1]$, pure irriducibile.

3. – Considereremo i sistemi lineari $[K]$ e $[K_1]$ come completi, ed osserveremo che essi avranno lo stesso genere π, e (ove non coincidano) potranno riguardarsi ciascuno come limite dell'altro quando si faccia variare opportunamente la g^1_m scelta su L.

Teniamo ora conto della regolarità della superficie F. Questa proprietà ci permette di affermare che le curve K' seganti le K secondo gruppi canonici $G_{2\pi-2}$ (le quali curve, dette *subaggiunte* a $[K]$ formano un sistema lineare $[K']$), segheranno sopra una K la serie canonica completa [5].

Consideriamo ora la serie segata dalle K' sopra una curva K_1. Anzitutto è facile vedere che le intersezioni di K' e K_1, sono, come quelle di K' e K, in numero di $2\pi - 2$, perchè le K' debbono intersecare le C in $(2\pi - 2)/n$ punti.

La dimensione della serie segata da $[K']$ su K_1 potrà esser minore di $\pi - 1$?

---

[3] Cfr. ENRIQUES, *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche* (« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », 1896) [queste *Memorie*, vol. I, XV].

[4] Cfr. ENRIQUES, *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche*, n. 5 (« Memorie della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL », 1896) [queste *Memorie*, vol. I, XIII].

[5] *Introduzione etc.*, l. c., III, IV.

Si dimostra che questo è impossibile, perchè altrimenti il sistema $[K' - K_1]$, residuo di una K_1 rispetto a $[K']$, avrebbe una dimensione superiore alla dimensione di $[K' - K]$ mentre il primo sistema ha per limite il secondo quando $[K_1]$ tende a $[K]$. È infatti una conseguenza del principio della conservazione del numero, che un sistema lineare variabile avente una certa dimensione r non possa aver per limite un sistema di dimensione inferiore ad r, giacchè per r punti generici della superficie passerà una curva del sistema variabile e quindi una curva (o infinite curve) del sistema limite.

Ciò posto le curve K' segano su una K_1 i gruppi della serie canonica g^{n-1}_{2n-2}, e perciò sono ugualmente subaggiunte a $[K_1]$ come a $[K]$.

Dunque le K' sono curve subaggiunte ad ogni sistema lineare contenente (totalmente) m curve C.

Se ora si considerano i sistemi lineari contenenti (totalmente) i gruppi di $2m$ curve C, avremo che tutti ammettono le stesse curve subaggiunte, componenti un sistema lineare (completo) $[(2K)']$.

Di qui si deduce che ogni gruppo di m curve C è contenuto (totalmente) nel sistema lineare

$$[K] = [(2K)' - K'],$$

residuo di $[K']$ rispetto a $[(2K)']$ (6).

Ma allora anche tutte le curve C sono contenute (totalmente) nel sistema lineare

$$[K - (m-1)C],$$

residuo di $m-1$ curve C rispetto a $[K] = (mC)$. *c. d. d.*

4. OSSERVAZIONE. – La dimostrazione del teorema che forma l'oggetto di questa Nota si basa sulla più elementare proprietà delle superficie regolari. La dimostrazione può essere semplificata se si ricorre al teorema del sig. CASTELNUOVO (l. c.) che afferma, per queste superficie, la completezza della serie caratteristica di un sistema lineare completo. Il signor CASTELNUOVO stesso mi ha indicato tale semplificazione.

Essa consiste in ciò.

Si formino come al n. 2, i due sistemi $[K]$, $[K_1]$, e si designi con r la loro dimensione. Paragoniamo le serie segate sopra una curva generica K dai sistemi $[K]$ e $[K_1]$; la prima serie, completa, ha la dimensione $r-1$;

(6) *Introduzione etc.*, l. c., III.

la seconda serie avrà la dimensione $\varrho = r - 1$ o $\varrho = r$ secondochè $[K_1]$ contiene K o no.

Ora la serie segata da $[K_1]$ su K contiene m gruppi generici della serie (non lineare) γ_ν segata su K dalle C, mentre la serie (∞^{r-1}) segata da $[K]$ è la serie completa determinata da m gruppi particolari di γ_ν. Si prova quindi facilmente che deve essere $\varrho \leqslant r - 1$ e perciò $\varrho = r - 1$.

Da ciò si trae che $[K]$ e $[K_1]$ coincidono, onde ecc.

Bologna, dicembre 1898.

XXVII.

SOPRA LE SUPERFICIE ALGEBRICHE CHE CONTENGONO UN FASCIO DI CURVE RAZIONALI [1]

« Math. Ann. », Bd. LII (1899),

pp. 449-456.

Una serie (algebrica) di curve (algebriche) sopra una superficie algebrica

$$f(xyz) = 0 ,$$

dicesi costituire un *fascio* allorchè ogni punto generico della superficie appartiene ad *una* curva della serie

Facendo astrazione dalle eventuali componenti fisse, un fascio di curve C sopra la superficie $f = 0$, può essere definito mediante due funzioni razionali

$$X(xyz) , \qquad Y(xyz) ,$$

legate fra loro da una relazione algebrica

$$\varphi(XY) = 0 ,$$

le quali assumono lo stesso valore nei punti di una curva C.

Il genere p della relazione $\varphi = 0$ è il *genere del fascio*; se $p = 0$ il fascio è razionale o *lineare*, e le due funzioni X, Y possono venir sostituite da una sola.

---

[1] Questo articolo è un rifacimento, con alcune semplificazioni, di due note pubblicate nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei; Novembre, Decembre 1898 [queste *Memorie*, vol. I, XXIII, XXIV].

Si abbia sopra la superficie $f = 0$ un fascio di curve C, irriducibili, razionali; vale a dire, rappresentato il fascio nel modo anzidetto, supponiamo che la curva generica C data dalle equazioni

$$(1) \qquad f = 0\,, \qquad X = X(xyz)\,, \qquad Y = Y(xyz)\,,$$

sia irriducibile, razionale. Allora le coordinate dei punti di essa si possono esprimere razionalmente per un parametro Z, colle formule

$$(2) \qquad x = \Phi_1(Z)\,, \qquad y = \Phi_2(Z)\,, \qquad z = \Phi_3(Z);$$

e così ogni curva C del fascio (corrispondente ad una coppia generica XY) si può pensare riferita punto per punto ad una retta, generatrice del cilindro $\varphi(XY) = 0$. Dopo ciò sembra, a prima vista, che la superficie $f = 0$ risulti trasformata birazionalmente nel cilindro nominato. Ma questa deduzione non è affatto legittima, perchè la rappresentazione di una curva $C \equiv (XY)$ sopra la retta omologa dipenderà in generale da alcune *irrazionalità aritmetiche*, che entreranno nei coefficienti delle funzioni Φ, e queste irrazionalità potranno variare colla C, dipendendo *algebricamente* da X, Y.

Si presentano pertanto due questioni che il sig. NOETHER ha studiate nella memoria *Über Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen* [2]:

1) Assegnare le irrazionalità aritmetiche da cui può farsi dipendere la rappresentazione parametrica di una curva razionale C, con funzioni razionali di un parametro.

Il sig. NOETHER ha risposto completamente a tale questione, facendo vedere che ogni curva razionale può sempre essere trasformata, con una sostituzione razionale a coefficienti razionali, in una conica; e quindi l'irrazionalità di cui si tratta è, tutt'al più, un radicale quadratico. Da ciò segue, in particolare, che una superficie contenente un fascio di curve razionali può essere trasformata birazionalmente in una superficie contenente un fascio di coniche.

2) Vedere se, e come, le irrazionalità aritmetiche che entrano nella rappresentazione razionale di una curva C, possono scegliersi in guisa che risultino indipendenti dalla curva (o conica) C, considerata nel fascio, ossia da X, Y.

Il sig. NOETHER ha dimostrato che a tal fine occorre determinare una curva unisecante le C; ed ha determinato effettivamente una tale unisecante pel caso ($p = 0$) in cui il fascio delle C sia lineare, dimostrando

---

[2] Cfr. questi Annalen, Bd. 3.

pertanto che, in questo caso, la superficie $f = 0$ è razionale. La determinazione di una curva unisecante le (coniche) C, nel caso $p > 0$, curva di cui l'esistenza restava dubbia (3), viene stabilita in questo lavoro. Così rimane dimostrato in generale il teorema:

Ogni superficie algebrica $f(xyz) = 0$ *contenente un fascio di curve razionali, si può trasformare birazionalmente in una rigata* (p. es. *in un cilindro* $\varphi(XY) = 0$), avente il genere p del fascio.

1. – Sia F una superficie contenente un fascio di coniche C, avente un certo genere p.

Questa superficie si può rappresentare sopra una rigata doppia φ, giacchè ogni conica C del fascio può essere riferita ad una retta doppia per proiezione da un punto esterno, e tale operazione si può compiere in modo razionale dati i coefficienti dell'equazione della conica, ossia razionalmente per tutte le coniche del fascio.

La rigata doppia φ possederà una curva di diramazione costituita da una curva K bisecante le generatrici, e da un certo numero di generatrici $a_1 a_2 \ldots a_\varrho$. Si può supporre che la K sia irriducibile, giacchè se essa fosse spezzata in due curve, unisecanti le generatrici di φ, a ciascuna di esse corrisponderebbe sopra F una curva unisecante le C, la quale permetterebbe di rappresentare la F sopra una rigata (semplice).

Supposto che la curva K possieda dei punti singolari, ci si può sempre ridurre al caso in cui siffatte singolarità non esistono. Infatti si trasformi la K in una curva K' priva di singolarità, in uno spazio S_r; unendo le coppie di punti di K' che corrispondono alle coppie di K poste sulle generatrici di φ, si può costruire una nuova rigata φ' in corrispondenza birazionale con φ (4), sopra cui la F risulta rappresentata doppiamente; e la curva K' insieme a qualche generatrice di φ' costituirà la curva di diramazione della nuova rigata doppia φ'.

Supporremo dunque addirittura che la curva K (curva di diramazione di φ) sia priva di punti singolari. La curva K, il cui genere denoteremo con π, apparterrà ad un certo spazio S_r, ed avrà, in esso, un

---

(3) Posteriormente al lavoro citato del sig. NOETHER, la questione non ha ricevuto alcun contributo notevole, all'infuori di quello portato dal sig. PAINLEVÉ nelle sue belle *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, relativo al caso in cui le curve (razionali) C sieno le traiettorie di un gruppo semplicemente infinito di trasformazioni birazionali della superficie $f = 0$, in se stessa. Ma la dimostrazione del sig. PAINLEVÉ si appoggia in sostanza sul fatto che sopra ogni curva C si hanno allora due punti *uniti*, i quali descrivono due curve separate, unisecanti le C. E, viceversa, per costruire il gruppo nominato, occorre conoscere le due curve (unisecanti) di punti uniti. Così, per quanto riguarda la questione generale qui trattata, non si poteva trarre aiuto dal resultato del sig. PAINLEVÉ.

(4) Per tale costruzione cfr. SEGRE, *Courbes et surfaces réglées algébriques* II, pag. 4. Questi Annalen, Bd. 34.

certo ordine n. Essa può sempre trasformarsi in un'altra curva (normale) K' avente un certo ordine n', arbitrariamente grande, ed appartenente ad uno spazio $S_{r'}$ la cui dimensione $r' = n' - \pi$. Allora, come è stato indicato, si trasforma anche la rigata φ in una nuova rigata doppia φ' (normale in $S_{r'}$). Le generatrici di φ' che vengono a far parte della nuova curva di diramazione sono in generale quelle che corrispondono ad $a_1 \dots a_\varrho$, più quelle che corrispondono a punti (fondamentali) della curva K; si può dunque evitare l'esistenza di queste ultime generatrici di diramazione, operando opportunamente la trasformazione di K in K', p. es. scegliendo come sistema trasformante (da riferirsi proiettivamente al sistema degli iperpiani di $S_{r'}$) il sistema di tutte le varietà V^m_{r-1} dello S_r, aventi un certo ordine m abbastanza alto.

La possibilità della indicata trasformazione ci permette di attribuire senz'altro alla curva di diramazione della rigata doppia φ la proprietà di essere composta

a) di un certo numero ϱ di generatrici $a_1 \dots a_\varrho$;

b) di una curva K di genere π, irriducibile, senza singolarità, bisecante le generatrici di φ, avente un ordine n arbitrariamente grande, in confronto ai valori indipendentemente fissati di π e ϱ, ed appartenente ad uno spazio S_r di dimensione $r = n - \pi$.

Siccome $n + \varrho$ è l'ordine della totale curva di diramazione per la rigata doppia φ, i numeri n e ϱ avranno la stessa parità.

2. – Si considerino ora gli $\infty^{r-\varrho}$ iperpiani di S_r che passano per ϱ punti scelti fra le intersezioni di K colle generatrici $a_1 \dots a_\varrho$, una sopra ciascuna generatrice. Gli iperpiani nominati segheranno sopra K una serie lineare $g^{r-\varrho}_{n-\varrho}$. Fra i detti iperpiani ve ne saranno alcuni tangenti in $(n - \varrho)/2$ punti alla K (fuori dei punti fissati sopra $a_1 \dots a_\varrho$), purchè si abbia

$$r - \varrho \geqslant \frac{n - \varrho}{2}.$$

Questa disuguaglianza supposta soddisfatta (come può farsi prendendo $n \geqslant 2\pi + \varrho$), la effettiva determinazione degli iperpiani voluti dipende, come è noto, da un problema di bisezione, delle funzioni abeliane inerenti alla curva K.

Ora alla sezione di φ con uno degli iperpiani costruiti (tangente, ovunque la incontra, alla curva di diramazione della rigata doppia φ), corrisponde sopra F una curva Θ, bisecante le coniche C del fascio (di genere p) dato su F, ed avente il genere (minimo per le bisecanti)

$$P = 2p - 1;$$

ciò risulta dalla nota formula di corrispondenza del sig. ZEUTHEN, poichè la curva stessa possiede una involuzione di genere p di coppie di punti, priva di elementi di coincidenza.

La curva Θ può spezzarsi in due curve di genere p, unisecanti le coniche C; anzi ciò accade sempre se $p = 0$; in questo caso si ottiene subito la rappresentazione della superficie F, punto per punto, sopra una rigata.

3. – La curva Θ incontra una conica C generica in due punti A, B; le tangenti in A, B s'incontrano in un certo punto O; da O la conica stessa può essere proiettata sopra una retta doppia. Siccome tale operazione si compie razionalmente per ogni C, essa conduce a rappresentare la superficie F sopra una rigata doppia Φ, in modo che la curva di diramazione di Φ sia composta mediante una curva Φ' corrispondente alla Φ, più qualche generatrice.

Allora applicando alla Φ, in relazione alla Θ', i ragionamenti svolti innanzi per la φ, si può costruire sopra F una nuova curva bisecante λ, di genere minimo $P = 2p - 1$, corrispondente ad una curva unisecante le generatrici di Φ. Questa curva λ è con Θ in una semplice relazione: le coppie di punti segate da Θ e da λ sopra una conica C (del fascio dato su F) si separano armonicamente. Tale relazione può essere espressa dicendo che le curve Θ e λ sono due *bisecanti armoniche* del fascio di coniche C.

Concludiamo pertanto che « sopra una superficie F possedente un fascio, di genere p, di coniche, si possono costruire due bisecanti armoniche aventi il genere minimo

$$P = 2p - 1 \text{ } » .$$

Se una di queste è spezzata in due unisecanti, la F può riferirsi ad una rigata. Supporremo dunque che ambedue le curve sieno irriducibili ($p > 0$).

4. – Le due curve si possono rappresentare doppiamente sopra uno stesso ente algebrico $\infty^1 \gamma$, di genere p, privo di elementi di diramazione; basta infatti considerare come ente γ il fascio delle coniche C, e far corrispondere ad ogni C (che è un elemento di γ) la coppia dei punti, della Θ o della λ, che si trovano su di essa.

Ad ogni serie lineare g_n^1, presa su γ, corrisponde su Θ (e su λ) una serie lineare g_{2n}^1 composta colle coppie che corrispondono agli elementi di γ (coppie formanti un'involuzione che denoteremo collo stesso nome « γ »). In particolare può darsi che la detta g_{2n}^1 sia composta mediante una g_n^1 autoconiugata rispetto all'involuzione γ, ossia può darsi

che ogni gruppo della g^1_{2n} sia composto di due gruppi G_n, appartenenti ad una medesima g^1_n, coniugati nell'involuzione nominata.

Come dimostreremo più tardi, è sempre possibile di scegliere sull'ente γ una g^1_n cui corrisponda tanto sulla curva Θ come sulla λ una g^1_{2n} composta mediante una g^1_n autoconiugata. Poniamo di avere scelto una g^1_n siffatta. Alla g^1_n di γ corrisponde sulla superficie F un fascio *lineare* $|L|$ di curve riducibili L, ogni curva del fascio essendo composta di n coniche C; indichiamo con $C_1C_2 \dots C_n$ le coniche costituenti insieme una curva generica L del detto fascio lineare.

Ci proponiamo di costruire sopra la superficie F una involuzione I_n, di gruppi di n punti, alla quale il nominato fascio $|L|$ appartenga, vale a dire una involuzione I_n siffatta che il gruppo G_n individuato da un punto di C_1, abbia un punto sopra C_2, uno sopra C_3, ..., uno sopra C_n.

La costruzione di una tale I_n esige che le curve $C_1C_2 \dots C_n$ vengano riferite l'una all'altra in un riferimento proiettivo, che sia razionalmente determinato allorchè è dato il gruppo di coniche $C_1C_2 \dots C_n$. Si può stabilire un riferimento siffatto per mezzo delle curve Θ e λ. Consideriamo infatti ad es. le due coniche C_1 e C_2. Indichiamo con A, B le intersezioni di C_1 con Θ, e con E, F le intersezioni della stessa C_1 con λ. Per ipotesi le coppie di punti segate da Θ su $C_1C_2 \dots C_n$ si distribuiscono in *due* gruppi G_n, di una g^1_n, coniugati rispetto alla involuzione γ; il punto A apparterrà ad *uno* di questi gruppi, il punto B all'altro. Allora si possono distinguere razionalmente le due intersezioni di C_2 con Θ, e chiamare A' il punto appartenente al gruppo G_n che contiene A, e B' il punto appartenente al G_n che contiene B. Similmente si possono distinguere le due intersezioni di C_2 con λ, coordinandole, in modo razionale, ai punti E, F, e chiamandole rispettivamente E', F'.

Ora esiste fra le due coniche C_1, C_2 un riferimento proiettivo determinato dalla corrispondenza delle coppie AA', BB', EE', FF', e ciò stante l'armonicità delle quaterne $ABEF$, $A'B'E'F'$.

In modo del tutto analogo vengono riferite proiettivamente, l'una all'altra, le n coniche del gruppo $C_1C_2 \dots C_n$, sicchè un punto, preso ad es. sulla C_1, appartiene ad *un* gruppo G_n costituito dai punti omologhi ad esso su $C_2 \dots C_n$. E al variare del gruppo $C_1 \dots C_n$, ossia al variare della curva composta $L \equiv C_1 + \dots + C_n$ entro il fascio lineare $|L|$, i nominati gruppi G_n formeranno una involuzione I_n, cui $|L|$ *appartiene* nel senso detto innanzi.

5. – Ciò posto costruiamo una nuova superficie F', i punti della quale sieno in corrispondenza birazionale coi gruppi G_n dell'involuzione I_n definita sopra F. Ad ogni curva $L \equiv C_1 + \dots + C_n$ di F, corrisponderà su F' una curva razionale L', irriducibile, in corrispondenza biunivoca

con ciascuna delle coniche $C_1 \dots C_n$; e le L' formeranno sopra F' un fascio lineare, come le L sopra F.

Ora, poichè appunto le curve razionali L' formano su F' un fascio lineare, si può costruire, nel modo indicato dal sig. NOETHER o come al n. 2, una curva χ' unisecante le L'. A questa curva corrisponderà sopra F una curva χ secante in n punti ciascuna L; ma la L essendo composta di n coniche $C_1 \dots C_n$, le n intersezioni cadranno una su ciascuna conica, per modo che la χ sarà una curva unisecante per le coniche C del fascio, dato sopra F.

Per mezzo della χ la F può essere riferita punto per punto ad una rigata, di cui le generatrici corrispondono alle coniche C.

Pertanto la dimostrazione del teorema enunciato è compiuta.

6. – Resta per altro da giustificare il lemma di cui abbiamo fatto uso:

Date due curve Θ e λ, di genere $P = 2p - 1$, contenenti una stessa involuzione γ di genere p (> 0), cioè riferite ad una medesima curva doppia o ente doppio γ, senza elementi di diramazione; si può determinare su γ una g_n^1 cui corrisponda, su ciascuna delle due curve Θ e λ, una g_{2n}^1 ciascun gruppo della quale sia composto con due gruppi (coniugati) di una g_n^1, autoconiugata rispetto all'involuzione γ.

Questo enunciato sarebbe press'a poco evidente se le curve Θ e λ potessero supporsi birazionalmente identiche; ma ciò non accadrà in generale, poichè esistono, secondo il sig. HURWITZ (5), $2^{2p} - 1$ curve di genere $P = 2p - 1$, birazionalmente distinte, rappresentate da una stessa curva doppia γ di genere p, senza elementi di diramazione.

Tuttavia la dimostrazione dell'enunciato si compie assai semplicemente, prendendo $n = 2P = 4p - 2$, nel modo seguente.

Si assuma sopra γ un arbitrario gruppo G_{2p-1}, di $2p - 1$ punti; esso appartiene ad una serie lineare completa g_{2p-1}^{p-1} (la cui dimensione è nulla nel caso $p = 1$); indichiamo la detta serie con s. Ad essa corrisponde su Θ una serie $s_1 \equiv g_{4p-2}^{p-1}$, di cui ciascun gruppo è composto con $2p - 1$ coppie dell'involuzione γ; la serie stessa è contenuta in una serie completa g_{4p-1}^{2p-1}. Ora mediante la serie g_{4p-2}^{2p-1} si trasformi la curva Θ in una curva Θ' d'ordine $4p - 2$ di un S_{2p-1}, riferendo proiettivamente gli elementi, gruppi, della serie agli iperpiani di questo spazio (per $p = 1$ la Θ' si riduce ad una retta doppia). Avremo una curva (Θ') trasformata in se stessa da un'involuzione proiettiva, la γ; per questa involuzione si avrà un primo spazio S_{p-1} di punti uniti (non secante la curva), base pel sistema ∞^{p-1} degli iperpiani che segano sulla Θ' la serie s_1; esisterà

(5) *Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten.* Questi Annalen, Bd. 39.

dunque un secondo spazio S_{p-1} di punti uniti, e gli iperpiani per esso determineranno su Θ', e quindi su Θ, una seconda serie s_1', contenuta nella g^{2p-1}_{4p-2} completa, di cui ciascun gruppo sarà composto con $2p-1$ coppie dell'involuzione γ.

Ora alla serie s_1' corrisponde su γ una serie completa $s \equiv g^{p-1}_{2p-1}$, diversa dalla s, e quindi non avente con essa alcun gruppo comune. Alla serie g^{2p-1}_{4p-2} di Θ corrisponde invece su γ una serie non lineare di gruppi di $4p-2$ punti, la quale comprende entro di sè i gruppi della s e della s' contati due volte; questa serie non lineare è però contenuta in una serie lineare (completa) g^{3p-2}_{4p-2}, contenente le serie doppie della s e della s'.

Un gruppo G_{2p-1} di s, ed un gruppo G'_{2p-1} di s', contati due volte, appartengono dunque ad una serie lineare g^1_{4p-2}. A questa g^1_{4p-2} di γ, corrisponde sopra Θ una g^1_{8p-4} ciascun gruppo della quale è composto con due gruppi coniugati (in γ) di una g^1_{4p-2}, precisamente della g^1_{4p-2} individuata dai gruppi G_{4p-2} e G'_{4p-2} corrispondenti a G_{2p-1} e G'_{2p-1}; infatti questi gruppi G_{4p-2} e G'_{4p-2}, appartenendo rispettivamente alle serie s_1 ed s_1', sono equivalenti; e poichè sono composti ciascuno di $2p-1$ coppie di γ, determinano, su Θ, una g^1_{4p-2} trasformata in se stessa dall'involuzione γ, cui corrisponde sull'ente (doppio) γ la g^1_{4p-2} innanzi nominata.

Ripetendo gli stessi ragionamenti in relazione alla curva λ, otterremo ancora sull'ente doppio γ un'altra serie completa $s'' \equiv g^{p-1}_{2p-1}$, diversa da s, tale che un qualsiasi gruppo G di s ed un qualsiasi gruppo G'' di s'', contati due volte, determineranno su γ una g^1_{4p-2}, cui corrisponderà su λ una g^1_{8p-4}, ciascun gruppo della quale sarà composto con due gruppi (coniugati) di una g^1_{4p-2} autoconiugata rispetto all'involuzione γ.

Ora le serie complete s' ed s'', di γ, non hanno gruppi comuni oppure coincidono. Nel secondo caso (che si presenta se Θ e λ sono curve birazionalmente identiche), la g^1_{4p-2} di γ cui corrisponde tanto su Θ come su λ una g^1_{8p-4} composta con una g^1_{4p-2} autoconiugata, è determinata sen'altro da due gruppi G, G', presi rispettivamente in s, s', contati due volte. Nel caso generale avremo invece, su γ, tre serie complete g^{p-1}_{2p-1}: s, s', s'', senza gruppi comuni, che contate due volte saranno contenute in una stessa g^{3p-2}_{4p-2} (serie completa doppia di s). E pel nostro scopo basterà costruire, entro la detta g^{3p-2}_{4p-2} di γ, una g^1_{4p-2} la quale contenga tre gruppi di $2p-1$ punti ciascuno, contati due volte, ed appartenenti rispettivamente alle serie s, s', s''; infatti ad una tale g^1_{4p-2} corrisponderà tanto sopra Θ come sopra λ, una g^1_{8p-4}, composta colle coppie di gruppi di una g^1_{4p-2} autoconiugata.

Ora si riferiscano proiettivamente gli elementi (gruppi) della g^{3p-2}_{4p-2} di γ ai punti di un S_{3p-2}; entro questo spazio si avranno tre varietà V_{p-1}, di dimensione $p-1$, i cui punti corrispondono ai gruppi delle serie s, s', s'', contati due volte; e le tre V_{p-1} non avranno punti comuni. Una retta

di S_{3p-2} la quale si appoggi in 3 punti (necessariamente distinti) alle tre varietà V_{p-1}, darà, entro la g^{3p-2}_{4p-2}, la serie g^1_{4p-2} domandata; e di rette siffatte, incidenti alle tre V_{p-1}, ve ne sarà certo un numero finito, anzi un numero uguale al prodotto degli ordini delle tre varietà.

Nel caso $p = 1$ il ragionamento svolto è ancora applicabile con lievi modificazioni di parole. Ma, poichè in questo caso Θ e λ sono curve ellittiche, come l'involuzione (o l'ente doppio) γ, il ragionamento si può presentare più semplicemente nella forma seguente: Ad ogni g^1_2 presa sull'ente γ, corrisponde tanto su Θ come su λ una g^1_4, la quale (in due modi) si può riguardare come composta colle coppie (coniugate in γ) di una g^1_2; e ciò stante la ben nota permutabilità di un'involuzione ellittica (γ) e di un'involuzione razionale (g^1_2) sopra una curva ellittica.

Bologna, Gennaio 1899.

XXVIII.

UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

PROGRAMMA DEL CORSO DI GEOMETRIA SUPERIORE (*)

ANNO ACCADEMICO 1897-98

« Bollettino di bibliografia e storia delle Scienze matematiche », a. II (1899) pp. 76-78.

I. - Introduzione.

1. – Curve algebriche piane - Generalità - Curve polari - Formule di PLÜCHER per singolarità ordinarie.

2. – Equazioni di condizione dei punti multipli - Definizione dei punti multipli infinitamente vicini ad un punto multiplo dato, mediante condizioni differenziali: *a*) caso dei punti multipli che si succedono su rami lineari; *b*) caso dei punti multipli sopra rami non lineari - Condizioni imposte dai punti multipli alle curve polari - Dimostrazione del teorema: i punti multipli d'una curva algebrica sono in numero finito.

3. – Condizioni lineari imposte ad una curva algebrica piana - Sistemi lineari - Punti base - Sistemi lineari determinati dal gruppo base, regolari e sovrabbondanti - Varii esempi.

Teoremi di BERTINI sui sistemi lineari riducibili e sulle singolarità delle curve d'un sistema lineare.

4. – Corrispondenza proiettiva fra gli elementi (curve) di un sistema lineare del piano, e gli elementi (punti o iperpiani) di uno spazio S_n.

5. – Curve algebriche gobbe di S_3 e di S_n - Generalità.

6. – Trasformazione razionale e birazionale di una curva piana in un'altra. - Trasformazione razionale di due piani da cui essa viene subordinata: sua costruzione geometrica, suoi elementi eccezionali.

(*) [L'interesse di questo programma, che ne giustifica la pubblicazione, appare dalla scelta degli argomenti e dal loro ordine, in rapporto con il tempo in cui è stato organizzato. Qui, per la prima volta, è fatto riferimento all'idea, che segna un notevole progresso metodologico, di definire i sistemi aggiunti e il sistema canonico per mezzo degli jacobiani: cfr. F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche* (Bologna, Zanichelli, 1949), cap. II. n. 9, p, 64.]

Decomposizione delle singolarità: *a*) prima trasformazione riducente i punti multipli d'ordine più elevato di una curva data; *b*) riduzione della curva ad un'altra dotata di soli punti doppi a tangenti distinte.

7. – Trasformazioni delle curve piane o gobbe appartenenti a spazi aventi un numero qualunque di dimensioni.

Trasformazione di una curva data in una curva gobba priva di singolarità.

II. - Geometria sopra una curva algebrica.

8. – Curve razionali - Principio di corrispondenza - Funzioni razionali e involuzioni lineari - Teorema di LÜROTH.

9. – Funzioni razionali sopra una curva e serie lineari g_n^r - Varie trasformazioni di una curva in relazione ad una o più serie lineari di essa - Serie semplici e composte - Esempi.

10. – Il discriminante di una funzione razionale sopra una curva - Coincidenze di una g_m^1 - Genere.

11. – Serie lineari complete e curve normali.

12. – Operazioni elementari di somma e sottrazione delle serie lineari complete - Teorema del resto (1ª parte).

13. – I gruppi delle coincidenze di una serie g_n^r appartengono ad una serie lineare $g_{2p-2+2n}$ (*aggiunta di rango* 1 *alla data*) - Relazione fondamentale:

$$g_{2p-2+2n} - 2g_n \equiv g_{2p-2+2m} - 2g_m .$$

Serie canonica: sua definizione algebrica in relazione al discriminante di una funzione razionale sopra la curva.

14. – Curve aggiunte ad una curva piana - Teorema algebrico fondamentale - Le curve aggiunte segano sopra una curva piana una serie completa - Teorema del resto (2ª parte).

15. – Serie g_n^r speciali - Teorema di riduzione - Teorema di RIEMANN-ROCH - Corollari ed esempii.

16. – Classificazione delle curve - Curve di genere 0, 1, 2, ... - Curve iperellittiche - Curve tipiche - Moduli.

III. - Geometria sopra il piano.

17. – Trasformazioni birazionali o cremoniane fra due piani - Relazioni fondamentali - Decomposizione di una trasformazione cremoniana in fattori quadratici.

Applicazione alla riduzione delle singolarità di una curva.

18. – I sistemi lineari di curve piane rispetto alle trasformazioni cremoniane - Serie caratteristica - Sistema aggiunto.

19. – Riduzione a tipi dei sistemi lineari di curve razionali ed ellittiche - Costruzione geometrica dei fasci di HALPHEN.

Riduzione dei sistemi lineari semplici di curve iperellittiche.

20. – Le superficie razionali e i sistemi lineari di curve piane - Studio di alcune rappresentazioni piane di superficie razionali.

21. – Teorema di KRONECKER-CASTELNUOVO sulle superficie le cui sezioni piane tangenti sono riducibili.

Superficie a sezioni razionali: teorema di PICARD - Superficie a sezioni ellittiche: teorema di CASTELNUOVO-DEL PEZZO.

22. – Enunciato del teorema di razionalità delle involuzioni piane.

Superficie a sezioni iperellittiche (loro proprietà proiettiva).

23. – Gruppi finiti di trasformazioni birazionali del piano - Procedimento di riduzione di CANTOR - I tipi delle involuzioni di BERTINI.

24. – Trasformazione [2, 1] tra due piani - Piani doppi - Piani doppi razionali.

25. – Teorema di NOETHER sopra le superficie contenenti un fascio lineare di curve razionali.

26. – Gruppi continui di trasformazioni birazionali del piano. - Superficie con infinite trasformazioni proiettive in se stesse.

AVVERTENZE. – Il programma sopra indicato fu svolto innanzi a un uditorio di giovani in parte familiari con questioni geometriche. Data la definizione analitica *diretta* delle singolarità superiori ed i teoremi di riduzione, le difficoltà proiettive, dipendenti dal complicarsi delle singolarità, furono sistematicamente lasciate da parte, ma segnalate all'attenzione degli studiosi.

Il programma (II), relativo alla Geometria sopra una curva, rappresenta un tentativo di fusione dei due indirizzi secondo cui la teoria può essere svolta (vedansi p. es. le monografie dei sigg. SEGRE e BERTINI, « Annali di Matematica », 1894), colla tendenza a rilevare maggiormente il contenuto algebrico delle definizioni e dei teoremi. L'esperienza mi ha dimostrato che ciò contribuisce anche alla chiarezza; così p. es. mi sembra che la definizione algebrica delle serie lineari, mediante le funzioni razionali sopra una curva, riesca più luminosa di ogni altra, e conduca nel modo più spedito al teorema fondamentale sulle serie complete. Semplice pure e luminosa mi sembra la nuova dimostrazione, indicata al n. 13, per l'invarianza della serie canonica definita in relazione al discriminante di una funzione razionale sulla curva.

XXIX.

SUR UNE CLASSE DE SURFACES ALGÉBRIQUES

par GUIDO CASTELNUOVO et FEDERIGO ENRIQUES

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », to. CXXXI (1900),

pp. 739-742.

On connaît plusieurs résultats concernant les surfaces algébriques qui contiennent une série linéaire de courbes, dont le genre π est assez petit par rapport à la dimension. Surtout les cas correspondant aux premières valeurs de π ($\pi = 0, 1, 2$) ont fait l'objet de nombreuses recherches. Nos études récentes sur les surfaces nous ont amenés à une proposition tout à fait générale qui renferme les résultats rappelés ci-dessus, et d'où l'on peut déduire des corollaires fort intéressants:

Si une surface algébrique contient un système linéaire de courbes C de genre $\pi > 0$ *se coupant deux à deux en n points, où*

$$n > 2\pi - 2 ,$$

la surface est rationnelle ou bien elle peut être ramenée (par une transformation birationnelle) *à un cylindre* $f(x, y) = 0$ *de genre* $p > 0$.

Lorsque les courbes C ont des points fixes multiples, il faut évaluer les nombres n et π en tenant compte des ordres de multiplicité de ces points.

On parvient au théorème énoncé par le procédé de réduction, dont nous avons fait usage en plusieurs recherches, qui consiste à remplacer le système des courbes C par son *adjoint*, et ainsi de suite.

Ce résultat découle d'un examen approfondi du dernier système adjoint auquel on est amené.

En laissant de côté les explications assez longues que le sujet exigerait, qu'il nous soit permis d'appeler l'attention sur quelques conséquences remarquables du théorème énoncé.

1. – *Si une surface algébrique contient une série continue de courbes rationnelles C, la surface est elle-même rationnelle, ou bien elle peut être ramenée à un cylindre de genre supérieur à zéro.*

On peut justifier cette proposition en distinguant deux cas:

a) Si les courbes C forment un *faisceau* (c'est-à-dire qu'il passe *une* courbe par chaque point de la surface) la transformation de la surface en un cylindre est déjà connue.

b) Dans le cas contraire, on sait, d'après M. HUMBERT, que les courbes C seront contenues dans un système linéaire de dimension > 1; et le système aura le genre π si les C ont π points doubles mobiles, tandis que deux courbes du système (ou deux C) se couperont en $n > 2\pi - 2$ points, comme il est facile de le reconnaître. C'est dont le cas d'appliquer notre proposition.

On peut aussi énoncer le théorème (1) sous une autre forme remarquable:

Si les coordonnées des points d'une surface

$$f(x, y, z) = 0$$

sont des fonctions rationnelles de

$$X, Y, Z \qquad \text{où} \qquad F(X, Y) = 0\,,$$

$$(\alpha) \qquad x = \psi_1(X, Y, Z)\,, \quad y = \psi_2(X, Y, Z)\,, \quad z = \psi_3(X, Y, Z)\,,$$

et si les formules (α) ne sont pas invertibles d'une manière rationnelle, on pourra toujours exprimer x, y, z par des fonctions rationnelles de trois nouveaux paramètres u, v, w, liés par une relation de la forme

$$\varphi(u, v) = 0\,,$$

et cela de telle sorte que u, v, w s'expriment à leur tour par des fonctions rationnelles de x, y, z.

Lorsque l'équation $F(X, Y) = 0$ se réduit à $X = 0$, on a la proposition bien connue concernant la *rationalité des involutions planes.*

2. – Une seconde application du théorème concerne la *détermination des surfaces admettant une série de transformations birationnelles en elles-mêmes, qui n'engendrent pas un groupe d'ordre fini: ces surfaces sont rationnelles ou bien elles peuvent être ramenées à des cylindres.*

Ainsi se trouve comblée la seule lacune que les profondes et belles recherches de MM. PICARD et PAINLEVÉ laissaient encore subsister dans

la théorie des surfaces admettant une série continue de transformations birationnelles en elles-mêmes.

Il est aisé de déduire la proposition (2) de notre théorème général.

Soit F une surface d'un certain ordre n, admettant une série continue de transformations birationnelles en elle-même.

Lorsque ces transformations n'engendrent pas un groupe d'ordre fini, en les multipliant entre elles on aura une série ∞^r de transformations pour chaque valeur arbitrairement grande du nombre r.

Appliquons maintenant ces ∞^r transformations aux courbes C sections planes de F, dont le genre sera désigné par π.

Nous obtiendrons une série de systèmes linéaires; chaque système sera composé de courbes C_r de genre π se coupant deux à deux en n points mobiles et ayant des points bases doués de certaines multiplicités $i_1, i_2, \ldots$; on aura

$$\Sigma i > n - (2\pi - 2) ,$$

lorsque r est assez grand.

Or toutes les courbes C_r appartiendront à un même système linéaire de courbes de genre $\Pi = \pi + \sum i(i-1)/2$, se coupant deux à deux en $N = n + \Sigma i^2$ points, et il y aura lieu d'appliquer notre proposition, puisqu'il résulte

$$N > 2\Pi - 2 .$$

(5 novembre 1900).

XXX.

SULLE CONDIZIONI DI RAZIONALITÀ DEI PIANI DOPPI

di GUIDO CASTELNUOVO e FEDERIGO ENRIQUES

« Rend. del Circolo Matematico di Palermo », to. XIV (1900), pp. 290-302.

I piani doppi $\{x, y, \sqrt{f(xy)}\}$ che sono razionali [tali adunque che esista una sostituzione razionale $x = \varphi(XY)$, $y = \psi(XY)$ trasformante il polinomio f in un quadrato perfetto (1)], dànno luogo a tre *tipi* irriducibili, in cui la *curva di diramazione* $f = 0$ è rispettivamente:

1) una curva C_{2n} d'un certo ordine $2n$ dotata d'un punto $(2n-2)$-plo;

2) una quartica generale C_4;

3) una sestica C_6 dotata di due punti tripli infinitamente vicini.

La razionalità dei piani doppi di questi tipi è stata dimostrata da CLEBSCH e NOETHER, in relazione alla bisezione degli argomenti delle funzioni abeliane appartenenti alle curve di diramazione sopra nominate.

Il sig. NOETHER ha poi dato il teorema (2): Se un piano doppio $\{x, y, \sqrt{f(xy)}\}$ è razionale, la sua curva di diramazione si può trasformare, con una trasformazione birazionale del piano (xy), in una C_{2n} o in una C_4 o in una C_6 appartenenti ai tre tipi menzionati.

Ma, a vero dire, il ragionamento con cui l'Autore è pervenuto a quest'ultima importante proposizione, mentre non appare chiaramente espresso nella breve Nota di lui, lascia anche nella sua mente il dubbio, francamente dichiarato, intorno alla possibile esistenza di qualche altro piano doppio razionale dotato di caratteri singolarissimi.

Ad escludere questo dubbio vale una dimostrazione indiretta della proposizione in parola fondata sopra la conoscenza dei tre tipi, a cui il

---

(1) La condizione *d'invertibilità* della trasformazione può ritenersi superflua in base al teorema della razionalità delle involuzioni piane.

(2) NOETHER, *Über die ein-zweideutigen Ebenentransformationen* (« Sitzungsberichte der physik. medicin. Soc. zu Erlangen », 14 Januar 1878).

sig. BERTINI ridusse le involuzioni piane di coppie di punti (3); infatti ogni piano doppio razionale può farsi nascere, per mezzo di una trasformazione [2, 1], da una involuzione che può supporsi ridotta ad uno dei tre tipi nominati (4). E poichè le ricerche dei signori KANTOR, CASTELNUOVO, WIMAN hanno ormai rigorosamente giustificata la riduzione a tipi del sig. BERTINI (ottenuta dall'Autore con un procedimento che lasciava qualche lacuna), anche la classificazione dei piani doppi razionali si palesa così sicuramente completa.

Una nuova dimostrazione diretta e luminosa, costituente la vera via maestra per giungere a questo resultato, scaturisce dal procedimento assai semplice che esponiamo nella presente Nota. Il qual procedimento ci ha condotti invero ad un teorema di più larga portata esprimente le condizioni di razionalità (o di riferibilità ad una rigata) di un piano doppio; un teorema che permette di verificare questa razionalità, qualunque sia la curva di diramazione assegnata, decidendo a priori la questione della sua trasformabilità in una delle curve C_{2n}, C_4, C_6 sopra nominate:

Le condizioni perchè un piano doppio $\{x, y, \sqrt{f_{2n}(xy)}\}$ *sia razionale o rappresenti una rigata, sono espresse dalla non esistenza di curve d'ordine* $2n-6$, $2n-9$, ..., *aggiunte rispettivamente d'indice* 2, 3, ... *alla curva di diramazione, fatte però le opportune convenzioni sul modo di computare i punti multipli d'ordine dispari della detta curva* (cfr. n. 1).

Si può anche distinguere facilmente il caso della razionalità del piano doppio, dal caso in cui esso rappresenti una rigata di genere $p > 0$, poichè in quest'ultimo caso la curva di diramazione consterà di $2p+2$ curve razionali, costituenti insieme una curva di genere virtuale $-(2p+1)$, laddove la curva di diramazione di un piano doppio razionale ha sempre il genere virtuale $\geqslant -1$.

Introducendo la nozione dei *generi* o *plurigeneri* di una superficie [*genere* $P_1 = p_g$, cioè numero delle superficie φ_{n-4}, d'ordine $n-4$, linearmente indipendenti, che sono *aggiunte* ad una superficie F_n d'ordine n; *bigenere* P_2, cioè numero delle φ_{2n-8}, d'ordine $2n-8$, *biaggiunte* ad F_n, ... (5)], si ha il teorema:

Le condizioni perchè un piano doppio con curva di diramazione C_{2n}, *d'ordine* $2n$, *sia razionale o rappresenti una rigata, sono espresse dall'annul-*

(3) *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano* [« Annali di Matematica », s. II, t. VIII (1877), pp. 244-286]. Cfr. una Nota dello stesso Autore nei « Rendiconti del R. Istituto Lombardo », s. II, v. XIII (1880).

(4) Cfr. BERTINI, *Deduzione delle trasformazioni piane doppie dai tipi fondamentali delle involutorie* [« Rendiconti del R. Istituto Lombardo », serie II, v. XXII (1889), pp. 771-778].

(5) Cfr. ENRIQUES, *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* [« Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL) », s. III, t. X (1896)], §§ 38, 39 [queste *Memorie*, vol. I, XIII]; CASTELNUOVO e ENRIQUES, *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques* [« Mathematische Annalen », Bd. 48 (1897)], n. 30 [queste *Memorie*, vol. I, XVII].

larsi dei plurigeneri $P_2, P_3, P_{[2n/3]}$ (designando con $[2n/3]$ il massimo intero contenuto in $2n/3$).

Può darsi del resto che queste condizioni dipendano dall'annullamento di un minor numero di generi $P_2, P_3, \ldots$ Forse anzi dall'essere soltanto $P_2 = 0$ potrebbe trarsi come conseguenza $P_3 = P_4 = \ldots = P_{[2n/3]} = 0$.

Questo teorema ha notevoli applicazioni nello studio delle superficie contenenti sistemi lineari di curve ellittiche o iperellittiche (cfr. n. 5); ed il procedimento, che ad esso conduce, si manifesta utilissimo per la trattazione di varie questioni legate alle trasformazioni cremoniane del piano (n. 6).

1. – Dobbiamo ricordare anzitutto alcune nozioni d'indole generale sui piani doppi.

Abbiasi un piano doppio $\{x, y, \sqrt{f(xy)}\}$. La sua curva di diramazione sarà sempre una curva C_{2n}, di un certo ordine pari $2n$ (poichè alla $f = 0$ si deve aggiungere la retta all'infinito, se f è di grado dispari), ed inoltre si potrà supporre priva di componenti multiple, poichè una componente che entrasse più volte in C_{2n}, potrebbe sempre togliersi un numero pari di volte.

Ora se, nel piano (xy), si eseguisce una trasformazione birazionale, il piano doppio $\{x, y, \sqrt{f(xy)}\}$ si cambia in un altro piano doppio $\{X, Y, \sqrt{F(XY)}\}$ avente come curva di diramazione una curva C_{2m}, d'un certo ordine pari $2m$, *trasformata* della C_{2n}. Ma il significato della parola *trasformata* è qui un po' diverso dal significato abituale, giacchè occorre tener conto di quelle curve fondamentali del piano (XY), che nascono nella trasformazione da punti di C_{2n} [fondamentali pel piano (xy)]; precisamente se una di queste curve proviene da un punto r-plo di C_{2n}, essa dovrebbe esser computata r volte come componente della trasformata di C_{2m}. Siccome però nella detta trasformata si possono sopprimere tutte le componenti che vi entrano un numero pari di volte, si può dire in fine che la C_{2m}, trasformata della C_{2n}, consta della curva trasformata in senso proprio e delle curve fondamentali nascenti dai punti multipli d'ordine dispari della C_{2n} (curve da contarsi una sola volta).

Così essendo fissate le cose, si potrà sempre *trasformare* la C_{2n} in una curva C_{2m}, d'ordine pari $2m$, dotata soltanto di punti multipli d'ordine pari e distinti. Relativamente alla C_{2m} si potranno considerare le curve C_{2m-3}, d'ordine $2m-3$, aggiunte (d'indice 1), le C_{2m-6}, d'ordine $2m-6$, aggiunte delle aggiunte (aggiunte d'indice 2 alla C_{2m}), ecc.

Ora le nominate curve $C_{2m-3}, C_{2m-6}, \ldots$, aggiunte (d'indice 1, 2, ...) alla C_{2m}, hanno carattere invariante relativamente ad ogni trasformazione birazionale del piano che muti la C_{2m} in una curva (d'ordine pari) dotata di punti multipli d'ordine pari, purchè si tenga conto delle eventuali

curve (fondamentali) che nascessero da punti semplici della C_{2m}, scelti come fondamentali per la trasformazione. Se invece la C_{2m} si trasforma in una C_{2n} avente un punto multiplo O d'ordine dispari $(2i+1)$, il punto O viene a corrispondere ad una curva fondamentale facente parte della C_{2m}; e, secondochè tale curva appartiene o no alle aggiunte C_{2m-3}, C_{2m-6}, ..., le curve C_{2n-3}, C_{2n-6}, ..., trasformate di queste, si comporteranno in O come le aggiunte, o avranno in O una molteplicità inferiore di una unità a quella delle aggiunte.

È lecito ancora di riguardare le C_{2n-3}, C_{2n-6}, ..., come curve *aggiunte* (d'indice 1, 2, ...) alla C_{2n}, purchè si faccia una opportuna convenzione relativamente ai punti multipli d'ordine dispari della curva, attribuendo loro una *molteplicità virtuale*, che può differire di un'unità da quella effettiva. Quale sia questa molteplicità virtuale dei punti della C_{2n} risulta, in tutti i casi, dal comportamento delle curve C_{2n-3} (o delle C_{2n-6}, ...) che si è detto di voler considerare come aggiunte alla C_{2n}, cioè dal comportamento di quelle curve che si trasformano in aggiunte alla C_{2m}, quando la C_{2n} si trasforma in una curva C_{2m} dotata soltanto di punti multipli d'ordine pari.

Del resto è facile determinarla nei casi più semplici:

Ogni punto multiplo d'ordine $2i+1$ della C_{2n} avrà per convenzione la molteplicità virtuale $2i$, tranne quando al punto stesso sia infinitamente vicino un altro punto $(2i+1)$-plo, nel qual caso la molteplicità virtuale del primo punto (e quella del suo infinitamente vicino) sarà, come l'effettiva, $2i+1$.

Quest'affermazione vale soltanto se si tratta di un *punto* multiplo nel senso proprio della parola; se il punto (O') di cui si discorre è esso stesso nell'intorno di 1° ordine di un altro punto O, la molteplicità virtuale di O' sarà $2i$ o $2i+1$, secondochè O ha una molteplicità d'ordine pari oppure d'ordine dispari.

Pel nostro scopo non è necessario andare più oltre, assegnando la molteplicità virtuale dei punti di C_{2n} che si trovino in un intorno d'ordine superiore di un *punto* multiplo (nel senso proprio della parola). Del resto tale questione, legata alla ricerca dell'influenza delle singolarità di C_{2n} sui generi del piano doppio (cfr. n. 4), ha già ricevuto una risposta nel caso, assai ampio, in cui le singolarità della C_{2n} possano ritenersi tutte definite mediante cicli lineari [6].

---

[6] Cfr. ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)}=1$ (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », Aprile 1898) [queste *Memorie*, vol. I, XXII]. La valutazione del genere di un piano doppio quando la curva di diramazione abbia punti multipli distinti, e l'osservazione che un punto $(2i+1)$-plo figura in tal caso come fosse $(2i)$-plo, trovasi già in NOETHER (« Göttinger Nachrichten », 7 Juni 1871). Più tardi, nella citata Nota di Erlangen (1878), il sig. NOETHER stesso fu condotto a considerare la particolarità proveniente da due punti $(2i+1)$-pli infinitamente vicini.

2. – Premesse, per chiarezza, queste nozioni, consideriamo una curva C_{2n}, data come curva di diramazione di un piano doppio, e attribuiamo ai punti multipli della C_{2n} le *molteplicità virtuali* secondo le convenzioni fatte innanzi.

Supponiamo ora che la C_{2n} sia priva di curve aggiunte di tutti gli indici 1, 2, 3, ..., ed esaminiamo quali conseguenze discendano da questa ipotesi. In relazione alla forma del numero n rispetto al modulo 3, avremo da considerare tre casi:

$$A)\ 2n = 6m\,, \qquad B)\ 2n = 6m + 2\,, \qquad C)\ 2n = 6m + 4\,.$$

Supporremo inoltre, tranne nell'ultimo caso, che sia $m > 0$, salvo ad esaminare in seguito i casi corrispondenti alla negazione di questa ipotesi, o di quelle che via via aggiungeremo.

IPOTESI *A*. – La mancanza di curve (d'ordine 0) aggiunte d'indice $2m$ alla C_{6m} porta che la C_{6m} abbia (almeno) un punto di molteplicità $\geqslant 2m + 1$. Il punto O della C_{6m} la cui molteplicità (virtuale) è massima, avrà dunque una certa molteplicità virtuale:

$$a)\ 2m + 2s + 1\,, \quad \text{o} \quad a')\ 2m + 2s + 2\,, \quad \text{ove} \quad s \geqslant 0;$$

e nella prima ipotesi la C_{6m} possederà (n. 1) due punti $(2m + 2s + 1)$-pli infinitamente vicini. *Supposto* (per ora) $s < 2m - 1$, teniamo conto della condizione di non esistenza delle curve C_{3s+3} aggiunte d'indice $2m - s - 1$ alla C_{6m}.

a) Per effetto dei punti multipli già menzionati della C_{6m}, ogni C_{3s+3} si ridurrebbe nella prima ipotesi ad una retta r [congiungente i punti $(2m + 2s + 1)$-pli infinitamente vicini] da contarsi $3s + 1$ volte, e ad una conica tangente alla retta in quei punti; per escludere l'esistenza della C_{3s+3} è necessario dunque che la C_{6m} abbia qualche punto di molteplicità $\geqslant 2m - s$ fuori della retta r. Allora però, mediante le coniche passanti per i due punti $(2m + 2s + 1)$-pli infinitamente vicini di C_{6m} e per uno degli ultimi punti multipli nominati, si riesce a trasformare la C_{6m} in una curva d'ordine inferiore.

a') Se il punto O della C_{6m} ha la molteplicità $2m + 2s + 2$, ogni C_{3s+3} aggiunta d'indice $2m - s - 1$ alla C_{6m} si ridurrebbe ad un gruppo di $3s + 3$ rette per O. Ad escludere l'esistenza di una C_{3s+3} occorre dunque ammettere che la C_{6m} sia dotata di (almeno) $3s + 4$ punti $(2m - s)$-pli, fra i quali non si trovino due punti allineati con O; questi punti, come subito si verifica, non potranno tutti cadere nell'intorno di primo ordine del punto O. Del resto potrebbe darsi che due dei detti punti venissero sostituiti da un punto $(2m - s + 1)$-plo, oppure tre da un punto

$(2m - s + 2)$-plo, ecc.; ma tutti questi casi sarebbero sempre più favorevoli pel nostro scopo. Ci metteremo dunque nella peggiore ipotesi supponendo che la C_{6m} abbia, oltre O (che ha l'ordine $2m + 2s + 2$), dei punti $(2m - s)$-pli, e non punti di molteplicità superiore. Ora se s è pari, le coniche passanti per O e per due punti siffatti permettono di trasformare la C_{6m} in una C_{6m-2}; se s è dispari, i punti $(2m - s)$-pli di C_{6m} saranno a coppie infinitamente vicini, e le coniche passanti per i punti di una tale coppia e per O permetteranno ugualmente di trasformare la C_{6m} in una C_{6m-2}.

IPOTESI *B*. – La mancanza di coniche aggiunte d'indice $2m$ alla C_{6m+2}, porta che la C_{6m+2} abbia dei punti di molteplicità non inferiore a $2m + 1$.

Se la più alta molteplicità dei punti di C_{6m+2} è appunto $2m + 1$, si avranno 6 punti $(2m + 1)$-pli a coppie infinitamente vicini (n. 1) e non appartenenti ad una conica. Allora adoperando le quintiche (componenti una rete omaloidica), che hanno come doppi i nominati 6 punti, si riesce a trasformare la C_{6m+2} in una curva d'ordine $6m - 2$.

Se vi sono punti della C_{6m+2} di molteplicità più elevata, possiamo supporre che il punto O di più alta molteplicità per la C_{6m+2} abbia la molteplicità virtuale:

b) $2m + 2s + 1$ con $s \geqslant 1$, o *b'*) $2m + 2s + 2$, con $s \geqslant 0$.

Supporremo $s < 2m$.

b) Nella 1ª ipotesi si avranno due punti $(2m + 2s + 1)$-pli infinitamente vicini (n. 1) della C_{6m+2}. Una C_{3s+2} aggiunta d'indice $2m - s$ alla C_{6m+2} dovrebbe avere questi punti come $(3s + 1)$-pli, e quindi si spezzerebbe in una retta r da contarsi $3s$ volte e in una conica tangente ad r. Ad escludere l'esistenza di una tale C_{3s+2} occorre dunque che la C_{6m+2} abbia qualche punto di molteplicità $2m - s + 1$ (o superiore) fuori di r. Allora le coniche passanti pei due punti $(2m + 2s + 1)$-pli infinitamente vicini e per uno dei punti nominati fuori di r, permettono di abbassare l'ordine della C_{6m+2} [cfr. il caso *a*)].

b') Se O è $(2m + 2s + 2)$-plo per la C_{6m+2} (con $s \geqslant 0$), una C_{3s+2} aggiunta d'indice $2m - s$ alla C_{6m+2} dovrebbe essere composta di $3s + 2$ rette per O. Ad escludere l'esistenza di una siffatta C_{3s+2} bisogna dunque ammettere che la C_{6m+2} sia dotata di (almeno) $3s + 3$ punti di molteplicità $2m - s + 1$, fra i quali non si trovino due allineati con O, e che non potranno cadere tutti nell'intorno di 1° ordine di O. Allora la C_{6m+2} si può trasformare in una curva d'ordine $6m$ mediante le coniche passanti per il punto O e per due dei nominati punti $(2m - s + 1)$-pli; occorre sceglier questi due ultimi infinitamente vicini tra loro, dato che s sia pari, come è certo possibile in questa ipotesi [cfr. il caso *a'*)].

IPOTESI *C*. – La mancanza di rette aggiunte d'indice $2m+1$ alla C_{6m+4} porta che la C_{6m+4} abbia almeno tre punti $(2m+2)$-pli non allineati, oppure punti di molteplicità superiore. Se la C_{6m+4} ha tre punti $(2m+2)$-pli, il suo ordine si abbassa di due unità con una trasformazione quadratica. Supposto invece che la C_{6m+4} abbia un punto O di molteplicità superiore, conviene distinguere i due casi in cui O abbia la molteplicità virtuale:

$c)$ $(2m+2s+1)$, con $s \geqslant 1$, o $c')$ $(2m+2s+2)$, con $s \geqslant 0$.

Supporremo per ora, in ogni caso, $s < 2m+1$.

$c)$ Nel 1° caso la C_{6m+4} avrà due punti $(2m+2s+1)$-pli infinitamente vicini (n. 1), e, per la mancanza delle curve C_{3s+1} aggiunte d'indice $2m-s+1$, possederà altri punti $(2m-s+2)$-pli fuori della retta congiungente i punti multipli sopra nominati, sicchè l'ordine della C_{6m+4} potrà sempre abbassarsi con una trasformazione quadratica [cfr. i casi $a)$ e $b)$].

$c')$ Nel 2° caso la mancanza di curve C_{3s+1} aggiunte d'indice $2m-s+1$ alla C_{6m+4}, porterà l'esistenza di punti di molteplicità $2m-s+2$ per la C_{6m+4}, i quali saranno a coppie infinitamente vicini (n. 1), se s è dispari; e tra questi punti si potranno sempre scegliere due che, insieme al punto $(2m+2s+2)$-plo O, sieno base per una rete di coniche, la quale permetta di trasformare la C_{6m+4} in una curva d'ordine inferiore [cfr. i casi $a')$ e $b')$].

Dalle considerazioni ora svolte in relazione ai tre casi A, B e C segue adunque che il processo di riduzione della C_{2n} $(2n = 6m, 6m+2, 6m+4)$ si arresterà soltanto quando sieno contraddette le ipotesi fatte per via, le quali possono così riassumersi: si è supposto $m > 0$ nei casi A e B, inoltre si è supposto $s < 2m-1$, $2m$, $2m+1$ nei casi A, B, C, rispettivamente. Quel processo di riduzione si arresterà dunque, quando si abbia $2n = 2$, oppure quando la C_{2n} possegga un punto $2n$-plo o due punti $(2n-1)$-pli infinitamente vicini, e in questi soli casi. Ma l'ultima ipotesi per $n > 1$ porterebbe la riducibilità di C_{2n}, dalla quale si staccherebbe una retta contata $2n-2 \geqslant 2$ volte; e perciò essa deve essere esclusa.

Concludiamo pertanto:

« Se la C_{2n} è affatto priva di curve aggiunte d'indice 1, 2, 3, ..., essa può trasformarsi con una trasformazione birazionale di tutto il piano:

« 1) in una conica,

« 2) oppure in un gruppo di un numero pari di rette uscenti da un punto ».

3. – Il processo di riduzione spiegato innanzi è ancora applicabile se mancano le curve aggiunte alla C_{2n} degli indici 2, 3, ..., pure esistendo quelle d'indice 1; soltanto il processo medesimo in questa ipotesi si arresta prima.

Distinguendo ancora i 3 casi:

$$2n = 6m\,, \qquad 2n = 6m + 2\,, \qquad 2n = 6m + 4\,,$$

vediamo anzitutto che la riduzione non è ora più possibile quando $m = 0$, neppure nel 3° caso. Inoltre le diseguaglianze, a cui debbono soddisfare le molteplicità $2m + 2s + 1$ o $2m + 2s + 2$ dei punti di massima molteplicità della C_{2n}, affinchè la riduzione sia possibile, diventano qui più espressive, avendosi rispettivamente nei tre casi:

$$s < 2m - 2\,, \qquad s < 2m - 1\,, \qquad s < 2m\,.$$

Si conclude dunque che il procedimento di riduzione della C_{2n} si arresterà soltanto quando la C_{2n} sia divenuta una quartica, oppure quando essa ammetta un punto $(2n-2)$-plo, o due punti $(2n-3)$-pli infinitamente vicini. L'ultima ipotesi, volendo escludere che dalla C_{2n} si distacchi una retta contata un numero pari $(= 2n - 6)$ di volte, porta $2n \leqslant 6$.

Si arriva quindi alla conclusione:

« Se la C_{2n} è priva di curve aggiunte degli indici 2, 3, ..., essa può trasformarsi con una trasformazione birazionale del piano:

« 1) in una curva di un certo ordine 2ν $(\nu = 1, 2, ...)$ dotata di un punto di molteplicità $2\nu - 2$ o di molteplicità superiore;

« 2) in una quartica piana C_4, affatto generale;

« 3) in una sestica C_6 con due punti tripli infinitamente vicini ».

E poichè i piani doppi aventi come curva di diramazione una delle nominate $C_{2\nu}$, C_4, C_6, sono razionali o rappresentano rigate (casi particolari corrispondenti all'elevarsi delle molteplicità dei punti della $C_{2\nu}$, o all'esistenza di ulteriori singolarità per la C_4 o per la C_6), così abbiamo il teorema:

Se la curva di diramazione C_{2n} di un piano doppio è affatto priva di curve aggiunte C_{2n-6}, C_{2n-9}, ... degli indici 2, 3, ..., il piano doppio è razionale o rappresenta una rigata.

4. – Allo scopo di invertire il resultato ottenuto, giova considerare il significato delle curve successivamente aggiunte alla curva di diramazione C_{2n} di un piano doppio, significato relativo alla superficie rappresentata sul piano doppio.

L'equazione di questa superficie, F_{2n}, può mettersi sotto la forma:

$$z^2 = f_{2n}(xy) ,$$

ove f_{2n} è un polinomio di grado $2n$ in x, y, che, posto $= 0$, rappresenta la C_{2n}.

Allora consideriamo i coni proiettanti dal punto all'infinito dell'asse z le C_{2n-6} aggiunte, d'indice 2, alla C_{2n}; ciascuno di essi sommato al piano all'infinito contato $2n-2$ volte, costituisce una superficie φ_{4n-8}, d'ordine $4n-8$, la quale è biaggiunta rispetto alla F_{2n}.

Questa affermazione si giustifica osservando il comportamento della φ_{4n-8} rispetto ai punti multipli della F_{2n}. La verifica riesce facile nel caso che la C_{2n} abbia soltanto punti multipli d'ordine pari e distinti fra loro, mentre l'estensione del resultato al caso generale si può ottenere facendo uso di un'opportuna trasformazione del piano, che muti (ove occorra) la C_{2n} in un'altra curva dotata soltanto di punti multipli d'ordine pari e distinti.

Invero i punti multipli della superficie F_{2n} cadono soltanto:

1) nel punto all'infinito dell'asse z, che è un punto $(2n-2)$-plo particolare caratterizzato dal fatto che un piano generico passante per esso sega la superficie in una curva avente $n-1$ punti doppi nell'intorno di primo ordine del detto punto $(2n-2)$-plo, i quali congiunti al punto stesso dànno $n-1$ rette coincidenti colla retta all'infinito del piano secante;

2) nei punti multipli della C_{2n}, che sono punti doppi *particolari* per la F_{2n}; precisamente uno di questi punti doppi, che sia $2i$-plo per la C_{2n} e nell'intorno del quale non cadano altri punti multipli della curva, resta definito per la F_{2n} dalla *particolarità* che un piano generico passante pel detto punto sega la F_{2n} lungo una curva avente infinitamente vicini al detto punto doppio altri $i-1$ punti doppi *successivi* sopra la retta intersezione del piano nominato col piano della C_{2n}.

Si può quindi verificare che la φ_{4n-8} è biaggiunta alla F_{2n} (cioè si comporta come due superficie aggiunte prese insieme), osservando che, sopra ogni piano per uno (O) dei nominati punti singolari della F_{2n}, la φ_{4n-8} sega una curva che, presa insieme con due rette per O, costituisce una curva biaggiunta alla sezione piana di F_{2n} [7].

Ora possiamo dunque dire che le C_{2n-6}, aggiunte d'indice 2 alla C_{2n}, rappresentano, sul piano doppio, quelle particolari *curve bicanoniche* della F_{2n}, la cui immagine sul piano stesso è doppia [8]; pertanto il numero

[7] Cfr. ENRIQUES, *Introduzione etc.*, §§ 31 e 39.
[8] Cfr. ENRIQUES, *Sui piani doppi etc.*

delle C_{2n-6} linearmente indipendenti non sarà inferiore al *bigenere* P_2 della superficie.

Similmente si può vedere che il cono proiettante dal punto all'infinito dell'asse z una C_{2n-9}, aggiunta d'indice 3 alla C_{2n}, sommato al piano $(z = 0)$ della C_{2n}, e al piano all'infinito, contato $4n - 4$ volte, costituisce una superficie F_{6n-12} *triaggiunta* alla F_{2n}, sicchè la C_{2n} sommata ad una C_{2n-9} rappresenta sul piano doppio una *curva tricanonica.*

In generale la C_{2n} contata s volte, presa insieme ad una curva aggiunta d'indice $s + 2$, rappresenta una curva $(s + 2)$-*canonica* della F_{2n}. Pertanto se mancano le curve pluricanoniche della F_{2n} fino all'ordine $[2n/3]$, cioè se sono nulli i plurigeneri P_2, P_3, ... $P_{[2n/3]}$, la C_{2n} è affatto priva di curve aggiunte degli indici 2, 3, ...

Di qui si deduce (confrontando col resultato del n. 3):

Se per un piano doppio dotato di una curva di diramazione d'ordine $2n$, *sono nulli tutti i plurigeneri* $P_2, P_3, \ldots P_{[2n/3]}$, *il piano doppio è razionale o rappresenta una rigata.*

L'inversa è pur vera, giacchè è noto che ogni piano doppio (o superficie) che sia razionale o riferibile ad una rigata, ha nulli tutti i plurigeneri. Donde segue che la curva di diramazione del piano doppio mancherà delle curve aggiunte degli indici 2, 3, ...; osservazione questa che (in virtù del processo di riduzione del n. 3) dimostra e completa il teorema del sig. NOETHER:

La curva di diramazione di un piano doppio razionale, o rappresentante una rigata, può sempre ridursi, mediante una trasformazione birazionale del piano, ad uno dei tipi seguenti:

1) *curva di un certo ordine* 2ν $(\nu \geqslant 1)$, *dotata di un punto multiplo di ordine* $\geqslant 2\nu - 2$;

2) *quartica piana* C_4;

3) *sestica piana* C_6, *dotata di due punti tripli infinitamente vicini.*

5. – Le condizioni di razionalità (o di riferibilità a rigata) di un piano doppio, espresse mediante l'annullarsi dei plurigeneri, si applicano con successo in alcuni casi notevoli, dove non sarebbe egualmente facile di riconoscere la trasformabilità della curva di diramazione del piano doppio in una delle curve tipiche di CLEBSCH-NOETHER.

Citiamo anzitutto il caso delle *superficie contenenti un fascio lineare di curve ellittiche dotato di (almeno) un punto base semplice o doppio,* delle quali superficie si dimostra così che *sono razionali o riferibili a rigate ellittiche.*

Infatti considerando un punto base, semplice o doppio, si può determinare razionalmente sopra ogni curva (ellittica) del fascio una g_2^1, e quindi rappresentare la superficie sopra un piano doppio. Ora i pluri-

generi della superficie sono tutti nulli (9), perchè il fascio in parola costituisce sulla superficie un sistema lineare di curve di *genere virtuale* π secantisi a due a due in $n > 2\pi - 2$ punti (designando con $i_1, i_2, \ldots$ le molteplicità dei punti base del fascio, si ha invero

$$\pi = 1 + \sum \frac{i(i-1)}{2} \qquad \text{ed} \qquad n = \sum i^2) .$$

Nello stesso modo si ottiene il teorema:

Se una superficie contiene un fascio lineare di curve iperellittiche di genere $p > 1$, *con un certo numero di punti base di molteplicità* $i_1, i_2, \ldots$, *per modo che si abbia*

$$\sum i > 2p - 2 ,$$

la superficie è razionale o riferibile ad una rigata; una tale superficie essendo sempre rappresentabile sul piano doppio ed avendo i plurigeneri nulli.

Questi resultati estendono sotto un certo aspetto quelli già ottenuti relativamente alle superficie contenenti sistemi lineari di curve iperellittiche (10), i quali possono riassumersi nel teorema di CASTELNUOVO:

Una superficie contenente una rete di curve iperellittiche di genere $p \geqslant 1$, *secantisi a due a due in gruppi non speciali, è razionale o riferibile ad una rigata.* Ma questo teorema, sotto un altro aspetto, dice di più, almeno nel caso $p > 2$.

Ora è interessante notare come anche l'ultimo teorema, in tutta la sua generalità, discenda dal resultato fondamentale di questa Nota, e possa così nuovamente dimostrarsi senza ricorrere alla razionalità delle involuzioni piane, di cui si fa uso nelle Note citate. Infatti, si dimostra subito (ad es. col ragionamento adoperato da CASTELNUOVO nella Nota dei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », maggio 1894, pag. 477) che la superficie contiene un fascio di curve razionali, o una serie razionale di curve razionali. Ora, nel primo caso i plurigeneri della superficie sono certo nulli; nel secondo caso poi risulta (11) che la serie razionale di curve razionali è contenuta in un sistema lineare di curve dello stesso

---

(9) Cfr. la proprietà caratteristica delle curve canoniche, bicanoniche, etc. in ENRIQUES, *Introduzione etc.*, §§ 38, 39.

(10) Cfr. ENRIQUES (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », dicembre 1893) [queste *Memorie*, vol. I, IV]; CASTELNUOVO (Ibidem, gennaio e maggio 1894). Un rifacimento di questi lavori si trova in ENRIQUES, « Mathematische Annalen », Bd. 46 [queste *Memorie*, vol. I, X].

(11) HUMBERT, « Journal de Mathématiques pures et appliquées », 4e série, t. X (1894), pag. 195; ENRIQUES, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XIII (1899) [questo volume, XXVI].

ordine e di un certo genere π, secantisi a due a due in $n > 2\pi - 2$ punti, donde segue nuovamente l'annullarsi dei plurigeneri; e così si può applicare sempre il resultato fondamentale della presente Nota.

6. – Noteremo infine che il procedimento di riduzione spiegato al n. 2, ove pur si prescinda dalle speciali convenzioni riguardanti la molteplicità virtuale dei punti multipli della curva di diramazione di un piano doppio, dà la condizione perchè una curva piana (semplice o composta) sia trasformabile, con una trasformazione birazionale di tutto il piano, in un punto o in un gruppo di punti, questa condizione venendo espressa dalla mancanza di curve aggiunte d'indice 1, 2, ... Inoltre quel procedimento si rivela utilissimo nelle questioni di riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve di genere p secantisi a due a due in $n > 2p - 2$ punti, ove si noti che le curve aggiunte d'indice 1, 2, 3, ... dovranno segare la curva generica del sistema dato in gruppi composti di un numero di punti che va decrescendo (di almeno $n - 2p + 2$ unità per volta) col crescere dell'indice. Così ad es., per un sistema lineare (almeno ∞^1) di curve razionali si vede subito che mancano tutte le curve aggiunte d'indice 1, 2, ..., e si ottengono quindi i notissimi tipi d'ordine minimo pei detti sistemi lineari. Similmente per $p = 1$ ed $n > 0$ si avrà soltanto una curva aggiunta e mancheranno tutte le successive, sicchè si arriverà facilmente ai tipi pure notissimi dei sistemi lineari di curve ellittiche, ecc.

Si potrebbe anzi stabilire una serie di proposizioni generali sui tipi dei sistemi lineari di curve di genere p secantisi a due a due in n punti, ove si abbia rispettivamente $n > 4p - 4$, o $2n > 6p - 6$, $3n > 8p - 8$, ...; ma lasciamo al lettore volenteroso la cura di proseguire in questo indirizzo.

Ottobre 1900.

XXXI.

SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES ADMETTANT DES INTÉGRALES DE DIFFÉRENTIELLES TOTALES DE PREMIÈRE ESPÈCE

« Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse », 2e s., to. III (1901), pp. 77-84.

En essayant de démontrer la proposition réciproque du théorème de M. HUMBERT (1), concernant les surfaces qui ne possèdent aucune intégrale de différentielle totale de première espèce, j'ai été amené au résultat suivant:

Toute surface algébrique admettant p intégrales de différentielles totales de première espèce, avec 2p périodes, contient une série de courbes algébriques qui n'est pas renfermée dans une série linéaire de courbes du même ordre.

Du résultat que je viens d'énoncer, découlent quelques conséquences remarquables; notamment on en déduit les *conditions, sous une forme transcendante, pour qu'une surface algébrique puisse être ramenée*, par une transformation birationnelle, *à un cylindre de genre* $p > 0$.

1. – Envisageons d'abord une surface $F\,[F(x, y, z) = 0]$ possédant *une* intégrale de première espèce elliptique,

$$I = \int_{x_0, y_0}^{x, y} P\,dx + Q\,dy\,,$$

dont les *deux* périodes seront désignées par ω, ω'.

Construisons sur F un *faisceau* (2) linéaire $|C|$, de courbes C, doué d'un point-base simple O; par exemple, le faisceau des courbes $z = \text{const.}$,

---

(1) *Sur une propriété d'une classe de surfaces algébriques* (« Comptes rendus de l'Académie des Sciences », 1893).

(2) On donne le nom de *faisceau* à une famille ∞^1 de courbes appartenant à une surface, lorsqu'il y a *une* courbe de la famille passant par chaque point de la surface, choisi d'une façon générale.

si l'on suppose que la droite de l'infini du plan $z = 0$ rencontre la surface en quelques points simples (O serait alors un de ces points). Soit π le genre des C.

D'après M. PICARD, on peut considérer I comme une fonction des points d'une courbe C; on a ainsi une intégrale abélienne de première espèce attachée à la courbe; c'est, d'ailleurs, une intégrale réductible dont les périodes s'expriment par ω, ω'.

Envisageons maintenant les fonctions elliptiques de WEIERSTRASS

$$\mathcal{P}(I\,|\,\omega, \omega')\,, \qquad \mathcal{P}'(I\,|\,\omega, \omega')\,,$$

comme des fonctions attachées à la courbe C; ce seront des fonctions rationnelles des points de cette courbe. En conséquence, on aura sur la courbe C une *involution* elliptique λ_n', dont les groupes (formés d'un certain nombre n de points) correspondent aux points de la courbe elliptique $(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$.

Faisons varier la courbe C dans le faisceau $|C|$; les λ_n', que nous venons de définir, donneront lieu à une involution Γ_n' sur la surface. On peut envisager les groupes de Γ_n' comme les *points* d'une nouvelle surface F', le mot « point » étant pris dans une acception abstraite. Les points de F' dépendront alors, d'une façon rationnelle, des points de F; et l'on aura sur F' un faisceau de courbes elliptiques C', homologues des C, dont les points correspondent aux groupes des λ' nommées ci-dessus. Le faisceau $|C'|$ aura, sur F', un point-base simple O' correspondant à O.

Il est important de remarquer que toutes les courbes C' peuvent être ramenées, d'une manière birationnelle, à une même courbe définie par les fonctions elliptiques $\mathcal{P}(I)$, $\mathcal{P}'(I)$, douées des périodes ω, ω'.

Par suite, lorsqu'on envisage deux courbes *quelconques* C_1', C_2', du faisceau $|C'|$, on peut établir entre elles *deux* correspondances birationnelles, en exigeant que le point O', considéré sur les deux courbes, corresponde à lui-même. En effet, si l'on suppose, en O', $I = 0$ (ce qui n'entraîne aucune restriction essentielle) les deux correspondances nommées ci-dessus, entre C_1', C_2', sont données par la relation

$$I_1 \equiv \pm I_2 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega, \omega')\,,$$

liant les paramètres (I) des points des deux courbes.

Pour séparer les deux correspondances l'une de l'autre, il y a lieu d'effectuer une opération irrationnelle qui consiste à extraire une racine carrée. On peut se demander si cette racine portera nécessairement sur le paramètre dont dépend la détermination des courbes C' dans le faisceau $|C'|$, ou bien si elle en sera indépendante. Il y a lieu de montrer

qu'il faut adopter la deuxième de ces hypothèses. En effet, s'il n'en était pas ainsi, les deux points homologues à un point A, donné sur C_1' d'une façon tout à fait générale, décriraient une même courbe irréductible K, hyperelliptique, lorsqu'on fait varier C_2'; et l'on aurait sur K quelques points de coïncidence. Désignons par B un tel point de coïncidence, et envisageons la courbe C' contenant B; nous la nommerons C_2'.

Entre C_1', C_2' on aura toujours deux correspondances; mais, par hypothèse, les deux points A, B, pris respectivement sur les deux courbes, doivent se correspondre également, soit qu'on envisage l'une ou l'autre des correspondances nommées. Or, cette conclusion est absurde, le point A étant choisi sur C_1' d'une façon tout à fait générale, puisqu'il faudrait que A tombât en un des 4 points doubles de la série g_2^1 dont O' est un point double, c'est-à-dire en des points donnés par l'équation

$$I_1 \equiv -I_1 \qquad (\text{mod } \omega, \omega') .$$

Le raisonnement que nous venons de développer suppose implicitement que le faisceau $|C'|$, sur F', ne renferme aucune courbe réductible. C'est ce qui a lieu lorsqu'on a choisi sur F le faisceau $|C|$ de manière qu'il n'y ait aucune courbe C réductible et qu'on n'ait jamais, sur une C, $I = \text{const.}$ Comme le choix de $|C|$ sur F est arbitraire, on peut supposer remplies ces conditions.

Nous venons de voir qu'en laissant fixe la courbe C_1' et en faisant varier C_2' dans le faisceau $|C'|$, les points homologues à un point A de C_1', suivant les deux correspondances que nous avons précédemment établies, décrivent *deux* courbes séparées, coupant chacune en *un* point les courbes C'. Lorsque A décrit C_1', on obtient ainsi les courbes rationnelles d'un faisceau (elliptique), coupant en un point les C'.

En revenant de F' à F, on a donc, sur cette dernière surface, un faisceau elliptique de courbes, coupant en n points les courbes C.

2. – Le raisonnement que nous avons employé lorsque la surface F possède une intégrale

$$I = \int_{x_0, y_0}^{x, y} P\,dx + Q\,dy$$

de première espèce elliptique, s'étend au cas où il y a p intégrales de différentielles totales, à $2p$ périodes. Nous allons envisager l'hypothèse $p = 2$. Il sera aisé au lecteur de passer ensuite au cas général.

Soient

$$I_1 = \int_{x_0, y_0}^{x, y} P_1\,dx + Q_1\,dy\,, \qquad I_2 = \int_{x_0, y_0}^{x, y} P_2\,dx + Q_2\,dy\,,$$

deux intégrales de première espèce attachées à la surface F

$$[F(x, y, z) = 0];$$

en les supposant normales, on peut écrire leurs périodes comme il suit:

$$\begin{matrix} 1\,, & 0\,, & \omega_{11}\,, & \omega_{12}\,, \\ 0\,, & 1\,, & \omega_{21}\,, & \omega_{22}\,, \end{matrix}$$

$$(\omega_{12} = \omega_{21})\,.$$

Construisons sur F un faisceau linéaire de courbes C, ayant un certain genre π, et deux points-bases simples O_1, O_2; le faisceau étant choisi d'ailleurs d'une façon générale.

Nous envisageons d'abord I_1, I_2 comme des intégrales abéliennes attachées à une courbe C du faisceau; ce sont des intégrales de première espèce, réductibles, dont les périodes s'expriment par des combinaisons linéaires entières des ω_{ik}. On peut supposer que les sommes des valeurs de I_1, I_2, calculées en O_1, O_2, s'évanouissent:

$$I_1' + I_1'' \equiv I_2' + I_2'' \equiv 0 \qquad (\text{mod } \omega_{ik})\,.$$

Envisageons ensuite trois fonctions abéliennes

$$M_1 = M_1(u_1u_2)\,, \qquad M_2 = M_2(u_1u_2)\,, \qquad M_3 = M_3(u_1u_2)\,,$$

$$\begin{bmatrix} u_1 = I_1(x_1y_1) + I_1(x_2y_2) \\ u_2 = I_2(x_1y_1) + I_2(x_2y_2) \end{bmatrix},$$

avec les périodes

$$\begin{matrix} 1\,, & 0\,, & \omega_{11}\,, & \omega_{12}\,, \\ 0\,, & 1\,, & \omega_{21}\,, & \omega_{22}\,. \end{matrix}$$

Ce sont des fonctions rationnelles des couples de points des courbes C, et elles font correspondre une surface algébrique F' à chaque C. Comme

on a un faisceau linéaire de C, on obtient ainsi une variété V' à trois dimensions possédant un faisceau linéaire de surfaces F'.

Il faut remarquer maintenant que les surfaces F' correspondent, d'une manière birationnelle, à une seule et même surface hyperelliptique; de sorte que l'on peut établir une correspondance birationnelle entre deux F': soient F'_1, F'_2. Comme d'ailleurs les F' ont en commun un même point O' représentant le couple

$$O_1 , \quad O_2 \qquad (u_1 \equiv u_2 \equiv 0) ,$$

on a, entre F'_1, F'_2, *deux* correspondances, en posant

$$u'_1 \equiv + u''_1 , \quad u'_2 \equiv + u''_2 \qquad \text{ou} \qquad u'_1 \equiv - u''_1 , \quad u'_2 \equiv - u''_2 \pmod{\omega_{ik}}.$$

Il est aisé de reconnaître que les deux points de F'_2 homologues à un point A, donné d'une façon générale sur F'_1, décrivent deux courbes distinctes, lorsque l'on fait varier F'_2 sur V'; car ils ne peuvent jamais se réunir en un même point, si A ne tombe pas en un des 16 points

$$u_1 \equiv u_2 \equiv 0 \pmod{\omega_{ik}} ,$$

c'est-à-dire en un des points doubles de l'involution hyperelliptique définie sur F' par le point double O'.

Comme A peut varier sur F', on engendre de cette façon une série ∞^2 de courbes algébriques sur V', coupant en *un* point les surfaces F'.

En revenant à la surface F donnée en premier lieu, on obtient ainsi, sur elle, une série de courbes algébriques coupant chaque C en un certain nombre de couples de points. Cette série, voilà l'essentiel, n'est pas renfermée dans une série linéaire de courbes du même ordre.

En effet, les groupes de points coupés par les courbes de la série sur une C, ne sauraient appartenir à une série linéaire, puisque la condition donnée par le théorème d'ABEL n'est pas évidemment satisfaite.

3. – Nous laissons au lecteur le soin d'achever la démonstration du théorème énoncé, en passant au cas de p quelconque, ce qui ne présente d'ailleurs aucune difficulté nouvelle.

Nous aimons mieux indiquer quelques corollaires du théorème permettant de donner, sous une forme transcendante très simple, les conditions pour qu'une surface algébrique puisse être ramenée, par une transformation birationnelle, à un cylindre de genre $p > 0$.

Il faut d'abord que le genre géométrique de la surface s'évanouisse,

c'est-à-dire que l'on ait

$$p_g = 0 .$$

C'est là une première condition que l'on peut regarder comme transcendante, p_g désignant le nombre des intégrales doubles de première espèce, linéairement indépendantes, attachées à la surface.

Il faut encore que la surface possède p intégrales de différentielles totales de première espèce, à $2p$ périodes. Cette condition, ajoutée à la première, est aussi suffisante lorsque $p > 1$.

Pour le démontrer, nous nous appuierons sur une remarque que M. CASTELNUOVO a bien voulu nous communiquer aimablement:

Lorsque, sur une surface de genre $p_g = 0$, on a une série algébrique $\infty^1 (k)$ de courbes algébriques C, qui n'est pas renfermée dans une série linéaire, la surface contient un faisceau irrationnel de courbes algébriques.

M. CASTELNUOVO établit cette proposition de la manière suivante: D'abord on sait, d'après M. NOETHER [3], que les intégrales de différentielles totales de première espèce appartenant à la surface ($p_g = 0$) sont des fonctions l'une de l'autre. En conséquence, elles définissent les mêmes courbes

$$I_h = \text{const.} ,$$

en désignant par I_h une de ces intégrales.

Il suffit de montrer que si les courbes $I_h = \text{const.}$ se distinguent des courbes C, elles sont aussi, en tous cas, des courbes algébriques: leur série est d'ailleurs un *faisceau* irrationnel admettant les I_h comme des intégrales abéliennes de première espèce.

Envisageons les courbes C de la série k comme déterminées par les valeurs d'un paramètre λ; soient

$$u_1(\lambda) , \quad u_2(\lambda) , \quad \ldots , \quad u_\pi(\lambda) \qquad (\pi > 0),$$

les intégrales abéliennes de première espèce attachées à k.

Désignons par

i (> 0) le nombre des courbes C issues d'un point P de la surface;
$C_1, C_2, \ldots, C_i$ ces courbes elles-mêmes;
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$ les valeurs correspondantes du paramètre λ.

---

[3] Voir PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. I, p. 136, n. 15 (Paris, Gauthier-Villars).

On aura, d'après M. HUMBERT,

$$u_h(\lambda_1) + u_h(\lambda_2) + \ldots + u_h(\lambda_i) = I_h(P) \quad (i = 1, 2, \ldots, \pi),$$

où I_h est une intégrale de différentielle totale de première espèce attachée à la surface, ou bien une constante (cette dernière hypothèse d'ailleurs n'étant pas vérifiée pour toutes les valeurs de h).

Or, faisons varier P sur une courbe $I_h = \text{const.}$ supposée distincte des C. Les $C_1, C_2, \ldots, C_i$, envisagés comme éléments de k, donnent lieu à une série de groupes λ_i qui, d'après le théorème d'ABEL, est contenue dans une série linéaire. Cela donne une condition *algébrique* que le point P doit remplir lorsqu'il se meut sur la courbe $I_h = \text{const.}$ Cette courbe est donc algébrique, comme il fallait le démontrer.

On voit maintenant qu'une surface F, pour laquelle $p_g = 0$, admettant p intégrales de différentielles totales de première espèce, à $2p$ périodes, possède un faisceau de courbes algébriques L; le genre du faisceau (dont les courbes L sont envisagées comme les éléments) est d'ailleurs

$$p \ (> 0) .$$

Rappelons encore une formule qui donne le nombre δ des courbes L douées d'un point double, où l'on suppose d'abord que la surface F ait été transformée d'une manière convenable (de façon à éliminer, autant que cela est possible, ses *courbes exceptionnelles*); cette formule est la suivante:

$$\delta + 4(p-1)(\pi-1) + p^{(1)} = 12p_n + 13 ,$$

où π désigne le genre des courbes L, $p^{(1)}$ le *genre linéaire* de la surface, p_n son *genre numérique* (4).

On a d'ailleurs

$$\delta \geqslant 0 , \qquad p > 0 ,$$

et, d'après un théorème de M. CASTELNUOVO (5) sur les surfaces contenant

(4) On trouvera cette formule (qui est une généralisation d'autres formules connues) dans un Mémoire que nous avons écrit en commun, M. CASTELNUOVO et moi, et qui sera publié prochainement par les « Annali di Matematica ». Dans le même Travail, on trouvera la définition tout à fait générale du caractère $p^{(1)}$, et le théorème dont on fait usage dans la suite, qu'une surface pour laquelle on a $p^{(1)} \leqslant 0$ peut être ramenée à un cylindre.

(5) « Memorie della Società italiana delle Scienze (dei XL) », 1896. « Annali di Matematica », serie II, t. XV, 1897.

un faisceau irrationnel de courbes,

$$p_n < p_g ,$$

en sorte que

$$p_n \leqslant -1 .$$

En discutant la formule donnée ci-dessus, on trouve, ou bien

$$\pi = 0 ,$$

ce qui amène la possibilité de représenter la surface sur un cylindre de genre p (6), ou bien

$$p^{(1)} \leqslant -3 ,$$

ce qui nous ramène à la même conclusion (voir la note qui précède), ou enfin

$$p^{(1)} \leqslant 1 , \qquad p_n = -1 , \qquad p = 1 \qquad \text{ou} \qquad \pi = 1 .$$

De sorte qu'il est permis d'énoncer la conclusion suivante:

Les conditions pour qu'une surface algébrique puisse être ramenée, par une transformation birationnelle, à un cylindre de genre $p > 1$, peuvent être exprimées:

1) *par la non-existence d'intégrales doubles de première espèce* ($p_g = 0$);

2) *par l'existence de p intégrales de différentielles totales de première espèce à $2p$ périodes.*

Lorsque $p = 1$ ces conditions ne suffisent plus: la surface contiendra, en tous cas, un faisceau elliptique de courbes algébriques L (de genre $\pi \leqslant 1$); *il faut ajouter la condition* $\pi = 0$, que l'on peut regarder aussi comme une condition transcendante.

---

(6) ENRIQUES, « Accademia dei Lincei », 1898 [queste *Memorie*, vol. I, XXIV], « Mathematische Annalen », Bd. 52 [questo volume, XXVII].

XXXII.

INTORNO AI FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA SOPRA LE SUPERFICIE ALGEBRICHE

« Atti Acc. Torino », vol. XXXVII (1901),

pp. 19-40.

In un corso tenuto all'Università di Bologna, l'anno 1898-99, ebbi occasione di riprendere in esame i principii generali della Geometria sopra le superficie algebriche, svolti in due memorie del 1893 e del 1896 [1], e di dare alla teoria un assetto nuovo, conforme alle esigenze didattiche dell'insegnamento.

Si tratta, anzitutto, di un rimaneggiamento dei primi teoremi relativi ai sistemi lineari completi e alle operazioni elementari sopra di essi, teoremi che vengono dati ormai con tutta la semplicità desiderabile. In secondo luogo di un modo nuovo d'introdurre le curve aggiunte ad un sistema lineare, ricorrendo alla considerazione della *jacobiana* di una rete. Si è condotti di qui a dimostrare molto facilmente quella proprietà fondamentale delle curve aggiunte, che domina tutta la teoria di esse, e permette di determinare i sistemi e i caratteri invarianti della superficie.

Nella presente Nota mi propongo di esporre i principii della Geometria sopra una superficie, seguendo il piano del corso dianzi accennato. Ma, costretto da varie ragioni ad essere breve, mi limito ad indicare soltanto la traccia delle dimostrazioni. Il lettore che ha qualche familiarità coll'argomento riuscirà facilmente a ricostruire tutti i minuti particolari.

Oltre alle mie citate Memorie, e segnatamente alla seconda di esse, ho tenuto sott'occhio il recente lavoro pubblicato in collaborazione col sig. CASTELNUOVO: *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle*

---

[1] *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche*, « Memorie dell'Accademia delle scienze di Torino », serie II, t. XLIV [queste *Memorie*, vol. I, V]; *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche*, « Memorie della Società italiana delle Scienze, detta dei XL », serie III, t. X [queste *Memorie*, vol. I, XIII].

superficie algebriche [2], sicchè la presente Nota potrebbe riguardarsi come lo sviluppo del § I e di una parte del § II del suddetto lavoro. Nel quale è pur contenuta un'idea che mi ha guidato durante l'attuale redazione come criterio semplificatore, e mi ha permesso di eliminare tante minute difficoltà inerenti agli sviluppi della mia *Introduzione*.

Notoriamente è precipua cagione di difficoltà, nello studio delle superficie, il fatto che un punto (semplice) possa mutarsi per effetto di una trasformazione birazionale in una linea (*eccezionale*); cosa che non ha alcun riscontro nella teoria delle curve.

Fino dal 1893 io intravidi il modo di superare la difficoltà accennata « Trasformare la superficie data in un'altra, priva di curve eccezionali ».

Questa trasformazione non è possibile per le superficie razionali e per le rigate, ma è ormai dimostrata possibile per tutte le altre superficie [3]. Io ebbi sempre la convinzione di questo resultato che ha costato molta fatica, sebbene non riuscissi a giustificarlo che sotto restrizioni superflue [4]. Questa convinzione mi ha indotto, nella *Introduzione* del 96, a porre innanzi il concetto dell'*ente algebrico doppiamente infinito*, in modo rispondente ad una superficie senza curve eccezionali. Ma per piegare a questo concetto la teoria delle superficie, fino dal principio, in modo da abbracciare anche il caso del piano e delle rigate, si è costretti a porre delle convenzioni, che riescono un po' sforzate.

A dir il vero queste convenzioni avevano lo scopo di dare fino dal principio alla teoria un significato invariante, in senso assoluto, rispetto alle trasformazioni birazionali. La nuova idea semplificatrice è che conviene studiare dapprima le proprietà dei sistemi lineari, sopra una superficie, che permangono in ogni trasformazione birazionale di essa non producente nuove curve eccezionali. Si tratta dunque di considerare un'*invarianza relativa* invece di un'*invarianza assoluta*; ma è poi facile passare dalle proprietà invarianti in senso relativo ad altre proprietà invarianti in senso assoluto.

Dirò in fine che riferisco sempre il mio studio a superficie affatto prive di singolarità (appartenenti ad uno spazio con un numero qualunque di dimensioni), il che non costituisce, come è noto, una restrizione essenziale. Quando la superficie data si trasformi in un'altra con punti singolari, occorre considerare questi come *sciolti*, in modo opportuno, secondo risulta dall'esame di ciò che corrisponde ad essi sopra la superficie primitiva.

Quanto ai sistemi lineari di curve tracciate sopra una superficie (senza

---

(2) « Annali di Matematica », serie III, t. VI [questo volume, XXXIII].
(3) CASTELNUOVO e ENRIQUES, loc. cit.
(4) *Introduzione* ..., § 42.

singolarità), considero i punti base di essi, nei casi di singolarità straordinarie, come la riunione di punti multipli ordinari infinitamente vicini, precisamente come nella teoria delle curve piane. Ciò è pienamente giustificato dal fatto che si può sempre rimpiazzare l'intorno d'ordine n di un punto semplice, sopra una superficie di S_3, coll'intorno del punto stesso sopra il paraboloide d'ordine n, osculatore in esso alla superficie stessa.

1. – Sia F la superficie, affatto priva di singolarità, cui riferiamo il nostro studio.

Un *sistema lineare* ∞^r $(r \geqslant 0)$ *di curve* (algebriche) C sopra F, si può definire mediante un sistema lineare di varietà a $k-1$ dimensioni dello spazio S_k cui F appartiene:

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_{r+1} f_{r+1} = 0 .$$

Le suddette varietà segano sopra F le curve C, all'infuori di qualche curva fissa K, comune a tutte le varietà

$$f_1 = 0 \ldots f_{r+1} = 0 ,$$

la quale non voglia considerarsi come appartenente alle curve C.

Il sistema delle C si designerà con $|C|$.

Le C possono contenere, del resto, qualche componente fissa, che insieme alla K costituisca l'intiera curva comune alla superficie F e alle varietà

$$f_1 = 0 \ldots f_{r+1} = 0 .$$

Le C, anche all'infuori delle loro eventuali componenti fisse, possono avere qualche punto fisso comune, avente per esse una certa molteplicità i, che si dirà un *punto base* pel sistema $|C|$. Un punto qualunque appartenente ad una componente fissa delle C può anche riguardarsi come un punto base di $|C|$, ma non viene riguardato come tale salvo un'esplicita convenzione relativa a qualche punto particolare della suddetta curva.

2. – Quando si trasforma birazionalmente la superficie F in una superficie F_1, il sistema lineare $|C|$ di F si trasforma in un sistema lineare $|C_1|$ sopra F_1.

Un punto base di $|C|$, iplo per le C, che non sia *fondamentale* per la trasformazione, si muta in un punto base di $|C|$, iplo per le C_1.

Un punto base A di $|C|$, fondamentale per la trasformazione, ha come corrispondente su F_1 una curva a, che dicesi *eccezionale*.

Siamo liberi di convenire che la a debba riguardarsi come parte fissa delle C_1, oppur no; occorre però che adottiamo una convenzione uniforme relativamente al sistema $|C|$, considerato rispetto ad una qualsiasi trasformazione della superficie F. Questa convenzione si riflette in un carattere invariante che attribuiamo al sistema lineare $|C|$. Esprimeremo la suddetta convenzione nel modo seguente:

Un punto A base iplo pel sistema $|C|$, verrà riguardato come un *punto base accidentale* o *virtualmente non esistente*, allorchè si convenga che la curva eccezionale a, nascente da A per una trasformazione dove A sia punto fondamentale, debba computarsi, contata i volte, come parte fissa delle curve C_1, trasformate delle C.

All'opposto un punto base iplo ($i > 0$) pel sistema $|C|$ (in particolare un punto della eventuale componente fissa delle C), verrà riguardato come un *punto base assegnato di molteplicità virtuale* i, allorchè la nominata curva a nascente da A non si consideri come parte fissa delle C_1.

Finalmente un punto base iplo per $|C|$, potrà riguardarsi anche come un *punto base assegnato di molteplicità virtuale* $j < i$ ($j > 0$), e di *molteplicità accidentale* i (punto base *ipermultiplo*) quando si convenga di contare la a, come parte fissa delle C_1, soltanto $i - j$ volte.

3. – Un sistema lineare $|C|$, virtualmente privo di punti base sopra F, si dirà *completo* (o *normale*) [5], quando esso non sia contenuto in un sistema lineare più ampio di curve del medesimo ordine.

Una curva C, data su F, appartiene ad un determinato sistema lineare completo di curve dello stesso ordine, virtualmente privo di punti base.

Questo teorema si dimostra nel seguente modo.

Anzitutto la C appartiene a qualche sistema lineare ∞^r, con $r \geqslant 0$. Ed inoltre la dimensione r di un sistema contenente C non può superare il numero delle intersezioni delle curve C con una curva d'ordine superiore a quello delle C, tracciata sulla superficie. Perciò partendo da un sistema lineare di curve dello stesso ordine contenente C, ed ampliandolo successivamente, si dovrà giungere ad un sistema completo cui C appartiene.

Per mostrare che tale sistema è unico, basta far vedere che due sistemi lineari di curve dello stesso ordine, contenenti la C, sono contenuti in un medesimo sistema lineare di curve ancora dello stesso ordine. Se i due sistemi dati sono tali che l'uno non contenga l'altro, il nuovo sistema

---

[5] La parola « normale » è usata ordinariamente nella *Introduzione* ..., cfr. n. 9.

costruito sarà più ampio di entrambi, e perciò nessuno dei due sistemi potrà essere completo.

Si abbiano dunque due sistemi lineari $|C_1|$, $|C_2|$ di curve dello stesso ordine, contenenti la C.

Essi vengono segati rispettivamente da due sistemi lineari di varietà

$$\sum \lambda_i f_i = 0 , \qquad \sum \mu_i \varphi_i = 0 ,$$

il primo dei quali potrà avere su F una certa curva base K comune alle $f_i = 0$, non computata come parte fissa delle C_1, e il secondo una certa curva L comune alle $\varphi_i = 0$, non computata come parte fissa delle C_2.

Sieno p. es.

$$f_1 = 0 , \qquad \varphi_1 = 0 ,$$

le varietà, appartenenti rispettivamente ai due sistemi, che determinano la curva C.

Costruiamo allora il sistema lineare di varietà

$$\varphi_1 \sum \lambda_i f_i + f_1 \sum \mu_i \varphi_i = 0 .$$

Questo determina sopra F un sistema lineare di curve, che ha come curve fisse le C, K, L, giacchè i punti di C si trovano contemporaneamente su $\varphi_1 = 0$, $f_1 = 0$, i punti di K appartengono a $f_1 = 0$ ed a tutte le altre $f_i = 0$, ed i punti di L alle $\varphi_i = 0$ $(i \geqslant 1)$. Sopprimendo le nominate componenti fisse C, K, L, il sistema delle varietà che abbiamo costruito determina su F un sistema lineare di curve dello stesso ordine di C, contenente ambedue i sistemi $|C_1|$ e $|C_2|$.

Con ciò è il teorema è dimostrato.

4. – Un sistema lineare di curve C avente, sopra la superficie F, dei punti base assegnati con date molteplicità virtuali, si dirà *completo*, se non è contenuto in un sistema lineare più ampio di curve del medesimo ordine, avente gli stessi punti base assegnati colle molteplicità loro attribuite (non è escluso che il sistema abbia altri punti base accidentali, di cui non si tien conto, ecc.).

Sia C una qualunque curva data sopra la superficie F, e si assegnino su C dei punti (in numero finito) come punti base di un sistema lineare, attribuendo a ciascuno di essi una molteplicità virtuale non superiore alla molteplicità effettiva di esso per la C; esiste allora un determinato sistema lineare completo, avente i punti base assegnati, cui C appartiene.

Vale la stessa dimostrazione sviluppata nel n. precedente.

Nel seguito *considereremo sempre sistemi lineari completi*, ed allorchè un sistema completo verrà definito mediante qualche curva contenuta in esso, avremo cura di dichiarare quali punti base vengano assegnati per definire il completamento. Quando non si dica nulla in proposito sarà sottinteso che nessun punto della curva venga assegnato come punto base.

5. – *In ogni trasformazione birazionale della superficie F, un sistema lineare completo si trasforma in un sistema lineare completo.*

Questa è una conseguenza immediata delle nostre definizioni.

Si avverta che un sistema $|C|$, virtualmente privo di punti base sopra la superficie F, non si trasforma sempre in un sistema ugualmente privo di punto base.

Se infatti la trasformazione birazionale che fa passare da F ad una nuova superficie F_1, muta una curva eccezionale a di F in un punto (fondamentale) A di F_1, e se la a non entra come parte fissa nelle curve C ed ha con esse un certo numero d'intersezioni $i > 0$, il punto A di F_1 sarà un punto base pel sistema $|C_1|$ trasformato di $|C|$, avente una molteplicità virtuale i, eguale alla molteplicità effettiva di esso per le C_1.

6. – *Dati sopra la superficie F due sistemi lineari completi $|C|$, $|K|$, esiste un determinato sistema lineare completo $|C + K|$ contenente tutte le curve composte $C + K$.*

È il sistema completo definito da una qualunque delle curve $C + K$.

Ove i sistemi $|C|$ e $|K|$ abbiano dei punti base assegnati, questi dovranno riguardarsi come punti base assegnati anche per $|C + K|$; precisamente ogni punto di molteplicità virtuale i per $|C|$ e j per $|K|$, sarà per $|C + K|$ un punto di molteplicità virtuale $i + j$.

Giova osservare che se ad es. $|C|$ ha un punto base accidentale, questo non sarà in generale un punto base per $|C + K|$, anzi si può sempre sceglier $|K|$ per modo da far sì che le curve del sistema completo $|C+K|$ non passino per quel punto.

Un punto di F, che non sia un punto base accidentale per uno dei due sistemi $|C|$, $|K|$, non potrà mai essere un punto base accidentale pel sistema somma.

7. – *Sieno $|C|$ e $|K|$ due sistemi lineari completi sopra la superficie F, tali che il sistema $|K|$ non possegga alcun punto base avente una molteplicità virtuale superiore a quella del punto stesso per $|C|$. Se $|C|$ contiene parzialmente una curva K per modo che esista almeno una curva residua X, la quale presa insieme con K costituisca una curva* (totale) *del sistema $|C|$, allora tutte le curve K sono contenute parzialmente in $|C|$, e le loro curve residue appartengono al sistema lineare completo $|X|$ definito dalla X.*

Questo sistema si chiamerà *differenza* di $|C|$, $|K|$ e si designerà con

$$|X| = |C - K|.$$

Il teorema enunciato si dimostra osservando che la X appartiene ad un sistema lineare completo $|X|$ il quale sommato a $|K|$ dà luogo al sistema completo

$$|K + X| = |C|.$$

Le molteplicità virtuali dei punti base, che debbono riguardarsi come assegnati per $|C - K|$, si desumono per differenza da quelle dei punti stessi per $|C|$ e $|K|$. Nella sottrazione di $|K|$ da $|C|$, possono nascere dei nuovi punti base accidentali, i quali sono da riguardarsi virtualmente come inesistenti.

Per effetto di queste convenzioni, dipendenti da quelle già stabilite, il teorema enunciato non subisce alcuna eccezione o limitazione.

8. – Le curve di un sistema lineare possono essere *irriducibili* o *riducibili*. Questo secondo caso dà luogo al teorema:

Se le curve di un sistema lineare sono riducibili, ogni curva generica di esso si compone di qualche parte fissa (comune a tutte) e di una parte variabile irriducibile, oppure di parti fisse e di una parte variabile composta con più curve di un fascio razionale o no.

S'intende per « fascio » una serie ∞^1 di curve, tale che per ogni punto generico della superficie vi sia *una* curva della serie. Notoriamente la serie può essere razionale, nel qual caso essa costituisce un sistema lineare ∞^1, oppure irrazionale come avviene, ad es., per la serie delle generatrici di una rigata di genere $p > 0$.

Per la dimostrazione del teorema cfr. la *Introduzione* ..., n. 5.

La irriducibilità di un sistema lineare $|C|$ appartenente alla superficie F, non ha sempre carattere invariante (in senso assoluto) rispetto alle trasformazioni birazionali, se $|C|$ ha dei punti base accidentali o dei punti base assegnati, accidentalmente ipermultipli. Infatti un punto base siffatto si può trasformare in una curva fissa comune alle trasformate delle C.

È invariante la irriducibilità di un sistema privo di punti base ipermultipli.

9. – Sommando due sistemi lineari irriducibili, che non coincidano in un unico fascio, si ottengono sempre sistemi irriducibili.

Sottraendo una curva (o un sistema) da un sistema lineare irriducibile, si può ottenere talvolta un sistema differenza riducibile.

10. – Ad un sistema lineare ∞^r, $|C|$, dato sopra la superficie F, appartengono, oltre la *dimensione* r, due *caratteri invarianti* per trasformazioni birazionali della superficie:

1) il *genere* π;

2) e il *grado* n.

Il significato di questi caratteri è chiaro anzitutto per i sistemi lineari irriducibili, non aventi dei punti base accidentali o ipermultipli.

Allora dicesi *genere* di $|C|$, il *genere* della *curva generica* C; e dicesi *grado* di $|C|$, il *numero* delle *intersezioni variabili di due* C *generiche*.

Se $|C|$, pur essendo irriducibile sopra F, ha dei punti base accidentali, il genere (*effettivo*) ϱ delle C deve essere aumentato di $i(i-1)/2$ in corrispondenza ad ogni punto base, iplo per esse; si definirà quindi il genere (*genere virtuale*) di $|C|$, mediante la formula

$$\pi = \varrho + \sum \frac{i(i-1)}{2},$$

dove la sommatoria è estesa ai punti base accidentali.

Il grado (*virtuale*) di $|C|$ è il numero ν delle intersezioni variabili di due C (*grado effettivo*) aumentato del numero delle intersezioni fisse assorbite dai punti base; esso vale dunque:

$$n = \nu + \sum i^2 .$$

Se poi il sistema irriducibile $|C|$ è dotato anche di punti base assegnati (ipermultipli) ove si hanno molteplicità accidentali $s_1, s_2, \ldots$ superiori a quelle virtuali $j_1, j_2, \ldots$, il genere virtuale di $|C|$ verrà dato dalla formula

$$\pi = \varrho + \sum \frac{i(i-1)}{2} + \sum \frac{s(s-1) - j(j-1)}{2};$$

il grado virtuale di $|C|$ verrà definito ponendo

$$n = \nu + \sum i^2 + \sum (s^2 - j^2) \ (^6) .$$

Intanto restano così definiti il genere e il grado, virtuali, per ogni sistema lineare irriducibile appartenente alla superficie F.

---

(6) Qui interverrebbe qualche minuta considerazione pel caso in cui il sistema $|C|$ abbia dei punti base infinitamente vicini; ma possiamo dispensarcene.

11. – Per passare al caso dei sistemi lineari riducibili, conviene premettere il seguente lemma:

Si abbiano su F due sistemi lineari irriducibili $|C_1|$, $|C_2|$, di dimensione $\geqslant 1$, non coincidenti in un unico fascio, e sieno π_1, π_2, n_1, n_2 i loro rispettivi generi e gradi (virtuali); sia i il numero delle intersezioni virtuali di una C_1 e di una C_2, cioè il numero delle intersezioni di C_1, C_2, valutato contando debitamente le soluzioni multiple, ma defalcando il prodotto $i_1 i_2$ per ogni punto base avente per $|C_1|$, $|C_2|$ le rispettive molteplicità virtuali i_1, i_2; allora il sistema irriducibile $|C_1 + C_2|$ ha il genere

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1 ,$$

e il grado

$$n = n_1 + n_2 + 2i .$$

La seconda di queste due formole si giustifica subito in base alle definizioni date. Per giustificare la prima si può ricorrere ad alcune considerazioni della teoria della connessione come nella mia « *Introduzione ...* », n. 16, oppure ad una proiezione dei sistemi $|C_1|$ e $|C_2|$ sopra un piano, come ha indicato il sig. PICARD (cfr. PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. II, p. 106) (7).

12. – Ora possiamo definire il genere e il grado virtuali per un sistema lineare $|C|$, comunque riducibile, dato sopra la superficie F.

Anzitutto scegliamo un ordine m così elevato che vi sieno delle varietà d'ordine m, dello spazio S_k cui F appartiene, passanti per una curva C ed aventi un sistema di curve residue K, irriducibili, senza punti base.

Innalzando se occorre ancora l'ordine m, possiamo ottenere che il sistema lineare $|C+K|$, dotato dei medesimi punti base assegnati di $|C|$, sia irriducibile, ed anche, se si vuole, che esso non abbia punti base accidentali o ipermultipli.

Sieno ora π, n il genere e il grado di $|K|$; Π, N, i caratteri analoghi di $|C+K|$, ed i il numero delle intersezioni di una C e di una K generiche. Definiamo il genere x e il grado y (virtuali) di $|C|$, rispettivamente, mediante le equazioni

$$\pi + x + i - 1 = \Pi ,$$

$$n + y + 2i = N .$$

(7) Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Tale definizione fa dipendere apparentemente i caratteri di $|C|$ dalla scelta del sistema ausiliario $|K|$. È facile però dimostrare che i suddetti caratteri riescono indipendenti da tale scelta.

Perciò si consideri invece di $|K|$ un qualsiasi sistema lineare irriducibile $|K_1|$, di genere e grado π_1, n_1, non avente punti base su F, il quale sommato a $|C|$ dia un sistema $|C + K_1|$ irriducibile. Detti Π_1, N_1 il genere e il grado di $|C + K_1|$, e detto i_1 il numero (virtuale) delle intersezioni di una C e di una K_1, è facile provare che le equazioni

$$\pi + x + i - 1 = \Pi ,$$

$$\pi_1 + x + i_1 - 1 = \Pi_1 ,$$

e le

$$n + y + 2i = N ,$$

$$n_1 + y + 2i_1 = N_1 ,$$

conducono ai medesimi valori di x, y. Basta a tal fine applicare le formule del n. 11, al sistema

$$|C + K + K_1| = |(C + K) + K_1| = |(C + K_1) + K| .$$

Riesce quindi perfettamente agevole di estendere le formule citate al caso in cui si sommino due sistemi lineari comunque riducibili.

Si arriva pertanto alla conclusione seguente:

Per ogni sistema lineare, comunque riducibile, di dimensione $\geqslant 0$, *appartenente alla superficie* F, *sono definiti due caratteri virtuali, detti genere e grado, invarianti rispetto alle trasformazioni birazionali della superficie. La definizione è tale che ricade nella definizione del genere e del grado effettivi per ogni sistema irriducibile non avente dei punti base dotati di molteplicità accidentale superiore alla rispettiva molteplicità virtuale. Essa è inoltre tale che sommando due qualunque sistemi lineari* $|C_1|$, $|C_2|$, *rispettivamente di genere virtuale* π_1, π_2 *e di grado* n_1, n_2, *dove il numero virtuale delle intersezioni di una* C_1 *con una* C_2 *sia* i, *si ottiene un sistema lineare* $|C_1 + C_2|$ *di genere*

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1 ,$$

e di grado

$$n = n_1 + n_2 + 2i .$$

13. – Sia $|C|$ un sistema lineare irriducibile, ∞^2 almeno, sopra la superficie F (che per ipotesi non ha alcuna singolarità).

Consideriamo entro $|C|$ un qualsiasi sistema lineare ∞^2 (*rete*). Il luogo dei punti della superficie che sono doppi per una curva della rete, è generalmente una linea (algebrica) che diremo *jacobiana* della rete.

Fa eccezione il caso in cui la rete di cui si tratta contenga come parti variabili delle curve composte colle curve di un fascio, giacchè allora la jacobiana diviene indeterminata. Volendo escludere questo caso, considereremo, entro $|C|$, reti generiche per cui le parti variabili sieno irriducibili. Questa restrizione verrà sottintesa nel seguito, ove, parlando della jacobiana di una rete, s'intenderà naturalmente di supporre che essa sia una curva determinata.

Avremo ora:

Le jacobiane delle reti appartenenti al sistema lineare $|C|$, stanno tutte in un medesimo sistema lineare.

Anzitutto l'enunciato è evidentemente soddisfatto se $|C|$ è una rete.

Se $|C|$ è un sistema lineare ∞^3, si trasformi la superficie F in una F_1 dello spazio S_3, sopra cui le C vengano segate dai piani; la trasformazione riesce generalmente birazionale, e supporremo appunto che ciò avvenga, riservandoci a mostrare più tardi che si tratta di una restrizione non essenziale.

Le jacobiane delle reti contenute in $|C|$ vengono rappresentate sopra F_1 dalle sezioni di F_1 colle superficie prime polari di essa; perciò le suddette jacobiane appartengono ad un sistema lineare ∞^3.

Se la dimensione di $|C|$ è superiore a 3, date in esso due reti, è facile costruire entro $|C|$ tre sistemi lineari ∞^3, α, β, γ, il primo dei quali contenga una delle due reti, il terzo l'altra, e siffatti che il sistema intermedio β abbia comune una rete con ciascuno dei due nominati α, γ. Per il teorema del n. 4, i sistemi jacobiani di α, β, γ saranno quindi contenuti in un medesimo sistema lineare completo di curve dello stesso ordine, a cui appartengono tutte le jacobiane delle reti contenute in $|C|$.

Il teorema enunciato resta così dimostrato completamente salvo un'ipotesi restrittiva che abbiamo fatto per via intorno ai sistemi lineari ∞^3, la quale restrizione si può esprimere dicendo che « le curve del sistema passanti per un punto generico non passino in conseguenza per altri punti della superficie, variabili col primo ».

Avendosi ora un sistema lineare $|C|\infty^3$, per cui tale restrizione non fosse soddisfatta, la trasformazione eseguita innanzi non ci condurrebbe più da F ad una superficie *semplice* F_1 in corrispondenza birazionale con essa, ma ad una superficie *multipla*, composta di una superficie F_1 contata un certo numero di volte. La corrispondenza tra F, F_1 sarebbe allora razionale in un senso solo. In tal caso le jacobiane delle reti contenute

in $|C|$ avrebbero come corrispondenti su F_1, non le sezioni di F_1 colle sue polari, ma queste sezioni aumentate della *curva di diramazione* della superficie multipla F.

Pertanto la conclusione che le jacobiane delle reti suddette appartengano ad un sistema lineare, permane anche in questo caso.

E così la restrizione introdotta nel corso della precedente dimostrazione resta eliminata.

14. – Dato sopra F un sistema lineare irriducibile $|C|$, ∞^2 almeno, virtualmente privo di punti base, le curve jacobiane delle reti contenute in $|C|$ appartengono come si è detto ad un sistema lineare.

Le suddette jacobiane potranno avere sopra F dei punti fissi comuni; ciò accade anzi generalmente se $|C|$ è ∞^3; si hanno allora come punti fissi quei punti che sono doppi per ∞^1 curve C.

Noi renderemo completo il sistema, senza tener conto dei punti suddetti, riguardandoli cioè come virtualmente inesistenti. Definiremo per tal modo il *sistema completo jacobiano* di $|C|$, che verrà generalmente designato con $|C_j|$.

15. – Ora possiamo estendere la definizione precedente al caso in cui si abbia sopra F un sistema lineare irriducibile $|C|$, ∞^2 almeno, dotato di punti base assegnati.

Osserveremo anzitutto che un punto base iplo per le C, è generalmente $(3i-1)$-plo per la jacobiana di una rete contenuta in $|C|$, come si verifica facilmente.

Ciò posto definiremo il *sistema lineare completo* $|C_j|$ *jacobiano* di $|C|$, come quel sistema completo che contiene tutte le jacobiane delle reti appartenenti a $|C|$, ed è dotato di un punto di molteplicità virtuale $3i-1$ in ogni punto base di molteplicità virtuale i per $|C|$.

È inutile insistere sul significato di tale definizione: le jacobiane delle reti contenute in $|C|$ potrebbero ben avere in un punto A, base per $|C|$ di molteplicità virtuale i, una molteplicità effettiva superiore a $3i-1$, sia perchè il punto A stesso abbia già per $|C|$ una molteplicità effettiva superiore ad i, sia anche per la presenza di altri punti base di $|C|$ infinitamente vicini ad A; ma le curve generiche del sistema completo $|C_j|$ avranno *generalmente*, anche in questi casi, in A, la molteplicità effettiva $=$ virtuale $3i-1$, e solo per condizioni particolarissime esse avranno nel detto punto A una molteplicità accidentale superiore alla virtuale $3i-1$.

16. – *Si abbia sopra la superficie F un sistema lineare irriducibile $|C|$, ∞^2 almeno, virtualmente privo di punti base; e sommando ad esso una curva K, sulla quale non vengano assegnati dei punti base, si ottenga un*

sistema irriducibile $|C + K|$. *Il sistema jacobiano di questo si potrà ottenere sommando allo jacobiano del sistema* $|C|$ *la curva* K *contata* 3 *volte*:

$$|(C + K)_j| = |C_j + 3K|.$$

Si prenda entro il sistema $|C + K|$ una rete di curve composte di una curva K fissa, e di ∞^2 C.

La jacobiana di questa rete, consta evidentemente della jacobiana della rete costituita dalle C, e della curva K contata un certo numero di volte, giacchè ogni punto della K è doppio per ∞^1 curve $K + C$. Ora è facile valutare quante volte la K entri a costituire la jacobiana suddetta e mostrare che deve entrarvi 3 volte. Basta per ciò calcolare (virtualmente) il numero delle intersezioni delle C_j e delle $|(K + C)_j|$ colle C.

Questo calcolo virtuale si effettua in ogni caso come quando $|C|$ e $|K + C|$ sieno affatto privi di punti base accidentali. Indicando con π il genere di $|C|$, e con n il suo grado, la serie (*caratteristica*) segata sopra una C dalle rimanenti curve C di una rete cui C appartiene, sarà una g^1_n, dotata di $2n + 2\pi - 2$ punti doppi; questi punti sono le intersezioni di C colla jacobiana C_j della rete.

Si consideri poi una rete irriducibile contenuta in $|C + K|$, a cui appartenga una curva composta $C + K$. Questa rete segherà sopra la C suddetta una serie g^1_{i+n}, designando con i il numero delle intersezioni di K con C. Ora la g^1_{i+n} ha $2(i + n) + 2\pi - 2$ punti doppi i quali presi insieme colle i intersezioni della K con C, costituiscono le $3i + 2n + 2\pi - 2$ intersezioni di C colla jacobiana della rete considerata.

Il numero delle intersezioni delle curve di $|(C + K)_j|$ con C, supera dunque di $3i$ il numero delle intersezioni delle C_j con C; e poichè abbiamo già veduto che $|(C + K)_j|$ si ottiene da $|C_j|$ sommando a questo sistema la K contata un certo numero di volte, si conclude ora che questo numero è 3, cioè:

$$|(C + K)_j| = |C_j + 3K|. \qquad c.\ d.\ d.$$

17. – Dato sopra F un sistema lineare $|C|$ irriducibile, ∞^2 almeno, diremo *curve aggiunte* a $|C|$ e designeremo con C', le curve residue di $|2C|$ rispetto al sistema jacobiano $|C_j|$, supposte esistenti.

Le curve C', se esistono, compongono un *sistema lineare completo* $|C'|$ che dicesi *aggiunto* a $|C|$, ed è definito dalla relazione simbolica $|C'| = |C_j - 2C|$. *Le curve aggiunte a* $|C|$ *hanno, per la definizione, un punto base di molteplicità virtuale* $i - 1$ *in ogni punto base di molteplicità virtuale* i *per* $|C|$ (n. 15).

18. – *Se il sistema irriducibile* $|C|$, *di genere (virtuale = effettivo)* π (>1) *non ha punti base dotati di ipermolteplicità accidentali, le curve* C' *aggiunte ad esso segano, sopra una* C *generica, gruppi della serie canonica* $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$.

Infatti, designando con n il grado di $|C|$, una rete generica di curve contenuta in $|C|$, sega sopra una C generica della rete stessa una serie (caratteristica) g^1_n, i cui $2n + 2\pi - 2$ punti doppi sono le intersezioni della jacobiana della rete colla suddetta C; ora il gruppo dei $2n + 2\pi - 2$ punti individua una serie lineare completa $g^{2n+\pi-2}_{2n+2\pi-2}$ che contiene, se $\pi > 1$, il doppio g_{2n} della serie g^1_n; e la residua serie

$$g_{2\pi-2} = g_{2n+2\pi-2} - g_{2n},$$

è la serie canonica di C (8).

Il teorema ora dimostrato è invertibile solo condizionatamente, cioè quando il sistema $|C|$, supposto di dimensione $r \geqslant 2$, non contenga ∞^{r-1} curve spezzate.

Nel n. 28 dell'*Introduzione* ... tale inversione è data nell'ipotesi $r \geqslant 3$. Non ce ne occuperemo qui, poichè essa non è essenziale per il seguito.

19. – *Si abbia sopra la superficie* F, *un sistema lineare irriducibile* $|C|$, ∞^2 *almeno, virtualmente privo di punti base; e sommando ad esso una curva* K, *sulla quale non vengano assegnati dei punti base, si ottenga un sistema irriducibile* $|C + K|$. *Il sistema aggiunto di questo si potrà ottenere sommando la curva* K *al sistema aggiunto a* $|C|$ *(supposto esistente)*:

$$|(C + K)'| = |C' + K|.$$

Infatti, se esiste $|C'|$, si ha

$$|C'| = |C_j - 2C|,$$

$$|(C + K)'| = |(C + K)_j - 2C - 2K|,$$

e per il n. 16

$$|(C + K)_j| = |C_j + 3K|,$$

---

(8) Il lemma sulle curve qui adoperato, si giustifica molto facilmente e conduce alla più semplice dimostrazione diretta del teorema d'invarianza della serie canonica. Ho sviluppato questa dimostrazione nelle mie lezioni sulle curve, tenute all'Università di Bologna l'anno 1897-98 [questo volume, XXVIII].

quindi

$$|C' + K| = |(C + K)'| \qquad c.\ d.\ d.$$

Il teorema esposto esprime la *proprietà fondamentale delle curve aggiunte.*

20. – *Esso permette di estendere la definizione delle curve aggiunte relativamente ad un qualsiasi sistema lineare, di dimensione* $\geqslant 0$, *irriducibile o no.*

Anzitutto se $|C|$ è un qualsiasi sistema lineare virtualmente privo di punti base sopra la superficie F, si può sempre sommare a $|C|$ un sistema lineare irriducibile $|K|$, di dimensione $\geqslant r$, senza punti base su F, per modo che $|C + K|$ riesca irriducibile. Allora le curve C' aggiunte a $|C|$, supposte esistenti, verranno definite dalla relazione simbolica

$$|C'| = |(C + K)' - K|.$$

È importante osservare che tale definizione risulta indipendente dall'arbitrarietà che compare nella scelta del sistema ausiliario $|K|$, perciocchè se a $|K|$ si sostituisce con altro sistema $|L|$, nelle medesime condizioni, si ha

$$|(C + K)' + L| = |(C + L)' + K| = |(C + K + L)'|,$$

e quindi

$$|(C + K)' - K| = |(C + L)' - L|.$$

Se poi $|C|$ ha dei punti base assegnati, le curve aggiunte ad esso (supposte esistenti) si otterranno dalle aggiunte al sistema stesso in cui i punti base si considerino come inesistenti, assegnando ad esse la molteplicità virtuale $i - 1$ in corrispondenza ad ogni punto base di molteplicità virtuale i per $|C|$.

Questa ultima definizione relativa ai sistemi $|C|$ dotati di punti base assegnati, è d'accordo con ciò che abbiamo detto al n. 17.

21. – *Se due superficie* F, F_*, *prive di singolarità, sono in corrispondenza birazionale l'una coll'altra, e* $|C|$, $|C_*|$ *sono due sistemi lineari che si corrispondono sopra di esse; le curve* C' *aggiunte a* $|C|$ (*supposte esistenti*) *hanno come corrispondenti le curve* C'_* *aggiunte a* $|C_*|$, *aumentate di quelle curve eccezionali fisse, che corrispondano a punti di* F, *fondamentali per la trasformazione, e non base per* $|C|$.

Stante il modo in cui sono state introdotte le curve aggiunte, ed in particolare tenendo presente il n. 20, basterà dimostrare il teorema nell'ipotesi che $|C|$ sia un sistema lineare irriducibile, ∞^2 almeno, distinguendo i due casi in cui esso sia privo di punti base sopra F, o abbia invece un punto base (assegnato) in un punto fondamentale A cui corrisponda su F_* una curva eccezionale a.

Pel primo caso osserviamo che la jacobiana di una rete contenuta in $|C|$ si muta, per effetto della trasformazione, in una parte della jacobiana della rete omologa di $|C_*|$, la quale deve essere completata aggiungendovi le curve eccezionali analoghe ad a. È chiaro infatti che un qualunque punto di a (o di ogni altra curva eccezionale analoga, trasformata di un punto di F), appartiene alla jacobiana di ogni rete contenuta in $|C_*|$, poichè vi è nella rete una curva spezzata nella a e in una curva residua per il punto.

Ora tenendo conto della definizione delle curve aggiunte del n. 17,

$$|C'| = |C_j - 2C|,$$

si deduce appunto che le trasformate delle C' sopra F_*, prese insieme alle curve eccezionali predette, costituiscono le curve C'_*, aggiunte a $|C_*|$.

Relativamente al 2° caso in cui $|C|$ abbia in A un punto base, che potremo supporre, per semplicità, di molteplicità virtuale eguale alla effettiva, si può ripetere il ragionamento precedente, salvo che la a non presenta più una sola condizione alle C_* che debbano contenerla, per modo che un punto di a non è in generale un punto doppio per una C_* spezzata nella a e in una curva residua (come avveniva nel caso precedente). In questo caso dunque la a non fa parte delle curve jacobiane di $|C_*|$, e quindi neppure delle curve aggiunte ad esso.

Il teorema dimostrato stabilisce che l'operazione di *aggiunzione* (facente passare da un sistema lineare al suo aggiunto) ha *carattere invariante relativo* nelle trasformazioni birazionali della superficie, ossia ha carattere invariante *a meno di curve eccezionali* fondamentali per la trasformazione.

Perciò i sistemi e i caratteri invarianti di una superficie, che si desumono a partire da un qualsiasi sistema lineare di essa operando per aggiunzione, per somma, e per sottrazione, in quanto possano venire influenzati dalla presenza delle suddette curve eccezionali, sono invarianti relativi (cfr. i nn. 23, 24, 25).

22. – La superficie F priva di singolarità, supposta appartenente ad uno spazio S_k con $k \geqslant 3$, può proiettarsi in una superficie dello spazio ordinario S_3.

Eseguendo la proiezione da punti esterni generici, si avrà in S_3 una F_n, dello stesso ordine n, dotata soltanto di una curva doppia, nodale, con un numero finito di punti tripli (tripli per la curva e per la superficie), sulla quale curva si troveranno inoltre un numero finito di punti uniplanari (*pinch-points*).

Rispetto alla suddetta superficie F_n di S_3, considereremo le *superficie aggiunte*, definite dalla proprietà di passare semplicemente per la curva doppia. Avremo anzitutto il teorema:

Le superficie φ_{n-4+r}, d'ordine $n-4+r$ ($r \geqslant 1$), aggiunte alla F_n segano sopra F_n (fuori della curva doppia) curve aggiunte al sistema lineare determinato su F_n dalle superficie generali d'ordine r.

Stante la proprietà fondamentale del n. 19, basterà stabilire il teorema per le superficie aggiunte di un dato ordine, ad es., per le φ_{n-3} (supposte esistenti). E per ciò è sufficiente osservare che una φ_{n-3}, presa insieme a due piani qualunque, sega su F_n una curva appartenente al sistema lineare segato dalle superficie polari φ_{n-1}, ove quest'ultimo sistema (jacobiano di quello delle sezioni piane di F_n) s'intenda completato col prescindere dai punti base che esso possiede nei punti uniplanari della curva doppia di F_n (n. 14).

23. – Viceversa:

Una curva K della superficie F_n, aggiunta al sistema lineare determinato dalle superficie generali d'ordine r ($\geqslant 1$), è intersezione di F_n con una superficie aggiunta (φ_{n-4+r}) d'ordine $n-4+r$.

Ossia: *Le superficie aggiunte ad F_n, segano sopra la superficie un sistema lineare completo* (data la proprietà per $r \geqslant 1$, segue che essa sussiste anche per $r < 1$).

Si prova che la K, di cui si parla nell'enunciato, appartiene ad una φ_{n-4+r}, nel modo seguente:

Il gruppo di punti comune a K e ad una sezione piana di F_n, appartiene ad una curva C_{n-4+r} aggiunta d'ordine $n-4+r$. Se $r > 3$ vi sono infinite C_{n-4+r} siffatte; ma in ogni caso se ne può determinare una per modo che facendo variare il piano in un fascio, questa curva C_{n-4+r} generi una φ_{n-4+r} aggiunta ad F_n.

Occorre soltanto considerare in modo speciale il caso in cui la F_n sia una rigata (cfr. *Introduzione* ... nn. 18, 32) o una superficie di STEINER.

24. – Alla superficie F di S_k, o alla sua proiezione F_n, appartengono dei sistemi e dei caratteri invarianti. Si giunge a determinarli nel modo che rapidamente accenniamo:

Anzitutto sieno $|C|$ e $|K|$ due sistemi lineari virtualmente privi di

punti base su F, o su F_n. Sussiste la relazione fondamentale:

$$|(C + K)'| = |C + K'| = |C' + K|,$$

da cui, formalmente

$$|C' - C| = |K' - K|.$$

Quindi: *Se un sistema lineare $|C|$, virtualmente privo di punti base su F (o su F_n), è contenuto nel proprio sistema aggiunto, altrettanto avviene per ogni altro sistema analogo, ed il sistema residuo $|C' - C|$ è indipendente dalla scelta arbitraria di $|C|$.* La stessa proprietà vale anche per un sistema dotato di punti base assegnati.

Prendendo come sistema $|C|$ quello segato su F_n dai piani, si ha che $|C' - C|$ *viene segato dalle superficie φ_{n-4} aggiunte d'ordine $n - 4$.* E quindi per il n. 20: *Le sezioni delle φ_{n-4} sono invarianti, in senso relativo, per trasformazioni birazionali della superficie*, cioè invarianti *a meno di curve eccezionali* (NOETHER).

Spogliate delle curve eccezionali della superficie, che entrano in esse come componenti fisse, le sezioni di F_n colle φ_{n-4} hanno carattere invariante in senso assoluto, e diconsi *curve canoniche.*

Le curve canoniche si possono definire mediante la seguente *proprietà caratteristica*, che mette in evidenza come esse sieno invarianti in senso assoluto: *Una curva canonica della superficie F, presa insieme alle curve eccezionali di F, e a tre curve di una qualunque rete irriducibile, senza punti base su F, costituisce una curva appartenente al sistema lineare completo determinato dalla jacobiana della rete* (9).

Il numero delle curve canoniche (d'ordine $\geqslant 0$) linearmente indipendenti, che appartengono alla superficie F, costituisce il suo genere geometrico superficiale p_g, che è un invariante assoluto.

25. – Se $|C'|$ non contiene $|C|$ può darsi tuttavia che $|iC'|$ contenga $|iC|$ $(i > 1)$, e si ha egualmente l'invarianza relativa di $|iC' - iC|$. Così si trovano le *curve pluricanoniche* (*bicanoniche* ...) e i *plurigeneri* (*bigenere* ...) della superficie F. (Cfr. *Introduzione* ... n. 39).

26. – Coi caratteri virtuali (genere π e grado n) di un sistema lineare $|C|$, virtualmente privo di punti base su F, e con quelli π', n', del sistema aggiunto $|C'|$, si formino le espressioni

$$\omega_1 = \pi' - 3(\pi - 1) + n,$$

$$\omega_2 = n' - 4(\pi - 1) + n.$$

(9) Tale proprietà delle curve canoniche è implicitamente contenuta nella dimostrazione algebrica dell'invarianza di esse data dal sig. NOETHER nel Bd. 8 dei « Mathematische Annalen ».

Si prova che queste espressioni non variano ove esse sieno calcolate partendo invece che da $|C|$, da un qualunque altro sistema lineare $|K|$, virtualmente privo di punti base su F. Basta per ciò calcolare il genere e il grado del sistema $|(C + K)'|$ colle formule del n. 11, tenendo conto che

$$|(C + K)'| = |C + K'| = |C' + K|.$$

Si dimostra così che ω_1, ω_2 *sono invarianti relativi della superficie. Tra di essi sussiste la relazione* $\omega_2 = \omega_1 - 1$. (Cfr. *Introduzione ...* n. 41, e CASTELNUOVO e ENRIQUES, l. c., n. 5).

Se, come nel n. 41 della *Introduzione ...* citata, si pone la restrizione che la superficie F possegga un numero finito δ di curve eccezionali, $p^{(1)} = \omega_1 + \delta$ è un *invariante assoluto*, il quale nell'ipotesi $p_g > 0$, esprime il *genere virtuale delle curve canoniche* (*genere lineare* della superficie, *Curvengeschlecht* di NOETHER). (Cfr. CASTELNUOVO e ENRIQUES, l. c., nn. 20, 21).

27. – Finalmente si arriva a stabilire il *significato invariante, in senso assoluto, del genere numerico* o *aritmetico* della superficie F, o di F_n, nel modo seguente:

Si definisca (con ZEUTHEN e NOETHER) il genere aritmetico p_a di F_n, come il numero virtuale ($\leqslant p_g$) delle superficie aggiunte φ_{n-4}, linearmente indipendenti, desunte dalle formule di postulazione (cfr. *Introduzione ...*, n. 37).

Si prova (l. c. e n. 40), che il sistema aggiunto a quello $|C_r|$ determinato su F_n dalle superficie generali d'ordine r abbastanza elevato (basta prendere $r > p_g - p_a$) sega sulla curva C_r generica una serie (canonica) che ha la deficienza $\delta|C'| = p_g - p_a$.

Si prova ancora che la deficienza analoga, calcolata per un sistema lineare irriducibile $|K|$ contenuto in $|C_r|$, vale

$$\delta(K) \leqslant \delta(C_r).$$

Poichè prendendo r assai alto, ogni sistema $|K|$ si può supporre contenuto in $|C_r|$, si giunge al seguente teorema, che mette in luce l'invarianza, in senso assoluto, della differenza $p_g - p_a$. *Per la superficie* F, *la differenza* $p_g - p_a$ *è la deficienza massima della serie* (canonica) *segata sopra la curva generica di un suo sistema lineare irriducibile* (*senza ipermoltiplicità accidentali nei punti base*), *dal proprio sistema aggiunto.*

XXXIII.

SOPRA ALCUNE QUESTIONI FONDAMENTALI NELLA TEORIA DELLE SUPERFICIE ALGEBRICHE

di GUIDO CASTELNUOVO e FEDERIGO ENRIQUES

« Annali di Matematica pura ed applicata », s. 3ª, to. VI (1901), pp. 165-225.

In questa Memoria ci siamo proposti di esporre i resultati di alcune ricerche che abbiamo ultimamente compiute intorno alla teoria delle superficie algebriche. Ma poichè i nuovi resultati a cui siamo pervenuti si appoggiano sopra quelli precedentemente raggiunti, dai quali è occorso rimuovere qua e là inutili limitazioni, ci trovammo costretti ad allargare il primitivo proposito esponendo al lettore un quadro di tutti o quasi tutti i più essenziali resultati che abbiamo ottenuto in questa teoria, da sette anni fino ad oggi.

Naturalmente abbiamo riferito i teoremi colle spiegazioni necessarie, lasciando però da parte quelle dimostrazioni che era affatto inutile di riprodurre.

Il metodo di esposizione da noi tenuto speriamo possa contribuire alla chiarezza della lettura, giacchè esso rende, a nostro parere, accessibile il lavoro anche a chi non abbia alcuna conoscenza speciale dell'argomento.

Crediamo utili tuttavia poche parole d'introduzione per spiegare a quale scopo sieno dirette le nostre ultime ricerche, ed a quali nuovi resultati esse ci abbiano condotto.

Nello studio dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie è fondamentale la nozione del *sistema aggiunto* ad un sistema lineare dato (§ I).

Partendo da un sistema $|C|$ e costruendo il suo aggiunto $|C'|$, l'aggiunto di questo (2° aggiunto) $|C''|$, e così continuando, si ottiene una serie generalmente illimitata di sistemi lineari

$$|C|,\ |C'|,\ |C''|,\ \ldots,\ |C^{(i)}|,\ \ldots;$$

e dalla considerazione di questa scaturiscono i *caratteri* e i *sistemi di curve invarianti* per la superficie (§ II).

In casi particolari la serie sopra nominata si arresta ad un ultimo sistema aggiunto $|C^{(i)}|$; si ha allora un processo di riduzione che si è già rivelato utile nello studio delle superficie razionali (involuzioni piane, e condizioni di razionalità).

Determinare tutte le superficie sopra cui il procedimento di aggiunzione si estingue, è la questione fondamentale che ci siamo proposti.

La risposta a tale questione è che *tutte le superficie dotate di questa proprietà sono riferibili a rigate (razionali o no)*.

Da questa risposta, che comprende come casi particolari i vari resultati già ottenuti col metodo di riduzione sopra nominato, seguono due ordini di nuove conseguenze:

1) Conseguenze relative alle *condizioni di trasformabilità* di una superficie *in una rigata* (§§ V e VI), dalle quali si deducono in particolare le note *condizioni di razionalità* (§ VI, n. 23);

2) Conseguenze relative alla teoria generale delle superficie, segnatamente la possibilità di eliminare le curve eccezionali per ogni superficie che non appartenga alla famiglia delle rigate, e gli sviluppi che si riattaccano alla nozione del *genere lineare* (§ V, n. 18 e § VI).

In luogo di un più ampio resoconto di tali resultati porgiamo al lettore un indice particolareggiato della Memoria (pag. 143), richiamando specialmente la sua attenzione sopra le questioni risolute nel § V, le quali fanno fede (se non c'inganniamo) dei progressi portati da queste nuove ricerche nella teoria delle superficie algebriche.

I. - Prime proprietà dei sistemi lineari di curve sopra una superficie.

1. – Le considerazioni che seguono si riferiscono alla geometria sopra una superficie algebrica F, che supponiamo appartenere ad un certo spazio S_r a $r \geqslant 3$ dimensioni, ed essere *priva di punti multipli*.

Questa ipotesi non porta invero alcuna restrizione al nostro studio, giacchè ogni superficie data, con singolarità qualunque, può essere birazionalmente trasformata in un'altra, appartenente ad un S_r con $r \geqslant 5$, priva di singolarità [1].

---

[1] Allo studio di una siffatta trasformazione sono rivolti i noti lavori dei Sigg. NOETHER, DEL PEZZO, SEGRE, PICARD, B. LEVI. E, sebbene il procedimento seguito da questi geometri vada soggetto talvolta a qualche limitazione, o, per alcuni, non appaia affatto immune da critiche, così da porgere una dimostrazione luminosa del resultato, valida per tutti i casi di singolarità complicate, noi ci teniamo egualmente sicuri della esattezza della conclusione, alla quale si può giungere per molteplici vie. Ad una di queste vie accenniamo nell'articolo sulle *Superficie algebriche* scritto per la *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*.

Sopra F considereremo *sistemi lineari* $|C|$ *di curve* (algebriche) C, ai quali generalmente non verranno *imposti* dei *punti base*; ed ogni sistema $|C|$ verrà considerato nella maggiore ampiezza possibile, cioè *completo* (o *normale*), per modo che non esista alcun sistema lineare di curve *dello stesso ordine* contenente $|C|$. Qui importa ricordare che una qualunque curva (*totale*) C *determina il sistema completo cui appartiene* [2]. Assegnando dunque, sopra F, un sistema lineare $|C|$, supporremo, ove la scelta sia arbitraria, che le curve C sieno *irriducibili*, ∞^1 almeno, e non passino per alcun punto fisso (*punto base*).

Noi in seguito dedurremo dai sistemi lineari irriducibili e privi di punti base, scelti su F, nuovi sistemi lineari, mediante certe operazioni; ma queste saranno di tal natura che i nuovi sistemi costruiti non dovranno mai avere, *a priori*, dei punti base, per effetto delle operazioni stesse. Riservandoci di fissare, fra un momento, le operazioni di cui si tratta, avvertiamo subito che colle condizioni enunciate *non* si esclude:

1) che i sistemi costruiti, ∞^1 almeno, pur essendo composti di curve irriducibili, abbiano dei *punti base accidentali*, i quali però si debbono riguardare come *virtualmente non esistenti*, nel senso che verrà precisato più tardi;

2) che i sistemi costruiti come si è detto, ∞^1 almeno, riescano composti di curve *riducibili*, la quale ipotesi dà luogo a due casi [3]:

a) che le curve del sistema si compongano di un certo numero di *componenti fisse*, e di *componenti variabili irriducibili* (costituenti un sistema lineare irriducibile virtualmente privo di punti base su F);

b) che le curve del sistema, all'infuori di *eventuali componenti fisse*, sieno composte ciascuna di più *curve variabili di un fascio*, lineare o no (sistema ∞^1 di curve tale che un punto di F appartenga ad *una* curva del sistema), il fascio essendo ancora virtualmente privo di punti base;

3) che i sistemi indicati sieno ∞^0, cioè constino di *una sola curva* (irriducibile o no).

La convenzione di riguardare come *virtualmente non esistente* un punto base accidentale A di un sistema lineare $|C|$ costruito su F, si traduce nella seguente:

Se la superficie F viene trasformata in un'altra superficie F^*, per modo che al punto A di F corrisponda su F^* una curva a^* (*curva eccezionale*), *la curva* a^* *si deve riguardare come facente parte di tutte le curve trasformate delle* C.

---

[2] Cfr. ENRIQUES, *Introduzione alla Geometria sopra una superficie algebrica*, « Memorie della Società italiana delle Scienze (dei XL) », (serie III), to. X, 1896, §§ 9, 11 [queste *Memorie*, vol. I, XIII].

[3] Cfr. ENRIQUES, l. c., § 5.

Questa convenzione porta di conseguenza altre convenzioni relative al modo di valutare i caratteri di $|C|$, le quali verranno esposte tra poco.

Cominciamo a stabilire la natura delle operazioni che intendiamo eseguire sui sistemi lineari dati su F.

Anzitutto *opereremo per somma e per sottrazione.*

Dati due sistemi lineari (completi) $|C|$ e $|K|$, dicesi *sistema somma* di essi, e designasi con $|C + K|$, il sistema lineare completo contenente tutte le curve composte di una C e di una K; questo sistema è irriducibile se sono irriducibili $|C|$ e $|K|$, a meno che questi non coincidano in un unico fascio; esso è privo di punti base, tali essendo $|C|$ e $|K|$.

Dati due sistemi lineari $|C|$ e $|K|$, e *supposto che* $|C|$ *contenga parzialmente* $|K|$ (vale a dire che una e quindi ogni curva K formi parte di una o più curve C), dicesi *sistema differenza* $|C - K|$ (o *residuo di* $|K|$ *rispetto* a $|C|$) il sistema completo costituito dalle curve che insieme ad una K compongono una C; questo sistema $|X|$ riesce *indipendente dalla curva K considerata* (4), e può definirsi mediante l'equazione simbolica

$$|K + X| = |C|.$$

Nella sottrazione possono ottenersi sistemi riducibili, comunque si operi su sistemi irriducibili; inoltre, pur essendo $|C|$ privo di punti base, $|C - K|$ può avere dei punti base accidentali, che in ogni caso debbono riguardarsi come virtualmente non esistenti.

Ad ogni sistema lineare $|C|$ competono tre caratteri fondamentali: la *dimensione*, il *genere*, il *grado*, invariabili per una trasformazione birazionale della superficie.

Relativamente al genere e al grado occorrono le seguenti spiegazioni:

1) Il genere d'un sistema lineare $|C|$, irriducibile e privo di punti base, è il genere π di una curva C generica. Se $|C|$, ancora irriducibile, possiede dei punti base di molteplicità $j_1, j_2, \ldots$, si debbono distinguere il *genere effettivo* di $|C|$, cioè il genere π di una C generica, ed il suo *genere virtuale* calcolato in armonia colla convenzione di riguardare i punti base di $|C|$ come virtualmente non esistenti; quest'ultimo carattere verrà dato da

$$\pi + \sum \frac{j(j-1)}{2}.$$

Se $|C|$ è riducibile, il suo genere (*virtuale*) dovrà essere valutato

(4) ENRIQUES, l. c., § 13.

mediante la formula

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1 ,$$

che dà il genere di una curva composta di due componenti aventi rispettivamente i generi π_1, π_2, e secantisi in i punti.

Questa formula, estesa al caso di più componenti, permette di determinare il genere di $|C|$ comunque riducibile; tuttavia se in $|C|$ comparisce una componente fissa γ, contata più volte, occorre considerare il *numero i delle intersezioni di γ con se stessa* calcolato in base alla nozione sotto esposta di *grado virtuale* d'un sistema lineare.

Se si sommano due sistemi lineari $|C_1|$, $|C_2|$, i cui generi valgano rispettivamente π_1, π_2, e dove una C_1 e una C_2 si seghino in i punti, si calcolerà il genere di $|C_1 + C_2|$ mediante la formula indicata innanzi

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1 .$$

Qui è opportuno ricordare il seguente principio che si appoggia sopra ragioni di continuità e di connessione, e di cui faremo uso frequente:

Se una curva generalmente irriducibile, di genere π, varia in un sistema continuo, e per una posizione particolare si spezza in due componenti distinte, queste hanno almeno un punto comune, fuori dei punti base eventuali del sistema, e quindi ogni componente parziale di quella ha il genere $\leqslant \pi$.

2) Il grado d'un sistema lineare irriducibile $|C|$, ∞^1 almeno, privo di punti base su F, è il numero n delle intersezioni di due curve C generiche. Se $|C|$, pur essendo irriducibile, ha dei punti base, conviene distinguere il suo *grado effettivo*, cioè il numero n delle intersezioni *variabili* di due C, ed il suo *grado virtuale* cioè il numero totale delle intersezioni di due C, ove un punto base j-plo viene computato per j^2 intersezioni; questo secondo carattere $n + \sum j^2$ è quello cui ci riferiremo generalmente, d'accordo colla convenzione di riguardare come virtualmente non esistenti i punti base di $|C|$.

Ma la definizione esposta non ha più senso se $|C|$ è riducibile, contenendo delle parti fisse.

Ecco come si definisce in questo caso il grado (virtuale) di $|C|$.

Osserviamo anzitutto che se $|C_1|$, $|C_2|$ sono due sistemi lineari irriducibili, i cui gradi valgano rispettivamente n_1, n_2, e se si designa con i il numero delle intersezioni di una C_1 con una C_2, il grado di $|C_1 + C_2|$ vale

$$N = n_1 + n_2 + 2i .$$

Ora se $|C_1|$ è un sistema lineare riducibile, si può sempre determinare, in infiniti modi, su F un sistema irriducibile $|C_2|$ in guisa che $|C_1 + C_2|$ riesca irriducibile; si dimostra poi che il valore di n_1 tratto dalla formula precedente è indipendente dalla scelta arbitraria di $|C_2|$, e si definisce questo valore come il *grado (virtuale)* di $|C_1|$ [5]. Questa definizione vale anche se $|C_1|$ è ∞^0; resta così fissato che cosa s'intenda colla locuzione « *numero delle intersezioni di una curva con se stessa* ». È però da avvertire che questo numero può ben essere negativo, mentre esso è $\geqslant 0$ se la curva appartiene ad un fascio.

La definizione del grado virtuale rende sempre valida la formula data innanzi

$$N = n_1 + n_2 + 2i ,$$

la quale esprime in ogni caso il grado del sistema somma di due sistemi dati su F, comunque riducibili.

Termineremo questo numero ricordando due nozioni fondamentali per lo studio delle superficie e dei sistemi lineari sopra di esse:

a) *Curva fondamentale* per un sistema lineare $|C|$, virtualmente privo di punti base sopra la superficie F, è una curva che non ha alcuna intersezione colle curve C del sistema.

Se al contrario $|C|$ si considera come dotato di punti base *assegnati*, deve riguardarsi come curva fondamentale per esso ogni curva di F che non seghi le C fuori dei punti base del sistema.

b) *Curva eccezionale* è una curva γ di F la quale può essere trasformata in un punto semplice mediante un'opportuna trasformazione birazionale della superficie.

Se si designa con F^* la superficie trasformata di F, e con G^* il punto di F^* che corrisponde alla curva γ di F, avremo che al sistema lineare delle curve C, sezioni piane o iperpiane di F, corrisponderà sopra F^* un sistema lineare $|C^*|$ avente G^* come punto base. Ed il punto G^* dovrà riguardarsi come un punto base *assegnato* per $|C^*|$, non già come virtualmente inesistente, giacchè altrimenti, ritornando ad F, si sostituirebbe al sistema dato $|C|$ composto delle curve sezioni di F, il sistema composto delle C e della curva fissa γ.

Questa osservazione mostra che mentre si può prescindere affatto dalla considerazione di sistemi dotati di punti base assegnati, finchè si rimane sopra una superficie data F, ciò non è più lecito quando si consideri insieme ad F una sua trasformata F^*, a meno che, nel passaggio

---

[5] ENRIQUES, l. c., § 15.

da F ad F^*, non si cambi simultaneamente il sistema delle nostre convenzioni.

2. – Accanto alle operazioni di addizione e sottrazione applicate ai sistemi lineari dati su F, introdurremo ancora l'operazione (*aggiunzione*) che fa passare da un sistema lineare dato $|C|$, al suo *sistema aggiunto* $|C'|$.

Quando $|C|$ è un sistema irriducibile ∞^r, con $r \geqslant 2$, privo di punti base e di curve fondamentali, su F, le curve C' aggiunte a $|C|$ sono definite dalla sola condizione di segare gruppi *canonici*, cioè gruppi della serie $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$, sulla curva C generica supposta di genere π; (viene eccepito soltanto il caso in cui fra le ∞^r C ve ne sieno ∞^{r-1} riducibili). Le curve C' (quando esistono) formano sempre un sistema lineare completo, virtualmente privo di punti base su F, che dicesi *sistema aggiunto a* $|C|$.

Essendo $|C|$ e $|K|$ due sistemi lineari, soddisfacenti alle condizioni dette innanzi, sussiste la *relazione fondamentale* (6)

$$|(C + K)'| = |C + K'| = |C' + K|,$$

dove col simbolo $|(C + K)'|$ si denota il sistema aggiunto a $|C + K|$, ecc.

Questa relazione, estesa a tutti i casi, in cui non figurano punti base, permette di definire in modo determinato il sistema lineare aggiunto ad un qualsiasi sistema lineare $|C|$, virtualmente privo di punti base, su F, anche quando $|C|$ abbia delle curve fondamentali, o sia riducibile ecc.

L'operazione di aggiunzione applicata a sistemi lineari virtualmente privi di punti base, su F, porta sempre (quando è effettuabile) a sistemi lineari del pari virtualmente privi di punti base.

Accanto al sistema $|C'|$ aggiunto a $|C|$ si può considerare l'aggiunto di esso $|C''|$ (2° *aggiunto* a $|C|$) e così via; vale allora anche per gli i-mi aggiunti di due sistemi lineari qualunque $|C|$ e $|K|$, virtualmente privi di punti base su F, la relazione fondamentale

$$|(C + K)^i| = |C + K^i| = |C^i + K|,$$

sotto la sola condizione di esistenza dei sistemi designati dai simboli.

Se un sistema lineare $|C|$ dato sopra F possiede un punto base h-plo, che si consideri non più come virtualmente inesistente, ma come *assegnato*, il sistema aggiunto $|C'|$ verrà definito aggiungendo la condizione che questo punto sia $(h-1)$-plo per le curve C'.

---

(6) ENRIQUES, l. c., cap. III, IV e particolarmente § 27.

Premesso ciò, si può osservare il carattere invariante della operazione di aggiunzione, e la limitazione a cui tale invarianza è vincolata:

Se F ed F^* sono due superficie senza singolarità, in corrispondenza birazionale, e $|C|$, $|C^*|$ sono due sistemi lineari omologhi sopra di esse, al sistema $|C'|$ aggiunto a $|C|$ su F, spogliato delle sue eventuali componenti eccezionali aventi per immagini punti di F^*, corrisponde su F^* il sistema $|C^{*\prime}|$ aggiunto a $|C^*|$ spogliato delle sue eventuali componenti eccezionali aventi per immagini punti di F (7).

Ritornando alla superficie F e ad un sistema $|C|$ privo di punti base sopra quella, è utile notare pel seguito come si riesca ad esprimere il grado n' del sistema aggiunto $|C'|$ in funzione del genere π' di questo e del genere π di $|C|$. Vale precisamente la formola

$$n' = \pi + \pi' - 2 .$$

Questa si giustifica formando il sistema $|C + C'|$ che ha il genere $\pi + \pi' + (2\pi - 2) - 1 = 3\pi + \pi' - 3$, ed ha per sistema aggiunto $|2C'|$; calcolando il numero delle intersezioni di una curva di questo con una curva di quello, si perviene all'uguaglianza

$$2(2\pi - 2) + 2n' = 2(3\pi + \pi' - 4) ,$$

donde segue subito la formola da dimostrare.

II. - Caratteri invarianti delle superficie.

3. – Alla nostra superficie F appartengono due serie di *caratteri invarianti* per trasformazioni birazionali: *caratteri geometrici* e *caratteri aritmetici*.

I caratteri geometrici che vogliamo considerare sono il *genere* p_g ed i *plurigeneri* P_i ($P_1 = p_g$). Essi possono definirsi nel seguente modo:

Consideriamo su F due sistemi lineari $|C|$, $|K|$ ed i successivi aggiunti di essi $|C'|$, $|C''|$..., e rispettivamente $|K'|$, $|K''|$... Si ha, per la relazione fondamentale,

$$|K + C^i| = |C + K^i| ,$$

e quindi sussiste la relazione simbolica

$$|C^i - C| = |K^i - K| .$$

(7) Cfr. ENRIQUES, l. c., § 25.

Essa dice che « se un sistema $|C|$ è contenuto nel suo i-mo aggiunto, la stessa proprietà spetta ad ogni altro sistema $|K|$, ed il sistema residuo è indipendente dal sistema da cui si parte ».

Questo sistema lineare

$$|C^i - C|,$$

avrà dunque carattere invariante rispetto alle trasformazioni birazionali della superficie, purchè si prescinda dal fatto che una siffatta trasformazione può aggiungere o togliere al sistema certe componenti fisse eccezionali (cfr. n. 2).

Siccome « ogni curva eccezionale della superficie F compare, contata i volte, come componente fissa di $|C^i - C|$ », così potremo dire: *il sistema* $|C^i - C|$ *spogliato delle curve eccezionali della superficie* F *che entrano in esso come componenti fisse, ciascuna* i *volte, ha (quando esiste) una relazione invariante colla superficie.*

Questo sistema

$$|C^i - C| = |iC' - iC|,$$

spogliato delle sue componenti eccezionali, secondo la convenzione ora fatta, sarà detto il *sistema i-canonico* della superficie (*sistema canonico* quando $i = 1$); il numero delle curve *i-canoniche* linearmente indipendenti è un carattere invariante della superficie F, che si designa con P_i, e vien chiamato lo *i-genere* di F (o semplicemente il *genere* p_g per $i = 1$; *bigenere* per $i = 2$, ecc.) (8).

Quando il genere p_g è maggiore di 0, si ha, a fortiori, $P_2 > 0$, $P_3 > 0$ ... Invece può essere $p_g = 0$, e $P_2 > 0$ come si ricava da effettivi esempi. In generale si deve ammettere che possano annullarsi tutti i plurigeneri fino ad un certo ordine i, ma non P_i; allora fra i plurigeneri successivi saranno certo non nulli almeno $P_{2i}, P_{3i}, \ldots$ È infine utile notare che se per una superficie F uno dei plurigeneri P_i è maggiore di 0, per ogni sistema lineare di genere π e grado n appartenente ad F, si ha sempre

$$n \leqslant 2\pi - 2,$$

---

(8) L'invarianza del sistema canonico e quindi del genere è stata stabilita algebricamente dal sig. NOETHER nella Memoria *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens*, « Mathem. Annalen », Bd. 2, 8. L'invarianza delle curve pluricanoniche e dei plurigeneri è stabilita da ENRIQUES, l. c., § 39. Esempi di superficie con $p_g = 0$, $P_3 > 0$ sono stati dati da ENRIQUES, l. c.; CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero*, « Memorie della Società ital. d. Scienze (dei XL) », (serie III), t. X (1896); ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)} = 1$, « Rendic. Accad. dei Lincei », 1898 [queste *Memorie*, vol. I, XXII].

comunque i caratteri n e π s'intendano definiti, in senso virtuale, o in senso effettivo. Segue di qui che tutti i plurigeneri sono nulli per le superficie contenenti un fascio di curve razionali (rigate), e così per le superficie contenenti un fascio di curve ellittiche dotato di qualche punto base, in generale per le superficie contenenti un sistema lineare per cui

$$n > 2\pi - 2 .$$

Quando esistono effettive curve i-canoniche, i caratteri di esse forniscono nuovi caratteri geometrici della superficie (cfr. n. 20).

I plurigeneri della superficie F si possono definire anche nel modo seguente:

Si proietti F (da punti esterni generici) in una superficie F_1 dello stesso ordine n nello spazio ordinario S_3, in guisa che F_1 sia dotata soltanto di curva doppia e di punti tripli che siano tripli anche per la detta curva. Allora le curve i-canoniche (all'infuori di eventuali curve eccezionali) si possono costruire segando F_1 colle superficie *i-aggiunte* d'ordine $i(n-4)$.

S'intende per superficie *i-aggiunta* ad F_1 una superficie Φ, che passa per la curva doppia di F_1, e sega F_1 nell'intorno della detta curva come se passasse i volte per essa; dunque sono *aggiunte* (semplici) a F_1 le superficie passanti semplicemente per la sua curva doppia; sono *biaggiunte* le superficie passanti per essa doppiamente; sono *triaggiunte* le superficie che passano doppiamente per la curva doppia di F_1 e toccano le due falde di F_1, ecc.

Abbiamo così che P_i *è il numero delle superficie* $\Phi_{i(n-4)}$, *d'ordine* $i(n-4)$, *i-aggiunte ad* F_1, *che sono linearmente indipendenti, e tali che nessuna superficie del sistema lineare da quelle determinato contenga la* F_1.

4. – Tra i caratteri aritmetici della superficie F, ha importanza fondamentale il *genere aritmetico* o *numerico* che indicheremo con p_a (o p_n). Riferendoci alla nominata proiezione F_1 di F in S_3, il p_a viene definito come il valore aritmetico della espressione che indica, in base ai caratteri della curva doppia di F_1, quante sono le superficie Φ_{n-4}, linearmente indipendenti, aggiunte ad F_1, nell'ipotesi di validità delle formule di postulazione di NOETHER (9). Questa definizione è legata alla circostanza che F_1 è dotata di singolarità ordinarie (anzi di sola curva doppia e punti tripli).

---

(9) Cfr. NOETHER, *Sulle curve multiple di superficie algebriche*, « Annali di Matematica », (serie 2), to. V (1871).

Il genere aritmetico p_a può essere definito indipendentemente da questa particolare rappresentazione della superficie F, nel seguente modo:

Si consideri su F un sistema lineare irriducibile, ∞^3 almeno, $|C|$, e si indichino con $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots$ le deficienze delle serie lineari di gruppi di punti segate su una C generica dai sistemi di curve

$$|C'|, \qquad |C + C'|, \qquad |2C + C'| \ldots ;$$

sussiste allora l'uguaglianza fondamentale

$$p_g - p_a = \sum \delta_i \ (^{10}) .$$

Questa uguaglianza, quando si sia provata l'invarianza del 2° membro, definisce il carattere invariante p_a, essendo già stabilita l'invarianza di p_g (genere geometrico).

Si hanno pure due teoremi che pongono in luce l'invarianza ed il significato della $p_g - p_a$, e quindi del genere numerico p_a:

La deficienza della serie (canonica) *segata sopra la curva generica d'un sistema lineare irriducibile $|C|$ dal sistema aggiunto $|C'|$ ammette come massimo $p_g - p_a$* (11), ed esistono sistemi in relazione ai quali il massimo è raggiunto; dunque la dimensione di $|C'|$ è sempre

$$\geqslant p_a + \pi - 1 ,$$

designando con π il genere di $|C|$ (essa è d'altra parte $\leqslant p_g + \pi - 1$).

La deficienza della serie caratteristica d'un sistema lineare irriducibile $|C|$ (serie segata sopra una C generica dalle altre C) *ammette come massimo $p_g - p_a$*, ed esistono sistemi per i quali il massimo è raggiunto (12).

Da quest'ultimo teorema segue, come corollario, la *estensione* alle superficie *del notissimo teorema di* RIEMANN-ROCH, che per i sistemi *non speciali* di curve, cioè non contenuti nel sistema canonico, si enuncia nel modo seguente (13):

---

(10) ENRIQUES, *Introduzione ...*, citata, § 40. [Secondo un teorema di E. PICARD (1906) è sempre $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = 0$, $p_g - p_a = \delta_0$].

(11) ENRIQUES, loc. cit.

(12) CASTELNUOVO, *Alcune proprietà fondamentali ...*, « Annali di Matematica » (serie 2ª), to. XXV (1897), n. 29 e seg.

(13) Questo enunciato relativamente al caso $p_g = p_a$ (*superficie regolari*) si trova in una Nota del sig. NOETHER, « Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc. », t. CIII, 1886. Della sua giustificazione, sempre pel caso delle superficie regolari, si è occupato ENRIQUES, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, IV, 2, « Memorie dell'Accad. delle Scienze di Torino » (1893) [queste *Memorie*, vol. I, V]. La dimostrazione generale del teorema fu data da CASTELNUOVO, loc. cit., n. 34.

Se $|C|$ è un sistema lineare irriducibile, non speciale, di genere π, grado n, dimensione r, appartenente ad una superficie di genere numerico p_a, sussiste la relazione

$$r \geqslant n - \pi + 1 + p_a .$$

Designeremo brevemente il teorema precedente col nome di *teorema di* RIEMANN-ROCH *per le superficie.*

Esistono sistemi (non speciali) per i quali sussiste l'uguaglianza

$$r = n - \pi + 1 + p_a;$$

tali sistemi diconsi *regolari.* Si possono anzi costruire sistemi regolari di dimensione alta quanto si vuole, giacchè si dimostra che è regolare il sistema $|(hK)'|$ aggiunto al multiplo secondo h di un sistema $|K|$ irriducibile, almeno ∞^3, purchè h sia sufficientemente elevato; basta p. es. prendere

$$h > p_g - p_a \ (*) .$$

Le due proprietà più notevoli di un sistema regolare sono [14]:

1) *la serie caratteristica di un sistema regolare ha la deficienza massima $p_g - p_a$;*

2) *la serie segata dal sistema canonico sopra ogni curva di un sistema regolare è completa.*

L'ultima proposizione per le superficie che hanno il genere geometrico $p_g = 0$ dice che

2') *la serie caratteristica di un sistema regolare è non speciale.*

Ora valendoci di questi risultati siamo in grado di *estendere la formola data dal teorema di* RIEMANN-ROCH $r \geqslant n - \pi + 1 + p_a$ *anche ai sistemi lineari riducibili.* Per brevità ci limiteremo a dar l'estensione nel caso $p_g = 0$, che solo interessa pel seguito del nostro lavoro.

Partiamo perciò da un sistema regolare irriducibile $|K|$ almeno ∞^3 di grado N, dimensione R, genere Π, e consideriamo una curva γ formante parte di una particolare curva K. Il sistema $|K|$ sega sulla γ una serie di cui l'ordine sia i; diciamo anzitutto che una tal serie è non speciale. Ciò segue dal fatto che se immaginiamo in uno S_3 una superficie F, d'ordine N, di cui le sezioni piane siano curve K, una delle quali

---

(*) [In base al teorema di PICARD sopra ricordato, il risultato vale per qualunque valore di $h > 0$].

(14) CASTELNUOVO, l. c., nn. 35, 36.

si spezzi nella γ d'ordine i e in una curva residua C, poichè [in virtù della 2')] una sezione piana K non ammette curve aggiunte d'ordine $N-4$, non potrà nemmeno la γ ammettere curve aggiunte d'ordine $i-4$, giacchè in caso opposto una tal curva aggiunta, insieme alla C, darebbe una curva d'ordine

$$i-4+N-i=N-4\,,$$

aggiunta alla sezione piana $\gamma+C$, il che è assurdo; si conclude che la serie g_i segata sulla γ dalle sezioni piane K (cioè dalle rette del piano di γ) è non speciale. Dunque la dimensione della g_i sarà $\varrho \leqslant i-\omega$, essendo ω il genere di γ; in altri termini, occorrono $\varrho+1 \leqslant i-\omega+1$ condizioni perchè una K contenga la γ. Segue che la dimensione del sistema residuo $|C|=|K-\gamma|$ sarà

$$r \geqslant R-i+\omega-1\,.$$

Per calcolare il genere π e il grado n di $|C|$ in base agli analoghi caratteri Π, N di $|K|$, ci conviene introdurre il numero j delle intersezioni di γ con una C; avremo allora, come risulta subito,

$$\pi=\Pi-j-\omega+1\,,$$
$$n=N-j-i\,.$$

E di qua si ricava

$$r-n+\pi \geqslant R-N+\Pi\,,$$

ossia (poichè $|K|$ è regolare)

$$r-n+\pi \geqslant p_a+1\,,$$

la quale dimostra che per il sistema $|C|$ vale il teorema di RIEMANN-ROCH; e ciò senza che si sia posta la restrizione della irriducibilità di $|C|$.

Ora per dimostrare che il teorema di RIEMANN-ROCH vale per *ogni sistema riducibile* $|C|$, basta osservare che dato comunque $|C|$, si può sempre costruire un sistema irriducibile $|K|=|(hD)'|$ (aggiunto al sistema h-uplo di un sistema irriducibile D), il quale sia regolare, e tanto ampio da contenere $|D|$ in guisa che il residuo $|K-C|=|\gamma|$ sia per di più irriducibile; basta infatti per ciò sceglier h sufficientemente elevato. Supponendo, per semplicità, che il sistema $|D'|$ sia irriducibile, si prenderà a tal fine, in primo luogo $h>-p_a$, per assicurare la regolarità di

$|(hD)'|$, in secondo luogo h così grande ancora che il sistema $|(h-1)D|$ contenga $|C|$ per modo che $|(h-1)D-C|$ sia irriducibile, giacchè allora seguirà, a fortiori, la irriducibilità di

$$|(hD)'-C| = |(h-1)D-C+D'|.$$

5. – Fra i caratteri aritmetici della superficie F, si debbono porre anche alcuni *invarianti relativi*, cioè caratteri invariabili per quelle particolari trasformazioni birazionali che non introducono (in nessuno dei due sensi) curve eccezionali, come trasformate di punti semplici. Da questi invarianti relativi si possono desumere poi, operando convenientemente, degli invarianti *assoluti*.

Il *primo invariante relativo*, che designeremo con ω, si definisce nel modo seguente:

Prendiamo sopra F un qualsiasi sistema lineare $|C|$, virtualmente privo di punti base, e dotato d'un sistema aggiunto $|C'|$. Sieno π, n, il genere e il grado di $|C|$, sia π' il genere di $|C'|$. *L'espressione*

$$\omega = \pi' - 3(\pi-1) + n,$$

come risulta dalla proprietà fondamentale del sistema aggiunto, *non dipende dalla scelta del sistema* $|C|$, *e costituisce perciò un invariante relativo della superficie* F [15]. Infatti se si trasforma birazionalmente la superficie F in una superficie F^*, in guisa che le sezioni piane (o iperpiane) di F ed F^* abbiano per immagine rispettivamente su F^* ed F curve di un sistema privo di punti base, il valore di ω calcolato coi caratteri delle sezioni piane di F, coincide col valore di ω calcolato in relazione alle sezioni piane di F^*. Al contrario il carattere ω diminuisce in quelle trasformazioni di F che introducono su F^* nuove curve eccezionali corrispondenti a punti della F stessa, e precisamente diminuisce di una unità per ogni curva eccezionale introdotta; aumenta invece di una unità per ogni curva eccezionale di F che scompare venendo trasformata in un punto semplice di F^*.

Si potrebbe avere un'altra espressione analoga di ω introducendo, in luogo di π', il grado n' del sistema aggiunto $|C'|$, che vale (n. 2)

$$n' = \pi + \pi' - 2;$$

è qui utile notare la formula

$$n - (2\pi-2) = n' - (2\pi'-2) + \omega - 1.$$

[15] Cfr. ENRIQUES, *Introduzione ...*, § 41.

Una terza espressione, più notevole, dello stesso invariante ω, si ha introducendo anche il genere π'' del sistema $|C''|$, secondo aggiunto di $|C|$. Si trova infatti [16]

$$\omega - 1 = \pi - \pi' - (\pi' - \pi'') .$$

Noi vedremo in seguito (n. 20) che se la superficie F non possiede curve eccezionali, il carattere ω di questa è un invariante assoluto, e non differisce dal *genere lineare* $p^{(1)}$ definito dal sig. NOETHER (come genere delle curve canoniche) e più tardi, sotto ipotesi più generali, da ENRIQUES.

Ma ora, senza insistere su ciò, vogliamo mostrare come la conoscenza dell'invariante relativo ω di una superficie possa permettere di fissare un limite inferiore al valore dello i-genere P_i della superficie, in corrispondenza ad ogni valore di i [17].

Partiamo perciò da una superficie F di genere aritmetico p_a, sopra cui esista un sistema $|C|$ irriducibile privo di punti base, tale che tra il grado n e il genere π passi la disuguaglianza $n < 2\pi - 2$; sia ad es. il sistema delle sezioni piane. Potendosi, ove occorra, sostituire a $|C|$ un suo multiplo, pur continuando a valere una disuguaglianza analoga alla precedente, siamo liberi di ammettere, senza introdurre restrizioni, che il sistema $|C|$ possegga un sistema aggiunto $|C'|$; indichiamone il genere con π' ed il grado con

$$n' = \pi + \pi' - 2 .$$

Ciò posto, proponiamoci di calcolare i caratteri del sistema $|K^i| = |iC' - iC|$, che (ove esista) è il sistema i-canonico, o tutt'al più ne differisce per qualche curva eccezionale fissa; supporremo $i > 1$. Cominceremo per ciò a calcolare la dimensione r'_i di $|iC|$, di cui un limite inferiore si può esprimere, mediante il teorema di RIEMANN-ROCH esteso alle superficie, in funzione del grado e del genere di $|iC'|$, e quindi del grado e del genere di $|C'|$; fatti i calcoli si trova

$$r'_i \geqslant p_a + \frac{i(i+1)}{2}(\pi - 1) + \frac{i(i-1)}{2}(\pi' - 1) .$$

Consideriamo poi la serie che il sistema $|iC'|$ sega sopra la curva

---

[16] CASTELNUOVO, *Sul genere lineare ...*, « Rendic. Accad. d. Lincei », giugno 1897.

[17] Cfr. CASTELNUOVO, l. c.

generica di $|iC|$; la detta serie ha l'ordine $2i^2(\pi-1)$, ed è certo non speciale perchè il genere della curva a cui appartiene vale

$$i(\pi-1)+\frac{i(i-1)}{2}n+1<i^2(\pi-1)+1 \qquad (n<2\pi-2,\ i>1).$$

Segue che la dimensione della serie stessa sarà

$$\varrho_i \leqslant i(2i-1)(\pi-1)-\frac{i(i-1)}{2}n-1.$$

Dunque finalmente la dimensione del sistema $|K^i|=|iC'-iC|$ verrà data da

$$R_i=r_i'-\varrho_i-1\geqslant p_a+\frac{i(i-1)}{2}(n+\pi'-3\pi+2).$$

Ora il numero R_i+1 delle curve K^i linearmente indipendenti è, per definizione, lo i-genere P_i della superficie; si arriva così, tenendo conto inoltre della definizione di ω, alla formola richiesta

$$(1) \qquad P_i\geqslant p_a+\frac{i(i-1)}{2}(\omega-1)+1 \qquad (n<2\pi-2,\ i>1).$$

È qui da osservare che la (1) vale anche nella ipotesi $n=2\pi-2$, purchè allora si sappia che la serie segata dal sistema $|iC'|$ sopra una curva generica di $|C|$ è non speciale; mentre se la serie stessa fosse speciale, occorrerebbe modificar la (1) diminuendo di una unità il secondo membro. In ogni caso ($n\leqslant 2\pi-2$) si trova che il genere (virtuale) Π_i e il grado (virtuale) N_i del sistema $|K^i|$ sono espressi da

$$(2) \qquad \Pi_i=\frac{i(i+1)}{2}(\omega-1)+1, \qquad N_i=i^2(\omega-1).$$

Noi siamo partiti dalla ipotesi che il sistema $|C|$ delle sezioni piane di F abbia $n\leqslant 2\pi-2$; se invece sussistesse la disuguaglianza contraria $n>2\pi-2$, o la $\pi>\pi'$ in qualche modo equivalente alla precedente, allora non esisterebbe certo il sistema $|K^i|=|iC'-iC|$, ma potrebbe esistere il sistema $|K^{-i}|=|iC-iC'|$. Del detto sistema si calcolano facilmente la dimensione R_{-i}, il grado N_{-i} e il genere Π_{-i} ($i\geqslant 1$) seguendo una via perfettamente analoga a quella sopra indicata. Si trova preci-

samente, se $\pi > \pi'$,

$$(1') \qquad R_{-i} \geqslant p_a + \frac{i(i+1)}{2}(\omega - 1),$$

$$(2') \qquad \Pi_{-i} = \frac{i(i-1)}{2}(\omega - 1) + 1, \qquad N_{-i} = i^2(\omega - 1).$$

Ma il sistema $|K^{-i}|$ non offre grande interesse, perchè, come vedremo, esso non può presentarsi che sopra le superficie razionali o rigate.

6. – Un *secondo invariante relativo* della superficie F, si ottiene nel modo seguente:

Si consideri sopra F un fascio lineare di curve irriducibili, di genere $\pi > 0$, avente n punti base (considerando ora come punto base *assegnato, ogni* punto comune alle curve del fascio), e si designi con δ il numero delle curve del fascio dotate di un punto doppio; *l'espressione*

$$I = \delta - n - 4\pi,$$

non dipende dalla scelta arbitraria del fascio, e costituisce perciò un invariante relativo della superficie [18].

Questo carattere varia, come ω, ma in senso opposto, nelle trasformazioni che introducono nuove curve eccezionali, o al contrario ne fanno scomparire.

Riproduciamo brevemente, per chiarezza, la dimostrazione che di queste proprietà dà il sig. SEGRE, rimandando il lettore, desideroso di maggiori particolari, alla Memoria originale citata.

Siano $|C|$, $|C_1|$ due fasci lineari situati sulla nostra superficie, fasci che possiamo supporre del tutto indipendenti tra loro; indichiamo con π, π_1 i generi delle curve C, C_1, con n, n_1 i numeri dei punti base dei due fasci, con s il numero dei punti comuni a due curve generiche C, C_1. Fissiamo la nostra attenzione sulla curva T luogo dei punti di contatto di una C con una C_1; ed esaminiamo in quanti punti la T sia segata da una C e da una C_1, fuori dei punti base dei due fasci. I punti comuni

---

[18] Cfr. SEGRE, *Intorno ad un carattere delle superficie ...*, « Atti dell'Accad. d. Scienze di Torino », 1896. L'espressione I per un fascio di sezioni piane di una superficie (dello spazio S_3) fu considerata dapprima dal Sig. ZEUTHEN, che ne mise in luce il carattere invariante sotto una forma un po' diversa (vedi il n. 24 delle *Études géométriques ...*, « Mathem. Annalen », IV, 1871), e più tardi dal Sig. NOETHER (*Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens ...*, « Mathem. Annalen », VIII, 1874, pag. 526), il quale ne diede l'espressione per mezzo dei due generi p_a, $p^{(1)}$ della superficie, come sarà indicato nel seguito.

alla T e ad una C sono evidentemente i punti doppi della serie g_s^1 segata sulla C dal fascio $|C_1|$; il loro numero è

$$M = 2s + 2\pi - 2 .$$

Similmente si riconosce che la T è segata da una C_1 in

$$M_1 = 2s + 2\pi_1 - 2$$

punti. Al variare della C e della C_1 questi due gruppi di punti descrivono sulla T due serie lineari ∞^1 di ordine M ed M_1 rispettivamente; detto P il genere di T, la prima serie avrà $2M + 2P - 2$ punti doppi e la seconda $2M_1 + 2P - 2$. Ora una semplice osservazione mostra che un punto doppio della prima serie (segata da $|C|$ su T) è o un punto doppio di una curva del fascio $|C|$ che sia dotata di una tale singolarità, o un contatto tripunto di una curva C e di una curva C_1 che abbiano un siffatto contatto, o finalmente un punto base del fascio $|C_1|$. Indicando perciò con δ il numero delle curve di $|C|$ che son dotate di un punto doppio, con δ_1 il numero analogo per $|C_1|$, e con τ il numero delle coppie di curve C, C_1 che hanno un contatto tripunto, abbiamo la relazione

$$2M + 2P - 2 = \delta + \tau + n_1 ,$$

e similmente l'altra

$$2M_1 + 2P - 2 = \delta_1 + \tau + n .$$

Di qua sottraendo e sostituendo ad M, M_1 i loro valori, si trova in fine

$$\delta - n - 4\pi = \delta_1 - n_1 - 4\pi_1 ,$$

uguaglianza che dimostra il carattere invariantivo della espressione

$$I = \delta - n - 4\pi ,$$

per i fasci tracciati sulla nostra superficie.

La definizione del carattere I, per essere applicata a *tutti* i casi, esige alcune particolari convenzioni relative al valore da attribuire a δ, quando nel fascio considerato si abbiano curve dotate di punti multipli d'ordine > 2, oppure quando il fascio stesso abbia dei punti base infinitamente vicini, o infine quando esistano nel fascio delle curve contate due o più volte. Nei primi due casi (che sono stati analizzati dal SEGRE, corrispon-

dentemente alle ipotesi più semplici) si può dire che il δ viene definito seguendo la legge della continuità, sempre valida nel campo algebrico: ogni curva dotata d'un punto multiplo viene a contare un certo numero di volte nella determinazione del δ, onde questo è sempre (ciò che a noi importa nel seguito) maggiore o uguale a 0.

Quando invece esiste nel fascio dato $|C|$ una curva contata due (o più) volte, si può dire, aritmeticamente, che essa equivale ad un certo numero di curve del fascio dotate d'un punto doppio, numero che entra a costituire il δ; ma non è evidente che il detto numero sia $\geqslant 0$; occorre precisamente provare che così è, per poter asserire che in ogni caso si ha $\delta \geqslant 0$.

Supponiamo adunque che una particolar curva $C^{(0)}$ del fascio $|C|$ si spezzi in guisa che una sua componente irriducibile χ, di genere $\varrho \geqslant 0$, sia da contarsi due o più volte, ad es. due volte, sicchè $C^{(0)} = 2\chi + \psi$, dove ψ indica la curva residua che potrebbe del resto mancare. Qui si osservi che $C^{(0)}$ può anche avere in un qualche punto base di $|C|$ una molteplicità superiore di una, due ... unità a quella che presenta ivi la curva C generica; ma in tal caso si deve riguardare la curva $C^{(0)}$ come composta della curva propriamente detta, a cui va aggiunto il punto base (o la curva eccezionale in cui può trasformarsi) contato una, due ... volte; sicchè il detto punto semplice o multiplo deve esser riguardato come componente di ψ. Le due parti χ e ψ di $C^{(0)}$ avranno un certo numero i di punti comuni (fatta astrazione da quelli che vengono assorbiti dai punti base di $|C|$, presi coll'ordine di molteplicità relativo alla curva C generica); e sarà certo $i > 0$ se ψ esiste, in virtù di una osservazione fatta nel n. 1.

Accanto al fascio $|C|$ consideriamo un secondo fascio generico $|C_1|$ affatto indipendente dal primo; ed occupiamoci come prima (e adottando le stesse notazioni) della curva luogo dei contatti di una C e di una C_1.

La nostra curva questa volta si spezza nella χ (che è componente doppia di $C^{(0)}$ e in una curva T di genere P su cui fisseremo la nostra attenzione. Osserviamo subito che la T passerà semplicemente per le i intersezioni di χ e ψ, giacchè i detti punti, essendo tripli per la curva $C^{(0)} = 2\chi + \psi$, devono esser doppi per la curva (luogo dei contatti) $T+\chi$.

La curva T è segata da una C generica (fuori dei punti base di $|C|$) nei punti in cui C è toccata da una C_1, vale a dire in

$$M = 2s + 2\pi - 2$$

punti. Similmente vediamo che la curva T è segata da una C_1 generica nei punti in cui C_1 vien toccata da una C, tolti però tra questi i punti in cui C_1 è segata dalla χ; indicando dunque con M_1 il numero delle

intersezioni di T e C_1 (fuori dei punti base di $|C_1|$), e con σ il numero delle intersezioni di χ e C_1, avremo

$$M_1 + \sigma = 2s + 2\pi_1 - 2 .$$

I due fasci $|C|$, $|C_1|$ determinano così sulla T due serie lineari ∞^1 di ordine M, M_1. La prima serie ha $2M + 2P - 2$ punti doppi, ma tra questi alcuni appartengono al gruppo segato su T dalla $C^{(0)} = 2\chi + \psi$; e precisamente questo gruppo, contenendo i punti tripli (nelle i intersezioni di χ e ψ) e $2\sigma + 2\varrho - 2$ punti doppi (nei contatti di χ con curve C_1), conta per $2i + 2\sigma + 2\varrho - 2$ punti doppi tra quelli che la serie considerata possiede. Gli altri punti doppi della detta serie provengono (come nel ragionamento generale) dai Δ punti doppi isolati posseduti da curve C, dai τ contatti tripunti di una C con una C_1, e finalmente dagli n_1 punti base del fascio $|C|$. Sicchè abbiamo l'uguaglianza

$$2M + 2P - 2 = \Delta + \tau + n_1 + 2i + 2\sigma + 2\varrho - 2 .$$

Consideriamo in secondo luogo la serie di ordine M_1 segata sopra T dal fascio $|C_1|$. I $2M_1 + 2P - 2$ punti doppi di questa provengono dai δ_1 punti doppi isolati di curve C_1, dai τ contatti tripunti sopra nominati, e finalmente dagli n punti base del fascio $|C|$; dunque

$$2M_1 + 2P - 2 = \delta_1 + \tau + n .$$

Paragonando colla precedente, e tenendo conto dei valori trovati per M, M_1, avremo in fine

$$\Delta + (2\varrho - 2 + 2i) - n - 4\pi = \delta_1 - n_1 - 4\pi_1 .$$

Si conclude che la curva χ di genere ϱ, componente doppia di una particolare curva C, conta nel numero delle curve C dotate di punto doppio come $2\varrho - 2 + 2i$ unità, dove i è il numero delle intersezioni di χ colla curva residua ψ. Ora se ψ esiste, ed è quindi $i > 0$, sarà certo $2\varrho - 2 + 2i \geqslant 0$ (poichè $\varrho \geqslant 0$). La stessa conclusione vale se, mancando la ψ, il genere ϱ di χ fosse superiore a 0. Ma evidentemente la conclusione ultima cadrebbe se una curva C risultasse dal raddoppiamento di una curva χ razionale, in modo che in ciascun punto base del fascio la molteplicità di 2χ riuscisse uguale alla molteplicità della C generica.

Ora mostreremo che questo caso è impossibile. Infatti, poichè il genere di 2χ è uguale al genere $\pi \geqslant 0$ di C, se χ fosse razionale, dovrebbe χ avere $\pi + 1 > 0$ intersezioni con se stessa, cioè $\pi + 1 > 0$ sarebbe il grado di χ, e quindi $4(\pi + 1) > 0$ sarebbe il grado di 2χ ossia di $|C|$.

Ma siccome d'altra parte $|C|$ è un fascio, in cui ogni punto comune a due C vien considerato come punto base assegnato, il grado di $|C|$ è *zero*, il che contraddice l'ultimo risultato. Dunque in ogni caso la curva doppia χ equivale a un numero positivo o nullo di curve C dotate di punto doppio.

Questa conclusione sussiste pure se la χ entra $k \geqslant 2$ volte come componente di una particolar curva del fascio $|C|$, perchè allora si trova che la χ conta come $2\varrho - 2 + ki \geqslant 0$ curve C dotate di punto doppio. E ad un analogo risultato si perverrebbe se una particolare curva C contenesse più parti ciascuna da contarsi più volte.

Permane sempre adunque la conclusione generale che *una componente multipla di una curva del fascio equivale ad un certo numero* $\geqslant 0$ *di curve del fascio dotate d'un punto doppio*, di guisa che, valutando secondo tale equivalenza il « numero δ delle curve del fascio dotate d'un punto doppio », sempre risulta

$$\delta \geqslant 0 ,$$

e l'espressione

$$\delta - n - 4\pi ,$$

ha il valore dell'invariante I.

Abbiamo affermato poc'anzi che il carattere I è un invariante relativo, e precisamente che esso aumenta di una unità per ogni trasformazione della superficie F, in cui si sostituisca ad un punto di F una curva eccezionale; e diminuisce di una unità nel caso opposto. Tale affermazione si giustifica facilmente. Infatti si calcoli il valore del carattere I di F riferendosi ad un certo fascio $|C|$ tracciato su F; si trasformi quindi la F in una nuova superficie F^*, per modo che ad un punto (fondamentale) O di F, non base per $|C|$, corrisponda su F^* una curva (eccezionale) χ^*; e si consideri su F^* il fascio $|C^*|$ che corrisponde a $|C|$. I caratteri n, π di $|C|$ coincidono cogli *analoghi caratteri* n^*, π^* di $|C^*|$, se i punti base di $|C^*|$ non sono fondamentali per la trasformazione, onde si ha in tale ipotesi

$$n = n^* , \qquad \pi = \pi^* .$$

Ma alla curva C passante per O, corrisponde su F^* una curva composta $C^* + \chi^*$ avente un punto doppio nel punto comune alle due componenti, sicchè, *caeteris paribus*, si ha, come numero delle curve C^* dotate d'un punto doppio,

$$\delta^* = \delta + 1 ,$$

e il carattere $I^* = \delta^* - n^* - 4\pi^*$ di F^* vale

$$I^* = I + 1 .$$

Allo stesso resultato si perviene nell'ipotesi che il punto fondamentale O di F sia un punto base per $|C|$; in questo caso non muta il valore di δ, ma il fascio perde nella trasformazione un punto base, onde $n^* = n - 1$.

Segue di qui che I si comporta come l'invariante ω, colla differenza però che mentre I cresce o decresce di una o più unità, ω decresce o cresce dello stesso numero.

Dunque $\omega + I$ sarà un *invariante assoluto* relativamente ad una qualsiasi trasformazioni birazionale della superficie. Si può chiedere in quale rapporto esso stia cogli altri invarianti già noti. Si trova che *l'invariante $\omega + I$ è strettamente legato al genere aritmetico dalla notevolissima relazione*

$$\omega + I = 12p_a + 9 .$$

Questa formola si può dire stabilita dal sig. NOETHER [19], il quale veramente pone al posto di ω il *genere lineare* $p^{(1)}$ (genere delle curve canoniche), supponendo dunque $p_g > 0$, e riferendosi ad una superficie priva di curve eccezionali, dotata di singolarità ordinarie. La sostituzione di ω a $p^{(1)}$ rende la relazione precedente valida indipendentemente dal valore del p_g, e dall'esistenza di curve eccezionali. Effettivamente se si proietta la data superficie F in una superficie F_1 di S_3, dotata soltanto di curva doppia e punti tripli, basta calcolare I riferendosi ad un fascio di sezioni piane di F_1, e p_a, ω mediante le formule di equivalenza e di postulazione di CAYLEY-NOETHER, per trovare verificata la relazione sopra scritta (come appunto fa il NOETHER con quelle ipotesi più restrittive).

OSSERVAZIONE. – L'invariante relativo I di una superficie F venne sopra definito mediante i caratteri (δ, n e π) di un fascio *lineare* di curve appartenente alla superficie stessa. Ora, pel seguito, giova notare come si possa calcolare I anche quando si parta da un fascio *irrazionale* di curve supposto esistente su F, vale a dire da un sistema composto di ∞^1 curve, tale che per ogni punto di F passi una sola curva del sistema, senza però che le singole curve possano farsi corrispondere birazionalmente ai singoli valori di un parametro.

---

[19] *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens ...*, « Mathem. Annalen », VIII (1874), pag. 526.

Sia $[\Gamma]$ un fascio irrazionale di curve sopra F; indichiamo con ϱ il genere della curva Γ generica, con $\varrho' > 0$ il genere che ha il fascio, ove si considerino le curve come elementi. Notiamo subito che, supposta al solito la F priva di singolarità, il fascio irrazionale non può avere sopra F alcun punto base; giacchè un punto base di $[\Gamma]$ dovrebbe riguardarsi come una traiettoria *razionale* delle ∞^1 Γ, sulla quale le curve stesse segherebbero una involuzione *irrazionale*, il che è assurdo (teorema di LÜROTH). Ciò premesso, per ottenere la formola desiderata, noi possiamo seguire due vie.

La prima via consiste nell'applicare il ragionamento sopra riferito del sig. SEGRE al fascio irrazionale $[\Gamma]$ e ad un fascio razionale $|C|$ tracciato sulla stessa superficie. Il detto ragionamento va solo modificato in ciò che le due serie di gruppi di punti segate da $[\Gamma]$ sopra una C e sopra la curva dei contatti T, sono questa volta irrazionali, di genere ϱ'; a quelle serie va dunque applicata la nota formola di ZEUTHEN che dà il numero dei punti doppi di una involuzione irrazionale.

La seconda via, che parte da un concetto meno semplice, ma conduce più rapidamente allo scopo, consiste nel formare un fascio *lineare* $|C|$ in cui ogni curva C sia composta di un certo numero m di curve Γ; ciò si ottiene, quando m sia sufficientemente alto, fissando entro al fascio $[\Gamma]$ (sistema ∞^1 di genere ϱ') una serie lineare g^1_m di gruppi di m curve Γ. Il fascio lineare $|C|$ così costruito ha *zero* punti base; ed il genere di una sua curva C vale

$$\pi = m(\varrho - 1) + 1 .$$

Detto adunque δ il numero delle curve C dotate di un punto doppio, si ha, per la formola già dimostrata (che subito si estende ai fasci $|C|$ riducibili),

$$I = \delta - 4m(\varrho - 1) - 4 .$$

Ora una curva composta C possiede un punto doppio, sia quando una Γ componente ha un punto doppio, sia quando due delle Γ componenti la stessa C coincidono, e nell'ultimo caso anzi la C conta per $2\varrho - 2$ unità entro al gruppo delle δ curve C sopra nominate. Ora siccome l'ultimo caso si presenta $2m + 2\varrho' - 2$ volte (cioè tante volte quanti sono gli elementi doppi di una g^1_m sopra un ente di genere ϱ'), così si avrà la relazione

$$\delta = \Delta + (2\varrho - 2)(2m + 2\varrho' - 2) ,$$

ove Δ è il numero delle curve Γ dotate di un punto doppio. Sostituendo

nella espressione di I, si trova infine la formola

$$I = \Delta + 4(\varrho - 1)(\varrho' - 1) - 4 ,$$

che risolve appunto la questione proposta.

7. – La relazione di NOETHER data innanzi permette di dedurre una diseguaglianza, che ha (come vedremo più tardi) importanza fondamentale nello studio dei sistemi lineari appartenenti alle superficie di genere geometrico

$$p_g = 0 ,$$

e di genere numerico

$$p_a = -p \quad (p \geqslant 0).$$

Si consideri sopra F un sistema lineare $|C|$ di curve irriducibili, di grado n e genere π, privo di punti base. Indicando con δ il numero delle curve dotate di punto doppio appartenenti ad un suo fascio generico, avremo

$$I = \delta - n - 4\pi = 12p_a - \omega + 9 ,$$

ossia ponendo $p_a = -p$,

$$4\pi + n = 12p + \omega - 9 + \delta .$$

Ma, per il teorema di RIEMANN-ROCH (n. 4),

$$\pi - 1 - n + r \geqslant -p ,$$

quindi

$$5\pi + r \geqslant 11p + \omega - 8 + \delta .$$

Questa diseguaglianza si estende al caso in cui $|C|$ abbia dei punti base accidentali sopra la superficie F, quando si designi con π il genere virtuale di $|C|$, mantenendo per δ il significato precedente.

Basta perciò mostrare che in ogni caso (essendo n il grado virtuale di $|C|$) si ha

$$4\pi + n \geqslant 12p + \omega - 9 + \delta .$$

Ora, designando con π_e, n_e, il genere e il grado effettivi del sistema irriducibile $|C|$, con $h_1 \dots h_\sigma$ gli ordini di moltiplicità dei suoi σ punti base, avremo

$$n = n_e + \sum_1^\sigma h^2 , \qquad \pi = \pi_e + \sum_1^\sigma \frac{h(h-1)}{2} \geqslant \pi_e ,$$

$$4\pi + n \geqslant 4\pi_e + n_e + \sum_1^\sigma h^2 ,$$

e poichè

$$\sum_1^\sigma h^2 \geqslant \sigma ,$$

segue

$$4\pi + n \geqslant 4\pi_e + n_e + \sigma .$$

D'altra parte, valutando I in relazione ad un fascio contenuto in $|C|$, si trova

$$I = \delta - (n_e + \sigma) - 4\pi_e ,$$

e quindi

$$4\pi_e + n_e + \sigma = 12p + \omega - 9 + \delta ,$$

onde segue la disuguaglianza da dimostrare.

Tenendo conto che in ogni caso $\delta \geqslant 0$, si conclude che *per ogni sistema lineare irriducibile,* ∞^1 *almeno, virtualmente privo di punti base sopra la superficie* F, *vale la disuguaglianza*

$$5\pi + r \geqslant 11p + \omega - 8 .$$

III. - Sulle curve eccezionali.

8. – Innanzi di procedere allo studio delle superficie sopra cui il procedimento di aggiunzione, applicato ad un qualunque sistema lineare, si estingue dopo un numero finito di operazioni, è indispensabile che premettiamo alcune considerazioni relativamente alle curve eccezionali che possono appartenere ad una superficie.

Ci riferiamo, al solito, ad una superficie F priva di singolarità, appartenente ad un certo spazio S_r.

Abbiam detto che una curva γ di F (che in qualche caso particolare potrà anche essere composta, come spiegheremo più tardi) dicesi *ecce-*

zionale, se si può trasformare birazionalmente la superficie F in una superficie F^* per modo che alla γ corrisponda l'intorno di un punto semplice G^* su F^*; in tal caso si può anche supporre, senza introdurre restrizioni, che la F^* sia come F una superficie priva di punti singolari. Nella trasformazione sopra nominata, alle sezioni piane o iperpiane di F^* corrisponderanno su F delle curve C componenti un sistema lineare; questo sistema trasformante potrà avere o non avere punti base sopra la curva γ.

Nel 2° caso la γ non avrà alcuna intersezione colle curve generiche C, ossia sarà *fondamentale* per $|C|$; inoltre ad ogni punto di essa corrisponderà un punto nell'intorno del nominato punto G^*. Nel 1° caso invece i punti base di $|C|$ che si trovano su γ saranno *punti fondamentali* per la trasformazione, ed avranno come corrispondenti su F^* delle curve (eccezionali) passanti per G^*.

Una curva eccezionale di F che non contenga punti fondamentali verrà detta una *curva eccezionale di* 1ª *specie*, mentre chiameremo di 2ª *specie* una curva eccezionale contenente necessariamente qualche punto fondamentale, curva tale cioè che non possa essere mutata in un punto senza che qualche punto di essa si muti in una curva.

Una curva eccezionale di 1ª specie γ ha gli stessi caratteri, grado e genere virtuali, dell'intorno di un punto semplice della superficie; precisamente denotando con ν il grado e con ϱ il genere di γ, si ha

$$\nu = -1\,, \qquad \varrho = 0\,.$$

L'eguaglianza $\varrho = 0$ segue dal fatto che la curva γ, la quale è razionale, non ha punti doppi, poichè questi sarebbero punti fondamentali.

Quanto a ν, per trovarne il valore, basta ricorrere alla definizione (n. 1) di grado di una curva isolata (sistema lineare ∞^0), ed osservare che lo staccamento di γ da $|C|$ diminuisce di 1 il grado del sistema, mentre le curve residue hanno $i = 1$ intersezioni con γ; queste osservazioni si giustificano subito se si pensa che alle curve di $|C - \gamma|$ corrispondono su F^* le sezioni iperpiane passanti per G^*.

Alle cose dette innanzi deve aggiungersi, per chiarezza, un'osservazione.

Poniamo che si abbiano sopra la F due curve γ, γ_1, secantisi in un punto, a cui corrispondano rispettivamente sopra F^* il punto G^* ed un punto G_1^* infinitamente vicino a G^*. In questo caso si troverebbe (ricorrendo alla solita definizione di grado) che il grado virtuale di γ vale $\nu = -2$, e quello di γ_1 vale $\nu_1 = -1$; (i generi di γ, γ_1 sono ambedue nulli). Si ha dunque, per quanto concerne γ, un'apparente contraddizione colle cose dette innanzi; ma la ragione sta in ciò che all'intorno di G^* su F^* corrisponde su F non la sola curva γ, ma la curva $\gamma + \gamma_1$, e quindi

la $\gamma + \gamma_1$ deve pensarsi come *una intera curva eccezionale.* (D'altra parte anche la γ_1 da sola potrebbe pensarsi come un'intera curva eccezionale corrispondente all'intorno del punto G_1^*). Fatta questa convenzione, si trova che il grado virtuale della curva $\gamma + \gamma_1$ vale $\nu + \nu_1 + 2 = -1$, ed il genere $\varrho = 0$, come innanzi si è detto.

La convenzione fatta ha del resto una portata generale: parlando di una curva eccezionale intendiamo sempre d'includere in essa tutte le componenti (curve) che rappresentano l'intorno di un punto sopra una superficie trasformata. Ed allora vale sempre l'affermazione che « una curva eccezionale di 1ª specie ha il genere $\varrho = 0$ e il grado $\nu = -1$ ».

Viceversa si può dimostrare che « una curva γ su F di genere virtuale $\varrho = 0$ e grado virtuale $\nu = -1$ è una curva eccezionale di 1ª specie ».

A tal fine suppongasi intanto che le curve K sezioni iperpiane di F formino un sistema regolare ∞^r; detto n l'ordine di F (grado del sistema) e π il genere delle nominate K, p_a il genere aritmetico della F, avremo

$$r = n - \pi + 1 + p_a .$$

Sommando a $|K|$ la curva $|\gamma|$, il cui ordine verrà designato con m, si trova che il grado di $|K + \gamma|$ vale

$$N = n + 2m + \nu = n + 2m - 1 ,$$

ed il suo genere

$$\Pi = \pi + \varrho + m - 1 = \pi + m - 1;$$

la dimensione virtuale di $|K + \gamma|$, calcolata in base al teorema di RIEMANN-ROCH per le superficie (dimensione inferiore od uguale alla dimensione effettiva), sarà quindi

$$R = N - \Pi + 1 + p_a = r + m .$$

L'addizione di γ amplia dunque effettivamente il sistema $|K|$, conducendo ad un nuovo sistema lineare irriducibile la cui dimensione effettiva è $\geqslant r + m$.

Ma si vede anche facilmente che la dimensione effettiva è proprio $r + m$, e quindi il sistema $|K + \gamma|$ è regolare come $|K|$; infatti le curve di quello segano γ in $m + \nu = m - 1$ punti, per modo che lo staccamento di γ impone alle curve di $|K + \gamma|$ m condizioni al più.

Ora proseguendo a sommare γ a $|K + \gamma|$ e così via, si arriverà, dopo m operazioni, ad un sistema irriducibile $|K_0| = |K + m\gamma|$, le cui curve

non segheranno più γ; il sistema $|K_0|$ avrà dunque la curva γ come fondamentale, e non avrà dunque alcun punto base sopra F (come non ne aveva $|K|$). Trasformando ora la F in una superficie F^* mediante il detto sistema $|K_0|$, la γ verrà trasformata interamente in un punto semplice.

In tutto ciò che abbiamo detto figura l'ipotesi che il sistema $|K|$ delle sezioni di F sia regolare; questa ipotesi non è però essenziale, poichè ove non fosse soddisfatta, basterebbe sostituire alle K le curve d'un sistema regolare privo di punti base su F, quale è p. es. l'aggiunto ad un multiplo di $|K|$ d'ordine sufficientemente alto.

Si può applicare il procedimento esposto successivamente a più curve eccezionali di 1ª specie appartenenti alla superficie F, purchè esse non si seghino fra loro, giacchè, sotto questa condizione, ognuna di tali curve rimane curva eccezionale di 1ª specie nelle trasformazioni successive di F.

Dunque *è sempre possibile effettuare sopra una data superficie F una conveniente trasformazione priva di punti fondamentali su F, per modo da fare scomparire (mutandole in punti semplici) quante si vogliano curve eccezionali di* 1ª *specie, non secantisi fra loro.*

Se invece si hanno su F *due* curve eccezionali di 1ª specie γ, γ_1 aventi un punto comune (non due curve componenti insieme una sola curva eccezionale), dopo la trasformazione che muta l'una di esse, p. es. γ, in un punto G^*, la γ_1 si cambia in una curva eccezionale γ_1^* *di* 2ª *specie.* Infatti il grado virtuale di γ_1^*, come quello di $\gamma + \gamma_1$, vale $-1 + (-1) + 2 = 0$ anzichè -1. Per chiarire la cosa, si può considerare l'esempio di una superficie F che sia riferibile ad una rigata F^*, e contenga due curve γ, γ_1 con un punto comune, una delle quali γ corrisponda ad un punto G^* di F^*, e l'altra γ_1 alla generatrice γ_1^* di F^* che passa per G^* (l'ufficio di γ, γ_1 è del resto scambievole). La nominata generatrice di F^* è una curva eccezionale di 2ª specie, la quale non può essere trasformata in un punto semplice, senza che qualche punto di essa si muti in una nuova curva eccezionale.

9. – Una curva eccezionale di 2ª specie della superficie F, per la sua stessa natura non può essere eliminata senza che vengano create nuove curve eccezionali.

Abbiamo già visto che un esempio di curva siffatta è offerto da una generatrice d'una superficie rigata. Un altro esempio vien dato da una retta o da una conica del piano, ecc.

Che cosa si ottiene dunque applicando il procedimento esposto innanzi al caso delle curve eccezionali di 2ª specie?

In sostanza il procedimento suddetto consiste in ciò.

Si consideri su F un sistema regolare $|K|$ privo di punti base; si

trasformi F in una superficie F^*, per modo che la curva eccezionale γ, considerata su F, si muti in un punto G^* di F^*. Il sistema $|K^*|$ di F^* corrispondente a $|K|$ ha il punto G^* come punto base di un certo ordine m; quel sistema è contenuto perciò in un sistema più ampio $|K_1^*|$, ugualmente regolare, composto di curve dello stesso ordine non aventi G^* come punto base.

Ora il sistema $|K_1^*|$, di F^* ha per corrispondente su F un sistema $|K_1|$ il quale avrà la curva γ come fondamentale (sicchè potrebbe servire a trasformare la γ in un punto), ma esso possederà dei punti base su γ, se γ è una curva eccezionale di 2ª specie, all'opposto di quel che accadeva se γ era di 1ª specie. Si può ampliare $|K_1|$ che è contenuto in un sistema $|K_2|$ di curve dello stesso ordine (egualmente regolare) senza punti base sopra γ; ma la curva γ, fondamentale per $|K_1|$, non sarà più fondamentale per $|K_2|$. Il procedimento qui indicato non ha termine, poichè si può operare su $|K_2|$ come già si era operato su $|K|$, e così via. Ma come a priori si poteva prevedere, il detto procedimento non conduce mai ad un sistema trasformante che permetta di eliminare la γ, senza che qualche punto di essa dia origine a nuove curve eccezionali.

Comunque, una curva eccezionale γ, di 1ª o di 2ª specie, esistente sopra una superficie F permette di ampliare (nel modo anzidetto) un sistema regolare $|K|$ appartenente alla superficie, costruendo un nuovo sistema $|K_1|$ i cui caratteri (grado e genere effettivi) si esprimono semplicemente mediante quelli (n e π) di $|K|$ e mediante il numero m delle intersezioni di γ colle K. Infatti se si considerano i sistemi trasformati $|K^*|$, $|K_1^*|$ sopra una superficie F^*, trasformata di F, ove alla γ corrisponda un punto G^*, il sistema $|K^*|$ può considerarsi dedotto da $|K_1^*|$ coll'imposizione del punto G^* come base m-plo.

Quindi il grado e il genere di $|K_1|$ (o $|K_1^*|$) saranno dati da

$$n_1 = n + m^2 ,$$

$$\pi_1 = \pi + \frac{m(m-1)}{2} ,$$

e si avrà dunque

$$n_1 - 2\pi_1 = n - 2\pi + m .$$

Così l'esistenza di una curva eccezionale d'ordine m (> 0) sopra una superficie F, di cui le sezioni iperpiane K formano un sistema (supposto regolare) di grado n e genere π, permette di trasformare la F in una superficie F_1 le cui sezioni iperpiane formano un nuovo sistema regolare, di grado n_1 e genere π_1, con

$$n_1 - 2\pi_1 > n - 2\pi .$$

Sicchè o si giunge, dopo un certo numero finito di trasformazioni, ad una superficie in corrispondenza con F che non possiede più curve eccezionali (e questo accade se F contiene soltanto un numero finito di curve eccezionali di 1ª specie non secantisi fra loro), o si giunge ad una trasformata di F in cui la differenza $N - 2\Pi$ fra l'ordine N, cioè il grado del sistema delle curve sezioni iperpiane, e il doppio del genere Π delle nominate curve, può supporsi tanto grande quanto si vuole.

Conviene enunciare il resultato ottenuto sotto forma negativa, nel modo seguente:

Se una superficie è tale che per ogni sistema lineare irriducibile di curve sopra di essa il grado non superi il doppio del genere diminuito di due ($N \leqslant 2\Pi - 2$), *la superficie possiede solo un numero finito di curve eccezionali; queste sono precisamente di* 1ª *specie e non si segano fra loro. La superficie può quindi essere trasformata in un'altra priva affatto di curve eccezionali.*

L'importanza del resultato apparirà chiara quando avremo dimostrato che le superficie contenenti un sistema lineare per cui il grado supera il doppio del genere diminuito di 2, sono razionali o riferibili a rigate (n. 16). Per ora è lecito soltanto di trarne la conclusione che « una superficie avente il genere o qualcuno dei plurigeneri superiore a zero, si può trasformare in guisa da non contenere curve eccezionali ».

Questo resultato era stato fino ad ora intravvisto o dimostrato soltanto con qualche restrizione superflua ([20]).

10. – Quando sopra una superficie F si procede per aggiunzione a partire da un dato sistema lineare irriducibile, p. es. dal sistema delle sezioni iperpiane, i successivi sistemi aggiunti che si ottengono possono essere irriducibili o riducibili. Tra le cause che portano la riducibilità è da annoverare l'esistenza di curve eccezionali di 1ª specie d'ordine convenientemente basso; infatti dopo un certo numero di aggiunzioni (assai grande in relazione al suo ordine) una curva eccezionale di 1ª specie diventa fondamentale pel sistema costruito, e proseguendo si distacca una, due, tre ... volte dai sistemi successivamente aggiunti. A questo fatto va collegata la circostanza paradossale che per gli ultimi sistemi nominati il genere virtuale delle curve spezzate è inferiore al genere effettivo delle curve variabili che di quelle fan parte. Prima di analizzare più da vicino il fatto segnalato, stimiamo utile di darne un esempio.

Consideriamo perciò la superficie razionale F, appartenente ad un S_{47}, che viene rappresentata sul piano dal sistema delle curve C_{11}, d'ordine 11,

([20]) ENRIQUES, *Introduzione ...*, § 42.

aventi due punti quintupli A e B. Alla retta AB corrisponde sopra F una retta p che è eccezionale di 1ª specie. Le curve aggiunte alle sezioni di F sono rappresentate sul piano dalle C_8, d'ordine 8, aventi in A e B due punti quadrupli, onde pel loro sistema la retta p è fondamentale. Operando nuovamente per aggiunzione si ottiene su F un sistema (2° aggiunto) che contiene p come parte fissa, rappresentato sul piano dal sistema delle quintiche C_5 composte della retta AB e delle quartiche che hanno in A e B due punti doppi; il genere virtuale del nominato sistema sopra F è 0, il genere effettivo della parte variabile è 1.

Rendiamoci ora ragione in modo generale del fatto sopra avvertito. Sia γ una curva d'ordine m sopra una superficie F, ϱ e ν denotino rispettivamente il genere e il grado virtuali di γ.

Designando con $|C|$ il sistema delle sezioni di F, con π il suo genere e con n il suo grado (ordine della superficie F), costruiamo il sistema

$$|(C+\gamma)'| = |C'+\gamma|,$$

aggiunto a $|C+\gamma|$, e valutiamo il numero delle intersezioni di una curva generica di esso con una $C+\gamma$.

Essendo

$$\pi + \varrho + m - 1,$$

il genere di $|C+\gamma|$, il numero richiesto sarà

$$2\{\pi + \varrho + m - 1\} - 2;$$

d'altra parte esso verrà dato anche da

$$(2\pi - 2) + m + x' + \nu,$$

ove, nel quadrinomio sopra scritto, il 1° termine esprime quante sono le intersezioni di C' con C, il 2° le intersezioni di γ con C, il 3° le intersezioni di C' con γ, il 4° le intersezioni di γ con se stessa.

Di qui ricaviamo la seguente espressione di x':

$$x' = m + 2\varrho - 2 - \nu.$$

Operando successivamente per aggiunzione sopra $|C'|$, e costruendo così i successivi sistemi aggiunti $|C''|, \ldots, |C^i|$, otteniamo la formula

$$x^{(i)} = m + i(2\varrho - 2) - i\nu, \tag{1}$$

la quale esprime il numero delle intersezioni delle C^i colla γ; ben inteso, il numero stesso ha un significato virtuale se la γ fa parte delle curve C^i. In questa ultima ipotesi, supposto per generalità che la γ entri un certo numero h ($\geqslant 0$) di volte come componente fissa nelle C^i, otterremo il numero (effettivo) delle intersezioni di una $C^i - h\gamma$ con γ, dalla formula

$$x_h^{(i)} = m + i(2p - 2) - (i + h)\nu \,. \tag{2}$$

Premesse queste formule, supponiamo che la γ sia una curva eccezionale di 1ª specie; allora si ha

$$p = 0 \,, \qquad \nu = -1 \,,$$

e la formula (1) diventa

$$x^{(i)} = m - i \,.$$

Il numero $x^{(i)}$ è dunque negativo per $i > m$, supposto che esista (per un siffatto valore di i) il sistema $|C^i|$ aggiunto i-mo a $|C|$; e questo significa che la γ si stacca come parte fissa dalle curve C^i; precisamente si può dire in generale che essa si stacca $h = i - m$ volte ($h > 0$), ed è fondamentale pel sistema delle curve residue, poichè dalla (2) si ricava

$$x_h^{(i)} = 0 \,.$$

Valutando poi il genere virtuale di $|C^i|$, si vede che esso è inferiore di

$$\frac{h(h-1)}{2} = \frac{(i-m)(i-m-1)}{2} \,,$$

unità rispetto al genere di $|C^i - h\gamma|$.

Vediamo così giustificata in un modo affatto generale l'osservazione ora fatta intorno allo staccarsi delle curve eccezionali di 1ª specie dai sistemi successivi aggiunti a $|C|$.

Le formole scritte innanzi ci permettono ora d'invertire l'osservazione stessa nel modo seguente:

Se una curva γ di F si stacca un certo numero di volte, come parte fissa, da tutte le curve C^i, aggiunte i-me al sistema C delle sezioni iperpiane di F (supposte le C^i ∞^1 almeno), e rimane fondamentale, cioè senza intersezioni, colle curve residue, la γ è una curva eccezionale di 1ª specie d'ordine $< i$.

Poniamo infatti che la γ si stacchi un certo numero h (> 0) di volte

da $|C^i|$; l'ipotesi dell'enunciato porta l'eguaglianza

$$x_h^{(i)} = m + i(2\varrho - 2) - (i + h)\nu = 0 .$$

Ora perchè questa sia soddisfatta deve essere intanto $\nu \leqslant 0$. Infatti nell'ipotesi opposta $\nu > 0$ si ha

$$x_{h+1}^{(i)} < 0 , \qquad x_{h+2}^{(i)} < 0 \ldots ,$$

dal che segue che il sistema $|C^i - (h + 1)\gamma|$, ottenuto staccando da $|C^i - h\gamma|$ la curva fondamentale γ, consta di una sola curva costituita dalla γ contata un certo numero di volte, senza curve residue; quindi la dimensione di $|C^i|$ (o di $|C^i - h\gamma|$) vale

$$r^{(i)} = 1 ,$$

ossia il sistema $|C^i - h\gamma|$ è un fascio, del quale la γ contata una o più volte (sia p. es. s volte) costituisce tutta una curva. Ora la curva $s\gamma$ ha il grado $s^2\nu > 0$, e questo dunque deve essere anche il grado del fascio $|C^i - h\gamma|$; ma di qui risulta un assurdo perchè il grado del fascio stesso è pur dato da $sx_h^{(i)} = 0$ denotando $sx_h^{(i)}$ il numero delle intersezioni di $s\gamma$ con una curva di $|C^i - h\gamma|$.

Restano pertanto da considerare i casi

$$\nu = 0 , \qquad \nu = -1 , \qquad \nu \leqslant -2 ,$$

in corrispondenza ai quali, essendo ϱ per sua natura non negativo (γ irriducibile), si deve avere $\varrho = 0$, perchè possa essere $x_h^{(i)} = 0$.

Ma l'ultima ipotesi $\nu \leqslant -2$ si esclude subito, perchè si avrebbe

$$x_h^{(i)} \geqslant m + 2h > 0 ,$$

mentre si è supposto già $x_h^{(i)} = 0$.

Vedremo pure che è impossibile l'ipotesi $\nu = 0$.

A tal fine supponiamo che il sistema $|C^i - h\gamma|$, che per ipotesi non contiene γ come parte fissa, sia privo di componenti fisse, dalle quali (eventualmente) si potrebbe averlo spogliato. Detta $r^{(i)} \geqslant 1$ la dimensione del detto sistema, consideriamo le curve di esso che passano per un punto di γ, e perciò si spezzano nella γ e in curve residue $C^i - (h + 1)\gamma$. Queste ultime hanno $x_{h+1}^{(i)} = 0$ intersezioni con γ; ma ciò è impossibile tranne che nei seguenti due casi: *a*) se $|C^i - h\gamma|$ è un fascio lineare del

quale una curva sia la γ; *b*) se $|C^i - h\gamma|$ è un fascio lineare, la cui curva generica si componga di più curve variabili in un fascio irrazionale del quale una curva è la γ. Ciò dipende dal fatto che se una curva generalmente irriducibile varia in un sistema algebrico (ad es. in un fascio), e per una posizione particolare si spezza, ad es. in due parti, le due parti devono avere almeno *una* intersezione comune; non *zero* come si era trovato considerando la γ e la $C^i - (h+1)\gamma$ (cfr. n. 1). Ora, sia nella ipotesi *a*), che nella ipotesi *b*), la nostra superficie contiene un fascio di curve razionali, come la γ, e quindi può trasformarsi birazionalmente in una rigata (cfr. n. 11). Sopra tale rigata la γ avrebbe come immagine una generatrice, sulla quale non si troverebbero punti base del sistema $|C|$ corrispondente al sistema delle sezioni iperpiane di F. Ora è facile persuadersi che procedendo per aggiunzione, sopra una rigata, a partire da un sistema lineare irriducibile, non potrà avvenire che da uno dei successivi sistemi aggiunti si distacchi, come parte fissa, una generatrice non contenente punti base del sistema. Con ciò resta dimostrato che l'ipotesi $\nu = 0$ è incompatibile colle nostre premesse.

La curva γ che si distacca (h volte) da $|C^i|$, restando fondamentale pel sistema residuo, ha dunque i caratteri $\varrho = 0$, $\nu = -1$, ossia è una curva eccezionale di 1ª specie.

Riassumendo, concludiamo:

Operando per aggiunzione ripetuta sopra il sistema $|C|$ *delle sezioni iperpiane di una superficie* F, *il sistema* $|C^i|$, *supposto* ∞^1 *almeno, a cui si perviene dopo* i *operazioni, potrà contenere delle parti fisse, contate un certo numero di volte, che sieno fondamentali pel sistema residuo; tali curve saranno le curve eccezionali di* 1ª *specie, appartenenti ad* F, *che hanno l'ordine inferiore ad* i, *e queste soltanto.*

Se dunque la superficie F non contiene curve eccezionali di 1ª specie d'ordine minore di i, una componente fissa γ di $|C^i|$, che entri h (>0) volte nella curva generica C^i, avrà $x_h^{(i)} > 0$ intersezioni colle curve residue $C^i - h\gamma$; ma in tal caso paragonando il genere $\pi^{(i)}$ di $|C^{(i)}|$ a quello $\pi_h^{(i)}$ di $|C^i - h\gamma|$, si troverà certo

$$\pi^{(i)} \geqslant \pi_h^{(i)} .$$

Infatti si ha

$$\pi^{(i)} = \pi_h^{(i)} + \varrho_h + hx_h^{(i)} - 1 ,$$

dove

$$\varrho_h = h(\varrho - 1) + \nu\frac{h(h-1)}{2} + 1 ,$$

esprime il genere di $h\gamma$ in funzione del genere $\varrho \geqslant 0$ di γ e del grado ν di γ. Ora la differenza

$$\pi^{(i)} - \pi_h^{(i)} = \varrho_h + hx_h^{(i)} - 1 ,$$

è certo $\geqslant 0$ se è $\nu > 0$, poichè allora si ha $\varrho_h \geqslant 0$, $x_h^{(i)} > 0$. Alla stessa conclusione si arriva se $\nu = 0$, giacchè in tal caso risulta

$$\pi^{(i)} - \pi_h^{(i)} = h\{\varrho + x_h^{(i)} - 1\} ,$$

dove $h \geqslant 1$, $\varrho \geqslant 0$, $x_h^{(i)} \geqslant 1$.

Per esaminare finalmente l'ultima ipotesi $\nu < 0$, ossia $-\nu = \nu' > 0$, si trasformi la differenza $\pi^{(i)} - \pi_h^{(i)}$, tenendo conto della espressione (2) di $x_h^{(i)}$; si troverà

$$\pi^{(i)} - \pi_h^{(i)} = h\{(\varrho - 1)(2i + 1) + m\} + \frac{h(h + 2i + 1)}{2}\nu' ,$$

risultato certo $\geqslant 0$, tranne quando sia

$$\varrho = 0 , \qquad m < i , \qquad \nu' = 1;$$

ma queste soluzioni son da respingersi, perchè esse porterebbero alla conclusione esser γ (di grado $\nu = -\nu' = -1$ e genere $\varrho = 0$) una curva eccezionale di prima specie avente l'ordine m inferiore ad i, contro l'ipotesi espressamente fatta. Rimane dunque dimostrato che in ogni caso è $\pi^{(i)} - \pi_h^{(i)} \geqslant 0$; donde l'enunciato:

Se sopra una superficie F non esistono curve eccezionali di prima specie d'ordine inferiore ad i, *il distaccarsi di eventuali componenti fisse dal sistema i-mo aggiunto (supposto almeno ∞^1) ottenuto partendo dalle sezioni iperpiane di F, non può mai aver l'effetto di rialzare il genere delle curve residue.*

IV. - Superficie sopra le quali il procedimento di aggiunzione si estingue: loro riferibilità a rigate.

11. – Vogliamo qui anzitutto riepilogare, e completare in qualche punto, i principali resultati noti che si riferiscono alle condizioni di trasformabilità di una superficie in una rigata (razionale o no):

1) *Una superficie contenente un fascio di curve (irriducibili) razionali si può riferire ad una rigata, le cui generatrici corrispondono alle curve del fascio* ([21]).

([21]) Il teorema fu dimostrato, pel caso in cui il fascio sia di genere 0, dal sig. NOETHER, *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen*, « Mathem. Annalen », III (1870); e in modo completo da ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali*, « Mathem. Annalen », LII (1899) [questo volume, XXVII].

2) *Una superficie contenente un fascio lineare di curve (irriducibili) ellittiche dotato di un punto base semplice o doppio, è razionale o riferibile ad una rigata ellittica* ([22]).

3) *Una superficie contenente un fascio lineare di curve (irriducibili) di genere due con uno o più punti base di moltiplicità* $i_1, i_2 \ldots$, *ove* $\sum i > 2$, *è razionale o riferibile ad una rigata di genere uno o due* ([22]).

4) *Una superficie contenente un sistema lineare di curve (irriducibili) di genere* $p > 2$ *e di dimensione* $r \geqslant 3p - 5$, *è razionale oppure riferibile ad una rigata.*

A questo resultato si arriva imponendo alle curve del nominato sistema lineare successivamente $p - 2$ punti doppi. Se per l'imposizione di un punto doppio le curve del sistema si spezzano, lo spezzamento ha luogo in una curva razionale passante per il punto doppio ed in una residua curva dello stesso genere delle primitive, quindi la superficie risulta riferibile ad una rigata; altrimenti si perviene ad un fascio lineare di curve di genere due (eventualmente composte con curve razionali o ellittiche costituenti pure un fascio, certo lineare perchè dotato di punti base semplici per la superficie), e si ricade in uno dei casi esaminati innanzi.

Non ci diffonderemo a spiegare ulteriormente i particolari di questa dimostrazione, rinviando il lettore alla Nota di ENRIQUES ([23]), *Sulla massima dimensione dei sistemi lineari ...*, ove il metodo stesso è applicato per dimostrare che « una superficie contenente un sistema lineare di curve di genere p e di dimensione $r \geqslant 3p + 5$ è razionale o riferibile ad una rigata di genere p ». Se qui si è ottenuto un resultato più espressivo, in cui l'ultima diseguaglianza è sostituita dalla $r \geqslant 3p - 5$, ciò dipende dal fatto che ci siamo potuti servire dei teoremi 2), 3), che son più espressivi di quelli di cui anni fa si poteva disporre.

12. – Prendiamo ora a studiare le superficie F sopra cui il procedimento di aggiunzione, applicato successivamente al sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane, ha termine dopo un numero finito di operazioni; e cominciamo dal dimostrare che il presentarsi di questo fatto (esaurimento del processo di aggiunzione) non dipende dalla natura proiettiva della superficie, cosicchè esso si ripete per ogni trasformata della F.

A tal fine basterà ricollegare l'esaurimento del processo di aggiunzione applicato a $|C|$, all'esistenza su F di un sistema lineare di curve

---

([22]) CASTELNUOVO ed ENRIQUES, *Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi*, n. 5, « Rendic. d. Circolo Mat. di Palermo », XIV (1900) [questo volume, XXX]; cfr. una osservazione a piè di pagina nella Nota di CASTELNUOVO, *Le trasformazioni generatrici ...*, « Atti dell'Accad. d. Scienze di Torino », 1901.

([23]) « Atti dell'Accad. d. Scienze di Torino », 1894 [queste *Memorie*, vol. I, VI].

di grado N e genere $\Pi > 0$, ove

$$N > 2\Pi - 2 .$$

Avvertiamo intanto che, in base alla ipotesi fatta, la superficie F avrà tutti i plurigeneri nulli, ed in particolare il genere

$$p_g = 0;$$

quindi il genere aritmetico, che non può superare p_g, sarà inferiore od uguale a zero, ossia

$$p_a = -p \qquad \text{con} \qquad p \geqslant 0 .$$

Sieno ora π, π', ..., $\pi^{(i)}$ i generi dei sistemi $|C|$, e $|C'|$, ..., $|C^i|$ successivi aggiunti a $|C|$, ciascuno dei quali è supposto ∞^1 almeno. Il genere π può supporsi grande quanto si vuole in confronto a p; ma se, come supporremo, $|C^i|$ è l'ultimo aggiunto di dimensione $\geqslant 1$, il suo genere $\pi^{(i)}$ non potrà superare $p + 1$, altrimenti si avrebbe un successivo aggiunto $|C^{i+1}|$, ∞^1 almeno.

Nella serie di numeri

$$\pi , \quad \pi' , \quad \ldots , \quad \pi^{(i)} ,$$

si troveranno dunque due numeri consecutivi $\pi^{(s)}$, $\pi^{(s+1)}$ in ordine decrescente, tali cioè che

$$\pi^{(s)} > \pi^{(s+1)} .$$

Consideriamo allora il grado $n^{(s+1)}$ del corrispondente sistema $|C^{s+1}|$; avremo (n. 2)

$$n^{(s+1)} = \pi^{(s)} + \pi^{(s+1)} - 2 > 2\pi^{(s+1)} - 2 .$$

Il sistema $|C^{(s+1)}|$ è dunque tale che in esso il grado supera il doppio del genere diminuito di 2.

Si può invertire il resultato ottenuto mostrando che « se ad F appartiene un sistema lineare $|K|$ di genere Π e grado N, ove

$$N > 2\Pi - 2 ,$$

il processo di aggiunzione applicato al sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane di F si estingue dopo un numero finito di operazioni ».

A tal fine sommiamo a $|C|$ un multiplo, d'ordine s abbastanza elevato, di $|K|$, in guisa da ottenere che il grado n_s e il genere π_s del sistema somma $|C_s| = |C + sK|$ verifichino la disuguaglianza analoga a quella supposta per $|K|$, cioè $n_s > 2\pi_s - 2$. Questo resultato si può sempre ottenere; infatti calcolando colle note formole i caratteri di $|sK|$ e poi di $|C + sK|$, si trova la relazione

$$n_s - (2\pi_s - 2) = n - (2\pi - 2) + s\{N - (2\Pi - 2)\};$$

ed il secondo membro è certo positivo quando s sia sufficientemente elevato.

Ora le curve C_s', aggiunte a $|C_s|$, segheranno le C_s in $2\pi_s - 2$ punti; le C_s'', seconde aggiunte, segheranno le C_s in

$$2\pi_s - 2 - \{n_s - (2\pi_s - 2)\} < 2\pi_s - 2 ,$$

punti; le C_s''' segheranno le C_s in un numero ancora minore,

$$2\pi_s - 2 - 2\{n_s - (2\pi_s - 2)\} ,$$

di punti, ecc.

Pertanto (visto che quei numeri di intersezioni non possono divenir negativi) si conclude che dopo un certo numero di operazioni l'aggiunzione applicata a $|C_s|$ dovrà per forza estinguersi. Prima di quel punto si estinguerà dunque anche il processo di aggiunzione applicato a $|C|$, avendosi

$$|C_s'| = |C' + sK|,$$
$$|C_s''| = |C'' + sK|, \quad \text{ecc.}$$

Resta così giustificata l'affermazione che:

« L'estinguersi del procedimento di aggiunzione applicato al sistema delle sezioni iperpiane di F è un fatto che ha carattere invariantivo, fatto il quale si accorda sempre coll'esistenza sopra F di qualche sistema lineare per cui il grado supera il doppio del genere diminuito di 2 ».

Ciò premesso, sia F una superficie su cui il processo d'aggiunzione applicato al sistema delle sezioni iperpiane C si estingue dopo un numero finito d'operazioni.

Possiamo supporre che la F sia priva di singolarità, inoltre che le sue sezioni iperpiane C compongano un sistema lineare regolare, essendo queste restrizioni d'indole proiettiva soltanto. Designamo (come innanzi) con $C', C'', \ldots, C^i$ le curve dei successivi sistemi aggiunti a $|C|$, fermandoci all'ultimo sistema $|C^i|$, ∞^1 almeno.

Le curve eccezionali di 1ª specie, d'ordine $< i$, che appartengono ad F, si distaccano, come parti fisse, da $|C^i|$, restando fondamentali pel sistema residuo; pertanto esse non si segheranno fra loro, e quindi si potrà trasformare la superficie in modo che esse vengano eliminate, cioè mutate in punti, senza che nessun punto (fondamentale) di F dia origine a nuove curve eccezionali. Il sistema trasformante si ottiene sommando a $|C|$ ciascuna delle nominate curve fondamentali contata tante volte quant'è l'ordine della curva stessa; a tale sistema è dunque applicabile l'aggiunzione i volte, come a $|C|$.

Si conclude così che, senza introdurre alcuna restrizione essenziale, si può supporre la superficie F *convenientemente preparata*, in guisa da non contenere curve eccezionali di 1ª specie d'ordine inferiore ad i.

In tale ipotesi avremo (n. 10) che « i sistemi $|C'|$, $|C''|$, ..., $|C^i|$ successivi aggiunti al sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane di F, potranno essere irriducibili o riducibili; ma, in quest'ultimo caso, spogliando ciascuno dei nominati sistemi $|C^s|$ delle sue componenti fisse, si otterrà un sistema il cui genere non sarà superiore al genere $\pi^{(s)}$ di $|C^s|$ ».

13. – Ciò posto, studiamo più da vicino la superficie F, convenientemente preparata, sopra cui il procedimento di aggiunzione applicato alle sezioni iperpiane $|C|$, termina dopo i operazioni, arrestandosi all'ultimo sistema aggiunto $|C^i|$, ∞^1 almeno.

Come innanzi designamo con

$$\pi\,,\quad \pi'\,,\quad \pi''\,,\quad \ldots\,,\quad \pi^{(i)}\,,$$

i generi rispettivi di $|C|$, $|C'|$, $|C''|$, ..., $|C^i|$, e denotiamo con s il più piccolo indice ($\leqslant i$) per cui si trova

$$\pi^{(s)} < \pi^{(s-1)}\,.$$

Distinguiamo quindi due casi, secondochè il carattere ω della superficie F vale

$$\omega \leqslant 1\,,$$

oppure

$$\omega > 1\,.$$

1° *caso*: $\omega \leqslant 1$.

In questo caso, in virtù dell'eguaglianza (n. 5)

$$\pi - \pi' - (\pi' - \pi'') = \omega - 1\,,$$

sarà

$$\pi - \pi' \leqslant \pi' - \pi'' \leqslant \pi'' - \pi''' \ldots ,$$

sicchè, dall'indice $s-1$ in poi, i successivi generi

$$\pi^{(s-1)}, \quad \pi^{(s)}, \quad \pi^{(s+1)}, \quad \ldots, \quad \pi^{(i)}$$

andranno sempre decrescendo, mentre le differenze positive

$$\pi^{(s-1)} - \pi^{(s)}, \quad \pi^{(s)} - \pi^{(s+1)}, \quad \ldots$$

andranno generalmente crescendo, o almeno non decresceranno.

Indichiamo con $D > 0$ la prima di queste differenze; poniamo cioè

$$\pi^{(s-1)} - \pi^{(s)} = D ,$$

relazione che equivale all'altra

$$n^{(s)} - (2\pi^{(s)} - 2) = D ,$$

dove $n^{(s)} = \pi^{(s-1)} + \pi^{(s)} - 2$ è il grado di $|C^s|$. Allora l'ultimo sistema aggiunto $|C^i|$ (∞^1 almeno) della nostra serie, del quale il genere

$$\pi^{(i)} \leqslant p + 1 ,$$

avrà una dimensione

$$r \geqslant \pi^{(i-1)} - p - 1 \geqslant D + \pi^{(i)} - p - 1 .$$

Ora qui può supporsi che D sia grande quanto si vuole in confronto a p, ad es.

$$D \geqslant 3(p + 1) .$$

Se così non fosse, basterebbe sostituire al sistema di partenza $|C|$ un suo multiplo $|hC|$ (e quindi alla superficie F, di cui le C sono sezioni iperpiane, una sua trasformata F_h, avente come sezioni le curve di $|hC|$, la quale può supporsi convenientemente preparata). Infatti partendo dal sistema $|hC|$ troveremo nella serie dei successivi aggiunti, e precisamente al posto d'ordine sh, il sistema $|hC^s|$, di grado $N^{(sh)}$ e genere $\Pi^{(sh)}$, dove

$$N^{(sh)} - (2\Pi^{(sh)} - 2) = h\{n^{(s)} - (2\pi^{(s)} - 2)\} ,$$

sicchè avremo

$$D_h = \Pi^{(sh-1)} - \Pi^{(sh)} = N^{(sh)} - (2\Pi^{(sh)} - 2) = hD;$$

e basterà prendere h sufficientemente grande, per avere D_h grande quanto si vuole.

Supposto dunque di aver già realizzata la disuguaglianza sopra scritta

$$D \geqslant 3(p+1),$$

fissiamo la nostra attenzione sopra il sistema $|C^i|$ che si presenta ultimo nella serie degli aggiunti

$$|C|,\ |C'|,\ |C''|,\ \ldots,\ |C^i|.$$

Staccando da questo sistema le eventuali componenti fisse, otterremo (data la *conveniente preparazione* di F) un sistema lineare di genere

$$\varrho \leqslant \pi^{(i)} \leqslant p+1,$$

e di dimensione

$$r \geqslant D + \pi^{(i)} - p - 1 \geqslant 3\varrho,$$

come segue subito dalle disuguaglianze precedenti relative a ϱ e a D. Ora il detto sistema lineare potrà essere: a) irriducibile, oppure b) riducibile, cioè composto colle curve γ d'un fascio.

Nell'ipotesi a), la presenza del nominato sistema prova subito, in virtù dei teoremi del n. 11 ([24]), che *la superficie F è riferibile ad una rigata di genere ϱ* (dove trattandosi di una superficie di genere numerico $-p$, dovrà risultare $\varrho = p$).

Nell'ipotesi b), designando con θ il genere delle curve γ del fascio sopra nominato, e tenendo conto del fatto che in ciascuna delle ∞^r curve C^i entrano almeno r componenti γ, avremo

$$p+1 \geqslant \varrho \geqslant r(\theta-1)+1;$$

e poichè (come innanzi)

$$r \geqslant 3\varrho,$$

([24]) Basterebbe anzi per ciò che fosse $r \geqslant 3\varrho - 5$; se qui si parte da una disuguaglianza meno espressiva, è in vista di ciò che segue, come pure per tener conto dei casi $\varrho = 1, 2$.

ne consegue

$$\theta \leqslant 1 .$$

Vediamo se può essere $\theta = 1$, ipotesi che porta $\varrho \geqslant 1$, e quindi $\pi^{(i)} \geqslant 1$. Consideriamo a tal fine il sistema $|C^{i-1}|$, di cui $|C^i|$ è l'aggiunto; il valore $\pi^{(i-1)}$ del suo genere soddisferà alla diseguaglianza

$$\pi^{(i-1)} \geqslant D + \pi^{(i)} \geqslant D + 1 .$$

Ponendo dunque

$$\pi^{(i-1)} = D + 1 + x \qquad \text{con} \qquad x \geqslant 0 ,$$

saranno $2(D + x)$ i punti segati da una C^i sopra una C^{i-1}. Ma poichè la C^i si compone (a meno di parti fisse) di almeno r curve γ, ciascuna delle quali sega la C^i in un certo numero t di punti, si dovrà avere

$$2(D + x) \geqslant rt .$$

D'altronde la dimensione r di $|C^i|$ è $\geqslant \pi^{(i-1)} - p - 1 \geqslant D + x - p$. Sostituendo si trova

$$(D + x)(t - 2) \leqslant tp ,$$

e questa relazione, se si bada che $D > 3p$, porta di conseguenza

$$t = 2 .$$

Dunque ogni γ sarebbe segata da una C^{i-1} in due punti. Ma allora, per la formola (1) del n. 10, la γ (curva ellittica di grado 0) sarebbe segata in due punti da una C^{i-2}, ... e finalmente da una C generica (sezione di F), il che è assurdo, visto che allora la γ generica sarebbe una conica e quindi razionale.

Resta dunque possibile soltanto l'ipotesi $\theta = 0$, la quale dice che « le curve γ del fascio suindicato sono razionali ». Tanto basta per concludere che anche in questo caso, e quindi *ogniqualvolta l'invariante* ω *della superficie* F *è* $\leqslant 1$, *la superficie stessa è riferibile ad una rigata* (n. 11, 1).

14. – *Secondo caso* $\omega > 1$.

È utile premettere qualche osservazione sulla nostra superficie F, sopra cui il procedimento di aggiunzione si estingue, e che ha i caratteri $\omega > 1$, $p_a = -p \leqslant 0$.

Osserviamo anzitutto che se $|C|$ è un sistema lineare, privo di punti base su F, avente il grado n ed il genere $\pi \geqslant p + 1$, tra i suoi caratteri ed il genere π' del sistema aggiunto sussistono le disuguaglianze

$$n > 2\pi - 2 , \qquad \pi > \pi' .$$

Per dimostrare la prima basta partire dalla definizione di ω,

$$n - (2\pi - 2) - (\pi - \pi') = \omega - 1 > 0 ,$$

notando che se fosse $n \leqslant 2\pi - 2$, dovrebbe risultare $\pi' > \pi$, e quindi $\pi' > p + 1$. Siccome d'altronde il grado del sistema aggiunto $|C'|$ vale

$$n' = \pi + \pi' - 2 < 2\pi' - 2 ,$$

seguirebbe, sempre nella stessa ipotesi, l'esistenza del secondo aggiunto $|C''|$ di genere $\pi'' > \pi' > \pi$. E così si continuerebbe all'infinito, mentre per ipotesi il processo di aggiunzione deve estinguersi sopra F. Risulta dunque dimostrata la prima disuguaglianza.

Quanto alla seconda si osservi che dal negarla, dal porre cioè $\pi' \geqslant \pi \geqslant p + 1$, segue (applicando la disuguaglianza già dimostrata al sistema $|C'|$) $n' > 2\pi' - 2$, ossia (sostituendo a n' il valore sopra scritto) $\pi > \pi'$, contro la ipotesi ora ammessa $\pi' \geqslant \pi$.

E qui si noti incidentalmente che le due disuguaglianze (insieme al ragionamento che ha servito a giustificarle) sussistono pure per le superficie con $\omega = 1$, purchè la ipotesi $\pi \geqslant p + 1$ si sostituisca ora coll'altra $\pi > p + 1$, e ciò per evitare un caso di eccezione ($p = 0$, $\pi = 1$) che altrimenti si presenterebbe.

Una seconda osservazione sulla nostra superficie F ($\omega > 1$) è che essa non può possedere un fascio irrazionale di curve (serie irrazionale di cui una sola curva passa per un punto generico della superficie).

Ammesso infatti che la nostra superficie, di cui il genere geometrico p_g è certo nullo, possegga un fascio irrazionale, risulta anzitutto che il genere aritmetico $p_a = -p$ dovrà esser inferiore a 0 ($p > 0$), poichè una superficie regolare ($p_g = p_a$) non possiede fasci irrazionali ([25]).

Il fascio d'altra parte non potrà comporsi di curve razionali, perchè, se così fosse, la superficie potrebbe trasformarsi in una rigata, mentre, come vedremo tra poco direttamente (n. 21), una rigata ha il carattere

([25]) CASTELNUOVO, *Alcuni risultati* ..., n. 10, « Memorie della Società italiana d. Scienze (dei XL) », (serie III), t. X (1896).

$\omega \leqslant 1$, contro l'ipotesi. Posto adunque che sia $\varrho > 0$ il genere di una curva generica del fascio, e ϱ' il genere del fascio, avremo (applicando la formola di ZEUTHEN-SEGRE estesa ai fasci irrazionali, n. 6, Oss.) che l'invariante relativo I della superficie sarà espresso da

$$I = \Delta + 4(\varrho - 1)(\varrho' - 1) - 4 ,$$

dove $\Delta \geqslant 0$ è il numero delle curve del fascio dotate di punto doppio. Dunque $I \geqslant -4$; e per la relazione tra I, ω e $p_a = -p$ (n. 6) si deduce

$$\omega \leqslant -12p + 13 ,$$

la quale contraddice alla ipotesi $\omega > 1$ unita all'osservazione secondo cui deve essere $p \geqslant 1$.

Premesse queste osservazioni, ritorniamo alla nostra superficie F di genere aritmetico $-p \leqslant 0$, avente $\omega > 1$, sopra la quale il processo di aggiunzione si estingue. Partendo dal sistema $|C|$ delle sezioni piane, formiamone i successivi aggiunti, fino all'ultimo aggiunto $|C^i|$, almeno ∞^1. Designando, secondo il solito, con $\pi^{(i)}$ il genere di $|C^i|$, avremo

$$\pi^{(i)} \leqslant p + 1 .$$

Ora il sistema $|C^i|$ potrebbe esser riducibile; prescindendo in tal caso dalle sue componenti fisse, otterremo (n. 10) o un sistema lineare irriducibile di genere

$$\varrho \leqslant \pi^{(i)} \leqslant p + 1 ,$$

oppure un sistema composto colle curve γ di un fascio lineare, delle quali il genere virtuale designeremo ancora con ϱ; ora qui, fatta astrazione dalla ipotesi $\varrho = 0$ che condurrebbe senz'altro a conchiudere la razionalità di F, si avrà ancora

$$\varrho \leqslant \pi^{(i)} \leqslant p + 1 .$$

In ogni caso avremo dunque su F un sistema lineare irriducibile $|K|$, virtualmente privo di punti base, di genere virtuale

$$\varrho \leqslant p + 1 ,$$

e di genere effettivo $\leqslant \varrho$.

Indichiamo con r la dimensione di $|K|$, ed applichiamo a $|K|$ la disu-

guaglianza del n. 7; troveremo

$$5\varrho + r \geqslant 11p + \omega - 8 ,$$

ossia, poichè $\omega \geqslant 2$ e $\varrho \leqslant p + 1$, avremo

$$r \geqslant 6p - 11 .$$

Questa disuguaglianza ci conduce subito al risultato che desideriamo, *quando si faccia la ipotesi* $p \geqslant 3$ ([26]). Infatti allora l'ultima formola ci dà

$$r \geqslant 3p - 2 \geqslant 7 ,$$

donde segue (ricordando la $\varrho \leqslant p + 1$)

$$r \geqslant 3\varrho - 5 .$$

Si conclude (n. 11), tanto se $\varrho = 0, 1, 2$, quanto se $\varrho > 2$, che *la superficie F è riferibile ad una rigata.*

Restano dunque da trattare *le ipotesi* $p = 0, 1, 2$, delle quali la terza specialmente darebbe luogo ad una discussione alquanto minuziosa, se volessimo seguire una via analoga a quella tenuta per $p \geqslant 3$. Si arriva invece rapidamente al risultato per la via completamente diversa che qui indichiamo.

Sia $|C|$ il sistema delle sezioni piane della superficie F, od un multiplo di quello abbastanza elevato per far sì che il genere di $|C|$ sia $\pi \geqslant p + 1$, e che inoltre il sistema aggiunto $|C'|$ sia irriducibile. Allora, detto π' il genere di $|C'|$, risulterà intanto, per una osservazione precedente, $\pi > \pi'$. Ciò premesso, formiamo il sistema $|K^{-2}| = |2C - 2C'|$. Noi abbiamo già calcolato i caratteri del detto sistema [n. 5, formole (1'), (2')], ed abbiamo trovato che, indicandone con R, Π, N la dimensione, il genere virtuale ed il grado, si ha (tenuto conto della ipotesi $p \leqslant 2$)

$$R \geqslant 3\omega - 3 - p \geqslant 3\omega - 5 ,$$

$$\Pi = \omega , \qquad N = 4(\omega - 1) .$$

([26]) È qui da notarsi che la discussione del caso $\omega > 1$, $p > 0$ procede in certo modo per assurdo; giacchè la discussione stessa, unita alla osservazione (n. 21) che per una rigata si ha $\omega \leqslant 1$, mostra che la ipotesi $\omega > 1$ conduce solo alle superficie razionali, per le quali d'altronde è $p = 0$. Ma non par facile dedurre direttamente la $p = 0$ dalla $\omega > 1$.

Ora dal fatto che esista su F un sistema di genere $\omega \geqslant 2$ e dimensione $R \geqslant 3\omega - 5$, si conclude senz'altro (n. 11, 4) che F è riferibile birazionalmente ad una rigata; e ciò anche nella ipotesi estrema $\omega = 2$, in cui il sistema può ridursi ad un fascio, giacchè il fascio o possiede $N = 4$ punti base semplici, ed allora si può applicare la proposizione 3) del n. 11, o possiede un punto base (accidentale) doppio, ed allora la curva generica del fascio ha il genere effettivo $\omega - 1 = 1$, e si può ricorrere alla proposizione 2) del n. 11. Dunque in ogni caso *la nostra superficie F con $\omega > 1$ è riferibile ad una rigata.*

15. – Riassumendo il resultato della discussione precedente (n[i]. 13, 14), arriviamo infine al teorema fondamentale:

Se sopra una superficie il procedimento di aggiunzione applicato ad un qualsiasi sistema lineare ha termine dopo un numero finito di operazioni, la superficie può trasformarsi birazionalmente in una rigata (razionale o no).

V. - La trasformabilità di una superficie in una rigata desunta dall'esistenza di certi sistemi di curve sopra di essa.

16. – In forza di ciò che si è detto al n. 12, il resultato ultimamente ottenuto si può enunciare dicendo:

Una superficie contenente un sistema lineare di curve di dimensione $\geqslant 0$, di genere $\pi > 0$, e di grado $n > 2\pi - 2$, è riferibile ad una rigata.

Il resultato vale sia che si tratti di un sistema riducibile o irriducibile, ed in questo secondo caso si possono indifferentemente considerare i caratteri effettivi del sistema (in rispondenza all'ipotesi che il sistema stesso abbia dei punti base assegnati), o i caratteri virtuali (in rispondenza all'ipotesi che gli eventuali punti base del sistema si riguardino come virtualmente inesistenti); ma il caso in cui si considerano i caratteri virtuali è sempre più espressivo.

Per riconoscere l'ampiezza del resultato ottenuto basterà considerare dei valori particolari del genere π.

Per $\pi = 1$ ritroviamo, maggiormente esteso, il resultato 2) riportato al n. 11 concernente le superficie con un fascio lineare di curve ellittiche; per $\pi = 2$ troviamo il resultato 3) del n. 11 sulle superficie con un fascio lineare di curve di genere due.

Per $\pi = 3$ si ottengono già dei resultati interamente nuovi; in particolare lo studio delle superficie a sezioni di genere 3 fa un progresso essenziale mediante il teorema:

Una superficie, d'ordine superiore a 4, a sezioni di genere 3, è razionale, o rigata, o trasformabile in una rigata di genere 1 o 2.

E per esaurire completamente il detto studio (poichè le superficie razionali a sezioni di genere 3 sono già note) basterà classificare i sistemi lineari di curve di genere 3 appartenenti ad una rigata ellittica o di genere due.

17. – Dal teorema del precedente numero discende l'importante corollario:

Se una superficie contiene una serie continua (algebrica) ∞^1 di curve razionali, o questa serie è tale che ogni punto della superficie appartiene ad una sola curva di essa, cioè la detta serie costituisce un fascio di un certo genere $p \geqslant 0$, ed allora la superficie è trasformabile in una rigata di genere p; o la serie è tale che per ogni punto passano più curve di essa, ed allora la superficie è razionale.

La prima parte dell'enunciato essendo già nota (cfr. n. 11, 1), basterà stabilire la seconda.

Designando con C le curve razionali della serie, avremo per un teorema del sig. HUMBERT ([27]), (la superficie essendo priva d'integrali di differenziali totali di 1ª specie) che le C saranno contenute totalmente in un sistema lineare; il genere π di questo sistema verrà dato dal numero dei punti doppi variabili delle C, e il grado n di esso dal numero delle intersezioni variabili di due C.

Pel nostro scopo occorre provare che

$$n > 2\pi - 2 .$$

A tal fine stabiliamo una corrispondenza razionale tra la superficie F ed una superficie F' possedente un fascio di curve razionali C'; ciò si ottiene rappresentando birazionalmente ciascuna C su ciascuna C', e facendo quindi corrispondere ad ogni punto di F (pel quale passerà un certo numero $\nu > 1$ di curve C) un gruppo di ν punti sopra F'. Si può anche supporre che la F' sia una rigata e le C' generatrici di essa, poichè in caso opposto basterebbe assoggettare F' ad una conveniente trasformazione birazionale (n. 11, 1).

Così avendo operato, ai punti della F corrispondono sulla rigata F' i gruppi di ν punti di una *involuzione* I_ν, cioè di una serie di gruppi cosiffatta che ogni punto della superficie appartenga ad *un* gruppo della serie. È ora facile stabilire qual significato abbiano per la detta involuzione I_ν di F' i caratteri π e n relativi al sistema delle curve C di F.

Il genere π (numero dei punti doppi variabili appartenenti ad una C)

([27]) *Sur quelques points de la théorie ...*, « Journal de Mathématiques », (serie 4ª), t. X (1894), pag. 195.

viene dato dal numero dei gruppi I_ν che hanno due punti sopra una data generatrice di F'; il grado n (numero dei punti variabili comuni a due C) è invece il numero dei gruppi di I_ν aventi un punto sopra una data generatrice ed un secondo punto sopra una seconda generatrice pur data. Ora è chiaro che se le due ultime generatrici vengono a coincidere in una, gli n gruppi di I_ν ora nominati, divengono i π gruppi di I_ν che hanno due punti su quella generatrice, più un certo numero $\delta \geqslant 0$ di gruppi di I_ν aventi un punto sulla detta generatrice ed un secondo punto infinitamente vicino al primo.

Di qui si ricava $n = 2\pi + \delta$, ossia $n \geqslant 2\pi$; donde si trae che la superficie F è razionale o riferibile ad una rigata irrazionale; ma la seconda alternativa resta esclusa per l'esistenza su F di una serie di curve razionali non formanti un fascio.

All'enunciato sopra scritto possiamo dare anche le seguenti forme equivalenti:

Ogni involuzione sopra una rigata è razionale o riferibile ad una nuova rigata, il cui genere non può superare quello della data.

In particolare si ha il resultato noto:

Le involuzioni piane sono razionali ([28]).

Sotto forma algebrica il precedente resultato generale si esprime dicendo:

Se l'equazione algebrica

$$f(xyz) = 0\,,$$

si può risolvere ponendo x, y, z funzioni razionali di due parametri X, Y, legati da una relazione algebrica, e di un parametro t:

$$x = x(XYt)\,, \qquad y = y(XYt)\,, \qquad z = z(XYt)\,,$$
$$\varphi(XY) = 0\,,$$

e se le scritte formule di risoluzione non sono razionalmente invertibili, si possono introdurre nuovi parametri

$$X_1 = X_1(XY)\,, \qquad Y_1 = Y_1(XY)\,, \qquad t_1 = t_1(t)\,,$$

funzioni razionali dei precedenti, per modo che le x, y, z si esprimano per X_1, Y_1, t_1 in modo razionale invertibile, oppure si può risolvere la $f(xyz) = 0$ ponendo x, y, z funzioni razionali di due nuovi parametri indipendenti u, v, che sieno alla lor volta razionalmente esprimibili per x, y, z.

([28]) CASTELNUOVO, *Sulla razionalità delle involuzioni piane*, « Mathem. Annalen », XLIV (1893).

18. – Ricordando ciò che si è trovato al n. 9, il teorema generale del n. 16 ci permette anche di enunciare il corollario:

Una superficie contenente infinite curve eccezionali è riferibile ad una rigata (razionale o no).

Una superficie contenente una curva eccezionale di 2^a *specie è riferibile ad una rigata (razionale o no).*

Una superficie, non riferibile ad una rigata, si può trasformare in guisa da non contenere alcuna curva eccezionale.

Quest'ultimo resultato è soprattutto importante pel fatto che, rispondendo in modo preciso alle previsioni, solo in parte giustificate, fatte intorno all'argomento, permette ormai di ritenere eliminata dallo studio delle superficie la grave difficoltà inerente alle curve eccezionali.

19. – Il resultato del n. 16 permette anche di colmare una lacuna tutt'ora esistente nello studio delle superficie con una serie continua di trasformazioni birazionali in se stesse.

Le superficie che ammettono una serie continua di trasformazioni birazionali, formanti un *gruppo* (nel senso di LIE), sono state studiate anzitutto dal sig. PICARD ([29]), che, tenendo di mira il caso più interessante del gruppo permutabile, giunse alla scoperta delle superficie iperellittiche, oggetto di ulteriori studi notevolissimi del sig. HUMBERT ([30]). Le ricerche del sig. PICARD, per quanto concerne le superficie dotate di un gruppo di trasformazioni non permutabili, furono in qualche punto proseguite da CASTELNUOVO ed ENRIQUES ([31]) (i quali dettero l'estensione alle superficie del teorema di SCHWARTZ per le curve, considerando il caso di gruppi ∞^2 o più ampi), ed infine furono, si può dire, condotte a termine dalla profonda analisi del sig. PAINLEVÉ ([32]).

Ma tutte queste ricerche lasciano da parte le superficie dotate di una serie continua di trasformazioni non appartenenti ad un gruppo (possedente un numero finito di dimensioni); e la domanda, formulata dai sigg. PICARD e PAINLEVÉ, se esistano superficie siffatte oltre alle superficie razionali e alle rigate, rimaneva tuttora senza risposta.

I resultati di questo lavoro permettono di rispondere in modo negativo alla domanda suddetta.

Si abbia infatti una superficie F dotata di una serie continua ∞^1 di trasformazioni birazionali in se stessa. Moltiplicando ad r ad r le trasfor-

---

([29]) *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques*, « Journal de Mathématiques », (serie 4ª), t. V (1889).

([30]) « Journal de Mathématiques », (serie 4ª), t. IX (1893).

([31]) « Comptes Rendus de l'Acad. d. Sc. », Juillet 1895.

([32]) *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, pag. 265 e seg. (Paris, Hermann, 1897).

mazioni della serie, e facendo poi crescere il numero r, due casi potranno presentarsi; o si otterrà una serie di trasformazioni, la cui dimensione andrà sempre crescendo con r, e sarà anzi r stesso; oppure si giungerà alla fine ad un gruppo dipendente da un numero finito di parametri, nel qual gruppo la serie data sarà contenuta. Noi dobbiamo naturalmente occuparci del primo caso. Applichiamo le ∞^r trasformazioni nominate al sistema lineare $|C|$, di genere π e grado n, formato colle sezioni (piane o iperpiane) di F. Otterremo una serie continua di curve C_r di genere π, la cui dimensione andrà crescendo senza limite col crescer di r. Altrettanto accadrà dunque del numero N_r delle intersezioni di due C_r generiche, giacchè tutte le C_r segano sopra una di queste una serie (lineare o no) di gruppi, la cui dimensione è la dimensione della serie delle C_r o ne differisce in meno per una unità.

Consideriamo d'altra parte, tra le nominate C_r, quelle curve $\overline{C}_r$ che provengono dalle sezioni C di F per effetto di *una* determinata tra le ∞^r trasformazioni. Quelle $\overline{C}_r$ formano evidentemente un sistema lineare $|\overline{C}_r|$, di cui il genere e il grado (effettivi) coincidono col genere π e il grado n di $|C|$. Però il sistema $|\overline{C}_r|$ avrà generalmente un certo numero σ di punti base di molteplicità $h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$; tenendo conto delle $\sum_1^\sigma h^2$ intersezioni assorbite da questi, si avrà il grado virtuale di $|\overline{C}_r|$ che dovrà coincidere col numero N_r delle intersezioni di due C_r generiche; dunque

$$N_r = n + \sum_1^\sigma h^2 .$$

Similmente, detto Π_r il genere virtuale di $|\overline{C}_r|$, si avrà

$$\Pi_r = \pi + \frac{1}{2}\sum_1^\sigma h(h-1) .$$

Ora dalle due relazioni si ricava

$$N_r - 2\Pi_r = n - 2\pi + \sum_1^\sigma h .$$

Ma poichè, col crescere di r, il numero N_r, e quindi $\sum_1^\sigma h^2$, può rendersi grande quanto si vuole, si potrà anche rendere grande ad arbitrio $\sum_1^\sigma h \geqslant \sqrt{\sum_1^\sigma h^2}$, e per conseguenza si potrà rendere positiva la differenza $N_r - 2\Pi_r$. Tanto basta per concludere (n. 18) che

Una superficie la quale ammetta una serie continua di trasformazioni birazionali non appartenenti ad un gruppo (d'ordine finito), è razionale o riferibile ad una rigata di genere $p > 0$.

Nel piano e sulle superficie rigate di genere $p > 0$ si costruiscono agevolmente serie di trasformazioni non appartenenti ad un gruppo; queste, come è chiaro, operano intransitivamente sui punti della superficie quando sia $p > 1$.

VI. - Il genere lineare $p^{(1)}$ di una superficie e la sua importanza nel decidere se la superficie sia trasformabile in una rigata.

20. – Nel n. 5, definendo l'invariante relativo ω di una superficie F, abbiamo osservato che esso diviene un invariante assoluto $p^{(1)}$ quando la superficie F sia priva di curve eccezionali. Se al contrario la superficie F possiede un certo numero *finito*, $e > 0$, di curve eccezionali, nel qual caso essa può trasformarsi in una superficie priva di curve eccezionali, il valore dell'invariante assoluto $p^{(1)}$ non coincide col valore di ω calcolato sulla F, ma ne differisce di e unità; e si ha precisamente

$$p^{(1)} = \omega + e \,.$$

L'invariante assoluto $p^{(1)}$ così definito prende il nome di *genere lineare* (o *Curvengeschlecht*) della superficie F [33]. La definizione è in perfetto accordo con quella data dal sig. NOETHER, nel caso in cui la superficie abbia il genere geometrico $p_g > 0$, giacchè allora $p^{(1)}$ è precisamente il *genere (virtuale) delle curve canoniche di* F, mentre $p^{(1)} - 1$ è il grado (virtuale) del sistema canonico. Ma la definizione sopra riferita comprende altri casi che sfuggono alla definizione di NOETHER; precisamente quella si estende ad ogni superficie che non sia trasformabile in una rigata (cfr. n. 18). Come essa possa estendersi anche alla classe delle rigate si vedrà tra poco.

Osserviamo per ora che sulle superficie dotate di un numero finito (zero incluso) di curve eccezionali, il genere lineare $p^{(1)}$ è sempre $\geqslant 1$. Ciò segue dal fatto che, ammesso di aver trasformato la nostra superficie in una F priva di curve eccezionali, e detti π, π', π'' ... i generi del sistema $|C|$ delle sezioni piane di F e dei successivi aggiunti $|C'|$, $|C''|$..., si ha, per definizione, l'uguaglianza

$$(\pi - \pi') - (\pi' - \pi'') = p^{(1)} - 1 \,,$$

e sussistono pure tutte le analoghe che si ottengono aumentando di una unità per volta gli apici di tutte le π. Ora se fosse $p^{(1)} < 1$, $p^{(1)} - 1 < 0$,

[33] Cfr. ENRIQUES, *Introduzione* ..., § 41.

le differenze $\pi - \pi'$, $\pi' - \pi''$, $\pi'' - \pi'''$ ... formerebbero una serie di valori crescenti (cfr. n. 13), e quindi da un certo punto in poi i generi dei successivi aggiunti andrebbero decrescendo; ma allora (tenuto conto del n. 10) l'aggiunzione si dovrebbe esaurire dopo un numero finito di operazioni, il che non può certo accadere sulla superficie F.

Osserviamo inoltre che sulle superficie di cui stiamo ora parlando, il carattere $p^{(1)} \geqslant 1$ permette di fissare un limite inferiore al valore dei singoli plurigeneri, stabilendo così (tranne in un caso) l'esistenza dei sistemi pluricanonici da un certo punto in poi, e dandone inoltre i caratteri. Infatti, detto $|C|$ il sistema delle sezioni piane della nostra superficie F priva di curve eccezionali, e $|C'|$ il sistema aggiunto, sappiamo che il sistema i-canonico $|K^i|$ di F è dato dalla identità $|K^i| = |iC' - iC|$. Se adunque indichiamo con p_a, $p^{(1)}$ il genere aritmetico e il genere lineare di F, ed ammettiamo che tra il grado n e il genere π di F passi la disuguaglianza $n < 2\pi - 2$, abbiamo per lo i-genere P_i la limitazione [n. 5, (1)]

$$(1) \qquad P_i \geqslant \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)} - 1) + p_a + 1\,, \qquad (n < 2\pi - 2,\ \ i > 1);$$

mentre il genere virtuale Π_i e il grado virtuale N_i del sistema i-canonico, di cui $P_i - 1$ è la dimensione, sono espressi da

$$(2) \qquad \Pi_i = \frac{i(i+1)}{2}(p^{(1)} - 1) + 1\,, \qquad N_i = i^2(p^{(1)} - 1)$$

$$(n \leqslant 2\pi - 2,\ \ i \geqslant 1).$$

La formola (1) è stata ottenuta nella ipotesi che pel sistema $|C|$ valesse la disuguaglianza $n < 2\pi - 2$; mentre le superficie che stiamo ora considerando possono anche avere sezioni piane C per cui valga la relazione $n = 2\pi - 2$ (non mai $n > 2\pi - 2$, chè altrimenti la superficie sarebbe riferibile ad una rigata e quindi possederebbe infinite curve eccezionali). Ammessa l'ultima uguaglianza si osservi (n. 5) che il ragionamento con cui si perviene alla formola (1), e la (1) stessa, continuano a sussistere quando si sappia che la serie segata dal sistema $|iC'|$ sopra una curva di $|iC|$ è non speciale; mentre se la serie stessa fosse speciale bisognerebbe modificare la (1) diminuendo di 1 il secondo membro. Ma in questo secondo caso si ottiene un risultato molto più espressivo osservando che la detta serie, se è speciale, è la serie canonica (come risulta dal confronto del suo ordine col genere della curva a cui appartiene); allora però $|iC'|$ è il sistema aggiunto ad $|iC|$. Ora dall'identità

$$|iC'| = |(iC)'| = |(i-1)C + C'|,$$

segue

$$|(i-1)C'| = |(i-1)C|;$$

e questa afferma che esiste il sistema $(i-1)$-canonico, composto di una sola curva d'ordine zero; quindi $P_{i-1} = 1$. D'altronde, uguagliando ad es. i gradi di $|(i-1)C|$ e $|(i-1)C'|$, si trova che nelle stesse ipotesi è $p^{(1)}=1$; e direttamente si vede che la superficie in questione ha il genere geometrico p_g e tutti i plurigeneri minori o uguali a 1, in particolare però

$$P_{i-1} = P_{2(i-1)} = P_{3(i-1)} = \ldots = 1,$$

mentre il genere aritmetico vale $p_a \leqslant p_g \leqslant 1$. Per una siffatta superficie è inutile di surrogare la formola (1) con un'altra, la quale non potrebbe dar nulla di più di quel che ora si sia esposto.

Concludiamo adunque:

Sopra una superficie possedente un numero finito di curve eccezionali (e quindi non trasformabile in una rigata), la quale abbia il genere lineare $p^{(1)} > 1$, *lo i-genere* P_i *è espresso dalla formola* (1), *ed è quindi maggiore di zero per tutti i valori di* i *superiori ad un certo limite* (34).

Se invece la superficie ha il genere lineare $p^{(1)} = 1$, la formola (1) può cadere realmente in difetto. Esistono infatti superficie a sezioni di genere π, d'ordine $n = 2\pi - 2$, le quali hanno

$$p^{(1)} = 1, \qquad p_a = P_i = 1, \qquad \text{per qualsiasi valore di } i,$$

come ad es. la superficie generale del quarto ordine; e superficie che nelle stessa ipotesi $(n = 2\pi - 2)$ hanno

$$p^{(1)} = 1, \qquad p_a = 0, \qquad P_i = 0, 1, \qquad \text{secondochè } i \text{ è dispari o pari},$$

come ad es. la superficie del sesto ordine passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro. Altri tipi di superficie si potrebbero citare, sui quali non intendiamo fermarci qui.

Ritornando alle superficie con $p^{(1)} > 1$, accanto al limite inferiore per lo i-genere fissato dalla (1), si può assegnare pure un limite superiore a P_i mediante la formola

$$P_i \leqslant p_g + \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)} - 1) + 1, \tag{3}$$

(34) Quest'ultima osservazione è stata applicata nello studio delle superficie con $p^{(1)} = 2, 3 \ldots$ Cfr. due Note di ENRIQUES nei « Rendic. della R. Accad. d. Lincei », febbraio e marzo 1897.

dove i deve esser preso abbastanza grande perchè sia $P_{i-1} > 0$. La (3) si giustifica osservando che il sistema i-canonico sega sulla curva generica del sistema $(i-1)$-canonico la serie canonica, lasciando per residuo il sistema canonico. Anche la (3) cade in difetto per $p^{(1)} = 1$, come risulta da effettivi esempi di superficie rappresentabili sul piano doppio ([35]).

21. – Nel numero precedente noi abbiamo definito il genere lineare $p^{(1)}$ per ogni superficie avente un numero finito di curve eccezionali. Ora si può chiedere se quella definizione possa presentarsi sotto tal forma, da estendersi anche al caso delle superficie che posseggono infinite curve eccezionali e quindi appartengono alla famiglia delle rigate.

Basta osservare a tal fine che, per definizione, sopra una superficie della prima categoria, possedente $e \geqslant 0$ curve eccezionali, il genere lineare $p^{(1)} = \omega + e$ è il massimo valore che possa assumere l'invariante relativo ω calcolato sopra tutte le superficie in corrispondenza birazionale con quella considerata (appartenenti cioè alla stessa classe di quella); quel massimo corrisponde precisamente alle superficie della classe che son prive di curve eccezionali.

Ora è il caso di esaminare se partendo da una superficie della seconda categoria (razionale o rappresentabile sopra una rigata), e calcolando i valori di ω per tutte le superficie birazionalmente identiche a quella, questi valori ammettano un massimo finito, che sarà allora un invariante assoluto della superficie. La risposta, come ora vedremo, è affermativa; potremo adunque dar la seguente definizione generale del genere lineare ([36]):

Dicesi genere lineare (principale) $p^{(1)}$ di una data superficie qualsiasi il massimo valore che assume l'invariante relativo ω calcolato su tutte le superficie in corrispondenza birazionale con quella.

Veniamo ora a dimostrare l'esistenza del massimo valore di ω per le superficie razionali, e per quelle che son rappresentabili sopra una rigata irrazionale.

Trattiamo anzitutto questo secondo caso.

Se una superficie F è in corrispondenza birazionale con una rigata di genere $p > 0$, la F contiene un fascio di genere p di curve razionali, immagini delle generatrici della rigata. Questo fascio ci permette di calcolare l'invariante relativo I della F, servendoci della estensione della formola di ZEUTHEN-SEGRE stabilita nella osservazione del n. 6. Troviamo

---

([35]) Cfr. ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere lineare $p^{(1)} = 1$.* « Rendic. della R. Accad. d. Lincei », 1898 [queste *Memorie*, vol. I, XXII].

([36]) CASTELNUOVO, *Sul genere lineare di una superficie ...*, « Rendic. della R. Accad. d. Lincei », giugno 1897; occorre però avvertire che in questa Nota sono scambiati gli aggettivi *principale* e *secondario* applicati ai generi lineari. La nuova dicitura adottata nel testo sembra la più conveniente.

precisamente

$$I = \Delta - 4p ,$$

dove $\Delta \geqslant 0$ è il numero delle curve del fascio irrazionale che posseggono un punto doppio (e quindi si spezzano, trattandosi di curve razionali). Segue di qua che $I \geqslant -4p$, ed il valore minimo, $-4p$, è raggiunto se F stessa è rigata, poichè per una rigata è $\Delta = 0$. D'altra parte si ha la relazione fondamentale (n. 6)

$$I + \omega = 12p_a + 9 = -12p + 9 . \qquad (p_a = -p).$$

Segue subito di qua che

$$\omega \leqslant -8(p-1) + 1 ,$$

il valore massimo essendo raggiunto quando ad es. ω venga calcolato sulla rigata stessa. Dunque per definizione:

Una rigata di genere $p > 0$ (ed ogni superficie riferibile birazionalmente a quella) ha il genere lineare

$$p^{(1)} = -8(p-1) + 1 .$$

Il ragionamento ora applicato alle rigate irrazionali non si estende al piano e alle superficie razionali. Per queste conviene proceder direttamente nel modo che segue. Si osservi anzitutto che il valore di ω calcolato per il piano, partendo da un sistema privo di punti base, ad es. dal sistema delle quartiche piane ($\pi = 3$, $n = 16$, $\pi' = 0$), è

$$\omega = n + \pi' - 3(\pi - 1) = 10 .$$

Rimane però il dubbio che calcolando ω per una superficie razionale, diversa dal piano, si possa trovare un valore superiore. Per toglier questo dubbio si consideri una superficie razionale F il cui ω sia > 1, e sopra questa si fissi un sistema lineare irriducibile $|C|$ di curve, privo di punti base, avente il genere $\pi \geqslant 1$, e il grado n; sia $|C'|$ il sistema aggiunto, di cui indichiamo con π' il genere. Per l'arbitrio di cui si dispone nella scelta di $|C|$, si potrà sempre supporre che $|C'|$ sia irriducibile; ed allora si concluderà (in base al n. 14) che $\pi > \pi'$. Ciò premesso, si formi il sistema $|C - C'|$. Il n. 5 (formole (1'), (2')) ci insegna a calcolarne i caratteri. Vediamo così che la dimensione del detto sistema è

$$R \geqslant \omega - 1;$$

mentre il genere (virtuale) vale

$$\Pi = 1 .$$

Dunque $|C - C'|$ è un sistema di curve ellittiche di dimensione $\geqslant \omega - 1$. E siccome sopra il piano, o sopra una superficie razionale, un sistema di curve ellittiche ha la dimensione $\leqslant 9$, segue che per la nostra superficie è $\omega \leqslant 10$; mentre per il piano è $\omega = 10$. Concludiamo:

Il genere lineare di una superficie razionale è $p^{(1)} = 10$, e coincide col valore che ha l'invariante relativo ω calcolato sul piano.

Riassumendo, possiamo dire ormai che per ogni superficie viene definito il genere lineare $p^{(1)}$. Precisamente, in relazione coi valori del genere lineare, le superficie possono classificarsi nel seguente modo:

A) *Superficie per cui il genere lineare* $p^{(1)} \geqslant 1$; la famiglia di queste si suddivide in due:

a) se sulla superficie esiste un sistema con $n > 2\pi - 2$, la superficie è razionale ($p^{(1)} = 10$) o riferibile a una rigata ellittica ($p^{(1)} = 1$);

a') se sulla superficie non esiste un sistema siffatto, il processo di aggiunzione applicato a partire da un sistema generico non si estingue mai; ed anzi se $p^{(1)} > 1$, esistono i sistemi pluricanonici da un certo punto in poi ($P_i > 0$ per i abbastanza elevato); mentre nulla di definitivo si può dire per ora, sotto tal rapporto, se $p^{(1)} = 1$.

B) *Superficie per cui il genere lineare* $p^{(1)} < 1$; *queste superficie son tutte riferibili birazionalmente a rigate di genere* $p > 1$, *dove* $p^{(1)} = -8(p-1)+1$.

Si ha di qua un criterio per decidere se una superficie sia rappresentabile sopra una rigata di genere $p > 1$; mentre un criterio analogo, basato esclusivamente sul valore di $p^{(1)}$, viene a mancare per le superficie rappresentabili sul piano o sulla rigata ellittica ($p = 0, 1$).

22. – Volendo dare una condizione che valga ad esprimere la riferibilità di una superficie ad una rigata, anche nei casi $p = 0, 1$, si presenta assai naturale l'idea di modificare la definizione del genere lineare $p^{(1)}$ data innanzi, introducendo, accanto al carattere $p^{(1)}$ già definito, un nuovo invariante che diremo *genere lineare secondario* e designeremo con $\overline{p}^{(1)}$. Si chiamerà *genere lineare secondario* $\overline{p}^{(1)}$ *di una classe di superficie, il massimo valore che raggiunge l'invariante relativo* ω, *calcolato su quelle superficie della classe per le quali è soddisfatta la condizione* $n \leqslant 2\pi - 2$ *tra l'ordine e il genere di una sezione piana.*

Dunque per definizione è sempre $\overline{p}^{(1)} \leqslant p^{(1)}$. Anzi il genere lineare secondario non differisce dal principale $p^{(1)}$ per quelle superficie che hanno un numero finito di curve eccezionali (e quindi non sono trasformabili in rigate), perchè queste superficie posseggono solo sistemi lineari per cui $n \leqslant 2\pi - 2$. Ed è pure $\overline{p}^{(1)} = p^{(1)}$ per le rigate di genere $p > 1$, po-

tendosi supporre che le sezioni piane della rigata su cui si calcola l'$\omega = p^{(1)}$, siano curve speciali ($n \leqslant 2\pi - 2$), coll'avvertenza che la rigata si ridurrebbe a un piano doppio quando fosse iperellittica. Invece per il piano e la rigata ellittica il carattere $p^{(1)}$ ($= 10$, e 1) differisce necessariamente dal $\overline{p^{(1)}}$ che non può superare il valore zero. Che sia $\overline{p^{(1)}} \leqslant 0$ segue da ciò, che in una superficie con infinite curve eccezionali avente il carattere ($\overline{p^{(1)}} =$) $\omega \geqslant 1$, il sistema delle sezioni piane soddisfa coi suoi caratteri alla disuguaglianza $n > 2\pi - 2$ (n. 14), e non alla $n \leqslant 2\pi - 2$ che serve di base al calcolo del $\overline{p^{(1)}}$. Ora volendo dimostrare che tanto per il piano, quanto per la rigata ellittica è proprio $\overline{p^{(1)}} = 0$, basta far vedere che sull'una e sull'altra superficie si possono costruire sistemi lineari di curve per i quali $n \leqslant 2\pi - 2$, ed $\omega = n + \pi' - 3(\pi - 1) = 0$.

Per il piano si consideri infatti il sistema ∞^2 delle sestiche con 8 punti base doppi e due punti base semplici coniugati sulle sestiche (sistema del quale, volendo, si potrebbe anche prendere un multiplo); qui si ha $n = 2$, $\pi = 2$, $\pi' = 1$, e quindi $n = 2\pi - 2$, $\omega = 0$.

Per ottenere un esempio relativo alle rigate ellittiche, si parta anzitutto da una rigata priva di singolarità, come è la rigata del quinto ordine dello spazio a quattro dimensioni; si seghi questa mediante le varietà del sesto ordine che passano per 14 generatrici. Si otterrà un sistema lineare di curve, che (come facilmente si verifica) ha la dimensione 6, il grado 12 e il genere 6; il sistema, essendo privo di punti base, ha il carattere $\omega = 1$ (n. 21).

Se ora si costringono le curve del sistema a passare doppiamente per un punto della rigata, si otterrà un nuovo sistema ∞^3 rappresentativo di una superficie di ordine $n = 8$, a sezioni del genere $\pi = 5$, dello spazio ordinario, per la quale è $n = 2\pi - 2$, $\omega = 0$.

In breve possiamo dire che per ogni superficie si ha

$$\overline{p^{(1)}} = p^{(1)},$$

tranne che per il piano e per le rigate ellittiche che hanno

$$\overline{p^{(1)}} = 0 \quad \text{e rispettivamente} \quad p^{(1)} = 10, \text{ e } 1.$$

Concludiamo:

La condizione perchè una superficie possa porsi in corrispondenza birazionale con una rigata (razionale o no) viene espressa dall'esser il genere lineare secondario $\overline{p^{(1)}} \leqslant 0$.

Nelle applicazioni concrete questo criterio non ha però un vero valore pratico, giacchè il calcolo del $\overline{p^{(1)}}$ esige in sostanza l'effettuazione di quelle stesse operazioni che occorrono per riconoscere direttamente se la superficie sia riferibile ad una rigata.

23. – Il criterio suddetto permette tuttavia di ritrovare le condizioni già note di razionalità di una superficie. Si abbia una superficie di genere aritmetico e geometrico nullo, $p_a = p_g = 0$, e di genere lineare secondario $\overline{p^{(1)}}$. Applicando a questo caso il ragionamento del n. 20, si trova un limite inferiore al bigenere della superficie, limite dato dalla formola

$$P_2 \geqslant \overline{p^{(1)}} .$$

Se ora si suppone che la superficie abbia anche il bigenere nullo, $P_2 = 0$ (ipotesi che porta con sè l'altra $p_g = 0$), ne seguirà $\overline{p^{(1)}} \leqslant 0$; la superficie sarà dunque riferibile ad una rigata, che d'altra parte dovrà esser razionale perchè si ha $p_a = 0$ (donde si trae $\overline{p^{(1)}} = 0$). E siccome inversamente una superficie razionale ha certo $p_a = P_2 = 0$, si conclude [37]:

Le condizioni di razionalità di una superficie sono espresse dall'annullarsi del genere aritmetico e del bigenere ($p_a = P_2 = 0$).

24. – Ora si affaccia spontanea la domanda: Quando il genere aritmetico p_a di una superficie è inferiore a 0, si riuscirà ad esprimere le condizioni perchè la superficie sia riferibile ad una rigata (di genere $-p_a$), annullando un certo numero di plurigeneri? Per dare una risposta occorre esaminare se le superficie non riferibili a rigate, aventi il genere lineare (principale = secondario) $p^{(1)} > 0$, debbano possedere sempre delle curve pluricanoniche di un certo indice i, sia pur elevato. Ora dalla formola

$$P_i \geqslant p_a + \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)} - 1) + 1 ,$$

che sussiste quando $p^{(1)} > 1$, abbiamo già concluso che, in questa ipotesi, esistono curve i-canoniche per i assai alto. Ma se $p^{(1)} = 1$, l'esistenza di curve pluricanoniche di indice qualsiasi resta dubbia per ora.

Non sappiamo dunque rispondere oggi all'importante questione sopra enunciata. Soltanto alcuni esempi di superficie contenenti un fascio ellittico di curve ellittiche (superficie che ci proponiamo di studiare) mostrano che è impossibile di esprimere le condizioni perchè una superficie di genere aritmetico $-p$ ($p > 0$) sia riferibile ad una rigata, coll'annullare un certo numero di plurigeneri dipendente dal valore di p.

Firenze, autunno 1900.

---

[37] CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero*, « Memorie della Società italiana delle Scienze (dei XL) », (serie III) to. X (1896).

INDICE

Introduzione . . . . . pag. 85

I. *Prime proprietà dei sistemi lineari di curve sopra una superficie* . » 86

1. Definizioni; caratteri dei sistemi lineari; operazioni elementari sopra di essi . . . . . » 86
2. Sistemi aggiunti e teorema fondamentale che li riguarda . . » 91

II. *Caratteri invarianti delle superficie* . . . . . » 92

3. Il genere geometrico e i plurigeneri. . . . . » 92
4. Il genere numerico e il teorema di RIEMANN-ROCH per le superficie. . . . . » 94
5. L'invariante relativo ω, e il genere lineare . . . . . » 98
6. L'invariante I di ZEUTHEN e SEGRE . . . . . » 101
7. Alcune diseguaglianze tra i caratteri di un sistema lineare di curve . . . . . » 108

III. *Sulle curve eccezionali* . . . . . » 109

8. Curve eccezionali di prima specie. . . . . » 109
9. Curve eccezionali di seconda specie . . . . . » 112
10. In qual modo le curve eccezionali si comportino nell'aggiunzione . . . . . » 114

IV. *Superficie sopra le quali il procedimento di aggiunzione si estingue; loro riferibilità a rigate* . . . . . » 119

11. Riepilogo dei principali resultati noti intorno alla trasformabilità di una superficie in una rigata. . . . . » 119
12. Preparazione della superficie . . . . . » 120
13. Superficie aventi il carattere $\omega \leqslant 1$ . . . . . » 123
14. Superficie aventi il carattere $\omega > 1$ . . . . . » 126
15. Conclusione. . . . . » 130

V. *La trasformabilità di una superficie in una rigata desunta dall'esistenza di certi sistemi di curve sopra di essa*. . . . . » 130

16. Superficie contenenti un sistema lineare di curve di genere π e grado $n > 2\pi - 2$; (in particolare superficie a sezioni di genere 3). . . . . » 130
17. Superficie possedenti una serie continua di curve razionali; involuzioni sopra rigate . . . . . » 131

18. Superficie con infinite curve eccezionali . . . . . pag. 133
19. Superficie che ammettono una serie continua di trasformazioni birazionali in se stesse non formante un gruppo d'ordine finito » 133

VI. *Il genere lineare $p^{(1)}$ di una superficie, e la sua importanza nel decidere se la superficie sia trasformabile in una rigata* . . . . . » 135

20. Il genere lineare $p^{(1)}$ per le superficie con un numero finito di curve eccezionali . . . . . » 135
21. Definizione generale del genere lineare; condizione di trasformabilità di una superficie in una rigata. . . . . » 138
22. Il genere lineare secondario . . . . . » 140
23. Condizioni di razionalità di una superficie. . . . . » 142
24. Questioni insolute. . . . . » 142

XXXIV.

SULLA SPIEGAZIONE PSICOLOGICA DEI POSTULATI DELLA GEOMETRIA (*)

« Rivista Filosofica », a. 3°, vol. IV (1901),

pp. 171-195.

In attesa di raccogliere, in un lavoro di più lunga mole, le ricerche d'ordine matematico, psicologico e filosofico, che da alcuni anni andiamo istituendo, intorno ai principii della Geometria, esponiamo qui brevemente le conclusioni a cui ci ha condotti lo studio dei postulati geometrici, veduti nell'aspetto genetico della psiche (1).

Queste conclusioni si possono fondamentalmente riassumere nel modo seguente:

Di fronte alla dottrina *kantiana* dello spazio *a priori*, come intuizione puramente soggettiva, HERBART ha affermato la realtà fisica dello spazio, inteso come *ordine spaziale*; GAUSS, LOBATSCHEWSKY e RIEMANN hanno posto in luce il valore contingente ed approssimato della Geometria, considerata come la scienza di questo ordine fisico. E la psicologia empirica, con BAIN, TAINE, DELBOEUF, ha tentato di risalire, per mezzo delle sensazioni e dell'associazione psicologica, dallo spazio alla rappresentazione di esso; mentre LOTZE, colla teoria dei segni locali, implicante differenze specifiche fra i vari punti della pelle e della retina, aggiungeva alcuni elementi strutturali di disposizione fisio-anatomica; discostandosi per altro dall'antico nativismo fisiologico del MÜLLER e

---

(*) [Si tratta del primo scritto nel quale l'Autore mostra la tendenza ad esaminare criticamente i problemi matematici dal punto di vista della filosofia della scienza. Questo è il motivo per cui la nota viene inserita in una raccolta limitata a lavori di carattere geometrico. D'altra parte fra essi rientra, in qualche modo, per il fatto che alcuni rapporti di carattere logico vi vengono tradotti nella formulazione di princìpi geometrici.]

(1) Questo lavoro già compiuto ai primi del gennaio u. s., indirettamente risponde ad alcune osservazioni, rivolte dal prof. FAGGI ad un mio scritto d'indole filosofico-didattica, pubblicate nel precedente numero di questa « Rivista ».

Ad altre osservazioni contenuta nell'articolo del FAGGI, non potrei rispondere qui senza uscire dai limiti imposti alla presente ricerca.

F. ENRIQUES

del WEBER, in quanto le differenze suddette vengono concepite come differenze di relazione coi punti vicini, e viene ammessa la necessità dell'esperienza per l'acquisto della rappresentazione locale.

I più precisi esperimenti della fisio-psicologia di HELMHOLTZ e WUNDT, conducono a dare una risposta meglio determinata al problema di desumere dalle sensazioni la rappresentazione dello spazio, restando fondamentalmente nell'ordine d'idee sopra espresso.

Tuttavia la critica neo-kantiana mal si adagia in tale spiegazione genetica, che non rende conto in modo adeguato del sentimento di necessità insito alla intuizione matematica dello spazio. Molti fra i recenti lavori sull'argomento, che troppo lungo sarebbe riassumere e discutere, palesano la tendenza a dare maggior peso agli elementi dipendenti dalla struttura nervosa, secondo un ordine d'idee che si riattacca alle vedute del WUNDT; talchè si giunge talora fino ad ammettere una rappresentazione dello spazio a priori ed indipendente dalla realtà fisica dei rapporti spaziali.

Veramente occorre qui una distinzione critica fra lo spazio fisico (supposto conforme alla tesi realistica nella teoria della conoscenza) di cui la Geometria può esser nota soltanto in via approssimata; la rappresentazione sensibile, alquanto approssimativa anch'essa, che ci formiamo dello spazio, o meglio le rappresentazioni spaziali; il concetto o i concetti che cadono sotto l'intuizione geometrica del matematico.

E di questi concetti, e dei postulati che ad essi si riferiscono, deve essere riconosciuto il carattere di fissità e di esattezza; onde all'intuizione suddetta si collega un senso d'intima necessità, che non può essere scosso dall'avere criticamente ammesso la possibilità di ipotesi diverse intorno alla costituzione fisica dello spazio.

Ma se tale riconoscimento implica una difficoltà da risolvere, sembrerebbe affatto arbitrario porre i nominati concetti intuitivi come preparati avanti ed indipendentemente dalle rappresentazioni sensibili, senza tener conto della rispondenza, sia pure approssimativa, ch'essi hanno nella realtà geometrica esteriore.

Data la distinzione, scaturisce un problema, che per noi si pone nei seguenti termini:

Desumere i concetti spaziali, che cadono sotto l'intuizione esatta del matematico, dalle rappresentazioni sensibili di cui la psicologia fisiologica mostra la genesi. Spiegare i postulati della Geometria che così viene subiettivamente costruita, riattaccandone la necessità alla struttura logica del pensiero.

La spiegazione consiste precisamente in questo, che i suddetti postulati appaiono come condizioni logicamente necessarie, per la possibilità di certe associazioni, da cui hanno origine i concetti geometrici.

1. – Si può dire ormai prevalente quel modo di vedere che attribuisce alla Geometria il carattere di scienza empirica, e riconosce quindi nei postulati di essa l'espressione di una realtà fisica desunta dall'esperienza.

Due ordini di prova concorrono in appoggio di questo modo di vedere.

Da un lato la costruzione di certi sistemi logici, denominati *Geometrie astratte* (quali la *Geometria non euclidea*, la *Geometria ad n dimensioni*, ecc.), ha posto fuori di dubbio che i postulati geometrici non hanno alcuna *necessità logica*, cioè che ad essi non spetta il carattere di *assiomi*.

Da un altro lato le ricerche fisio-psicologiche sull'*acquisto delle rappresentazioni spaziali*, hanno mostrato la derivabilità di esse dalle sensazioni, ed hanno condotto HELMHOLTZ e CLIFFORD ad alcune riflessioni veramente suggestive, sopra le illusioni cui potrebbe andar soggetto un essere ipotetico il quale si movesse e sentisse in un diverso ambiente spaziale.

Tuttavia il modo di vedere che viene suggerito dalle menzionate ricerche, non spiega il sentimento di *necessità* (psicologica se non logica) accompagnante i postulati della Geometria.

Donde trae origine questa necessità, se si ammette che i postulati vengano desunti dall'esperienza?

Si tratta, è vero, di esperienze elementarissime, tante volte ripetute; note già nell'atto del pensare, sicchè non occorre di eseguirle in fatto, basta rievocarle alla mente, cioè sostituirle con *esperienze ideali*. Ma tutto ciò non soddisfa ancora, poichè altre esperienze invero, ad esempio quella della caduta dei gravi, sono altrettanto abituali, eppure non perdono mai il loro carattere contingente, non involvono la difficoltà psicologica di *concepire* come reale un'ipotesi contraria.

A spiegare dunque il carattere soggettivo proprio dei postulati geometrici, il modo di vedere puramente empirico non è sufficiente. La ricerca fisio-psicologica tendente a mostrare l'acquisto delle rappresentazioni spaziali per via delle sensazioni, deve essere completata da una nuova ricerca, più propriamente psicologica, la quale mostri come dalle rappresentazioni menzionate si formino i concetti a cui i postulati si riferiscono; e scopra le condizioni necessarie, dipendenti dalla struttura psichica, che alla suddetta formazione presiedono.

Si tratta insomma di derivare il concetto matematico dello spazio dalle rappresentazioni spaziali che le sensazioni hanno tratto dal mondo esterno.

2. – Anzitutto intorno all'acquisto di tali rappresentazioni, dovremo pur richiamare brevemente alcune conclusioni fondamentali.

Si ammette generalmente che tre gruppi di sensazioni: tattili, muscolari, visive, concorrano a formare, associandosi, la rappresentazione

dello spazio; il che non esclude tuttavia la possibilità che altri elementi si colleghino associativamente ai nominati, e così p. es. che le rappresentazioni spaziali si connettano anche all'udito, come abitualmente avverrebbe pei ciechi nati (2).

Della prevalenza tra rappresentazioni muscolari (volontarie) da un lato, e percettive (tattili o visive) dall'altro, non sembra a noi il caso di discutere, poichè non sappiamo concepire la « sensazione » stessa, se non come un fenomeno ad un tempo « ricettivo » ed « espressivo ».

Così ci accostiamo al modo di vedere di BAIN, TAINE, DELBOEUF, sciogliendo il problema della localizzazione spaziale, col ritenere un *punto visivo* o *tattile* come determinato dall'associare le due rappresentazioni percettiva ed espressiva, che appartengono ai momenti susseguentisi del fenomeno della vista o del tatto.

Accettiamo poi (per la cute e per la retina) la teoria dei *segni locali* di LOTZE, come propria a spiegare la possibilità di distinguere due o più punti, l'uno dall'altro; ammettendo pure (con HENRI) (3) una certa disposizione anatomo-fisiologica per cui un eccitamento periferico provoca dei movimenti riflessi conducenti l'organo tattile in prossimità del luogo eccitato (4), la quale ipotesi (se non cadiamo in inganno) si concilierebbe colla teoria dell'*onda riflessa* enunciata dal SERGI. Così vien dato un fondamento alla teoria associativa, la quale riceve nuove conferme dalle esperienze concernenti l'errore che si accompagna ad una determinazione puntuale (5).

Questa teoria associativa intendiamo del resto nel suo più largo significato, facendo scaturire l'immagine del *punto fisico*, da due immagini associate di un punto visivo e di un punto tattile.

Occorre quindi determinare quale parte spetti alle sensazioni della vista o del tatto, nell'acquisto delle varie rappresentazioni spaziali. Per il che si tratta d'interpretare i resultati delle esperienze che, a tale scopo, furono istituite, segnatamente da HELMHOLTZ e WUNDT (6).

Un siffatto lavoro d'interpretazione esige, a nostro avviso, una precedente analisi dei concetti spaziali che il matematico soltanto è in grado di compiere. Anzi, il matematico stesso, si smarrirebbe, seguendo vedute particolari, in mancanza di un fisso criterio, a discernere, nei

---

(2) Cfr. HITSCHMANN, « Zeitscrift für Psycologie und Physiologie der Sinnesorgane », III, pag. 388 (1892).

(3) *Über die Raumwahrnehmungen des Tastsinnes*, Berlin, Reuter u. Richard, 1898.

(4) Non importa qui a noi di discutere, se e come, questo elemento innato possa spiegarsi epigeneticamente nell'ordine d'idee di H. SPENCER.

(5) Cfr. J. JASTROFF Mind., n. XLIV, Oct. 1886.

(6) Cfr. p. e. W. WUNDT, *Grundzüge der physiologischen Psycologie*, Leipzig, Engelmann, 1880, Bd. II, Capit. 11, 13.

menzionati concetti, gli elementi costitutivi, se questi non apparissero già separati coll'evoluzione della scienza geometrica, nei varii indirizzi della *Geometria proiettiva* e della *metrica differenziale*, cui sta come fondamento comune la generale *teoria del continuo* o *Analysis situs*.

Le *sensazioni generali tattili-muscolari*, cioè la sensibilità della cute in genere (di cui la retina è parte), bastano a spiegare l'acquisto delle rappresentazioni della *linea*, della *superficie* ecc.; cui si legano i concetti che stanno a base della teoria del continuo.

Le rappresentazioni *metriche*, in ispecie quelle della *congruenza* o *eguaglianza geometrica* (che non deve essere confusa coll'identità logica), esigono il riferimento degli oggetti ad un *organo tattile speciale* (ordinariamente la mano) scelto come sede di paragone costante, e mobile in guisa che il suo movimento soddisfi ad alcune condizioni fisiologiche d'invarianza.

La *retta* non si rivela *immediatamente* per mezzo delle sensazioni tattili-muscolari, ma, per quel che ci sembra, solo mediatamente; giacchè non troviamo in questo punto accettabile l'opinione espressa dal WUNDT [7], che la disposizione anatomica delle ossa sia tale da favorire a priori il movimento rettilineo [8].

La *retta* ed il *piano* si distinguono invece, in modo immediato, rispetto alla vista: la retta perchè le sue immagini retiniche sono rette, e perchè ponendo l'occhio in un punto di essa è veduta come un punto solo; ed il piano per proprietà analoghe.

Il procedimento della visione può essere considerato come un sistema di proiezioni fatte da due centri sopra due piani. Allora le rappresentazioni visive degli oggetti appariscono come quelle che studia la Geometria descrittiva. La quale dimostra appunto che le proprietà *grafiche* delle figure (legate ai concetti di retta e di piano) trovano qui una espressione immediata nelle proprietà delle immagini; mentre le proprietà *metriche* (*equidistanza* ...) possono bensì essere riconosciute operando sugli elementi rappresentativi in modo opportuno, ma non si traducono immediatamente in proprietà analoghe delle proiezioni, che sono la sola cosa primitivamente data.

Riassumendo dunque diremo che l'interpretazione dei dati della Psicologia fisiologica, al lume della critica matematica, conduce a concludere:

I tre gruppi di rappresentazioni che si legano ai concetti posti a base della teoria del continuo (*Analysis situs*), *della Geometria metrica* (*o metrica-*

---

[7] Op. cit., Bd. II, pag. 27.

[8] Vago e inesatto ci sembra poi di riguardare la retta come una « gleichförmige Innervations reihe » secondo G. HEYMANS, il quale vorrebbe dedurre il postulato di determinazione della retta applicando al detto concetto un simbolismo analitico, in un modo che ci sembra assolutamente arbitrario (cfr. G. HEYMANS, « Vierteljahschrift für wissenschaftliche Philosofie », Bd. XII, Heft, 3, 4, 1888, pag. 279 ...).

differenziale) *e della proiettiva, si possono riattaccare immediatamente a tre gruppi di sensazioni: rispettivamente alle sensazioni generali tattili-muscolari, a quelle del tatto speciale e della vista.*

Questo enunciato, in quanto si tratta della distinzione fra nozioni metriche e grafiche appartiene al sig. F. KLEIN ([9]), che, guidato appunto dall'analisi dei concetti matematici cui egli stesso ha così potentemente contribuito, lo dedusse dai dati della Psicologia fisiologica.

Noi abbiamo creduto di distinguere ulteriormente l'acquisto delle nozioni appartenenti alla teoria del continuo, la quale contiene dei concetti che solo recentemente formarono oggetto di una critica matematica indipendente ([10]). E così abbiamo ritrovato, nella generale sensibilità tattile-muscolare, un sostrato comune pei due ordini di rappresentazioni spaziali, l'ordine spaziale più intrinseco, se così è lecito esprimersi; riaccostandoci (secondo ci sembra) al modo di vedere di A. BAIN.

3. – I limiti imposti al presente lavoro non ci consentono di giustificare più ampiamente, discutendo le particolari esperienze che avemmo in vista, le conclusioni sopra enunciate, da cui vogliamo muovere alla ricerca psicologica già innanzi dichiarata. Ma, se non cadiamo in inganno, le stesse spiegazioni intorno alla genesi dei postulati che andremo svolgendo, costituiranno una conferma del modo di vedere sopra brevemente riassunto.

Dobbiamo soltanto mettere in luce una considerazione essenziale.

Sta a fondamento della teoria associazionista, cui abbiamo aderito, la decomposizione delle sensazioni complesse corrispondenti alle immagini della linea, della superficie ecc., in sensazioni elementari *puntuali*. Ora in due modi diversi si può ricostruire p. es. l'immagine della linea, data la rappresentazione del punto: in un modo *genetico*, quando cioè si consideri la linea come una serie di punti *successivi*; in modo *attuale*, quando la linea sensibile sia data come insieme, le rappresentazioni *simultanee* di tutti i punti di essa fondendosi in una unica rappresentazione complessa. Se le due rappresentazioni, genetica ed attuale, si uniscono in un concetto unico della linea, si deve considerare che questo avvenga per un fatto di associazione; in nessun modo le due rappresentazioni sensibili potrebbero confondersi all'infuori di qualche caso limite in cui la generazione della linea avvenga con velocità grandissima.

La linea in senso attuale è data piuttosto come ente di divisione o come limite della superficie che come serie di punti. Anzi dalla divisibilità in parti della linea scaturisce una nuova rappresentazione del punto, che

([9]) « Mathematische Annalen », Bd. 37, pag. 544.

([10]) Cfr. ENRIQUES, « Circolo matematico di Palermo », t. XII, 1898.

si associa poi coll'immagine immediata del corpuscolo o *punto fisico* a formare il *concetto matematico del punto*. Similmente abbiamo una rappresentazione attuale della superficie corrispondente alla sua proprietà di separare i punti che si trovano dall'una e dall'altra parte di essa; sebbene il riconoscimento di tale separazione implichi veramente rappresentazioni successive.

Qui trova posto la questione relativa alla percettibilità dello spazio a tre dimensioni. Si deve riguardare la rappresentazione dello spazio soltanto come genetica o anche come attuale? Relativamente al tatto, è chiaro che si può avere soltanto un'immagine genetica dello spazio, per mezzo del movimento di una superficie, la quale sia attualmente percepita per adattamento alla superficie dell'organo, p. es. la mano, messo in relazione coll'oggetto.

Lo stesso può dirsi della vista, sebbene qui non si abbia egualmente il comune consenso ([11]). La percezione visiva attuale, tanto rispetto ad un occhio solo, come rispetto ad ambedue gli occhi, non può dare nulla di più della superficie. Soltanto vi è, tra i due casi, una differenza notevole. Nella visione monoculare l'immagine di una superficie piana non si distingue da quella di una superficie curva, se non tenendo conto della variazione dell'immagine stessa per rapidi movimenti dell'occhio. Quando invece una superficie è data alla visione binoculare, resta stabilita fra le due retine una corrispondenza la quale è in relazione al rilievo della superficie stessa; vi è dunque un elemento di sensazione attuale pel quale la superficie curva si distingue dalla piana.

La distinzione riposa precisamente sul fatto che la corrispondenza fra le due immagini retiniche di una superficie piana, è una corrispondenza *proiettiva* ([12]). Ammettiamo dunque che la vista, come il tatto, conducano a rappresentazioni *diverse* in relazione alle superficie piane o curve, ma non ammettiamo, neppure rispetto alla vista, la rappresentazione attuale delle tre dimensioni; abbiamo soltanto, colla vista, una rappresentazione genetica che, per così dire, più si *avvicina* alla attuale, rispondente ad una successione di corrispondenze retiniche. A chi si figurasse una sovrapposizione di due immagini superficiali susseguentisi molto rapidamente, rispondiamo che, o la rapidità sarà inferiore alla rapidità di accomodamento degli occhi (che esige il riferimento delle due retine) e le immagini saranno percepite come *successive*, o sarà maggiore e la visione diverrà confusa.

([11]) Degli autori più recenti, citeremo fra coloro che ammettono una rappresentazione attuale dello spazio a tre dimensioni i signori CH. DUNAN, C. STUMPF, e fra coloro che la negano il signor WUNDT, l. c.

([12]) Cioè tale che ai punti di una retta corrispondono i punti di una retta.

Gli argomenti in contrario al modo di vedere espresso, addotti dal signor STUMPF [13], in ispecie quelli d'ordine matematico, si aggirano in un circolo vizioso, dappoichè dove si tratta di decidere se sia possibile una rappresentazione attuale dello spazio a tre dimensioni, l'A. la suppone implicitamente data, quando vuol desumerla dal considerare le relazioni (*esterne*) di una superficie con ciò che è fuori di essa.

A dirimere le divergenze e i dubbi inerenti alla questione, crediamo utile d'insistere su questo punto essenziale: che una superficie curva ed una superficie piana, anche considerate soltanto nelle loro proprietà interne, prescindendo dalle relazioni esterne, danno luogo a rappresentazioni proiettive diverse, in un sistema di proiezioni bicentrali.

Sono soltanto queste differenze che abbiamo in vista quando paragoniamo le rappresentazioni delle due superficie, senza tener conto delle sensazioni inerenti al passaggio dall'una all'altra.

4. – Dopo queste premesse, rivolgiamoci a studiare la formazione dei concetti matematici di *linea* e di *superficie*, in quanto essi appariscono definiti relativamente alla teoria del continuo.

Riteniamo come dati della struttura psichica: la legge d'associazione; le leggi logiche, espresse dagli assiomi della logica deduttiva; l'ordine temporale (*prima* e *poi*), indipendentemente da qualsiasi nozione della *durata* (quest'ultima apparendo un elemento acquisito). Nè vogliamo discutere qui se questi elementi psichici strutturali sieno prodotti di un'esperienza accumulata da successive generazioni e tramandata per eredità, o invece espressione delle elementari leggi bio-meccaniche ancora ignote. Non nasconderemo tuttavia la nostra preferenza per quest'ultimo modo di vedere conforme alle idee dei neo-kantiani.

La linea considerata in se stessa rimpetto alla teoria del continuo, appare come « una serie di punti disposti in un ordine continuo ed invertibile ».

Questo concetto matematico della linea si può derivare associativamente nel modo che ci proponiamo appunto di mettere in luce.

In primo luogo consideriamo più rappresentazioni genetiche della linea (serie di punti *successivi*), ed associamole all'ordine temporale; l'associazione può essere fatta in due modi diversi sicchè risulterà indifferente la disposizione della serie lineare in un ordine o nell'inverso. Si ha così l'*invertibilità* dell'ordine lineare che costituisce, secondo HERBART [14] e BAIN, la differenza fondamentale tra questo e l'ordine temporale.

---

[13] Cfr. C. STUMPF, *Über den psycologischen Ursprung der Raumvorstellung* (Leipzig, 1873), passim e specialmente a pag. 177 e segg.

[14] Cfr. I. F. HERBART, *Lehrbuch der Psychologie*, « Werke », Bd. V, Absch. 2, pag. 121, n. 176 (Leipzig-Voss, 1851).

Resta a render ragione della continuità della linea; la quale si enuncia con due postulati.

Il primo postulato dice: fra due punti di una linea vi è sempre qualche punto intermedio. Esso non può esprimere una proprietà contingente di alcuna serie di sensazioni puntuali; infatti fra due punti A, B assai vicini (l'intervallo essendo ridotto alla soglia della sensibilità) non si può intercalare un punto C, senza che nasca una sovrapposizione e fusione delle sensazioni A, B, C in una nuova.

Bisogna scorgere dunque, nel postulato anzidetto, l'espressione del fatto che il concetto della linea è capace di rappresentare *tutte* le serie puntuali empiricamente date. Perciò ad un'immagine empirica l della linea, ove siano segnati i punti vicinissimi A, B, deve potersi sostituire mentalmente un'altra immagine l' i cui punti vengano pensati in una corrispondenza biunivoca coi punti di l; e la l' può sempre essere scelta in modo che fra i punti A', B' omologhi ad A, B interceda qualche altro punto fisico sensibilmente distinguibile.

Così p. es. se si pensano due rette l, l' riferite mediante una proiezione che accorci i segmenti di l', l'idea che tra due punti A, B vicinissimi, sopra l, interceda qualche punto intermedio, viene, suggerita dalla visione della l' sopra cui le proiezioni A' e B', dei punti A, B, non sono più così vicine; e ciò in forza della corrispondenza stabilita fra le due linee, per cui le rappresentazioni di esse si associano in un unico concetto della retta.

Riconosciamo dunque che « il postulato sopra enunciato esprime una condizione necessaria, per la possibilità di associare tutte le rappresentazioni genetiche della linea in un concetto ».

Una tale associazione non involve per altro la necessità del secondo postulato, che più propriamente esprime l'idea matematica della continuità (interna) della linea.

La serie dei punti razionali d'una retta potrebbe rappresentare egualmente bene, come la retta completa, tutte le serie puntuali empiricamente date.

La continuità della linea come la si intende oggi (forse i Greci non ne ebbero un'adeguata nozione) sembra esigere, per essere riconosciuta, un procedimento trascendente di limite addirittura inesplicabile. Almeno questo procedimento trascendente non si saprebbe evitare quando si volesse desumere la continuità dalle sole rappresentazioni genetiche della linea.

Noi crediamo che si debba qui invocare l'associazione delle suddette rappresentazioni genetiche della linea colle rappresentazioni attuali.

Questa associazione implica, come già abbiamo avvertito sopra, che il concetto stesso del punto colleghi due rappresentazioni diverse, quella

che nasce dal corpuscolo o punto fisico, e quella che si riattacca alla divisibilità in parti della linea. Ebbene il postulato della continuità, sotto la forma di DEDEKIND, esprime e precisa appunto questo: Se una linea è divisa in due parti, per modo che tutti i punti dell'una parte precedano a tutti i punti dell'altra, in un ordine della linea stessa, esiste un punto di divisione.

Vi è qui, come si vede, una condizione per la possibilità di associare in un solo concetto le due menzionate rappresentazioni del punto.

5. – Passando al concetto della superficie, lo possiamo derivare anzitutto dall'unire insieme tutte le rappresentazioni genetiche che di ogni superficie si ottengono, ove si pensi alla generazione di essa col movimento di una sua linea variabile.

L'idea di porre siffatta generazione a base di una teoria del continuo a due dimensioni, appartiene al RIEMANN [15] che informò le sue vedute alla filosofia dello HERBART.

Ma più tardi fu rilevato che (se si vuole prescindere da ogni determinazione metrica delle linee generatrici e direttrici) una sola generazione, della varietà a due dimensioni, conducente a due fasci di linee unisecantisi sopra di essa, non basta ad esprimere tutto ciò che si riattacca nella nostra mente all'idea del continuo a due dimensioni, giacchè non permette di stabilire una corrispondenza biunivoca continua fra due tali varietà o (ciò che è lo stesso) di riferirle ad una varietà numerica. E noi abbiamo avuto occasione di stabilire che all'uopo occorre postulare due generazioni diverse col movimento della medesima superficie, cioè l'esistenza di tre fasci di linee a due a due unisecantisi [16].

Rileviamo ora come questo postulato enuncia in sostanza la condizione perchè il concetto della superficie implichi almeno due rappresentazioni genetiche in esso associate.

Se poi si tien conto che alle rappresentazioni genetiche si uniscono insieme, nel concetto della superficie, le rappresentazioni attuali, riconosciamo l'esistenza di altre condizioni che debbono tradursi in nuovi postulati della teoria del continuo.

Anzitutto l'associazione suddetta implica il legame fra le due immagini della linea come punteggiata e come ente di divisione della superficie. E di qui scaturiscono i postulati inerenti alle relazioni *esterne*, in particolare alla *continuità esterna* della linea, sopra la superficie. Tuttavia le proposizioni che esplicano in forma precisa siffatte relazioni non sono

---

[15] Si confronti il suo immortale *Habilitations schrift*, Göttingen, 1854. (« Göttingen Abhandlungen », XIII, 1868).

[16] Cfr. ENRIQUES, l. c.

ancora messe in luce completamente dalla critica matematica, giacchè a siffatta ricerca si collega una difficoltà intrinseca: ogni generazione della superficie, cioè ogni serie di linee data su di essa, porta una relazione nuova a cui il concetto di linea deve soddisfare. Pertanto i limiti fra certe serie puntuali di una superficie e le *linee* di essa nel senso della parola che corrisponde alla intuizione, non sono stati ancora esattamente tracciati.

Questa indeterminatezza sussistente tuttavia in ordine al concetto generale della linea (considerata nel suo aspetto esterno), non toglie per altro che si possano definire in modo preciso innumerevoli classi di linee particolari. — E per queste linee, tenendo conto dell'associazione fra l'immagine genetica e quella attuale, come ente di divisione della superficie, si ottengono i postulati esprimenti le relazioni esterne. Così ad es. se ci riferiamo alle linee rette considerate sopra una superficie piana, avremo come condizione per l'associazione suddetta il postulato di PASCH, il quale enuncia appunto in forma logica che « la retta divide il piano in due parti ». E, tenuto conto della proprietà della retta di essere determinata da due punti (la cui spiegazione si desumerà dalla genesi del concetto di retta) riconosceremo quindi che la continuità interna, espressa dal postulato di DEDEKIND, porta anche di conseguenza la sua continuità esterna (rispetto ad una qualsiasi generazione rettilinea del piano).

Ma ritornando ad esaminare le condizioni per l'associabilità delle due immagini, attuale e genetica, della superficie; e guardando ora, anzichè alle relazioni interne della superficie, alle sue relazioni esterne, vi scorgiamo la condizione espressa dal postulato delle tre dimensioni dello spazio. Ed infatti il significato delle tre dimensioni consiste nella proprietà della superficie di separare i punti che cadono dall'una e dall'altra parte di essa. Veramente, abbiamo già avvertito che il riconoscimento di una tale separazione implica il confronto di rappresentazioni successive. La rappresentazione attuale di una superficie è piuttosto l'immagine di un limite; così p. es. la superficie (opaca) ch'io guardo, o la superficie (resistente) ch'io tocco, corrispondono alla sensazione di limitare un certo movimento dell'organo; insomma la superficie rappresentata si presenta con una sola faccia, e l'idea della superficie che ha due facce e separa *due* regioni di spazio implica già l'associazione di due rappresentazioni attuali. Comunque, il postulato della divisione dello spazio, per mezzo di una superficie, risulta sempre dalle condizioni associative, perchè possano unirsi insieme, in un concetto, le varie immagini attuali e genetiche della superficie. Analogamente a quel che si è detto innanzi, il postulato assume forma determinata in relazione a classi particolari di superficie e di linee, e così p. es. si ha il postulato della divisione dello spazio in due parti, per mezzo del piano, postulato cui si lega ordinariamente l'idea delle tre dimensioni dello spazio.

Ora si può vedere che una rappresentazione attuale dello spazio, di cui abbiamo negato la possibilità, non è affatto necessaria per desumere i postulati caratterizzanti il continuo a tre dimensioni. Data infatti una generazione del continuo stesso, col movimento di una superficie variabile, la possibilità di varie generazioni lineari della superficie implica di conseguenza che si abbiano diverse generazioni del continuo spaziale, e quindi che esso possa riguardarsi come una varietà numerica a tre dimensioni ([17]).

6. – Abbiamo mostrato come *i postulati che stanno a base della teoria del continuo costituiscono condizioni per la possibilità di unire associativamente, nei concetti della linea e della superficie, le varie rappresentazioni genetiche ed attuali che vi si collegano.* La nostra critica ha in pari tempo posto in luce una certa indeterminatezza di quei concetti generali, dipendente dalla loro relatività, per cui si manifesta necessaria una costruzione progressiva, la quale ponga innanzi alcune linee e superficie particolari, e muova da queste ad estendere via via i concetti già definiti.

Questa necessità lascia scorgere, in un certo senso, l'ufficio di quella evoluzione, per cui le sensazioni particolari della vista e del tatto speciale si differenziano dalla generale sensibilità tattile-muscolare, in ordine all'acquisto delle rappresentazioni di spazio.

Il procedimento della visione mette innanzi, fra tutte le linee, la retta; ed unisce nel concetto di essa due rappresentazioni ben distinte: distinte fra loro e dalle altre rappresentazioni lineari.

La retta si palesa, infatti, come linea non passante pel centro della visione, le cui proiezioni sono rette, e come linea passante pel centro suddetto, che, veduta da un occhio, dà come immagine un punto solo.

Ora l'associazione di queste due rappresentazioni, suppone la proprietà caratteristica che « la retta sia determinata da due punti ». Infatti questo postulato, data l'esistenza di una linea che sia veduta da ogni punto di essa come un punto, si traduce nel principio logico d'identità; e da ciò precisamente proviene il sentimento di necessità, accompagnante il postulato stesso.

Quanto si è affermato può giustificarsi come segue:

Guardando dal punto A il punto B, definiamo il raggio visuale AB, come l'insieme dei punti la cui immagine cade nel punto B' immagine di B; questo insieme è veduto da un punto esterno come una *retta*, e perciò dal punto B come un punto; dunque, intanto, la retta o raggio visuale AB non si distingue dalla BA:

$$AB \equiv BA .$$

([17]) Cfr. ENRIQUES, l. c.

Ora se C è un punto della retta AB, guardato da A deve dare come immagine B', e quindi, per la definizione del raggio visuale, sarà

$$AB \equiv AC .$$

Se poi D è un altro punto della retta, combinando le due proposizioni precedenti si trova ($AB \equiv AC \equiv CA \equiv CD$):

$$AB \equiv CD .$$

Questa proposizione esprime precisamente che una retta è in egual modo determinata da due qualunque A, B o C, D, dei suoi punti.

Con un ragionamento del tutto analogo, si riconosce che il *postulato del piano* « il piano contiene la retta che ne congiunge due punti arbitrari », esprime la condizione necessaria perchè possano associarsi, in un concetto, le due rappresentazioni della superficie piana; quella del piano non passante pel centro di vista (cui si lega nella visione binoculare una corrispondenza *proiettiva* fra le due retine); e quella del piano passante pel centro di vista, che è veduto (con un occhio solo) come una retta.

Così *i postulati della Geometria proiettiva vengono riconosciuti come condizioni necessarie, per l'associazione di certe rappresentazioni visive, da cui hanno origine i concetti della retta e del piano.*

7. – Rivolgiamoci ora ai postulati propri della Geometria metrica, enuncianti le proprietà dell'*eguaglianza* o *congruenza* geometrica, e del *movimento*. Essi possono distinguersi in due classi:

1) Postulati che esprimono la possibilità e il grado di indipendenza del movimento dei corpi solidi o dell'organo tattile, cui spetta anche subiettivamente carattere contingente: tenuto fisso un punto di una figura, un altro punto può descrivere una superficie; tenuti fissi due punti, un altro punto generico può descrivere una linea; tenuti fissi tre punti generici, il movimento della figura non è più possibile.

2) Postulati esprimenti le *proprietà riflessiva, simmetrica* e *transitiva della congruenza* (cioè $A = A$; se $A = B$, $B = A$; se $A = B$, $B = C$, $A = C$).

Questi ultimi postulati assimilano, nella forma, la congruenza geometrica all'eguaglianza o identità logica, tantochè la distinzione stessa rimase oscura fino a questi ultimi tempi, ed i postulati anzidetti furono ritenuti come assiomi logici.

Per quanto ci è noto, spetterebbe ad HELMHOLTZ il merito di avere scorto che questi postulati della congruenza esprimono alcune proprietà del movimento dei corpi solidi (in relazione all'organo tattile); e tali

proprietà furono più recentemente raccolte da KLEIN, LIE, POINCARÉ, nell'enunciato: i movimenti considerati come trasformazioni puntuali dello spazio formano un *gruppo* (serie di trasformazioni *componibili* ed *invertibili*).

Ora dato che i postulati della congruenza, obiettivamente riguardati, hanno, al pari degli altri postulati della Geometria, un valore empirico, come si spiega il sentimento eminente di necessità subiettiva che li accompagna?

Sieno AB, CD due coppie di punti fisici, *equidistanti*, e poniamo p. es. che la distanza dei suddetti punti di una coppia sia di *tre dita*.

Ponendo le tre dita fra A, B e fra C, D, si avranno due sensazioni successive che differiscono per la *posizione* in cui è stato collocato l'organo tattile, ma che hanno qualche cosa di comune, inerente all'invarianza dell'organo stesso nel passaggio dall'una all'altra posizione. Le rappresentazioni delle due coppie AB, CD non sono identiche, ma possono associarsi per *quello che hanno di comune* in una unica rappresentazione concettuale di *distanza*. Ora quando enunciamo la equidistanza

$$AB = CD$$

intendiamo esprimere ad un tempo una identità e una non identità; la possibilità di subordinare le due rappresentazioni ad una sola in ordine a *certe relazioni*, e la distinzione di esse rispetto ad *altre relazioni*.

Che cosa implica dunque la genesi del concetto di equidistanza, che sta a fondamento della congruenza geometrica?

Un'astrazione ed un'associazione, la quale riunisce sotto un certo aspetto due rappresentazioni; ed *i postulati della congruenza riferiti alla rappresentazione (concettuale) unificata, si traducono immediatamente nel principio d'identità*.

Ecco perchè tanti sforzi della critica occorsero a scorgere il vero valore di « eguaglianza », cui solo recentemente si sostituisce da alcuni la denominazione di « congruenza ».

8. – Abbiamo tenuto conto fino ad ora delle condizioni associative che sottostanno alla genesi dei concetti geometrici, in ordine ad un solo gruppo di sensazioni, tattili o visive. Questi hanno il comune supporto nei concetti derivati dalla sensibilità generale, e perciò danno origine a due Geometrie, una Geometria tattile ed una visiva, che si riferiscono al medesimo continuo a tre dimensioni, cioè al medesimo spazio.

Gli sviluppi matematici, particolarmente quelli della seconda metà del secolo appena compiuto, indicano fino a che punto possano svolgersi le due Geometrie sopra menzionate; onde si può dire che col tatto (gene-

rale e speciale) costruiamo una Geometria *metrica*, e colla vista una *proiettiva*, riferentisi alla medesima varietà di punti (lo spazio).

Non pertanto queste due Geometrie si associano, nella nostra mente, in un solo ordine di rapporti spaziali, e ciascuno dei sensi ci dà per associazione la percezione mediata dei suddetti rapporti.

Una tale associazione implica alla sua volta dei nuovi postulati. Giacchè invero si potrebbero costruire, in una varietà a tre dimensioni, due Geometrie astratte, convenzionali, ponendo a base dell'una un sistema lineare ∞^3 di superficie denominate « piani », a base dell'altra un gruppo ∞^6 di trasformazioni denominate « movimenti » dotato di certe proprietà; e queste Geometrie formalmente identiche alla proiettiva e alla metrica ordinaria, non avrebbero tra loro, a priori, alcuna relazione.

Volendo ricercare le condizioni associative cui abbiamo accennato, esaminiamo p. es. il modo come la « retta » può essere rappresentata, nella rappresentazione tattile dello spazio.

La *retta tattile* si può riguardare indifferentemente come « linea più breve tra due punti » (filo teso), o come « linea che resta immobile quando si fa muovere attorno a due suoi punti tenuti fissi », ed ambedue queste rappresentazioni della retta ci sembrano mediate.

L'associazione della retta visiva (o raggio visuale) e della retta tattile in un unico concetto della retta, determina la relazione fondamentale fra le due Geometrie, proiettiva e metrica, di cui abbiamo spiegato l'acquisto; giacchè essa porta ad unificare le due Geometrie in una metrico-proiettiva, nel senso ben noto ai matematici.

Ma intorno all'associazione suddetta giova osservare che essa unirebbe due rappresentazioni d'ordine diverso, l'una immediata e l'altra mediata, sicchè il postulato che ne esprime la condizione dovrebbe avere, per così dire, un carattere di minor evidenza, cioè esigere un maggiore sforzo ad essere riconosciuto.

Per valutare se questo sia, alla stregua dei fatti, paragoniamo i due enunciati « il raggio visuale è la linea più breve tra due punti » e « il raggio visuale rimane immobile quando se ne tengono fissi due punti ». Il primo appare meno evidente del secondo. Eppure fra le due rappresentazioni della retta tattile, che riguardiamo entrambe come mediate, quella che corrisponde al « filo teso » è però certo più immediata, di quella che si lega alla proprietà della retta riguardata come asse di una rotazione.

Ma, esclamerà qualcuno, che la retta resti immobile quando ne sono tenuti fissi due punti, è una conseguenza logica del postulato visivo di determinazione della retta!

Questa esclamazione *erronea*, che pur si affaccia subito alla mente, ci addita la genesi del postulato che abbiamo in vista, mostrandoci sotto quale aspetto il postulato si palesi subiettivamente necessario. Il sottin-

teso nell'affermazione precedente è che « una linea eguale ad una retta sia una retta », ed in ciò appunto sta il valore del postulato che permette l'unificazione metrico-proiettiva; nell'aspetto obiettivo esso enuncia il fatto fisico che « la luce si propaga secondo la linea più breve »; nel subiettivo esprime la condizione necessaria perchè si possa trasportare associativamente la relazione della congruenza geometrica dandole significato rispetto alla vista.

L'associazione tattile-visiva viene qui a corroborare la illusione per cui la congruenza viene scambiata colla identità logica, giacchè per essa la congruenza o eguaglianza tattile, si manifesta come una particolare *proiettività*, che sarebbe, per così dire, l'*eguaglianza visiva*.

La congruenza geometrica viene in tal modo ad implicare una identità per rispetto alle relazioni spaziali *interne* appartenenti alle figure, tanto nell'ordine tattile come nel visivo. Non sarebbe giusto però di definire la congruenza come una semplice identità, di siffatte relazioni interne, giacchè senza il riferimento a qualche cosa di esterno (l'organo tattile o l'unità di misura) non si vedrebbe come distinguere la congruenza dalla similitudine.

9. – Una geometria metrico-proiettiva in un continuo a tre dimensioni, non costituisce ancora un sistema geometrico determinato, poichè diverse ipotesi sono ancora possibili in ordine al *parallelismo*, dipendentemente dal valore di una costante cui si è dato il nome di *curvatura* dello spazio. La denominazione impropria (come da varii autori è stato avvertito) non significa già una relazione dello spazio con qualche cosa di esterno, bensì una proprietà interna di chiarissimo significato fisico (differenza da due retti della somma degli angoli di un triangolo divisa per l'area). Secondochè la curvatura dello spazio si suppone positiva, negativa o nulla, si hanno le Geometrie non euclidee o rispettivamente la Geometria euclidea, caratterizzata dal noto *postulato delle parallele*.

L'esperienza conferma la verità del postulato delle parallele, nei limiti delle approssimazioni raggiungibili; ma, appunto pel suo carattere necessariamente approssimato e ristretto entro una determinata regione dello spazio, non può dimostrare la rigorosa validità della Geometria euclidea. L'intuizione subiettiva attribuisce invece al postulato delle parallele un valore incondizionato, se pure nei tentativi fatti per la dimostrazione di esso (tentativi che pur dovevano abortire, come sono infatti abortiti) si può scorgere una prova della minore evidenza che il postulato stesso presenta in confronto ad altri.

Si deve ricercare la ragione della accennata necessità subiettiva, nella genesi del concetto che ci formiamo delle « *rette parallele* ».

Esso deriva dall'associare due rappresentazioni immediate, ciascuna

delle quali, separatamente considerata, non implica il postulato: la rappresentazione visiva di « due rette di un piano che non s'incontrano », e la rappresentazione tattile di « linee equidistanti ». La condizione di possibilità è che « due rette di un piano non incontrantisi sieno equidistanti »; la quale proposizione enuncia appunto (o contiene) il postulato delle parallele.

Riconosciamo dunque che *l'associazione tattile-visiva la quale porta ad unificare la Geometria metrica e la proiettiva dello spazio, in un sistema metrico-proiettivo, determina anche (unendo insieme due rappresentazioni delle parallele) la natura euclidea del sistema stesso*; porta cioè a spiegare la necessità subiettiva del postulato delle parallele [18], che pure, fisicamente riguardato, è, fra tutti i principii della Geometria, il meno sicuro.

10. – Le conclusioni della nostra critica si possono riassumere dicendo: *I postulati della Geometria, a prescindere da quelli che enunciano la possibilità del moto, aventi solo carattere contingente, appaiono come condizioni necessarie per certe associazioni che sottostanno alla genesi dei concetti geometrici. Il sentimento di necessità subiettiva che li accompagna, scaturisce dalla applicazione delle leggi logiche ai suddetti concetti, così associativamente generati.*

È inutile soggiungere che una tale spiegazione toglie sempre più ogni valore alla pretesa di chi vuole estendere la necessità dei postulati all'ordine fisico dello spazio, nel quale (a render possibili le menzionate associazioni) basta che essi trovino una rispondenza approssimativa. Mentre essa concilia, in un certo senso, i due modi di vedere, critico ed empirico; quando la critica non voglia arrestarsi alla tesi kantiana, in questo punto ormai oltrepassata, e l'empirismo si sollevi dal puro fatto esterno della sensazione, al riconoscimento di una struttura logica del pensiero, che ne interpreta e ne coordina i dati.

Bologna, 10 gennaio 1901.

---

[18] La suddetta necessità subiettiva è a torto disconosciuta da alcuni matematici che sono entrati nelle vedute della Geometria non euclidea. Si impone, a questo proposito, una distinzione critica, che ci sembra giustamente scorta dal sig. HEYMANS (l. c.).

XXXV.

SULLA PROPRIETÀ CARATTERISTICA DELLE SUPERFICIE ALGEBRICHE IRREGOLARI (*)

« Rend. dell'Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », vol. IX (1905), pp. 5-13.

1. – È noto che per una superficie algebrica si hanno due caratteri invarianti (*generi superficiali*), cioè il *genere geometrico* p_g (CLEBSCH-NOETHER) ed il *genere numerico* o *aritmetico* p_a (CAYLEY, ZEUTHEN, NOETHER, ENRIQUES). Questi due caratteri, nel caso, che si considera come generale, delle *superficie regolari*, hanno egual valore, ma, se non si introduce alcuna ipotesi restrittiva, si può vedere soltanto che $p_a \leqslant p_g$; si conoscono effettivi esempi di superficie (*irregolari*) per cui $p_a < p_g$.

Esempii siffatti sono forniti dalle rigate (CAYLEY), dalle superficie con un fascio irrazionale di curve algebriche (CASTELNUOVO), e più generalmente dalle superficie che contengono un sistema continuo di curve algebriche non appartenente ad un sistema lineare di curve del medesimo ordine (ENRIQUES).

Questi esempii (che si presentano anche analogamente nello studio delle superficie sotto l'aspetto trascendente) hanno indotto i geometri a porsi la questione inversa, se ad ogni superficie irregolare appartengano sistemi continui di curve non contenuti in sistemi lineari, onde la presenza di sistemi siffatti fornisca la proprietà fondamentale caratteristica delle superficie irregolari. Ma il problema è rimasto fino ad ora insoluto.

Questo problema appunto sono riuscito a risolvere, dando alla precedente domanda una risposta affermativa. Enuncio dunque il resultato a cui sono pervenuto:

(*) [Questo scritto viene qui riprodotto per il suo valore storico e la fondamentale importanza delle proprietà che, per la prima volta, vi sono ennunciate, anche se il procedimento dimostrativo è successivamente apparso non del tutto attendibile. Per notizie sulla questione ed i suoi sviluppi si veda l'opera postuma dello stesso ENRIQUES, *Le superficie algebriche* (Bologna, Zanichelli, 1949), cap. IX, nn. 6, 7 (pp. 339-353)].

Se sopra una superficie algebrica si costruiscono, per ogni valore di n, le curve d'ordine n che vi appartengono, queste:

1) *si distribuiscono in un numero finito di sistemi lineari completi, se la superficie è regolare* ($p_a = p_g$);

2) *si distribuiscono in un numero finito di sistemi algebrici continui generalmente non lineari, e danno luogo quindi ad infiniti sistemi lineari completi, se la superficie è irregolare.*

Questa proprietà caratterizza le superficie irregolari in modo esauriente; infatti essa permette di costruirle tutte a partire da serie doppiamente infinite di gruppi di punti, non contenute in serie lineari, sopra curve algebriche.

Dal teorema enunciato discendono conseguenze importanti.

Il sig. F. SEVERI ha recentemente dimostrato che « ogni superficie alla quale appartengano degli integrali di differenziali totali di 1ª specie (di PICARD) è irregolare ». Si conclude dunque che: *la proprietà di contenere sistemi continui non lineari vale per tutte le superficie con integrali di Picard di 1ª specie* (1).

D'altra parte (grazie ad una osservazione ben nota del sig. HUMBERT che risale al 1893) la presenza di un sistema continuo completo non lineare sopra una superficie, assicura che questa possiede degli integrali di PICARD di 1ª specie.

Risulta dunque; che *l'anzidetta proprietà è caratteristica per le superficie con integrali di Picard di 1ª specie.*

In particolare se ne deduce indirettamente che « *la condizione per l'esistenza di integrali di Picard di 1ª specie appartenenti ad una superficie è* $p_a < p_g$ », riuscendo così invertito il teorema sopra accennato del sig. SEVERI (2).

Ritornando al teorema fondamentale che dà la proprietà caratteristica delle superficie irregolari, vediamo poi come esso ammetta una ulteriore determinazione nel caso delle superficie di genere $p_g = 0$ ($p_a < 0$). Infatti partendo da un sistema continuo non lineare della superficie, ed usufruendo di un procedimento del sig. CASTELNUOVO (3), si potrà costruire su di essa un *fascio irrazionale di curve.*

Tale resultato permetterà in particolare di rispondere esaurientemente

---

(1) In una nota inserita negli « Annales de Toulouse », s. 2ª, vol. III [questo volume, XXXI] ero riuscito a dimostrare la cosa soltanto nell'ipotesi che sieno dati p integrali con $2p$ periodi, e quella dimostrazione fu poi semplificata dal sig. SEVERI.

(2) A questa inversione sembra giungere il signor SEVERI stesso, invertendo, con opportuni avvedimenti, il suo procedimento diretto. Egli mi ha comunicato il concetto fondamentale della dimostrazione, al cui svolgimento pare non debbano opporsi difficoltà nei particolari.

Questa dimostrazione offrirà interesse anche perchè porrà in luce una relazione fra $p_g - p_a$ e i numeri degli integrali di 1ª e 2ª specie.

(3) Cfr. ENRIQUES, « Annales de Toulouse », loc. cit., pag. 81.

all'ultima questione accennata nella memoria di CASTELNUOVO e ENRIQUES degli « Annali di Matematica », 1901 [questo volume, XXXIII], questione relativa alle condizioni perchè una superficie possa riferirsi ad una rigata.

Al teorema fondamentale di questa Nota si può aggiungere un complemento significativo, cui si riattaccheranno altre conseguenze notevoli. Vi accenniamo nell'ultima parte del nostro scritto.

2. – La dimostrazione del nostro teorema fondamentale è fondata sul seguente concetto:

I sistemi lineari completi di curve, tracciati sopra una superficie irregolare F ($p_a < p_g$), hanno generalmente una *serie caratteristica* incompleta; pei sistemi che sopra la superficie si considerano come *regolari*, la deficienza sale al massimo valore $p_g - p_a$ (CASTELNUOVO). — Pertanto un sistema lineare regolare di curve C di genere π, secantisi a due a due in n punti, ha la dimensione

$$r = n - \pi + 1 + p_a ,$$

mentre la serie (caratteristica) segata sopra una C dalle rimanenti, appartiene ad una

$$g_n^{n-\pi+p_g}$$

completa.

Orbene, basterà dimostrare che il sistema lineare delle C è sempre contenuto in un sistema continuo più ampio di dimensione

$$r = n - \pi + 1 + p_g ;$$

perciò, costruito questo sistema continuo, faremo vedere che la serie lineare segata sopra la curva generica di esso dalle curve infinitamente vicine (*serie caratteristica* nel senso esteso di SEVERI), è completa. A questa conclusione perverremo anzi in generale, senza la restrizione che il sistema lineare $|C|$ sia regolare.

3. – Per raggiungere lo scopo detto innanzi, rappresentiamo la nostra superficie (d'ordine s) sopra un piano multiplo (s-plo) dotato di una certa curva di diramazione K; ciò può ottenersi p. es. mediante una proiezione da un punto esterno. Le immagini delle curve C saranno curve C_1 d'un certo ordine m, (uguale all'ordine delle C corrispondenti), dotate d'un certo numero d di punti doppi variabili, e toccanti in un certo numero q di punti la K; supposto (come è lecito) che il sistema $|C|$ non abbia

punti base sulla superficie, neppure le C_1 passeranno per punti fissi nel piano.

Ora si può stabilire la seguente *osservazione fondamentale*: *tutte le curve d'ordine m, del piano, dotate di d punti doppi ed inoltre di q contatti con K, componenti il più ampio sistema continuo contenente quello delle C_1, sono immagini di curve d'ordine m, tracciate sulla superficie, che compongono il più ampio sistema continuo di curve del medesimo ordine cui appartiene $|C|$.*

Questa osservazione si giustifica in un modo molto semplice, ricorrendo a considerazioni di *analysis situs*; giova tuttavia di mettere in evidenza il fondamento di esse, che è un po' delicato.

Suppongasi che una curva L_1 d'ordine m, del piano s-plo, avente d punti doppi e toccante K in q punti, anzichè essere immagine semplice di una curva dello stesso ordine m della superficie [ed immagine $(s-1)$-pla della curva congiunta a questa nell'involuzione i cui gruppi sono rappresentati dai punti del piano s-plo], sia invece immagine s-pla di una curva irriducibile L della superficie, autocongiunta, cioè appartenente alla involuzione.

In tale ipotesi avviene che la curva L può variare con continuità sulla superficie, fino a degenerare in una curva composta di una C e della curva congiunta D. Ed è importante notare questo: che la L generica e la $C+D$ hanno lo stesso numero $(sd+q)$ di punti doppi, corrispondenti ai d punti doppi della L_1 e di C_1, e ai q contatti, rispettivamente di L_1 e di C_1, colla K.

Ma questa conclusione è assurda: *non è possibile che una curva L variabile con continuità sopra una superficie, degeneri senza acquistare nuovi punti doppi.* Infatti si consideri la superficie di RIEMANN, immagine dei punti complessi di L; su questa deve ritenersi impedito il passaggio da una falda all'altra in ciascuno dei punti doppi dati, rotta cioè la connessione attraverso questi punti; e pur nondimeno, essendo L irriducibile, la superficie resta *connessa*. Orbene la $L\,(=C+D)$, degenere senza *nuovi* punti doppi, sarebbe invece composta di due parti *non connesse* fra loro; non si potrebbe passare con un cammino continuo da C a D attraverso i punti comuni alle due parti, perchè, secondo l'ipotesi di cui vogliamo provare l'assurdità, quei punti sono limiti di punti doppi di L, nei quali è impedito il passaggio da una falda all'altra. L'assurdo, che volevamo mettere in evidenza, nasce da ciò che *una superficie di Riemann sconnessa non può risultare come limite di una superficie connessa.*

Pertanto resta stabilita la nostra osservazione fondamentale.

4. – Per fornire la dimostrazione promessa, ci rimane ora da valutare, nel piano multiplo, la dimensione del massimo sistema continuo di curve C_1 d'ordine m, con d punti doppi variabili e q contatti colla K, sistema che

contiene le immagini delle curve C appartenenti al sistema lineare considerato sopra la superficie F. Nell'indicare, brevemente, come ciò possa ottenersi, ci varremo anche di un'osservazione semplificatrice comunicataci dal sig. CASTELNUOVO.

Consideriamo anzitutto, nel piano, il sistema di tutte le curve C_1 d'ordine m con d punti doppi variabili, il cui genere vale

$$\pi = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - d .$$

La dimensione del sistema è

$$r = \pi - 1 + 3m .$$

Intersecando una curva C_1 colle curve infinitamente vicine del sistema stesso, si trova che *due* intersezioni vengono assorbite in ciascun punto doppio (4); pertanto la serie caratteristica (nel senso di SEVERI), segata sopra la C_1 dalle predette curve infinitamente vicine, è una

$$g^{\pi-2+3m}_{2\pi-2+3m}$$

completa.

Ciò posto consideriamo le C_1, d'ordine m, che (oltre ad avere d punti doppi variabili) hanno q contatti colla curva (di diramazione) K; o, quanto meno, consideriamo, uno qualunque dei sistemi di C_1 (più *ristretti*) che così si ottengono, se ve n'è più d'uno.

Due C_1 siffatte, infinitamente vicine fra loro, hanno comuni (oltre le $2d$ intersezioni assorbite dai punti doppi) i q punti di contatto con K. Dico che: tutte le C_1 del nostro sistema ristretto, infinitamente vicine ad una generica, segano su questa, all'infuori dei q punti fissi suddetti, una serie *completa*

$$g_{2\pi-2+3m-q} ,$$

che può essere speciale (la quale ci fornisce l'immagine della serie caratteristica pertinente al più ampio sistema di curve C, della superficie, rappresentate dalle C_1).

Si consideri infatti, nel piano, una qualunque curva d'ordine m con d punti doppi, infinitamente vicina alla C_1 data, la quale passi per quei

(4) Cfr. BECK, « Mathem. Annalen », Bd. 14.

q punti di contatto; si dimostra che essa tocca parimente in q punti la K, e quindi appartiene al nostro sistema ristretto di C.

Infatti la proprietà che occorre dimostrare può convertirsi in questa (ben nota): se in uno spazio, ad un numero qualunque di dimensioni, si ha un iperpiano α tangente ad una curva in un punto, ogni iperpiano infinitamente vicino ad α il quale passi per il punto di contatto, tocca parimente la curva.

Riesce così compiuta la dimostrazione promessa, essendosi provato pel sistema delle immagini sul piano multiplo e quindi pel sistema obiettivo sopra la superficie che:

Ogni sistema continuo di curve algebriche di un dato ordine, sopra una superficie, il quale non sia contenuto in un altro più ampio, ha la serie caratteristica completa.

E perciò, in particolare, che « ogni sistema lineare regolare, di genere π e grado n, sopra una superficie irregolare (di genere p_a, p_g) è contenuto in un sistema continuo *non lineare* di dimensione

$$n - \pi + 1 + p_g \text{ » .}$$

5. – Rileviamo il fatto espressivo che « sopra una superficie qualunque, i sistemi continui di curve (non ampliabili o *completi*) hanno sempre la serie caratteristica completa »; esso fornisce, come si vede, una utile estensione ed una più precisa determinazione del cosiddetto teorema di RIEMANN-ROCH relativo ai sistemi lineari.

Si avverta che il teorema sopra enunciato si estende senza difficoltà ai sistemi completi con punti base assegnati.

XXXVI.

SULLE SUPERFICIE ALGEBRICHE DI GENERE GEOMETRICO ZERO

« Rend. del Circolo Matematico di Palermo », to. XX (1905), pp. 1-33.

La proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari, che ho messa recentemente in luce, mi ha permesso di risolvere il problema di determinare tutte le superficie di *genere geometrico* $p_g = 0$ e di *genere aritmetico* $p_a < 0$:

Le superficie per cui

$$p_g = 0\,, \qquad p_a < -1\,,$$

sono riferibili a rigate.

Le superficie per cui

$$p_g = 0\,, \qquad p_a = -1\,,$$

posseggono un gruppo ellittico di trasformazioni birazionali in sè, le cui traiettorie formano un fascio razionale (di curve ellittiche).

La famiglia più generale delle superficie con un gruppo ellittico di trasformazioni in sè, può essere caratterizzata da una rappresentazione parametrica per mezzo di funzioni ellittiche di un parametro ed algebriche di un altro, che è stata stabilita dal sig. PAINLEVÉ [1]; per riguardo a codesta rappresentazione tali superficie si possono designare col nome di *superficie ellittiche.*

Il genere p_g delle suddette superficie ellittiche risulta uguale a zero allora, e allora solamente, quando il fascio delle curve ellittiche K, traiettorie del corrispondente gruppo, è razionale. La famiglia delle super-

---

[1] *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, professées à Stockholm en 1895 (Paris, Hermann, 1897), pagg. 282-286.

ficie ellittiche di genere $p_g = 0$ ($p_a = -1$) comprende in primo luogo le rigate ellittiche, ma anche innumerevoli altre classi di superficie contenenti un fascio ellittico di curve irrazionali C secanti le K in $n > 1$ punti.

La costruzione effettiva di queste ultime superficie costituisce un problema un po' delicato, che si risolve mediante le trasformazioni di determinante n delle funzioni ellittiche, onde al carattere n conviene il nome di *determinante* delle superficie ellittiche predette.

Così possono assegnarsi *tutti i tipi birazionalmente distinti di superficie ellittiche di genere* $p_g = 0$ *e determinante* n (> 1). In sostanza si può ridursi al caso in cui n sia un numero primo; si hanno allora tipi corrispondenti alle $n + 1$ trasformazioni non equivalenti

$$\Omega = n\omega\,, \qquad \Omega' = \omega'$$

$$\Omega = \omega - r\omega'\,, \qquad \Omega' = n\omega'$$

$$(r = 0, 1, 2 \ldots, n-1)\,.$$

Per es. alla prima trasformazione corrispondono i tipi:

$$Z = z\,, \qquad Y = \boldsymbol{p}'(u\,|\,\omega, \omega')\,,$$

$$X = \sqrt[n]{(z-a_1)^{h_1}(z-a_2)^{h_2}\ldots(z-a)^{h_t}}\left\{\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\varepsilon^{\lambda}\boldsymbol{p}(u+\lambda\omega\,|\,n\omega, \omega')\right\}$$

$$t > 2\,, \qquad \varepsilon^n = 1\,, \qquad \varepsilon \neq 1\,,$$

$$h_i < n\,, \qquad h_1 + h_2 + \ldots + h_t \equiv 0 \pmod{n}.$$

La costruzione dei tipi di superficie ellittiche di determinante n può anche essere ottenuta in modo algebrico, mediante l'estrazione di un radicale n-mo che porta su funzioni razionali dei punti di un cilindro cubico (nn. 6, 7).

Le superficie ellittiche di genere $p_g = 0$, e d'ordine m (in S_3), ammettono in generale, per $r > 1$, delle superficie r-aggiunte d'ordine $r(m-4)$, $\varphi_{r(m-4)}$, le cui sezioni (curve r-canoniche) sono invarianti rispetto alle trasformazioni birazionali; il numero delle $\varphi_{r(m-4)}$ linearmente indipendenti costituisce il carattere che si designa col nome di *r-genere* e s'indica di solito con P_r ($P_1 = p_g$) [2]. Orbene il calcolo effettivo dei plurigeneri,

---

[2] Cfr. ENRIQUES, *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche*, « Memorie della Società Italiana delle Scienze (dei XL) », s. III, t. X (1896), pagg. 1-81, § 39 [queste *Memorie*, vol. I, XIII].

mostra che, mentre si ha per le rigate

$$p_g = P_2 = P_3 = \ldots = 0 ,$$

si ha sempre

$$P_4 \geqslant 1 , \qquad \text{o} \qquad P_6 \geqslant 1 ,$$

per le superficie ellittiche non riferibili a rigate.

Dunque

$$p_a < 0 , \qquad P_4 = P_6 = 0 ,$$

sono le condizioni perchè una superficie sia riferibile ad una rigata irrazionale (di genere $-p_a$).

Ricordiamo ora che le superficie per cui

$$p_a = 0 , \qquad P_2 = 0 ,$$

sono razionali, cioè riferibili a rigate di genere zero (3), e notiamo che le condizioni $P_4 = 0$ e $P_6 = 0$ portano evidentemente $P_2 = 0$, $p_a \leqslant 0$.

Ne deduciamo il teorema:

Le condizioni perchè una superficie possa trasformarsi in una rigata (razionale o no) si esprimono semplicemente annullando il quadrigenere ed il sestigenere:

$$P_4 = P_6 = 0 .$$

In altri termini si hanno così le *condizioni perchè l'equazione algebrica*

$$f(x, y, z) = 0 ,$$

possa trasformarsi in un'altra del tipo

$$\varphi(X, Y) = 0 ,$$

dove è eliminata una variabile.

Questo resultato era inaspettato. Il sig. CASTELNUOVO ed io, in fine alla nostra comune memoria degli « Annali di Matematica » 1900, avevamo

(3) CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero*, « Memorie della Società Italiana delle Scienze (dei XL) », s. III, t. X (1896), pagg. 103-123.

incontrato la questione « se l'annullarsi dei plurigeneri di una superficie porti di necessità che essa sia riferibile ad una rigata », ma alcuni esempii, (n. 9) che credevamo di potere generalizzare, in più sensi diversi, ci avevano indotto a prevedere la possibilità di superficie (non rigate) in cui tutti i plurigeneri fossero nulli fino ad un ordine arbitrariamente alto.

1. - Superficie per cui $p_g = 0$, $p_a < -1$.

Una superficie (irregolare) per cui il genere aritmetico è inferiore al genere geometrico,

$$p_a < p_g ,$$

possiede sempre sistemi continui di curve di un dato ordine, non appartenenti ad un medesimo sistema lineare. Quando $p_g = 0$, partendo da un tale sistema si può costruire un fascio irrazionale, mediante un procedimento indicato dal sig. CASTELNUOVO.

Così « ogni superficie per cui

$$p_g = 0 , \qquad p_a \leqslant -1 ,$$

possiede un fascio irrazionale di curve » (4).

Sia ora F una superficie di genere geometrico

$$p_g = 0 ,$$

e di genere numerico

$$p_a = -p < 0 ,$$

contenente un fascio irrazionale di curve C di genere

$$\pi \geqslant 1 .$$

Il genere lineare di F è

$$p^{(1)} \geqslant 1 \ (5) ;$$

e, indicando con Δ ($\geqslant 0$) il numero delle curve C dotate di un punto

(4) ENRIQUES « Atti dell'Accademia di Bologna », 11 Dic. 1904 [questo volume, XXXV].

(5) CASTELNUOVO e ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* « Annali di Matematica », s. III, t. VI (1901), pagg. 165-225, n. 20 [questo volume, XXXIII].

doppio, con ϱ (> 0) il genere del fascio, si ha la relazione [6]

$$\Delta + 4(\varrho - 1)(\pi - 1) = 13 - 12p - p^{(1)} .$$

Da questa (essendo $\pi \geqslant 1$) si ricava

$$\Delta \leqslant 13 - 12p - p^{(1)} ,$$

quindi

$$13 - 12p - p^{(1)} \geqslant 0;$$

e poichè $p \geqslant 1$, $p^{(1)} \geqslant 1$,

$$\Delta = 0 , \qquad p = 1 , \qquad p^{(1)} = 1 .$$

Pertanto l'ipotesi $p > 1$, porta di conseguenza

$$\pi = 0 ,$$

dal che si deduce [7]:

Ogni superficie per cui

$$p_g = 0 , \qquad p_a = -p < -1 ,$$

è riferibile ad una rigata di genere p.

2. - Superficie con un fascio ellittico di curve di genere $\pi > 1$: $p_g = 0$, $p_a = -1$.

Supponiamo ora

$$\pi \geqslant 1 .$$

Sarà, come è detto innanzi,

$$\Delta = 0 , \qquad p_g = 0 , \qquad p_a = -p = -1 , \qquad p^{(1)} = 1 .$$

---

[6] L. c., n. 6.

[7] ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali*, « Mathem. Annalen », LII (1899), pagg. 449-456 [questo volume, XXVII].

Notiamo subito che, essendo

$$p_g - p_a = 1,$$

il genere del fascio (irrazionale) delle C varrà

$$\varrho = 1 \ (^8).$$

Distinguiamo i due casi: $\pi > 1$, $\pi = 1$.

1° Caso. Sia $\pi > 1$.

Ogni curva C ammette un sistema lineare 2° aggiunto $|C''|$, di dimensione (almeno)

$$3\pi - 4,$$

il quale sega sopra la curva C una serie $g_{4\pi-4}$ contenuta nella serie bicanonica $g_{4\pi-4}^{3\pi-4}$.

Consideriamo la serie segata da $|C''|$ sopra un'altra curva qualunque $\overline{C}$, appartenente al fascio irrazionale delle C.

Dico che essa è sempre contenuta nella serie bicanonica di $\overline{C}$.

Infatti, per la proprietà fondamentale dei sistemi aggiunti, si ha:

$$|C''| = |\overline{C}'' + C - \overline{C}|,$$

ed il fascio irrazionale delle C è privo di punti base, onde $|\overline{C}'' + C|$ e quindi anche $|\overline{C}'' + C - \overline{C}|$, sega su $\overline{C}$ una $g_{4\pi-4}$ contenuta nella serie (bicanonica) segata da $|\overline{C}''|$.

Ciò posto, teniamo fissa la curva $\overline{C}$, e facciamo variare nel fascio la C, e con essa il sistema $|C''|$.

Si possono fare due ipotesi:

1) o (per ogni posizione generica di C) $|C''|$ sega su $\overline{C}$ la serie bicanonica completa;

2) o la serie segata da $|C''|$ su $\overline{C}$ è sempre incompleta.

Nella seconda ipotesi esiste, qualunque sia C, almeno una curva

$$|C'' - \overline{C}|,$$

di genere $3p^{(1)} - 2 = 2 = 1$ (9) e grado 0, la quale genera un sistema continuo non lineare, contenente il sistema bicanonico $|C'' - C|$. A siffatto sistema continuo si può dare il nome di *parabicanonico*.

---

(8) Severi, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, « Atti Accademia Torino », vol. XXXIX (1904), pagg. 490-506.

(9) Ciò risulta in accordo coll'osservazione fatta che deve essere $\varrho = 1$.

Ora le infinite curve parabicanoniche non equivalenti, o le loro parti irriducibili se esse si spezzano, formeranno sulla superficie F un *fascio irrazionale di curve ellittiche* K. Quindi la superficie F, contenente due fasci irrazionali di curve C e K, avrà il genere

$$p_g \geqslant 1 .$$

Ma ciò contraddice alle supposizioni da cui siamo partiti.

Esaminiamo la prima ipotesi: per ogni posizione generica di C entro il fascio, $|C''|$ sega su $\overline{C}$ la serie bicanonica completa $g^{3\pi-4}_{4\pi-4}$.

In tale ipotesi per un gruppo generico $G_{4\pi-4}$ della serie suddetta passano ∞^1 curve C'', e perciò si trova almeno una curva spezzata

$$C'' = \overline{C} + K ,$$

dove la K (di genere 1 e grado 0) è una curva parabicanonica.

Quante saranno le curve parabicanoniche che così vengono costruite?

La serie *ellittica* ∞^1 delle C'' per il gruppo $G_{4\pi-4}$, non può essere un fascio, perchè possiede delle traiettorie razionali costituite dai punti base, del gruppo suddetto; essa avrà dunque un certo indice $\nu > 1$. Per un punto generico della superficie F passano ν curve C'', della nominata serie, fra loro distinte; soltanto per un punto della curva χ, inviluppo delle C'', due (almeno) di queste C'' diventano infinitamente vicine.

Ora se si prende un punto generico di $\overline{C}$, si avranno per esso ν C'' spezzate in $\overline{C}$ ed in una curva parabicanonica; queste ν curve saranno distinte o no?

Ci potremmo esimere dal discutere tale questione ritenendo soltanto il fatto che esistono almeno due curve parabicanoniche, distinte o infinitamente vicine, ed osservando come l'avverarsi di quest'ultima ipotesi non infirmi il seguito del nostro ragionamento.

Ma, poichè l'ipotesi stessa risulta a posteriori impossibile, vale forse la pena di vederne subito la ragione: la $\overline{C}$ non può far parte della curva χ, inviluppo della C''.

Per dimostrare l'asserto, si cerchi anzitutto il numero delle intersezioni di χ con una C generica; si tratta perciò di determinare quanti sono i gruppi $G_{4\pi-4}$ dotati di un punto doppio, in una serie ellittica ∞^1 d'indice ν, contenuta nella $g^{3\pi-4}_{4\pi-4}$ bicanonica. Mediante la rappresentazione di C con una curva d'ordine $4\pi - 4$ in $S_{3\pi-4}$, si trova facilmente che il numero cercato è

$$2\nu(4\pi - 4) .$$

Si cerchino quindi le molteplicità di χ nei punti del gruppo base $G_{4\pi-4}$ su $\overline{C}$; preso uno di questi punti A, ogni tangente generica per A determina ν curve C'' della nostra serie, sicchè (la serie essendo ellittica)

si avranno, per A, 2ν tangenti della curva inviluppo χ. Dunque i punti del gruppo base $G_{4\pi-4}$ sono 2ν-pli per la χ. Se ora la $\overline{C}$ facesse parte di χ:

$$\chi = \overline{C} + \chi_1 ,$$

χ_1 avrebbe nei $4\pi - 4$ punti suddetti una molteplicità inferiore a 2ν, quindi incontrerebbe $\overline{C}$ in meno che

$$2\nu(4\pi - 4) ,$$

punti; ma ciò è assurdo perchè una qualunque C ha appunto $2\nu(4\pi - 4)$ intersezioni con χ, e zero intersezioni con $\overline{C}$.

Riteniamo dunque la conclusione: sopra la superficie F esistono $\nu > 1$ curve parabicanoniche distinte, di genere 1 e grado 0.

Consideriamo due curve siffatte K_1, K_2.

Esse determinano sopra ogni C, due gruppi (bicanonici) equivalenti e quindi una $g^1_{4\pi-4}$.

Consideriamo i gruppi, $G_{4\pi-4}$, delle ∞^1 $g^1_{4\pi-4}$ così costruite come elementi « *punti* », di una varietà doppiamente infinita, « *superficie* » φ.

La φ si potrà riguardare come una rigata, multipla secondo $4\pi - 4$, su cui la F viene rappresentata, per modo che alle K_1, K_2 corrispondono due curve direttrici K_1', K_2'.

Potremo anzi supporre la φ proiettivamente determinata, in guisa che essa sia d'ordine pari $2m$, normale in un S_{2m-1}, e che le K_1', K_2' abbiano l'ordine m, appartenendo rispettivamente a due S_{m-1} indipendenti.

Costruiamo ora, su φ, la curva di diramazione θ'; essa è l'immagine della curva θ, luogo di coincidenze delle serie $g^1_{4\pi-4}$. La θ' non ha punti comuni colle K_1', K_2', perchè sulle curve ellittiche K_1, K_2, le involuzioni ellittiche $\gamma^1_{4\pi-4}$, i cui gruppi corrispondono rispettivamente ai punti di K_1', K_2', sono prive di coincidenze.

Di qui si deduce in primo luogo che la θ' è di genere 1, e si compone quindi di curve ellittiche irriducibili, senza punti comuni. Basta perciò applicare la formula fondamentale del sig. SEGRE ([10]), per la quale, designando con ν l'ordine di θ', con x il suo genere (virtuale), con k il numero delle sue intersezioni colle generatrici di φ, si ha:

$$(k-1)\nu - x = \frac{k(k-1)}{2} 2m - 1 .$$

([10]) *Intorno alla geometria su una rigata algebrica*; *Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi* « Rend. Acc. Lincei », vol. III, 2° sem. 1887, pagg. 3-6; pagg. 149-153 e *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques*, II^e^ Partie « Math. Annalen », XXXIV (1889), pp. 1-25, n. 1.

Infatti, si mandi un iperpiano per K_1', che avrà comuni con φ m generatrici; poichè θ' non incontra K_1', questo iperpiano intersecherà θ' in

$$v = mk$$

punti, e quindi si avrà

$$(k-1)km - x = (k-1)km - 1$$

ed

$$x = 1 .$$

Si consideri ora una parte irriducibile di θ', secante le generatrici in un certo numero di punti $i \geqslant 1$. Questa curva, L', appartiene ad un fascio di curve ellittiche, i-secanti le generatrici di φ, in cui sono contenute le K_1', K_2' contate i volte; il suddetto fascio si costruisce trasformando L' colle ∞^1 omografie di S_{2m-1}, aventi come spazio di punti uniti i due S_{m-1} determinati rispettivamente da K_1', K_2' [11].

Ora le ∞^1 curve L', come quella di partenza, non avranno punti comuni colla curva di diramazione θ', sicchè ad esse corrisponderanno sulla superficie F delle curve L, di genere 1; le L comporranno un fascio, determinato dalle due curve parabicanoniche K_1, K_2, contate i volte. Tuttavia le curve L potranno spezzarsi in parti ellittiche, e si potrà quindi avere su F un fascio *razionale o irrazionale* di curve ellittiche irriducibili; ma l'ipotesi che il fascio sia irrazionale porta $p_g > 0$, contraddicendo alle nostre supposizioni fondamentali.

Se poi le L formano un fascio razionale esse debbono segare le C (di genere $\pi > 1$) in $n > 1$ punti.

3. - Superficie con un fascio ellittico di curve ellittiche: $p_g = 0$, $p_a = -1$.

2° Caso. - *Sia* $\pi = 1$.

Abbiamo dunque una superficie con un fascio ellittico di curve ellittiche C, per cui

$$p_g = 0 , \qquad p_a = -p = -1 , \qquad p^{(1)} = 1 ,$$
$$\Delta = 0 .$$

Consideriamo il discriminante della curva C, variabile nel fascio, come funzione razionale dell'elemento (C) di una varietà ellittica ∞^1

---

[11] Cfr. Segre, *Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine*, « Atti Acc. Torino », vol. XXI (1886) (passim e in particolare il n. 19).

(il fascio). Il numero degli zeri (e dei poli) di questa funzione è precisamente $\Delta = 0$, quindi il discriminante stesso è costante, cioè: *le curve ellittiche C hanno tutte lo stesso modulo.*

Le C sono dunque trasformabili birazionalmente l'una nell'altra, ma per determinare *una* corrispondenza fra due date C occorrerà in generale eseguire delle *operazioni irrazionali.*

Soltanto un numero finito di corrispondenze fra due C, potrà, nel suo insieme, essere determinato *razionalmente* come segue:

Suppongasi per es. che le curve C sieno d'ordine $m = 3$.

Due cubiche di ugual modulo sono sempre proiettive, e (lasciando da parte il caso particolare delle curve armoniche ed equianarmoniche) vi sono 18 proiettività che trasformano l'una cubica nell'altra, corrispondenti al gruppo delle 18 proiettività che lasciano invariata ciascuna delle due cubiche ed i suoi 9 flessi.

Similmente due curve ellittiche normali, di ugual modulo, sono sempre proiettive, e ciò in $2m^2$ modi, se m è l'ordine delle curve (supposte non armoniche nè equianarmoniche).

Date dunque due C, di cui si designi l'ordine con m, verrà determinato razionalmente il gruppo delle $2m^2$ trasformazioni birazionali di esse, che nascono dalle proiettività tra le curve normali corrispondenti, di cui le C sono proiezioni.

Questo enunciato esige solo una lieve modificazione nei casi armonico ed equianarmonico: nel 1° caso sulle C può determinarsi razionalmente *una* g_2^1 (corrispondente al quadrato della trasformazione ciclica del 4° ordine) e si hanno in rapporto a queste 8 corrispondenze fra due C; nel 2° caso è data su ogni C *una* g_3^1 ciclica, e si ha razionalmente un gruppo di 18 trasformazioni di due C una nell'altra.

Ciò posto si fissi nel fascio una curva $\overline{C}$, e si considerino le $2m^2$ (o 8 o 18) corrispondenze tra di essa ed una C variabile. I punti omologhi di un punto generico di $\overline{C}$, descriveranno una curva secante le C in $2m^2$ (o rispettivamente in 8 o 18) punti. Si otterranno similmente ∞^1 curve componenti un fascio razionale.

Queste curve potranno essere spezzate; in tal caso le loro componenti irriducibili K costituiranno un fascio che potrà essere razionale o irrazionale; ma, nella seconda ipotesi, il genere della superficie F risulta

$$p_g > 0 .$$

Ora dunque se, come supponiamo, $p_g = 0$, le curve irriducibili K, secanti le C in un certo numero n (> 1) di punti, costituiranno un fascio razionale.

Una curva generica K, contiene una involuzione ellittica γ_n^1 determinata dal fascio delle C; se questa γ_n^1 non ha coincidenze la K è ellittica.

Se invece ci sono delle coincidenze, queste (in numero di $2\theta - 2$) costituiscono un gruppo canonico della curva K [12] (la quale è allora di genere θ). D'altra parte la K non può avere delle coincidenze sopra una C generica, ma soltanto sopra una C che si riduce ad una curva ellittica contata due o più volte.

Si trova dunque una curva di genere 1 (composta di parti di curve C), la quale sega sopra ogni K un gruppo canonico.

Il caso che veniamo così ad incontrare è effettivamente possibile, ma soltanto per $p_g > 0$. Invero è facile persuadersi che la curva X, costruita innanzi, è una curva canonica della superficie F.

A tal fine basta immaginare la F proiettivamente trasformata in una superficie di S_3 (con singolarità ordinarie) sulla quale le curve K sieno sezioni dei piani per una retta a. Designiamo infatti con r l'ordine delle K, con i la molteplicità di a per F.

In ogni piano per a si costruisca la curva d'ordine $r-3$ aggiunta alla K, determinata dal gruppo sezione di X; il luogo di tali curve è una superficie φ_{r+s-3} di un certo ordine $r+s-3$, la quale passa per la curva doppia di F, e contiene la retta i-pla a come s-pla. Ma tenendo conto che il genere della curva sezione X vale 1, si conclude

$$s = i - 1;$$

perciò la $\varphi_{r+s-3} = \varphi_{r+i-4}$ è una superficie aggiunta ad F e la X è una curva canonica ($p_g > 0$).

Concludiamo pertanto, che nel caso $p_g = 0$ le K sono ellittiche, cioè:

Se una superficie algebrica per cui

$$p_g = 0\,, \qquad p_a = -1\,,$$

contiene un fascio irrazionale (ellittico) di curve ellittiche C, essa contiene altresì un fascio razionale di curve ellittiche K, secanti le prime in un certo numero n (> 1) di punti.

4. - Conclusione relativa alle superficie per cui $p_g = 0$, $p_a = -1$: gruppo ellittico di trasformazioni ad esse inerente.

Confrontando i resultati ottenuti nei due casi $\pi > 1$, $\pi = 1$, e completandoli con ciò che si sa pel caso $\pi = 0$, avremo il teorema:

Ogni superficie algebrica F per cui

$$p_g = 0\,, \qquad p_a = -1\,,$$

[12] Cfr. CASTELNUOVO, *Alcune osservazioni sopra le serie irrazionali di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica*, « Rend. Acc. Lincei », vol. VII, 2° sem. 1891, pagg. 294-299.

contiene

1) *un fascio ellittico di curve C, di genere* $\pi \geqslant 0$;

2) *e un fascio razionale di curve ellittiche K, secanti le prime in un certo numero* $n \geqslant 1$ *di punti.*

Si può aggiungere che *le curve ellittiche K hanno tutte lo stesso modulo*, poichè a questa conseguenza si è tratti dall'essere $p^{(1)} = 1$, col ragionamento, che abbiamo applicato, al fascio delle C nell'ipotesi $\pi = 1$, in principio al n. 3.

Consideriamo ora una K generica del fascio alla quale appartiene *un* integrale ellittico di 1ª specie U.

Le trasformazioni di 1ª specie, $U' = U + a$, che essa ammette in sè medesima, formano una varietà ellittica di elementi (birazionalmente identica alla K), sopra la quale è *razionalmente dato*, in funzione dei coefficienti delle equazioni di K, *un* punto, corrispondente alla trasformazione identica.

Esclusi i valori particolari del modulo di K, che corrispondono al caso armonico ed equianarmonico, possiamo dunque rappresentare razionalmente le « trasformazioni » di K sui « punti » di una cubica L:

$$x = \boldsymbol{p}(a), \qquad y = \pm \boldsymbol{p}'(a),$$

colla sola ambiguità proveniente dal doppio segno di a; si hanno cioè per ogni K *due* rappresentazioni birazionali del corrispondente gruppo di trasformazioni sopra la cubica L, ciascuna di esse deducendosi dall'altra coll'*invertire* le trasformazioni; i due punti omologhi di una trasformazione su L sono coniugati in una g_2^1 (trasformazione di 2ª specie) che ha come punto doppio

$$a \equiv 0 .$$

Emerge da ciò che « dato un fascio di curve ellittiche K collo stesso modulo (esclusi i casi armonico ed equianarmonico), ad ogni trasformazione di 1ª specie di una K vengono razionalmente coordinate *due* trasformazioni, l'una inversa dell'altra, sopra ogni altra K; la separazione di queste richiede in generale un'irrazionalità quadratica, che porta sopra il parametro da cui le K dipendono ». Ora dico che « questa irrazionalità quadratica si deve considerare come *aggiunta* al campo di razionalità determinato dai coefficienti di due K, allorchè è *data* una corrispondenza biunivoca tra due involuzioni ellittiche γ_n^1, sulle due K ».

Fissiamo infatti sopra le due K, due gruppi omologhi

$$G_n, \qquad G_n'$$

delle involuzioni suddette, e consideriamo sulla prima K una trasformazione di 1ª specie generica

$$U' \equiv U + a ,$$

e la sua inversa

$$\overline{U}' \equiv U - a ;$$

le due trasformazioni mutano il G_n in due gruppi diversi della γ_n^1, a cui corrispondono due gruppi razionalmente distinti della γ_n^1 sulla seconda K, i quali sono omologhi di G_n' in due trasformazioni di 1ª specie l'una inversa dell'altra; queste due trasformazioni della seconda K, riescono così razionalmente coordinate a quelle della prima.

Osserviamo ora che la corrispondenza, supposta data fra le involuzioni γ_n^1 di due K, permette di coordinare razionalmente le trasformazioni di 1ª specie dell'una curva a quelle dell'altra, anche nei casi armonico ed equianarmonico, esclusi dalle precedenti considerazioni; invero, quantunque l'irrazionalità di cui ora si tratta non sia più quadratica (ma dipenda da radicali quadratici e cubici) si può ripetere lo stesso ragionamento, basandosi sul fatto che una γ_n^1 ellittica di una curva ellittica non può avere i suoi gruppi composti di quelli della involuzione ciclica *razionale* g_4^1 o g_3^1, che appartiene alla curva armonica o rispettivamente equianarmonica. Ciò posto, ricordiamo che sopra la nostra superficie F si ha un fascio ellittico di curve C, che sega su due K qualunque rispettivamente due involuzioni γ_n^1 riferite biunivocamente tra loro; ne deduciamo che « le trasformazioni di 1ª specie di due K qualunque riescono tra loro razionalmente coordinate, per modo che si hanno ∞^1 trasformazioni birazionali della superficie F in sè stessa, componenti un gruppo continuo (permutabile), di cui le K sono le traiettorie ».

Concludiamo pertanto:

Ogni superficie algebrica F per cui

$$p_g = 0 , \qquad p_a = -1 ,$$

ammette un gruppo algebrico continuo ∞^1 di trasformazioni birazionali in se stessa, che ha come traiettorie le curve ellittiche di un fascio razionale.

Il teorema è invertibile, come vedremo più tardi. Intanto si ha:

Ogni superficie con un gruppo ∞^1 G di trasformazioni birazionali, che ha come traiettorie le curve ellittiche K di un fascio (razionale o no), contiene un secondo fascio ellittico di curve C (n-secanti le K), le quali avranno naturalmente gli stessi moduli.

La cosa si dimostra coll'analisi del n. 3, tenendo conto del coordinamento razionale delle trasformazioni di 1ª specie tra due K qualunque. Ma più rapidamente si perviene allo scopo per via trascendente, seguendo la via indicata dal sig. PAINLEVÉ nelle sue Lezioni di Stockholm (op. c.). Invero, si consideri la varietà ellittica ∞^1 che ha come elementi le « trasformazioni » del nostro gruppo; e sia u l'integrale di 1ª specie che le appartiene, di cui si designino i periodi con ω, ω'. Sarà u un integrale di PICARD di 1ª specie della superficie F. Costruiamo quindi le funzioni ellittiche di WEIERSTRASS

$$p(u\,|\,\omega, \omega')\,, \qquad p'(u\,|\,\omega, \omega');$$

queste risulteranno funzioni razionali dei punti di F, onde le curve C:

$$u = \text{cost.}\,,$$

saranno algebriche, dando luogo così al fascio ellittico di cui discorre l'enunciato.

Se il fascio delle curve K, traiettorie del gruppo G, è irrazionale, il genere della superficie vale

$$p_g > 0;$$

vedremo poi che, quando il fascio sudetto è razionale, risulta sempre

$$p_g = 0 \qquad (\text{e } p_a = -1)\,.$$

5. - Rappresentazione parametrica di Painlevé: questioni d'esistenza.

Le superficie con un gruppo ellittico ∞^1 di trasformazioni birazionali in se stesse, sono state messe in luce dalla profonda analisi cui il sig. PICARD ha sottoposto il problema generale dei gruppi continui algebrici. Il signor PAINLEVÉ, proseguendo lo studio di quelle superficie nelle sue classiche Lezioni citate, è pervenuto ad una rappresentazione parametrica caratteristica, la quale in sostanza esprime l'esistenza dei due fasci di curve C e K sulla superficie.

Si designi con

$$u = \int P\,dX + Q\,dY\,,$$

l'integrale ellittico di 1ª specie, dotato dei periodi ω, ω', che appartiene al fascio delle C; esso costituisce un integrale di PICARD di 1ª specie della superficie, riprendente lo stesso valore nei punti di ogni C.

Si costruisca quindi una funzione razionale $v(XYZ)$, la quale riprenda lo stesso valore nei punti di ogni curva ellittica K (traiettoria del gruppo); l'equazione

$$v = \text{cost.},$$

rappresenterà *una* o *più* curve K; la prima ipotesi porta che il fascio delle K sia razionale, e viceversa può ritenersi soddisfatta in questo caso (Teorema di LÜROTH).

Cerchiamo ora di esprimere le coordinate XYZ dei punti della superficie

$$F(XYZ) = 0,$$

per mezzo dei parametri u e v.

Sopra una curva C, dove $u = \text{cost.}$, le X, Y, Z, saranno funzioni algebriche di v, cioè funzioni razionali di v, w legate da un'equazione algebrica

$$f(vw) = 0;$$

e, siccome le curve C (trasformate l'una dell'altra) sono birazionalmente identiche, si può supporre che i coefficienti di f non dipendano da u.

Consideriamo una curva K, su cui

$$v(XYZ) = \text{cost.},$$
$$F(XYZ) = 0,$$

ed il suo integrale ellittico di 1ª specie

$$U = \int \theta(XYZ)\, dX,$$

che avrà certi periodi Ω, Ω'; le XYZ sono, su K, funzioni razionali di

$$\boldsymbol{p}(U \mid \Omega\Omega'), \qquad \boldsymbol{p}'(U).$$

Ora l'integrale di PICARD u, è un integrale di 1ª specie sulla curva, K; si avrà quindi

$$\Omega = a\omega + b\omega',$$
$$\Omega' = c\omega + d\omega',$$

ove a, b, c, d sono numeri interi tali che il determinante

$$ad - bc = n \geqslant 1 .$$

E sarà

$$\boldsymbol{p}(U \mid \Omega\, \Omega') = \boldsymbol{p}(u + \lambda\omega + \mu\omega' \mid a\omega + b\omega',\ c\omega + d\omega') ,$$
$$\boldsymbol{p}'(U \mid \Omega\, \Omega') = \boldsymbol{p}'(u + \lambda\omega + \mu\omega' \mid a\omega + b\omega',\ c\omega + d\omega') ,$$

dove λ e μ sono numeri interi.

Pertanto *le coordinate $X\ Y\ Z$ dei punti della superficie F si esprimeranno come funzioni razionali di*

$$\boldsymbol{p}(u + \lambda\omega + \mu\omega' \mid a\omega + b\omega',\ c\omega + d\omega') ,$$
$$\boldsymbol{p}'(u + \lambda\omega + \mu\omega' \mid a\omega + b\omega',\ c\omega + d\omega') ,$$

e di v, w legate dall'equazione

$$f(vw) = 0 ,$$

dove si otterranno n punti (XYZ) distinti, in corrispondenza alle $n(= ad - bc)$ coppie di valori λ, μ, per cui

$$\lambda\omega + \mu\omega' ,$$

assume valori incongrui rispetto ad

$$a\omega + b\omega' , \qquad c\omega + d\omega' .$$

Questa è in sostanza la rappresentazione parametrica del sig. PAINLEVÉ [13], la quale *rappresentazione è caratteristica per le superficie con un gruppo ellittico di trasformazioni birazionali in sè*; infatti se XYZ si esprimono nel modo anzidetto, si ha il gruppo di trasformazioni

$$v' = v , \qquad w' = w , \qquad u' = u + \text{cost} .$$

Avuto riguardo a ciò le superficie con un gruppo ellittico di trasformazioni birazionali in sè, possono designarsi col nome di *superficie ellittiche, di determinante $n = ad - bc$.*

---

[13] Op. cit., pag. 285.

Partendo dalla rappresentazione di PAINLEVÉ delle superficie ellittiche, si potranno ora costruire effettivamente queste superficie in corrispondenza ad un determinante $n = ad - bc$ dato ad arbitrio, e non vi ha dubbio che l'illustre geometra abbia scorto tale possibilità. Però occorre fermare l'attenzione sopra una *circostanza delicata*: se si prende ad arbitrio un'equazione

$$f(vw) = 0 ,$$

tre funzioni razionali X, Y, Z di

$$\boldsymbol{p}(u + \lambda\omega + \mu\omega' | a\omega + b\omega', c\omega + d\omega') , \qquad \boldsymbol{p}', \qquad v, \qquad w,$$

non dànno *in generale*, per

$$ad - bc > 1$$

una superficie irriducibile F, ma l'insieme di $n = ad - bc$ superficie corrispondenti alle n coppie λ, μ per cui

$$\lambda\omega + \mu\omega'$$

assume valori incongrui rispetto ad

$$a\omega + b\omega' , \qquad c\omega + d\omega' .$$

Affinchè la superficie F, costruita nel modo anzidetto, non si spezzi, bisogna che l'equazione

$$f(vw) = 0 ,$$

sia opportunamente coordinata all'equazione che lega la

$$\boldsymbol{p}(u | a\omega + b\omega', c\omega + d\omega')$$

alla

$$\boldsymbol{p}(u | \omega\omega') .$$

Noi esamineremo in particolare come tale coordinamento si faccia nel caso in cui le traiettorie ellittiche K formano un fascio razionale, avvertendo che queste considerazioni potrebbero facilmente estendersi al caso in cui le K formino un fascio irrazionale. Così non soltanto risolveremo la *questione d'esistenza* delle superficie F, in corrispondenza ad ogni determinante $n > 1$, ma ne assegneremo i tipi irriducibili.

6. - I tipi delle superficie ellittiche di genere $p_g = 0$. Caso in cui il determinante è un numero primo.

Ci proponiamo dunque di « costruire effettivamente tutte le superficie ellittiche F, per cui le traiettorie del corrispondente gruppo formano un fascio razionale, assegnandone i tipi irriducibili ».

Suppongasi data una superficie F.

Fissiamo la nostra attenzione sui due fasci di curve C, K più volte considerati su di essa, e designamo ancora con n il numero delle intersezioni di una C e di una K (*determinante di* F).

Consideriamo un cilindro ellittico

$$\varphi(x\,y) = y^2 - 4x^3 - g_2 x - g_3 = 0\,,$$

le cui generatrici sieno coordinate alle curve C (componenti un fascio ellittico cogli invarianti g_2, g_3); facciamo inoltre corrispondere le curve K alle sezioni piane

$$z = \text{cost.}\,,$$

del cilindro suddetto. Si otterrà così una *rappresentazione della superficie* F *sopra il cilindro ellittico* φ *contato* n *volte, per modo che la curva di diramazione di* φ (non intersecante le $z = \text{cost.}$) *sarà composta di un certo numero di sezioni piane*

$$z = a_1\,,\quad z = a_2\,,\quad \ldots\,,\quad z = a_t\,.$$

Diamoci ora il cilindro n-plo φ e proponiamoci di costruire le superficie F su di esso rappresentate.

Possiamo supporre, non soltanto

$$n > 1\,,$$

ma anche

$$t > 2\,,$$

altrimenti la F contiene un fascio di curve razionali (C) e si lascia trasformare in un (nuovo) cilindro ellittico. Di più supporremo che t sia pari, se $n = 2$, escludendo (come è lecito) che la sezione di φ col piano all'infinito, faccia parte della curva di diramazione.

Volendo che da questa ricerca scaturiscano tutti i tipi delle F, osserviamo anzitutto che: due superficie ellittiche F, F' saranno birazionalmente identiche, quando due curve C e K di F abbiano gli stessi moduli rispettivamente di una C e di una K di F'.

Infatti le F, F' risulteranno riferite tra loro, punto per punto, quando:

1) i punti di una C di F sieno coordinati ai punti di una C di F';

2) ad ogni trasformazione del gruppo ∞^1 G di F si faccia corrispondere una trasformazione del gruppo G' di F', per modo che le trasformazioni identiche si corrispondono; questo riferimento, per isomorfismo, dei due gruppi è possibile, perchè risulta determinato da una corrispondenza biunivoca posta fra le due curve ellittiche K (traiettorie di G, G').

Ora consideriamo, sopra una superficie F, l'involuzione I_n dei gruppi di n punti (intersezioni delle curve C, K) che corrispondono ai punti del cilindro n-plo φ; sia

$$A_1 A_2 \dots A_n ,$$

un gruppo generico di I_n.

Facendo corrispondere A_2 ad A_1 si ottiene, entro il gruppo G, una trasformazione ciclica $(A_1 A_2)$ della F in sè stessa, che lascia invariate le C, K e quindi tutti i gruppi di I_n.

Ma, poichè l'intiero gruppo G è permutabile, anche il sottogruppo finito delle trasformazioni $(A_r A_s)$ sarà *abeliano*. In particolare dunque, per ogni curva C, si avrà un gruppo abeliano di n trasformazioni della C in se stessa, che scambiano tra loro gli n punti intersezioni di C con una K qualunque.

Ciò posto la costruzione della superficie F, rappresentata sul cilindro n-plo φ colla curva di diramazione $(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_t) = 0$, si riconduce a costruire:

1) Una curva irriducibile C, rappresentata sopra una generatrice n-pla di φ (coi punti di diramazione assegnati $z = a_1, \dots, z = a_t$) per modo che gli n punti omologhi ad un punto della generatrice dipendano razionalmente dalle radici di un'equazione abeliana d'ordine n; cioè, una funzione algebrica del punto z della generatrice suddetta, i cui rami si permutino circolarmente quando, nel piano della variabile complessa z, si fa un giro attorno ai punti di diramazione

$$z = a_1 , \quad z = a_2 , \quad \dots , \quad z = a_t .$$

2) Una curva ellittica K, rappresentata sopra la cubica piana n-pla

$$\varphi(xy) = 0 ,$$

senza punti di diramazione.

Di K siffatte ve ne sono di irriducibili e di riducibili (almeno una composta di n curve in corrispondenza biunivoca con φ); ma l'ipotesi della riducibilità conduce alle superficie ellittiche, su cui le traiettorie del gruppo di trasformazioni formano un fascio irrazionale ($p_g > 0$), potendosi ritenere esclusa se il fascio delle K è razionale.

Costruite le curve C e K (che sono definite a meno di trasformazioni birazionali) vedremo come sia possibile di scegliere per esse una rappresentazione analitica tale da ottenere, per combinazione opportuna, una superficie F irriducibile, cui le due curve appartengano.

Volendo risolvere effettivamente il problema proposto, supporremo dapprima, per semplicità, che il *determinante n sia un numero primo.* Il caso in cui n sia un numero composto, si ridurrà poi al precedente.

1) *Costruzione della curva C.*

Si tratta di determinare la più generale funzione algebrica $X(z)$ i cui n rami $X_1 X_2 \dots X_n$, vengano permutati circolarmente per un giro attorno ai punti di diramazione

$$z = a_1 , \quad \dots , \quad z = a_t ,$$

nel piano della variabile complessa z.

Le sostituzioni prodotte sui rami di X dai suddetti giri saranno le potenze di una medesima sostituzione ciclica, per es. di

$$S = (X_1 X_2 \dots X_n) .$$

Poniamo che sieno

$$S^{h_1} , \quad S^{h_2} , \quad \dots \quad S^{h_t} \qquad (h_i < n),$$

le sostituzioni relative ai punti critici

$$z = a_1 , \quad z = a_2 , \quad \dots , \quad z = a_t .$$

Poichè il punto all'infinito non è di diramazione, avremo

$$S^{h_t} \dots S^{h_2} S^{h_1} = 1 ,$$

ossia

$$h_1 + h_2 + \dots + h_n \equiv 0 \pmod{n}.$$

Costruiamo la funzione

$$\sqrt[n]{(z-a_1)^{h_1}(z-a_2)^{h_2}\dots(z-a_t)^{h_t}};$$

essa dipende da z in modo che i giri attorno ai punti

$$z=a_1\,,\quad z=a_2\,,\quad \dots\,,\quad z=a_t\,,$$

producono sui suoi rami le stesse sostituzioni

$$S^{h_1}\,,\quad S^{h_2}\,,\quad \dots\quad S^{h_t}\,.$$

Sarà pertanto X funzione razionale di z e della suddetta $\sqrt[n]{\ }$ che ha il medesimo gruppo di monodromia.

Dunque la curva C, rappresentata dalla funzione algebrica $X(z)$, si potrà ridurre con una trasformazione birazionale al tipo

$$(1)\qquad X=H\sqrt[n]{(z-a_1)^{h_1}(z-a_2)^{h_2}\dots(z-a_t)^{h_t}}\,,$$

$$h_i<n\,,\qquad h_1+h_2\dots+h_t\equiv 0\pmod n\,,$$

dove H è una costante diversa da 0, che potremmo prendere $=1$, ma che ci conviene di non fissare in vista dei nostri scopi.

2) *Costruzione della curva ellittica K, rappresentata sulla cubica n-pla*

$$\varphi(xy)=y^2-4x^3-g_2x-g_3=0\,,$$

senza punti di diramazione.

Questa costruzione può effettuarsi:

α) per via trascendente,

β) o per via algebrico-geometrica.

α) Volendo seguire la prima via, consideriamo l'integrale ellittico

$$u=\int\frac{ds}{\sqrt{4s^3+g_2s+g_3}}\,,$$

che avrà certi periodi $\omega\omega'$ (esprimibili nel modo noto per g_2, g_3); risulterà

$$x=\boldsymbol{p}\,(u\,|\,\omega\omega')\,,$$

$$y=\boldsymbol{p}'(u\,|\,\omega\omega')\,.$$

Ora, essendo n un numero primo, si hanno $n+1$ trasformazioni non equivalenti di determinante n

$$\Omega = n\omega\,, \qquad \Omega' = \omega'\,,$$
$$\Omega = \omega - \nu\omega'\,, \qquad \Omega' = n\omega'\,,$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1)\,.$$

Designamo rispettivamente con $\boldsymbol{p}_\infty$ e $\boldsymbol{p}_\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots n-1)$ le funzioni ellittiche trasformate, coi periodi Ω, Ω'; allora le curve ellittiche K, rappresentate sulla cubica n-pla φ, saranno birazionalmente riducibili ai tipi:

$$(a) \qquad \begin{cases} X = \boldsymbol{p}_\nu(u)\,, \\ Y = \boldsymbol{p}'(u)\,, \end{cases}$$

dove $\nu = \infty,\ 0, 1, 2, \ldots n-1$; ad ogni punto u di φ, corrisponderanno su K gli n punti

$$u\,, \quad u+\omega\,, \quad u+2\omega\,, \quad \ldots \quad u+(n-1)\omega\,,$$

per $\nu = \infty$, e

$$u\,, \quad u+\omega'\,, \quad u+2\omega'\,, \quad \ldots \quad u+(n-1)\omega'\,,$$

per $\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1$.

Possiamo trasformare la curva (a) (per $\nu = \infty, 0, 1, \ldots n-1$) in un'altra, sostituendo ad X una qualsiasi funzione razionale di $\boldsymbol{p}_\nu$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$, la quale non resti invariata quando si aumenti u di ω e di ω', e assuma quindi n valori distinti in corrispondenza a $\boldsymbol{p}(u)$, $\boldsymbol{p}'(u)$.

In vista dei nostri scopi, ci conviene di trasformare le equazioni (a) nel modo seguente:

Ricordiamo che

$$\boldsymbol{p}_\infty(u+\omega)\,, \qquad \boldsymbol{p}_\nu(u+\omega')\,, \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n-1)$$

sono funzioni razionali di

$$\boldsymbol{p}(u)\,, \qquad \boldsymbol{p}'(u)$$

e di

$$\boldsymbol{p}_\infty(u) \qquad \text{o} \qquad \boldsymbol{p}_\nu(u)$$

rispettivamente.

Formiamo quindi l'espressione

$$H_\infty(\boldsymbol{p}_\infty) = \boldsymbol{p}_\infty(u) + \varepsilon \boldsymbol{p}_\infty(u+\omega) + \varepsilon^2 \boldsymbol{p}_\infty(u+2\omega) + \ldots + \varepsilon^{n-1} \boldsymbol{p}_\infty[u+(n-1)\omega],$$

o

$$H_\nu(\boldsymbol{p}_\nu) = \boldsymbol{p}_\nu(u) + \varepsilon \boldsymbol{p}_\nu(u+\omega') + \varepsilon^2 \boldsymbol{p}_\nu(u+2\omega') + \ldots + \varepsilon^{n-1} \boldsymbol{p}_\nu[u+(n-1)\omega'],$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1),$$

dove ε è una radice n^{ma} immaginaria dell'unità; sarà

$$H_\nu \quad \text{per} \quad \nu = \infty, 0, 1, \ldots n-1,$$

una funzione razionale di $\boldsymbol{p}_\nu(u)$ [e di $\boldsymbol{p}(u)\boldsymbol{p}'(u)$] ad n valori distinti, sicchè potremo prendere come curva K, in luogo della (a), una delle $n+1$ curve

$$(2) \qquad \begin{cases} X = MH_\nu[\boldsymbol{p}_\nu(u)], \\ Y = \boldsymbol{p}'(u), \end{cases}$$

dove M è una costante arbitraria.

La H_ν è una funzione algebrica ad n valori di $\boldsymbol{p}(u)$, i cui rami subiscono una moltiplicazione per ε allorchè si cambia u in $u+\omega$ o in $u+\omega'$ (rispettivamente per $\nu = \infty$ o per $\nu = 0, 1, \ldots n-1$); essa si può dunque esprimere (come è noto) mediante un radicale n^{mo} portante sopra una funzione razionale di $\boldsymbol{p}(u)\boldsymbol{p}'(u)$ [14]. Sarebbe anzi facile assegnare l'espressione effettiva, la quale ci darebbe la rappresentazione di X per mezzo di un radicale n^{mo} portante su una funzione razionale delle x, y legate dall'equazione cubica

$$\varphi(x\,y) = 0\,.$$

β) Ad una siffatta soluzione algebrica del nostro problema, si può anche pervenire direttamente col seguente procedimento geometrico:

Si costruiscano le curve, d'ordine $3n$, che hanno colla cubica φ, 9 contatti n-punti; esse si distribuiscono in $n+1$ famiglie che corrispondono agli $n+1$ valori incongrui della somma dei parametri relativi ai punti di contatto:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_9 = \frac{a\omega + b\omega'}{n},$$

---

[14] Cfr. p. es. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria delle funzioni, etc.* (Pisa, Spoerri, 1901), § 167, pag. 438.

cioè

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_9 = \frac{\omega'}{n},$$

oppure

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_9 = \frac{\omega - r\omega'}{n}.$$

Designamo con

$$f_\nu(x\,y) = 0,$$

una delle suddette curve 9-tangenti, distinguendo coll'indice

$$\nu = \infty, 0, 1, \ldots n-1$$

la famiglia a cui essa appartiene. La curva

$$(2') \qquad \begin{cases} X = M\sqrt[n]{f_\nu(x\,y)}, \\ \varphi(x\,y) = 0, \end{cases}$$

(dove M è una costante arbitraria, non nulla) è evidentemente una curva ellittica rappresentata sulla φ, contata n volte; si ottengono così $n+1$ curve, birazionalmente distinte, corrispondenti ai tipi (2).

3) *Costruzione della superficie F.*

Possiamo ora costruire facilmente una superficie F, assegnando la espressione parametrica delle coordinate X, Y, Z, dei punti di essa per mezzo di z, u, in guisa che: per

$$X = \text{cost.}, \qquad Y = \text{cost.}$$

si ottengano curve, *di un fascio ellittico, birazionalmente identiche* ad una delle curve C, innanzi costruite; per

$$Z = \text{cost.}$$

si abbiano su F, curve ellittiche (di un fascio razionale) identiche ad una delle curve K. Le superficie F così costruite ci porgeranno i *tipi* delle classi che vogliamo determinare.

Per costruire F, basterà combinare le formule (1), (2), supponendo che la quantità designata nella (1) con H (costante rispetto a z) sia rimpiazzata da $H_\nu p_\nu(u)$, e la quantità designata nelle (2) con M (costante

rispetto ad u) sia rimpiazzata con

$$\sqrt[n]{(z-a_1)^{h_1}\dots(z-a_t)^{h_t}}\,.$$

Si ottengono così le formule

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} Z=z\,, \qquad Y=\boldsymbol{p}'(u\,|\,\omega\,\omega')\,, \\ X=H_\nu[\boldsymbol{p}_\nu(u)]\sqrt[n]{(z-a_1)^{h_1}(z-a_2)^{h_2}\dots(z-a_t)^{h_t}}= \\ =\left\{\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\varepsilon^\lambda \boldsymbol{p}_\nu(u+\lambda\omega_\nu)\right\}\sqrt[n]{(z-a_1)^{h_1}(z-a_2)^{h_2}\dots(z-a_t)^{h_t}}\,, \\ h_i<n\,, \quad \sum_1^t h_i\equiv 0 \pmod n \quad \nu=\infty,\,0,\,1,\,\dots\,n-1 \\ \varepsilon^n=1\,, \qquad \varepsilon\neq 1\,, \\ \omega_\nu=\omega \qquad \text{per} \qquad \nu=\infty\,, \\ \omega_\nu=\omega' \qquad \text{per} \qquad \nu=0,\,1,\,2,\,\dots\,n-1\,, \end{cases}$$

che rappresentano superficie *irriducibili*, perchè i due fattori H_ν e $\sqrt[n]{\ }$, che entrano in X, sono ugualmente determinati a meno di una moltiplicazione per ε^λ, di guisa che i rami della funzione possono essere scambiati tra loro, tenendo fermo z, e variando u, o reciprocamente.

Le formule (I) *dànno i tipi delle superficie ellittiche di determinante primo n, rappresentate sopra il cilindro ellittico n-plo*

$$x=\boldsymbol{p}(u)\,, \qquad y=\boldsymbol{p}'(u)\,.$$

Le formule (I), per $t=2$, rappresentano, come già si è osservato, una superficie con un fascio di curve C di genere 0, riferibile quindi ad un *nuovo* cilindro ellittico; per $t>2$ ci dànno superficie ellittiche, con un fascio di C irrazionali, che perciò non sono riferibili a rigate.

In luogo di combinare le formule (1), (2), possiamo combinare nel medesimo modo le (1), (2′); otteniamo *così i seguenti tipi di superficie ellittiche equivalenti a quelli rappresentati dalle formule* (I):

$$\text{(I')}\qquad \begin{cases} Z=z\,, \qquad Y=y\,, \\ X=\sqrt[n]{f_\nu(xy)\cdot(z-a_1)^{h_1}\dots(z-a_t)^{h_t}}\,, \\ h_i<n\,, \quad \sum h_i\equiv 0 \pmod n\,, \\ \varphi(xy)=y^2-4x^3-g_2x-g_3=0\,. \end{cases}$$

Osserviamo che è lecito di sostituire nelle (I') f_ν^λ, con $\lambda < n$, ad f_ν, sostituendo in pari tempo λh_i ad h_i; ciò corrisponde ad eseguire la trasformazione della superficie, che si ottiene ponendo $\overline{X} = X^\lambda$.

È pur lecito, dopo eseguito il cambiamento indicato, di sostituire agli esponenti λh_i, i rispettivi resti rispetto al modulo n, ciò che equivale ad una nuova trasformazione della superficie.

7. - Caso in cui il determinante sia un numero composto.

Vediamo ora come la costruzione delle superficie ellittiche il cui determinante n sia un numero composto, si riduca a quello già trattato.

Sia per es.

$$n = pq\,,$$

dove p e q sono numeri primi.

Una superficie ellittica F di determinante n si lascia rappresentare sopra un'altra superficie ellittica F', contata p volte, e questa alla sua volta sul cilindro φ contato q volte.

Riferendoci alle formule (I') del precedente numero, si ottengono quindi facilmente i tipi delle superficie ellittiche di determinante

$$n = pq\,,$$

mediante equazioni della forma:

$$Z = z\,, \qquad Y = y\,,$$

$$X = \sqrt[p]{(z-a_1)^{s_1} \dots (z-a_i)^{s_i} \psi(xy) \sqrt[q]{(z-a_{i+1})^{h_{i+1}} \dots (z-a_t)^{h_t} f(xy)}}\,,$$

$$\varphi(xy) = y^2 - 4x^3 - g_2 x - g_3 = 0\,,$$

dove $f = 0$ e $\psi = 0$ sono due curve aventi con $\varphi = 0$ dei contatti rispettivamente q-punti e p-punti.

Sostituendo, nelle formule precedenti, ψ^q a ψ, ed eseguendo le sostituzioni corrispondenti sugli esponenti, secondo ciò che abbiamo avvertito in fine al precedente numero, le formule suddette si riducono alla forma

(II)
$$\begin{cases} Z = z\,, \qquad Y = y\,, \\ X = \sqrt[n]{(z-a_1)^{h_1} \dots (z-a_t)^{h_t} \psi(xy) \cdot f(xy)}\,, \\ \varphi(xy) = 0\,, \\ n = pq\,, \quad h_i < n\,, \quad \sum h_i \equiv 0 \pmod{n}\,. \end{cases}$$

Le formule (II) sono affatto analoghe alle (I') e lasciano scorgere immediatamente l'estensione al caso in cui il determinante n abbia più di due fattori primi.

Giova avvertire che, essendo n un numero composto, si presenta una distinzione relativa all'*ordine* delle curve di diramazione

$$z = a_i ,$$

del cilindro n-plo φ. Per es. nel caso:

$$n = pq ,$$

la $z = a_i$ avrà l'ordine n se h_i è primo con n, ed invece avrà l'ordine

$$r_i = p \quad \text{se} \quad h_i \equiv 0 \pmod{q} ,$$

$$r_i = q \quad \text{se} \quad h_i \equiv 0 \pmod{p} .$$

8. - I plurigeneri delle superficie ellittiche e le condizioni perchè una superficie possa trasformarsi in una rigata.

Proponiamoci ora di determinare il genere p_g ed i plurigeneri $P_2, P_3, \ldots$ delle superficie ellittiche F di determinante $n > 1$, in cui le traiettorie del gruppo G formano un fascio razionale; il primo resultato di questa determinazione sarà che

$$p_g = 0 ,$$

come già abbiamo annunziato.

Il calcolo di $p_g = P_1$, e in generale dei plurigeneri P_i di F, si può compiere valendosi della rappresentazione indicata di F sopra un cilindro ellittico n-plo

$$\varphi(xz) = 0 .$$

Moviamo perciò dal seguente LEMMA [15]. – Due superficie φ, F sieno in corrispondenza $[1, n]$, per modo che si abbia su φ una curva di dira-

---

[15] Questo lemma generalizza la relazione fra i sistemi canonici di due superficie in corrispondenza $[1, n]$ da me stabilita nelle *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche*, cap. VI (« Memorie Acc. Torino », 1893) [queste *Memorie*, vol. I, V]. In un altro senso, assai notevole, quella relazione è stata estesa dal sig. SEVERI (« Rendic. Istituto Lombardo », 1903).

mazione D_1; sia L_1 una curva di φ ed L_1' una curva aggiunta ad L_1; ad L_1, L_1' (contate ciascuna n volte) corrispondano su F due curve, che indichiamo rispettivamente con L, L', e alla D_1 (presa semplicemente) corrisponda su F una curva (di coincidenza) D; allora la curva

$$L' + D$$

è aggiunta alla

$$L ,$$

sopra la superficie F.

Per dimostrare l'enunciato, si avverta anzitutto come esso si giustifichi quando L_1 appartenga ad un sistema lineare $|L_1|$, ∞^2 almeno, non contenente ∞^1 curve spezzate. Infatti allora, la stessa condizione venendo soddisfatta per $|L|$, le curve aggiunte alle L su F, sono definite dalla proprietà di segare gruppi canonici sulle L stesse, e questa proprietà spetta appunto alle curve $L' + D$, in forza di un teorema di CASTELNUOVO [16].

Si passa poi al caso in cui la precedente restrizione non sia soddisfatta, valendosi della proprietà fondamentale delle curve aggiunte.

Applichiamo il lemma anzidetto, alla corrispondenza $[1, n]$ tra il cilindro φ e la superficie ellittica F. La curva di diramazione D_1, su φ, è costituita dalle sezioni piane

$$z = a_1 , \quad z = a_2 , \quad \ldots , \quad z = a_t ,$$

dove si può supporre

$$t \geqslant 3 ,$$

escludendo il caso in cui la F sia riferibile ad un nuovo cilindro semplice.

La curva

$$z = a_i ,$$

deve essere contata, come facente parte di D_1, $r_i - 1$ volte, se r_i designa l'*ordine* di essa, se cioè ad ogni suo punto corrispondono su F n/r_i punti distinti, ciascuno dei quali è un punto di coincidenza r_i-plo. Perciò, designando genericamente con K le curve ellittiche di F che corrispondono

---

[16] « Atti Accad. dei Lincei », 1891.

alle sezioni piane

$$z = \text{cost.}$$

di φ (contate n volte), potremo designare la curva D col simbolo:

$$D = \sum_{i=1}^{i=t} \frac{K_i}{r_i}(r_i - 1),$$

dove le K_i sono particolari curve del fascio

$$|K_i| = |K|.$$

Ciò posto si consideri una curva L di F rappresentata sul cilindro n-plo φ da due sezioni piane $z = \text{cost.}$ e da un certo numero di generatrici $x_1, x_2, \ldots x_s$.

Il sistema aggiunto $|L'|$ (all'infuori di eventuali componenti eccezionali fisse, rappresentate da punti di φ o dalle generatrici all'infinito) resta definito dalla curva che ha per immagine su φ

$$D_1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_s .$$

Segue di qui che, se si considerano su F le curve ellittiche K (del fascio razionale), il sistema $|2K|$ ammette come sistema aggiunto quello definito dalla curva:

$$D = \sum_i \frac{K_i}{r_i}(r_i - 1) .$$

Ma, stante la supposta irriducibilità delle K generiche, ciascuna delle curve $[K_i(r_i - 1)]/r_i$ appartiene ad un sistema lineare completo di dimensione 0, cioè nessuna di esse può variare in un fascio; e, poichè codeste curve non s'incontrano fra loro, anche la D (composta di t parti sconnesse) appartiene ugualmente ad un sistema lineare di dimensione 0, il quale non può dunque contenere $|2K|$. Resta così provato che *il genere*

$$p_g = 0 .$$

Collo stesso metodo si può cercare se esista e quale sia in generale il sistema m-canonico di F (di dimensione $P_m - 1$).

Esso viene rappresentato dal simbolo

$$\left| \sum_{i=1}^{i=t} \frac{mK_i(r_i - 1)}{r_i} - 2mK \right| .$$

Se dunque esistono ∞^d curve m-canoniche,

$$d = P_m - 1 > 0 ,$$

queste si comporranno di d curve K e di una curva fissa, composta delle K_i/r_i prese un certo numero h_i di volte:

$$\sum_1^t \frac{h_i K_i}{r_i} ,$$

dove

$$0 \leqslant h_i < r_i .$$

Pertanto avremo

$$\left| \sum_1^t \frac{mK_i(r_i - 1)}{r_i} - 2mK \right| = \left| dK + \sum_1^t \frac{h_i K_i}{r_i} \right| ,$$

cioè

$$|mtK - 2mK - dK| = \left| \sum_1^t \frac{m + h_i}{r_i} K_i \right| ,$$

$$|[m(t-2) - d]K| = \left| \sum_1^t \frac{m + h_i}{r_i} K_i \right| .$$

Una siffatta relazione porta che $(m_i + h_i)/r_i$ sia un numero intero ϱ_i, tale che

$$\frac{m}{r_i} \leqslant \varrho_i < \frac{m}{r_i} + 1 ,$$

ed allora si ha

$$m(t-2) - d = \sum_1^t \varrho_i ,$$

$$d = P_m - 1 = m(t-2) - \sum_1^t \varrho_i .$$

Il numero $-\varrho_i$ è l'intero che immediatamente precede, in ordine di grandezza algebrica, la frazione $-m/r_i$; esso può quindi designarsi, secondo l'uso, con

$$-\varrho_i = \left[\frac{-m}{r_i} \right] .$$

Allora la formula precedente si scrive:

$$P_m = 1 + m(t-2) + \sum_1^t \left[\frac{-m}{r_i}\right].$$

Questa formula dà l'espressione dello m-genere P_m della superficie ellittica F, in quanto si prenda $P_m = 0$ tutte le volte che il secondo membro risulti negativo.

Per $m = 1$, si ha

$$P_1 = p_g = 0\,,$$

mentre la formula precedente darebbe il valore del genere aritmetico

$$p_a = -1\,.$$

Per $m = 2$, si ha

$$\left[\frac{-2}{r_i}\right] = -1\,, \qquad (r_i \geqslant 2),$$

quindi *il bigenere vale*

$$P_2 = t - 3\,,$$

e si ha

$$P_2 > 0\,, \qquad \text{per} \qquad t > 3\,.$$

Risulta anche

$$P_m > 0\,,$$

per ogni valore di $m > 2$.

Calcoliamo ora i primi plurigeneri in corrispondenza al valore minimo di t:

$$t = 3\,.$$

(Per $t = 2$, come abbiamo detto, la superficie F è riferibile ad una rigata ellittica, e naturalmente la formula dà sempre

$$P_m = 0)\,.$$

Designando con π (> 0) il genere delle curve C, rappresentate dalle generatrici n-ple di φ, si ha

$$\sum_1^t \frac{n(r_i - 1)}{r_i} = 2n + 2\pi - 2\,,$$

quindi

$$n\left\{\sum_1^t \frac{r_i - 1}{r_i} - 2\right\} \geqslant 0\,,$$

$$\sum_1^t \frac{r_i - 1}{r_i} \geqslant 2\,.$$

La sommatoria contiene nel nostro caso tre termini; sviluppando la diseguaglianza che precede si ha

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \leqslant 1\,.$$

In corrispondenza alle soluzioni di questa diseguaglianza, prendendo

$$r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3\,,$$

si trova:

a) per $r_1 = 2$, $(r_2 \geqslant 3)$

$$P_2 = P_3 = 0\,,$$

ed inoltre

$$P_4 = P_5 = 0\,, \qquad P_6 = 1\,, \qquad (r_2 = 3,\ r_3 \geqslant 6),$$

oppure

$$P_4 = 1\,, \qquad (r_3 \geqslant r_2 \geqslant 4);$$

b) per $r_1 = 3$ $(r_2 \geqslant 3)$

$$P_2 = 0\,, \qquad P_3 = 1\,, \qquad P_6 \geqslant 1;$$

c) per $r_1 \geqslant 4$ $(r_3 \geqslant r_2 \geqslant r_1 \geqslant 4)$

$$P_2 = 0\,, \qquad P_3 = 1\,, \qquad P_4 = 2\,, \quad \text{ecc.}$$

Risulta di qui la conseguenza importante che « per ogni superficie ellittica non riferibile ad una rigata, si ha sempre

$$P_4 > 0 \quad \text{o} \quad P_6 > 0\,\text{»}\,.$$

I resultati precedenti ci permettono quindi di affermare che: *le condizioni perchè una superficie sia riferibile ad una rigata di genere* $p \geqslant 1$, *sono*

$$P_4 = P_6 = 0\,, \qquad p_a = -p\,.$$

Ora osserviamo che, se

$$P_4 = P_6 = 0\,,$$

segue

$$p_g = P_2 = 0\,, \qquad p_a \leqslant 0;$$

ma, nel caso $p_a = 0$, l'annullarsi del bigenere P_2 dà la condizione di razionalità (CASTELNUOVO); pertanto si ha il teorema generale seguente:

Le condizioni perchè una superficie algebrica sia riferibile ad una rigata (razionale o no) sono espresse dall'annullarsi del quadrigenere e del sestigenere:

$$P_4 = P_6 = 0\,.$$

9. - Superficie di bigenere zero.

La discussione aritmetica accennata nel precedente numero permette di ottenere tutti *i tipi di superficie di bigenere zero, non appartenenti alla famiglia delle rigate* ($P_4 > 0$ o $P_6 > 0$ e quindi, in ogni caso, $P_{12} > 0$).

Queste superficie sono rappresentate sul cilindro ellittico n-plo $\varphi = 0$, con tre sezioni piane di diramazione

$$z = a_1\,, \qquad z = a_2\,, \qquad z = a_3\,,$$

aventi certi ordini r_1, r_2, r_3, divisori di n; i numeri r_1, r_2, r_3 soddisfano alle diseguaglianze

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \leqslant 1\,,$$

$$2 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3\,,$$

$$n\left(1 - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) = 2\pi - 2\,,$$

dove si designa con π ($\geqslant 1$) il genere delle curve del fascio ellittico, aventi come immagini le generatrici di φ.

Si hanno 4 *famiglie* di superficie che possono distinguersi secondo i valori dei primi plurigeneri, come indica il seguente quadro, nel quale vengono completati i resultati già esposti nel precedente numero:

$$P_2=0 \begin{cases} P_3=0 \begin{cases} P_4=0, & P_5=0, & P_6=1, & (r_1=2,\ r_2=3,\ r_3\geqslant 6), \\ P_4=1, & P_5=0, & P_6=0,1,2, & (r_1=2,\ r_2=4,\ r_3\geqslant 4), \end{cases} \\ P_3=1 \begin{cases} P_4=0,1, & P_5=0,1,2, & P_6=1,2,3, & (r_1=3,\ r_2\geqslant 3,\ r_3\geqslant r_2), \\ P_4=2, & P_5=0,1,2, & P_6=1,2,3, & (r_1\geqslant 4,\ r_3\geqslant r_2\geqslant r_1). \end{cases} \end{cases}$$

A ciascuna delle prime tre famiglie appartengono superficie con un fascio ellittico di curve ellittiche ($\pi = 1$), il cui determinante n è un numero qualunque della forma

$$n = 6m \qquad (r_1 = 2,\ r_2 = 3,\ r_3 = 6),$$

o rispettivamente

$$n = 4m \qquad (r_1 = 2,\ r_2 = r_3 = 4),$$

$$n = 3m \qquad (r_1 = r_2 = r_3 = 3):$$

In ogni famiglia trovansi poi superficie con un fascio ellittico di curve di genere $\pi > 1$ e determinante n dove $2\pi - 2$ è il prodotto di

$$1 - \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)$$

per un numero intero

$$n = \frac{2\pi - 2}{1 - \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)}.$$

Fra le superficie corrispondenti a $\pi = 1$ notiamo in particolare quelle con un fascio ellittico di curve armoniche o equianarmoniche. Le prime (corrispondentemente al caso del determinante massimo $n = 8$) si presentarono al sig. CASTELNUOVO ed a me fino dal 1900, come « rigate ellittiche del 4° ordine doppie, con una curva di diramazione L_4 di ordine 8, quadrisecante le generatrici ».

In generale una rigata ellittica del 4° ordine $\varphi_4(x\,y\,z) = 0$, non contiene una curva (ellittica) L_m, d'ordine $2m$, m-secante le generatrici. La condizione perchè ciò accada si può esprimere nel modo seguente: sia u l'integrale ellittico (coi periodi ω, ω') appartenente alla rigata; la somma

dei valori di u per le generatrici uscenti da un punto di una direttrice è costante; essa può supporsi $\equiv 0$ per una delle due direttrici, $\equiv \chi$ per l'altra. Allora l'esistenza della curva L_m è data dalla condizione

$$m\chi \equiv 0 \qquad (\text{mod } \omega, \omega').$$

Ora per qualunque valore di m si può ottenere una rigata φ_4 possedente una curva L_m irriducibile; ma resta a vedere quando possa costruirsi effettivamente una superficie rappresentata sulla φ_4, multipla secondo un dato numero, in guisa che L_m sia la curva di diramazione.

Prendendo

$$\chi = \frac{\omega}{4},$$

si vede che per la L_4 (di 8° ordine) passano infinite superficie del 4° ordine secanti φ_4 in gruppi di 8 generatrici

$$u, \qquad -u, \qquad -u+\frac{\omega}{4}, \qquad u-\frac{\omega}{4},$$

$$u+\frac{\omega}{2}, \qquad -u+\frac{\omega}{2}, \qquad -u+\frac{3\omega}{4}, \qquad u-\frac{3\omega}{4};$$

quindi, facendo

$$u = 0,$$

si trova una superficie quartica

$$\psi_4(x\,y\,z) = 0,$$

secante φ_4 secondo L_4 e tangente sulla φ_4 ad essa secondo 4 generatrici. Allora la superficie

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = z, \qquad U = \sqrt{\psi_4},$$

$$\varphi_4(x\,y\,z) = 0,$$

dello spazio S_4, viene rappresentata sulla φ_4 doppia colla curva di diramazione L_4.

Si ottiene un altro esempio (che pure avevamo effettivamente co-

struito) prendendo

$$\chi = \frac{\omega}{6} ;$$

esiste allora una superficie rappresentata doppiamente su φ_4, che possiede un fascio ellittico di curve di genere due, ecc.

La questione generale, d'esistenza delle φ_4 p-ple con curva di diramazione L, composta in generale di s m-secanti da contarsi ciascuna secondo l'ordine p, resta ormai decisa implicitamente dai resultati precedenti; le superficie ellittiche che così si ottengono corrispondono al caso particolare

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_s = p ,$$

$$r_{s+1} = r_{s+2} = m ,$$

dove il determinante è

$$n = mp .$$

Bologna, 3 marzo 1905.

XXXVII.

SULLE SUPERFICIE ALGEBRICHE CHE AMMETTONO UN GRUPPO CONTINUO DI TRASFORMAZIONI BIRAZIONALI IN SE STESSE

« Rend. del Circolo Matematico di Palermo », to. XX (1905), pp. 61-72.

La profonda analisi delle superficie che posseggono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in se stesse, iniziata dal sig. PICARD e completata (particolarmente nel caso ellittico) dal sig. PAINLEVÉ, ha condotto a determinare tre famiglie di superficie:

1) superficie con un gruppo ∞^1 razionale, riferibili a rigate;

2) superficie (ellittiche) con un gruppo ∞^1 ellittico, le quali vengono caratterizzate dall'esistenza di due fasci di curve di ugual modulo: un fascio, razionale o irrazionale, di curve ellittiche (traiettorie del gruppo), ed un fascio ellittico di curve di genere comunque elevato;

3) superficie (iperellittiche) con un gruppo permutabile ∞^2, rappresentabili mediante funzioni uniformi quattro volte periodiche di due parametri e riferibili alla varietà delle coppie di punti di una curva di genere due.

Ogni superficie che ammetta un gruppo continuo di trasformazioni birazionali appartiene ad una (almeno) delle tre famiglie sopraindicate, per cui è data una rappresentazione parametrica caratteristica [1].

Le ricerche accennate esauriscono dunque il problema di classificare le superficie con un gruppo continuo di trasformazioni birazionali; sorge bensì un'altra questione cioè « se le tre famiglie di superficie che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali possano caratterizzarsi, separatamente o nel loro insieme, mediante i valori dei loro caratteri invarianti (il genere numerico p_a, il genere geometrico p_g, ed in generale i plurigeneri P_i) come accade nel caso delle curve ».

---

[1] Per le superficie che ammettono un gruppo più volte infinito di trasformazioni, vedasi l'estensione del teorema di SCHWARZ nella Nota di CASTELNUOVO-ENRIQUES (« Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris », 29 juillet 1895) [queste *Memorie*, vol. I, XI].

A tale domanda porge una risposta semplicissima la presente Nota. Si ha il teorema:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie, non razionale, ammetta un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sè, è che il suo genere numerico sia negativo:

$$p_a < 0 .$$

Le superficie per cui

$$p_a < -1 ,$$

appartengono alla prima famiglia, cioè sono riferibili a rigate.

Le superficie per cui

$$p_a = -1 ,$$

sono ellittiche (con un fascio di genere p_g di traiettorie) o iperellittiche, quest'ultimo caso presentandosi soltanto per $p_g = 1$.

Si possono distinguere i due casi, ellittico ed iperellittico, corrispondenti ai valori

$$p_a = -1 , \qquad p_g = 1 ,$$

considerando il quadrigenere P_4: per

$$P_4 > 1 \qquad (p_a = -1),$$

si hanno superficie ellittiche possedenti un *gruppo di trasformazioni* ∞^1 *e non più ampio; per*

$$P_4 = 1 \qquad (p_a = -1),$$

si hanno superficie iperellittiche possedenti un gruppo permutabile ∞^2, il quale in casi particolari (riducibilità dei periodi degli integrali) ammette *due* sottogruppi ellittici ∞^1.

È da notare che tra le superficie ellittiche con $p_g = 0$ trovansi in particolare superficie rientranti anche nella 1ª famiglia (rigate), le quali contengono infiniti gruppi ellittici ∞^1, ed anche gruppi più ampi.

A questo proposito mi sia permesso ricordare, come la famiglia delle rigate sia stata caratterizzata nei miei recenti lavori, che avrò occasione di citare fra un momento, mediante le condizioni:

$$P_4 = P_6 = 0 .$$

Prima di svolgere brevemente la dimostrazione dei teoremi enunciati, dirò qualche parola intorno allo sviluppo delle idee che mi vi hanno condotto.

Questo studio costituisce una estensione di quello che recentemente ho compiuto sulle superficie di genere $p_g = 0$ [2], riuscendo appunto a dimostrare che per

$$p_g = 0\,, \qquad p_a < -1\,,$$

si hanno superficie appartenenti alla famiglia delle rigate, e per

$$p_g = 0\,, \qquad p_a = -1\,,$$

superficie (ellittiche) possedenti un gruppo ∞^1 di trasformazioni le cui traiettorie formano un fascio razionale.

Ma, mentre l'estensione riesce per una parte esente da una difficoltà essenziale propria all'ipotesi $p_g = 0$, essa esige d'altra parte la conoscenza d'un fatto nuovo.

Tale conoscenza viene fornita (oltrechè dalla conclusione a cui hanno portato gli studi di SEVERI, ENRIQUES, CASTELNUOVO — e d'altra parte di PICARD — sugli integrali appartenenti ad una superficie irregolare [3]) da certe considerazioni sulle superficie, per cui alcuni integrali picardiani sono funzioni l'uno dell'altro, che dànno il teorema enunciato nel n. 1.

Il sig. CASTELNUOVO ed io c'incontrammo nello sviluppo di queste considerazioni, ritraendone, indipendentemente, la veduta che esse permetterebbero di caratterizzare le superficie di genere $p_a < 0$, ciò che io attuo qui in rapporto alle mie ricerche precedentemente citate.

Frattanto venimmo a conoscere che il sig. DE FRANCHIS [4] ci aveva in parte preceduto, stabilendo che una superficie per cui un integrale picardiano è funzione di un altro (algebricamente indipendente) contiene un fascio irrazionale di curve, e deducendone in particolare che ogni superficie di genere $p_a < -1$ possiede sempre un tal fascio.

Il sig. DE FRANCHIS non ha avvertito che di qui era lecito senz'altro dedurre la « riferibilità a rigate delle superficie per cui $p_a < -1$ », in

---

([2]) *Sur les surfaces algébriques de genre zero* (« Comptes Rendus », 27 février 1905); *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero* (questi « Rendiconti », t. XX, 1905, pagg. 1-33, adunanza del 5 marzo 1905) [questo volume, XXXVI]. Citerò questa Memoria con (*A*).

([3]) Ad una superficie irregolare ($p_a < p_g$) appartengono $p_g - p_a$ integrali di 1ª specie, con $2(p_g - p_a)$ periodi. Cfr. CASTELNUOVO, « Comptes Rendus », 23 janvier 1905. Vedasi poi la nuova dimostrazione di SEVERI: « Comptes Rendus », 3 avril 1905. Cfr. d'altra parte PICARD, ibidem, 16 janvier et 3 avril 1905.

([4]) Cfr. la sua Nota in questi « Rendiconti », t. XX (1905), pagg. 49-54 (adunanza del 23 aprile 1905).

virtù di un noto procedimento (5), che anzi io stesso ho avuto già occasione di applicare a questo caso concreto [anche ultimamente — in (*A*) — per giungere al medesimo teorema di riferibilità colla condizione aggiuntiva $p_g = 0$, che ora si è chiarita superflua].

D'altra parte, le considerazioni che il sig. DE FRANCHIS svolge per $p_a < -1$, venivano da noi riferite più generalmente al caso di un p_a qualunque abbastanza piccolo rispetto a p_g, come il sig. CASTELNUOVO esporrà in una Lettera resa pubblica in questi Rendiconti, insieme alla presente Nota.

1. – Moviamo dal seguente teorema:

« Ogni superficie per cui

$$p_g > 2p_a + 3 ,$$

contiene un fascio irrazionale, di genere > 1, di curve » (6).

In particolare la diseguaglianza precedente è soddisfatta per

$$p_a < -1 \qquad (p_g \geqslant 0).$$

Allora designando con $\varrho > 1$ il genere del fascio, con π il genere delle curve K di esso, con Δ ($\geqslant 0$) il numero delle K dotate d'un punto doppio e con $p^{(1)}$ il genere lineare della superficie, si può calcolare l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE in rapporto al fascio delle K, e si trova (7)

$$12p_a - p^{(1)} + 9 = \Delta + 4(\varrho - 1)(\pi - 1) - 4 ,$$

da cui, essendo

$$p_a \leqslant -2 , \qquad \Delta \geqslant 0 , \qquad \varrho \geqslant 2 ,$$

si deduce

$$-7 - p^{(1)} \geqslant 4\pi ,$$

e

$$p^{(1)} \leqslant 7 ;$$

---

(5) CASTELNUOVO-ENRIQUES, « Annali di Matematica », s. III, t. VI (1901), pagg. 165-225 [questo volume, XXXIII].

(6) Cfr. l'accennata Lettera del CASTELNUOVO al DE FRANCHIS (questi « Rendiconti », t. XX (1905), pagg. 55-60 (adunanza del 14 maggio 1905)).

(7) CASTELNUOVO-ENRIQUES, « Annali di Matematica », l. c., n. 6, Oss. n. 21.

ciò che porta $\pi = 0$ e la riferibilità delle superficie ad una rigata di genere $-p_a > 1$ (8).

Dunque le superficie per cui $p_a < -1$ sono riferibili a rigate (9).

2. – Pongasi

$$p_a = -1 ,$$

e si distinguano i tre casi:

$$p_g = 0 , \qquad p_g > 1 , \qquad p_g = 1 .$$

Il primo caso è già esaurito (*A*), e conduce a superficie ellittiche le cui traiettorie sono curve (ellittiche) di un fascio razionale.

3. – Riferiamoci al 2° caso:

$$p_g > 1 .$$

La diseguaglianza del n. 1 è soddisfatta; pertanto alla superficie appartiene un fascio di genere $\varrho > 1$ di curve K. E, conservando le designazioni del n. 1, avremo similmente

$$12p_a - p^{(1)} + 9 = \Delta + 4(\varrho - 1)(\pi - 1) - 4 ,$$

dove ora si ha:

$$\Delta \geqslant 0 , \qquad \varrho > 1 , \qquad p^{(1)} \geqslant 1 , \qquad p_a = -1;$$

si deduce quindi

$$\pi = 1 , \qquad \Delta = 0 .$$

La superficie possiede dunque un fascio di curve ellittiche, mediante le quali risulteranno composte le curve canoniche (NÖTHER); questa conclusione è d'accordo colla deduzione aritmetica del valore di $p^{(1)}$ tratto dalla relazione precedente:

$$p^{(1)} = 1 .$$

Ripetiamo ora brevemente un ragionamento svolto in (*A*), n. 3.

(8) CASTELNUOVO-ENRIQUES, l. c., n. 21.

(9) Allo stesso resultato giunge anche il sig. CASTELNUOVO nella citata Lettera.

Anzitutto, essendo $\Delta = 0$, le curve K hanno tutte lo stesso modulo. Inoltre si può scegliere come modello proiettivo della superficie, una tale superficie, di un certo spazio S_r, che le K sieno curve ellittiche normali (di quello spazio o di spazi inferiori contenuti in S_r); allora due K generiche risultano proiettive in un numero finito n di modi, e, se si tien fermo un punto P in una K, sopra ogni altra K resta determinato razionalmente un gruppo (G_n) di n punti, omologhi a P. Il luogo dei gruppi G_n costituisce una curva C, n-secante le K, e le curve analoghe a C formano, sulla superficie, un fascio senza punti base.

Il fascio delle C può supporsi a priori razionale o ellittico; risulterà poi che (nelle date circostanze) ha luogo necessariamente il 2° caso.

Costruiamo sulla superficie le curve canoniche: esse si compongono di curve K o di parti di esse, e debbono segare sopra le C gruppi canonici.

Teniamo presente che nel fascio delle K si avranno in generale delle curve degeneri, le quali si riducono a componenti multiple

$$K_1, K_2, \ldots$$

contate secondo certi numeri

$$s_1, s_2, \ldots$$

maggiori dell'unità ((*A*), n. 6). Si riconosce quindi che le curve canoniche della superficie sono costituite:

1) da $2\varrho - 2$ curve K, costituenti un gruppo della serie canonica $g^{\varrho-1}_{2\varrho-2}$ nel fascio di genere ϱ;

2) e dalle componenti fisse

$$K_1, K_2, \ldots$$

prese rispettivamente

$$s_1 - 1, \qquad s_2 - 1, \ldots$$

volte.

Pertanto il genere della superficie vale

$$p_g = \varrho .$$

Ora il fascio delle K (di genere p_g) porta

$$p_g$$

integrali di PICARD di 1ª specie della superficie, con

$$2p_g$$

periodi; il numero totale degli integrali è

$$p_g - p_a = p_g + 1 ,$$

e quello dei periodi

$$2(p_g + 1) .$$

Per un noto teorema di POINCARÉ sulla riducibilità dei periodi degli integrali abeliani o di differenziali totali, alla superficie deve appartenere anche un integrale di 1ª specie I, i cui periodi si riducono a due soli distinti ω, ω'; le curve $I = \text{cost.}$, cui corrispondono valori assegnati di

$$\boldsymbol{p}(I\,|\,\omega\omega') , \qquad \boldsymbol{p}'(I\,|\,\omega\omega') ,$$

costituiscono allora sulla superficie un fascio ellittico, che si potrebbe riconoscere non essere diverso da quello delle C, innanzi costruite.

Ma, come abbiamo notato in (A), n. 4, la proprietà di contenere un fascio (razionale o irrazionale) di curve ellittiche K di ugual modulo, e un secondo fascio ellittico di curve C (proprietà che si riduce d'altronde alla rappresentazione parametrica di PAINLEVÉ, ibidem, n. 5) caratterizza le superficie che ammettono un gruppo ellittico ∞^1 di trasformazioni, aventi come traiettorie le curve K.

Concludiamo dunque che: le superficie per cui

$$p_a = -1 , \qquad p_g > 1 ,$$

ammettono un gruppo ellittico ∞^1 di trasformazioni, le cui traiettorie sono le curve (ellittiche) di un fascio di genere p_g.

Questa conclusione è del tutto conforme a quella relativa al caso $p_g = 0$.

4. – Discutiamo infine il terzo caso:

$$p_a = -1 , \qquad p_g = 1 .$$

Si avranno due integrali di PICARD di 1ª specie u, v, che, a priori, potrebbero supporsi l'uno funzione dell'altro; ma in tale ipotesi la super-

ficie conterrebbe un fascio irrazionale di genere *due* [10]) e, pel ragionamento del n. 3, dovrebbe essere una superficie ellittica di genere $p_g = 2$, ciò che contraddice al valore assegnato $p_g = 1$.

Ora, i due integrali u, v, essendo indipendenti, si possono considerare le coordinate x, y, z dei punti della superficie (limiti di integrazione) come funzioni di u, v.

Questo problema d'inversione è stato trattato in generale (indipendentemente dal valore di p_g e per un numero qualunque d'integrali) dai sigg. PICARD e PAINLEVÉ [11]); il sig. PICARD (l. c.) ha approfondito il problema speciale che nasce qui in corrispondenza all'ipotesi $p_g = 1$.

I resultati di tali ricerche, per quanto a noi interessa, dànno:

1) Gl'integrali u, v della superficie (F) riprendono un numero finito di volte lo stesso valore, cioè la F si può rappresentare sopra una superficie iperellittica multipla (Ψ).

2) Se la superficie F è priva di curva canonica propriamente detta (non contandosi come vere parti di essa le curve, razionali, eccezionali, che del resto possono essere sempre soppresse) essa è iperellittica. Il sig. PICARD dopo avere stabilito questo resultato ha osservato che l'ipotesi della mancanza di una curva canonica (di genere > 0) doveva ritenersi superflua in base a ciò che dice il sig. NÖTHER sulle curve « ausgezeichnete »; ma siccome qualche nuovo esempio ha portato a modificare su tale riguardo le conclusioni dell'illustre geometra tedesco, così apparirà naturale che, riprendendo in esame la questione, si trovi, accanto al caso trattato da PICARD, anche un caso nuovo che corrisponde, come vedremo, a superficie del tipo ellittico.

Nel nostro esame prendiamo le mosse dal teorema 1), in base a cui: una superficie F, di generi $p_a = -1$, $p_g = 1$, si può rappresentare sopra una superficie iperellittica multipla Ψ, che è con F in una corrispondenza $[1, n]$. E per semplicità riteniamo Ψ ed F prive di curve eccezionali, ipotesi che è sempre lecito adottare [12]).

Consideriamo la corrispondenza $[1, n]$ tra Ψ ed F, e la curva di diramazione D (d'ordine $\geqslant 0$) che essa ha su Ψ; di tale curva (quando essa abbia l'ordine > 0) supporremo per semplicità di ragionamento che sia irriducibile e ne designeremo con ϱ il genere effettivo, con δ il numero dei punti doppi, con τ il numero delle cuspidi; avvertiamo che dovrà porsi $\varrho = 1$, $\tau = 0$ se la curva D è mancante (d'ordine $= 0$).

Ora i generi numerici p_a, p_a' di F e Ψ saranno legati da una relazione

---

([10]) Cfr. DE FRANCHIS e CASTELNUOVO, l. c.

([11]) Cfr.: PICARD, « Journal de Mathématiques », IV^e série, t. V (1889), pagg. 135-319; PAINLEVÉ, « Acta Mathematica », t. XXVII (1903), pagg. 1-54.

([12]) CASTELNUOVO-ENRIQUES, « Annali di Matematica », l. c., n. 18.

stabilita dal sig. SEVERI [13] che nel nostro caso (poichè Ψ non ha curva canonica propria ed è priva di curve eccezionali) si scrive:

$$24(p_a + 1) = 24n(p'_a + 1) + 6(\varrho - 1) - 2\tau + 3\sum s .$$

In questa formula deve farsi

$$p_a = p'_a = -1 ,$$

e

$$\sum s \geqslant 0 ,$$

designandosi con s le molteplicità di eventuali punti fondamentali per la corrispondenza. Si deduce quindi

$$6(\varrho - 1) \leqslant 2\tau .$$

Ora mostriamo che « non può esistere su F una curva di genere effettivo $\varrho > 1$, con

$$\tau \geqslant 3(\varrho - 1)$$

cuspidi ».

Invero una curva siffatta sarebbe trasformata dalle trasformazioni del gruppo iperellittico di Ψ in una serie continua di curve, parimenti di genere effettivo ϱ, con δ punti doppi e τ cuspidi. Il genere virtuale di tali curve sarà

$$\varrho + \delta + \tau ,$$

ed il grado

$$2(\varrho + \delta + \tau - 1) ,$$

essendo, per Ψ, $p_a = 1$, ed avendosi su di essa una curva canonica d'ordine 0.

Ma d'altra parte due curve infinitamente vicine della nostra serie, hanno 2δ intersezioni assorbite nei punti doppi e 3τ nelle cuspidi, perciò deve essere

$$2\delta + 3\tau \leqslant 2(\varrho + \delta + \tau - 1);$$

---

[13] *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica* (« Rend. Istituto Lombardo », s. II, vol. XXXVI, 1903, pagg. 495-511), pag. 508, 510.

ma, ponendo in questa diseguaglianza

$$\tau \geqslant 3(\varrho - 1),$$

si ottiene

$$9(\varrho - 1) \leqslant 8(\varrho - 1),$$

e quindi si deduce

$$\varrho = 1 \qquad \text{e} \qquad \tau = 0. \qquad \textit{c. d. d.}$$

Due casi sono dunque possibili:

a) sopra Ψ non vi è curva di diramazione (cioè D ha l'ordine $= 0$).

b) sopra Ψ vi è una curva di diramazione ellittica (o composta di curve ellittiche).

5. – Nel caso *a*) possiamo riferirci al ragionamento di PICARD, ed anzi, avendo già esclusa la presenza di una curva di diramazione su Ψ, si può giungere assai rapidamente alla conclusione che la F è, come Ψ, una superficie iperellittica (con un gruppo ∞^2), nel modo che segue:

Si considerino i due gruppi di punti

$$P_1 \equiv (x_1\, y_1\, z_1), \ \ldots \ P_n \equiv (x_n\, y_n\, z_n),$$
$$P_1' \equiv (x_1'\, y_1'\, z_1'), \ \ldots \ P_n' \equiv (x_n'\, y_n'\, z_n'),$$

corrispondenti a due punti

$$P \equiv (XYZ), \qquad P' \equiv (X'Y'Z')$$

di Ψ.

Vi è una trasformazione birazionale di Ψ in cui si corrispondono P, P' e si ottiene quindi una corrispondenza *algebrica* tra i punti P_1, P_1'. Si tratta di dimostrare che P_1' dipende da P_1 in modo *razionale*, e perciò occorre stabilire che se, nello spazio riemanniano F, P_1 descrive un ciclo lineare C_1, ritornando alla posizione iniziale, anche P_1' descrive un cammino chiuso C_1' e non si scambia (come a priori potrebbe supporsi) con $P_2', \ldots P_n'$. A tal fine si osserverà che a C_1 corrisponde su Ψ un ciclo lineare C, e che mentre P descrive C, P' descrive un ciclo lineare che si può dedurre da C con una deformazione continua; ora mentre C si deforma per continuità su Ψ, divenendo C', e ciò *senza contenere mai dei punti di diramazione*, anche C_1, si deformerà su F senza mai cessare di essere un cammino chiuso, e finalmente si trasformerà in un ciclo lineare C_1' descritto da P_1'. *c. d. d.*

6. – Discutiamo il caso *b*).

Se la superficie iperellittica Ψ contiene una curva ellittica, questa appartiene ad un fascio ellittico di curve, trasformate di essa nelle ∞^2 trasformazioni del gruppo iperellittico, e vi è un integrale di PICARD di 1ª specie, i cui periodi si riducono a due distinti; vi sarà dunque un altro integrale di PICARD di 1ª specie parimenti riducibile, e quindi un secondo fascio ellittico di curve ellittiche su Ψ.

Ora alle curve del 1° fascio cui appartiene la D (o le sue componenti), corrisponderanno su F le curve ellittiche K di un fascio ellittico, ed in questo si troveranno un certo numero di curve, multiple secondo certi numeri interi $s_1, s_2, \ldots$ (maggiori dell'unità), le quali, prese rispettivamente $s_1 - 1$, $s_2 - 1, \ldots$ volte, comporranno la curva D' omologa a D; D' costituirà la curva canonica di F[14].

Alle curve del 2° fascio considerato su Ψ, corrisponderanno invece in F curve C, di un certo genere $\pi > 1$, componenti del pari un fascio ellittico.

Si deduce quindi che la F ammette un gruppo ∞^1 ellittico di trasformazioni, che ha come traiettorie le curve K.

7. – Ora come si potranno distinguere i due casi *a*) e *b*)?

Nel caso *a*) mancano, insieme alla curva canonica, tutte le curve pluricanoniche, cioè esse sono d'ordine $= 0$, quindi tutti i plurigeneri sono eguali all'unità:

$$P_i = 1 .$$

Consideriamo invece il caso *b*). Abbiamo una curva canonica D', la cui composizione potrà designarsi in generale col simbolo

$$D' = \sum \frac{K}{s} (s - 1) ;$$

quindi (anche nel caso in cui la sommatoria contenga un solo termine) $4D'$ si comporrà di almeno due curve del fascio ellittico, oltre a componenti fisse, ed apparterrà perciò ad un sistema lineare di dimensione $\geqslant 1$; ciò si esprime scrivendo che il quadrigenere

$$P_4 > 1 .$$

---

(14) ENRIQUES, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche* (« Memorie Acc. Torino », s. II, t. XLIV, 1893) [queste *Memorie*, vol. I, V]. Cfr. anche SEVERI, l. c.

8. – Abbiamo dimostrato che le superficie per cui $p_a = -1$ sono ellittiche o iperellittiche, assegnando i caratteri di distinzione fra i due casi. Importa rilevare esplicitamente che le superficie iperellittiche ed ellittiche hanno sempre $p_a = -1$. Per il caso iperellittico la cosa è ben nota, conoscendosi perfettamente un modello delle superficie iperellittiche, per gli studi di PICARD e HUMBERT.

Per le superficie ellittiche basta riferirsi alla loro rappresentazione sopra un cilindro ellittico multiplo

$$f(x, y) = y^2 - 4x_3 - g_2 x - g_3 = 0 ,$$

con curva di diramazione composta di sezioni piane $z = \text{cost}$.

La formula di SEVERI dà allora il genere numerico.

$$p_a = -1 .$$

Avvertiremo infine che *l'anzidetta rappresentazione permette di costruire effettivamente tutti i tipi di superficie ellittiche*; abbiamo indicato ciò in modo particolareggiato nella memoria (*A*), pel caso $p_g = 0$; e l'estensione al caso di p_g qualunque richiede soltanto poche modificazioni facilmente visibili.

9. – Riunendo i resultati qui ottenuti con quelli dati in (*A*) possiamo rappresentarli nella seguente tabella:

	$p_a < -1$	$p_a = -1$	$p_a = 0$
$P_4 + P_6 = 0$ ($P_4 = 0$, $P_6 = 0$)	rigate di genere $-p_a$	rigate ellittiche	rigate razionali
$P_4 + P_6 > 0$ $p_g P_4 \neq 1$	impossibile	superficie ellittiche con *un* gruppo ∞^1	
$P_4 + P_6 > 0$ $p_g P_4 = 1$ ($p_g = 1$, $P_4 = 1$)	impossibile	superficie iperellittiche con un gruppo permutabile ∞^2	

Bologna, 29 aprile 1905.

XXXVIII.

SUR LES INTÉGRALES SIMPLES DE PREMIÈRE ESPÈCE D'UNE SURFACE OU D'UNE VARIÉTÉ ALGÉBRIQUE À PLUSIEURS DIMENSIONS

par GUIDO CASTELNUOVO et FEDERIGO ENRIQUES

« Annales de l'École Normale supérieure », 3e s., to. XXIII, 1906
pp. 339-366.

Les résultats sur les surfaces algébriques, qu'on vient d'obtenir tout dernièrement, ont établi une certaine analogie entre le *genre* d'une courbe et l'*irrégularité* d'une surface, c'est-à-dire le nombre des intégrales distinctes de différentielles totales de première espèce, dont la surface est douée. Les deux caractères sont liés en effet avec les connexions linéaires des *continua* de RIEMANN à deux et à quatre dimensions, qui représentent la courbe et la surface par des points réels.

L'analogie n'arrive pas pourtant à permettre de transporter aisément aux surfaces la plupart des propriétés connues des courbes. Il serait donc naturel de s'attendre à rencontrer de nouvelles difficultés, lorsqu'on aborderait l'étude des variétés algébriques à trois ou à plusieurs dimensions. Heureusement il n'en est rien, tant que l'on se borne aux questions qui se rapportent à la connexion linéaire, ou, si l'on veut, aux intégrales simples de première ou seconde espèce attachées à la variété algébrique. Nous démontrerons en effet que (n. 3):

Le nombre des intégrales simples distinctes de première espèce appartenant à une variété algébrique à trois (ou plusieurs) dimensions est égal au nombre des intégrales analogues attachées à une surface section de la variété. Pour l'étude des intégrales, de leurs périodes, etc., on peut toujours remplacer la variété par la surface section. On sait bien que la substitution analogue n'est pas permise, lorsqu'on veut examiner les intégrales simples d'une surface algébrique en relation avec les intégrales abéliennes d'une courbe section plane de celle-ci.

Le nombre q des intégrales nommées appartenant à la variété est un caractère invariant de celle-ci, par rapport aux transformations birationnelles. Il est donc naturel d'examiner s'il y a des relations entre ce

nombre q et les autres invariants auxquels on parvient soit par les méthodes géométriques, soit par des considérations d'*Analysis situs*.

Quelques invariants géométriques d'une variété à trois dimensions ont été définis par M. NOETHER, dans un Mémoire classique sur les fonctions algébriques; ce sont des caractères des *surfaces canoniques* découpées sur la variété, d'ordre n, par les variétés *adjointes* d'ordre $n-5$, passant convenablement par les surfaces, les courbes et les points multiples de la variété. C'est ainsi que le genre géométrique $P_g^{(1)}$ et le genre arithmétique $P_a^{(1)}$ d'une surface canonique fournissent deux invariants de la variété, qu'on appelle les *genres superficiels géométrique* et *arithmétique* de celle-ci. Or nous parvenons à démontrer (n. 5) cette relation intéressante:

Le nombre des intégrales simples, distinctes, de première espèce, d'une variété à trois dimensions est égal à la différence $P_g^{(1)} - P_a^{(1)}$ *entre les genres superficiels géométrique et arithmétique de la variété*; fait *exception* le cas où la courbe intersection variable de deux surfaces canoniques est réductible. On remarquera l'analogie de ce théorème avec le résultat relatif aux surfaces, exprimé par l'égalité $q = p_g - p_a$, auquel a conduit une longue série de recherches dues à MM. PICARD, SEVERI, ENRIQUES, CASTELNUOVO. Une propriété analogue subsiste aussi pour les variétés à un nombre quelconque de dimensions.

Une voie tout à fait différente pour découvrir des caractères invariants d'une variété algébrique est indiquée par M. PICARD, dans ses profondes recherches sur ce sujet. Le rôle essentiel est joué ici par le *continuum* de RIEMANN à $2d$ dimensions attaché à une variété algébrique à d dimensions; en effet, les caractères de connexion du *continuum* fournissent des invariants de la variété. Tel est, par exemple, le nombre des cycles linéaires distincts qu'on peut tracer dans le *continuum*, nombre qui, augmenté d'une unité, donne la *connexion linéaire* du *continuum*. Mais on ne parvient pas ainsi à un nouvel invariant, car on verra (n. 7) que:

Le nombre q des intégrales simples, distinctes, de première espèce d'une variété algébrique est la moitié du nombre des cycles linéaires distincts qu'on peut tracer dans le relatif continuum *de Riemann.* Le théorème subsiste quel que soit le nombre d des dimensions de la variété. Pour $d = 1$, on a une proposition connue de RIEMANN. Le cas $d = 2$ a été épuisé tout dernièrement, et d'une manière assez indirecte, en profitant de la relation $q = p_g - p_a$. L'extension aux cas $d > 2$ est, au contraire, assez simple. Il résulte facilement de ce théorème que la connexion linéaire d'une variété algébrique à $d \geqslant 3$ dimensions est égale à la connexion linéaire de la variété à $d-1$, $d-2$, ..., 2 dimensions qui est la section de celle-là par un espace linéaire. C'est une remarque qu'on peut aussi justifier directement par des considérations d'*Analysis situs*.

Une surface (irrégulière) possédant $q > 0$ intégrales simples de première espèce jouit de propriétés géométriques intéressantes, et en particulier de la propriété suivante: il existe sur la surface des systèmes ∞^q de courbes, parmi lesquelles il n'y en a pas ∞^1 appartenant à une série linéaire. Cette proposition, qu'on était amené à soupçonner d'après quelques remarques de M. HUMBERT concernant la proposition réciproque, vient d'être établie récemment par M. ENRIQUES; elle sert à caractériser d'une façon complète, au point de vue géométrique, les surfaces irrégulières. Or, la même propriété subsiste aussi pour les variétés algébriques à $d > 2$ dimensions. On a, par exemple, si $d = 3$, le résultat suivant (n. 8):

Une variété à trois dimensions possédant q intégrales simples, distinctes, de première espèce, renferme des systèmes algébriques ∞^q de surfaces, parmi lesquelles il n'y en a pas ∞^1 appartenant à une même série linéaire.

Revenons maintenant au théorème que nous avons énoncé tout d'abord. On peut en déduire des conséquences intéressantes. Il s'ensuit, par exemple, que *dans notre espace il n'existe aucun système linéaire, de dimension supérieure à* 1, *dont la surface générale soit irrégulière*, si l'on excepte le cas où la courbe intersection variable de deux surfaces du système est réductible.

Une autre conséquence, plus remarquable, concerne une question sur les surfaces (ou les variétés à plusieurs dimensions), à laquelle nous pouvons donner une réponse précise, tandis que la question analogue relative aux courbes est toujours ouverte. Il s'agit des relations qui passent entre les périodes d'un système d'intégrales simples de première espèce. On sait bien qu'on peut écrire le tableau des $2p^2$ périodes des p intégrales abéliennes normales appartenant à une courbe de genre p, lorsqu'on connaît $\frac{1}{2}p(p+1)$ de ces périodes. Mais on ne pourrait pas fixer arbitrairement ces dernières périodes si $p > 3$, car seulement $3p - 3$ d'entre elles sont indépendantes; on ne connaît pas d'ailleurs, en général, les relations qui passent entre les $\frac{1}{2}p(p+1)$ périodes. Or, on peut poser une question analogue au sujet d'une surface possédant p intégrales simples de la première espèce. Mais ici la réponse est plus simple.

Nous démontrerons, en effet (n. 9), qu'*on peut toujours construire une surface algébrique ayant p intégrales simples, distinctes, de première espèce, dont $\frac{1}{2}p(p+1)$ périodes sont données arbitrairement*, de façon pourtant à satisfaire certaines inégalités qui assurent la convergence des séries p-uples Θ. Il faut remarquer cependant que le résultat relatif aux surfaces est moins expressif que le résultat concernant les courbes. En effet, une courbe est déterminée, à une transformation birationnelle près, dès que sont donnés ses $3p - 3$ modules. Au contraire, on peut construire une

infinité de surfaces, distinctes par rapport aux transformations birationnelles, dont les intégrales simples de première espèce ont les mêmes périodes.

1. – Pour démontrer le théorème fondamental de ce Mémoire il convient d'établir d'abord un lemme sur les intégrales abéliennes réductibles d'une courbe algébrique. Nous y parvenons, d'une manière naturelle, par les considérations suivantes.

Envisageons une courbe C_p de genre p, dont nous désignons par $I_1, I_2, \ldots, I_p$ un système de p intégrales abéliennes, distinctes, de la première espèce. Soient $\Omega_{i1}, \ldots, \Omega_{i2p}$ les $2p$ périodes de I_i, ordonnées de manière que les périodes $\Omega_{i1}, \Omega_{i3}, \ldots, \Omega_{i2p-1}$ se rapportent aux coupures de la surface de RIEMANN qu'on désigne d'habitude par $a_1, a_2, \ldots, a_p$, et les périodes $\Omega_{i2}, \Omega_{i4}, \ldots, \Omega_{i,2p}$ aux coupures $b_1, b_2, \ldots, b_p$.

Supposons maintenant que q $(< p)$ parmi les intégrales nommées, par exemple $I_1, I_2, \ldots, I_q$, se réduisent à q intégrales avec $2q$ périodes. Cela revient à dire que les périodes de I_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ s'expriment par des combinaisons linéaires, à coefficients entiers, de $2q$ quantités $\omega_{i1}, \omega_{i2}, \ldots, \omega_{i2q}$; on aura précisément les relations suivantes:

$$(1)\qquad \begin{cases} \Omega_{i1} = m_{11}\,\omega_{i1} + m_{12}\,\omega_{i2} + \ldots + m_{12q}\,\omega_{i\,2q}\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\,, \\ \Omega_{i\,2p} = m_{2p\,1}\omega_{i1} + m_{2p\,2}\omega_{i2} + \ldots + m_{2p\,2q}\omega_{i\,2q}\,, \end{cases}$$

où

$$i = 1, 2, \ldots, q\,.$$

On remarquera que les nombres entiers m ne dépendent pas de l'indice i relatif à l'intégrale considérée; ils dépendent, au contraire, de la coupure à laquelle se rapporte la période Ω. Formons une combinaison linéaire quelconque

$$I = \sum_1^q \lambda_i I_i\,,$$

des q intégrales réductibles, et désignons par $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{2p}$ les périodes de I (où $\Omega_k = \sum_1^q \lambda_i \Omega_{ik}$), et par $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2q}$ les expressions analogues formées avec les ω_{ik}; on aura, d'après la remarque qui précède,

$$(2)\qquad \Omega_k = m_{k1}\omega_1 + m_{k2}\omega_2 + \ldots + m_{k\,2q}\omega_{2q}\,.$$

C'est ce qu'on peut exprimer en disant que les intégrales $I_1, I_2, \ldots, I_q$ déterminent un système linéaire ∞^{q-1} d'intégrales I réductibles avec $2q$ périodes, système qui est lié aux $4pq$ nombres entiers m_{ki}.

En dehors de ce système existera-t-il une autre intégrale I_{q+1} de C_p, dont les périodes puissent s'exprimer par des combinaisons linéaires de certaines quantités $\omega_{q+1,1}, \ldots, \omega_{q+1,2q}$ formées avec les *mêmes entiers* m_{ki}?

D'une manière précise, est-il possible que les relations (1) subsistent pour les valeurs $1, 2, \ldots, q, q+1$ de i, si l'on suppose que $I_1, I_2, \ldots, I_q, I_{q+1}$ soient des intégrales *distinctes* de C_p?

C'est une réponse négative qu'il faut donner à la question qui précède. Il s'agit d'ailleurs d'un résultat qui peut être envisagé comme connu, puisqu'il découle aisément de résultats connus. Néanmoins, nous nous arrêterons un moment à le justifier, attendu que nous ne l'avons pas vu énoncé explicitement dans les travaux qui se rapportent au sujet.

Supposons donc, s'il est possible, que les (1) subsistent pour $i = 1, 2, \ldots, q, q+1$, et formons l'intégrale

$$I = \sum_{1}^{q+1} \lambda_i I_i ,$$

dont les périodes $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{2p}$ sont des combinaisons linéaires des Ω_{ik}. Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2q}$ les combinaisons linéaires correspondantes formées par les ω_{ik}, par exemple

$$\omega_k = \lambda_1 \omega_{1k} + \lambda_2 \omega_{2k} + \ldots + \lambda_{q+1} \omega_{q+1\,k} . \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2q). \tag{3}$$

Les Ω_k et les ω_k sont liées par les relations (2), même dans la nouvelle hypothèse où nous nous sommes placés.

Séparons les parties réelles et imaginaires des Ω_k, ω_k en écrivant

$$\Omega_k = A_k + iB_k , \qquad \omega_k = \alpha_k + i\beta_k ,$$

et rappelons l'inégalité de RIEMANN

$$\sum_{1}^{p}{}_k (A_{2k-1}B_{2k} - A_{2k}B_{2k-1}) > 0 .$$

Celle-ci, en vertu des (2), se transforme en une inégalité de la forme

$$\sum_{1}^{2q}{}_r \sum_{1}^{2q}{}_s c_{rs}\alpha_r\beta_s > 0 ,$$

où les c_{rs} sont des nombres entiers. Mais on peut donner à la dernière inégalité la forme plus simple

$$\sum_{1}^{q}{}_{t} c_t(\alpha_{2t-1}\beta_{2t} - \alpha_{2t}\beta_{2t-1}) > 0 , \tag{4}$$

pourvu que l'on applique aux quantités ω_{ik} des transformations convenables à coefficients entiers, qui ne modifient pas la forme des relations (1) [1]. Si nous supposons donc, ce qui est loisible, que les (1) ont déjà subi la transformation nommée, nous pourrons conclure, en examinant la (4), que les α et les β ayant l'indice impair ne peuvent pas s'évanouir à la fois. Donc, les q égalités

$$\omega_1 = 0 , \qquad \omega_3 = 0 , \quad \ldots, \quad \omega_{2q-1} = 0 , \tag{5}$$

ne peuvent pas coexister. Mais, d'ailleurs, si l'on fait attention aux (3), on reconnaît qu'on pourra toujours choisir des valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q+1}$, ne s'annulant pas à la fois, telles que les (5) soient satisfaites. La contradiction que l'on rencontre ainsi démontre que l'hypothèse dont nous sommes partis est absurde. Il faut donc conclure que le système linéaire des intégrales réductibles I a effectivement la dimension $q-1$, et ne saurait avoir une dimension plus élevée.

En dehors du système ∞^{q-1}, que nous avons envisagé, il peut bien exister, d'ailleurs, d'autres intégrales réductibles de notre courbe C_p. Mais ces nouvelles intégrales seront liées à des groupes de nombres entiers *essentiellement différents* des m_{ik}, qui entrent dans les (1). Il s'ensuit que les systèmes des intégrales réductibles de C_p ou bien sont en nombre fini, ou bien forment une série discontinue (ce qui peut avoir lieu pour $q = 1$). Nous pouvons donc énoncer le lemme qui suit:

Une courbe algébrique ne peut jamais posséder une série continue de systèmes linéaires d'intégrales abéliennes réductibles [2].

---

[1] On peut voir, par exemple, à ce sujet le Traité de M. KRAZER, *Lehrbuch der Thetafunktionen*, page 121.

[2] Voici une application de ce résultat. Supposons que sur la courbe C_p il existe une involution ∞^1, de genre $q > 0$, de groupes de n points; chaque point de C_p appartient donc à *un* groupe de l'involution. On sait qu'alors, parmi les p intégrales abéliennes de première espèce de C_p, il y en aura q réductibles au genre q; chacune de celles-ci reprend la même valeur aux points d'un groupe de l'involution. Si C_p possède plusieurs involutions irrationnelles, on aura à considérer plusieurs systèmes d'intégrales réductibles. Mais *les involutions irrationnelles de la courbe ne peuvent jamais former une série continue*, car le même caractère appartiendrait aux systèmes d'intégrales réductibles de C_p. C'est là un théorème que MM. HUMBERT et CASTELNUOVO ont démontré en même temps (1893), mais qui est déjà contenu implicitement en une proposition de M. PAINLEVÉ (« Annales de l'École Normale supérieure », t. VIII, 1891, pag. 135).

2. – Proposons-nous maintenant d'examiner les relations qui passent entre les intégrales simples d'une variété algébrique et les intégrales d'une section de celle-ci. Envisageons d'abord le cas bien connu où il s'agit d'une surface (variété à deux dimensions) et d'une courbe tracée sur elle.

Soit F une surface possédant $q > 0$ intégrales simples, distinctes, de la première espèce, et soit $J(x)$ une d'entre elles. On sait que $J(x)$ est une fonction continue, partout finie, du point x variable sur la surface, déterminée à des multiples près de certaines *périodes* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2q}$. Si le point x parcourt une courbe algébrique irréductible C_p tracée sur F, la fonction $J(x)$ nous fournit une intégrale abélienne $I(x)$, de première espèce, de C_p, dont les périodes, relatives aux $2p$ coupures de RIEMANN, sont des combinasions linéaires à coefficients entiers des quantités ω.

Supposons maintenant que C_p soit la courbe générale d'un système algébrique existant sur F. Si l'on fait varier, d'une manière continue, C_p dans ce système, les coefficients entiers qu'on vient de nommer et les ω, qui dépendent seulement de la F, restent invariables; par suite, les intégrales $I(x)$, subordonnées par $J(x)$ sur les courbes du système, auront les mêmes périodes. Si donc $J(x)$ se maintient constante lorsque x parcourt une certaine courbe du système, c'est-à-dire si les périodes de $I(x)$ s'évanouissent, la même particularité aura lieu sur toute courbe du système; ces courbes seront des *lignes de niveau* pour la fonction $J(x)$, et formeront un *faisceau* irrationnel (c'est-à-dire une série algébrique ∞^1, de genre supérieur à zéro, dont une seule courbe passe par un point de F). On conclut: si une intégrale simple, de première espèce, d'une surface garde une valeur constante le long d'une courbe algébrique de celle-ci, ou bien la courbe n'appartient à aucun système continu, ou bien elle appartient à un faisceau irrationnel.

En dehors de ces cas, les q intégrales simples de première espèce, avec $2q$ périodes, que la surface F possède, fournissent q intégrales abéliennes distinctes, réductibles à $2q$ périodes, sur chaque courbe algébrique de F. Cela est vrai en particulier pour les sections planes de F. Le genre p de ces sections est donc supérieur ou égal à q.

On a, en général, $p > q$ si l'on excepte les surfaces réglées; en effet, une partie seulement des intégrales abéliennes de la section C_p provient d'intégrales simples de la surface F. On peut déterminer ces dernières par un procédé de M. PICARD; il suffit de déterminer les intégrales de C_p dont les périodes ne changent pas avec la section plane considérée. C'est, d'ailleurs, une recherche qui ne manque pas de présenter quelques difficultés.

3. – Or ces difficultés ne se présentent plus lorsqu'on se propose de construire, d'une façon analogue, les intégrales d'une variété algébrique

à plusieurs dimensions. Ici, en effet, on reconnaît que les intégrales simples, distinctes, de première espèce, sont en même nombre que les intégrales d'une surface section générale de celle-ci. C'est ce que nous allons démontrer, en nous bornant, pour plus de clarté, au cas d'une variété algébrique de l'espace à quatre dimensions:

$$f(x, y, z, t) = 0 . \tag{6}$$

Le raisonnement, d'ailleurs, s'étend facilement aux autres variétés.

Remarquons d'abord qu'une intégrale simple de première espèce de f fournit une intégrale de la même espèce pour la surface

$$f(x, y, z, \bar{t}) = 0 , \tag{7}$$

découpée par l'hyperplan (ou espace à trois dimensions)

$$t = \bar{t} \text{ (const.)}; \tag{8}$$

et, en outre, que des intégrales distinctes de (6) fournissent des intégrales distinctes de (7) (on suppose naturellement que les axes coordonnés aient des positions tout à fait générales par rapport à f). C'est là une remarque qu'on justifie de suite par le même raisonnement appliqué au cas des surfaces.

Mais ici nous pouvons démontrer, en outre, que *toute* intégrales de première espèce de la surface (7) provient d'une intégrale de la variété (6). Voici d'abord la partie essentielle de la démonstration, que nous allons exposer ensuite d'une façon plus précise.

Considérons, dans la variété (6), un faisceau linéaire de surfaces; par exemple le faisceau formé par les surfaces (7), où l'on regarde $\bar{t}$ comme un paramètre variable. Ces surfaces ont une courbe commune C, qui est la section de (6) par le plan à l'infini des espaces (8). Supposons maintenant que la surface (7) possède q intégrales simples distinctes de la première espèce, $J_1, J_2, \ldots, J_q$, douées de $2q$ périodes. Ces intégrales fournissent q intégrales abéliennes réductibles, à $2q$ périodes, de la courbe C, que nous désignerons par $I_1, I_2, \ldots, I_q$. Toute intégrale I de C, qui appartient au système linéaire $\sum_1^q{}_i \lambda_i I_i$, provient, d'une manière parfaitement déterminée, d'une intégrale $\sum_1^1{}_i \lambda_i J_i$ de la surface (7).

Que l'on laisse varier maintenant par continuité le paramètre $\bar{t}$ dans la (7). La surface (7) changera en passant toujours par la courbe C; et, avec elle, varieront en conséquence les intégrales J_i. Mais les intégrales

réductibles déterminées par les J_i sur la courbe C ne pourront pas sortir du système $\sum_1^q \lambda_i I_i$, car ce système ne peut pas varier d'une façon continue, ainsi que nous le savons par le lemme du n. 1. À chaque intégrale I de ce système correspond donc une intégrale déterminée J sur chacune des ∞^1 surfaces (7), intégrale dont les périodes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2q}$ ne dépendent pas de $\bar{t}$, car elles sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes de I sur C. Par un point général (x, y, z, t) de la variété (6) passe *une* surface (7). L'intégrale J de (7) que nous venons de considérer a en ce point une valeur finie $J(x, y, z, t)$, déterminée à des multiples près des périodes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2q}$. Par conséquent, $J(x, y, z, t)$ est une fonction du point (x, y, z, t) de (6) finie et déterminée, à des multiples des périodes près. C'est cette fonction $J(x, y, z, t)$ qui nous fournira une intégrale simple de première espèce de (6), correspondant à l'intégrale simple arbitrairement choisie sur la surface (7), ou, si l'on aime mieux, à l'intégrale réductible I choisie sur la courbe C.

Les q intégrales J_i de la surface (7) donnent lieu ainsi à q intégrales distinctes de la variété (6).

Examinons maintenant les détails de la démonstration. Soient

$$J_i = \int M_i\, dx + N_i\, dy\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, q), \tag{9}$$

les q intégrales distinctes, de première espèce, appartenant à la surface

$$f(x, y, z, t) = 0\,, \qquad t = \bar{t}; \tag{7}$$

M_i et N_i sont des fonctions rationnelles de x, y, z, dont les coefficients contiennent rationnellement le paramètre t. L'intégrale générale de première espèce de (7) sera donc

$$J = \int M\, dx + N\, dy\,, \tag{10}$$

où

$$M = \sum_1^q \lambda_i M_i\,, \qquad N = \sum_1^q \lambda_i N_i\,. \tag{11}$$

L'intégrale J fournit sur toute section plane de (7) et, en particulier, sur la courbe à l'infini C, une intégrale abélienne de première espèce I, dont la différentielle, égalée à zéro, représente une courbe d'ordre $n - 3$

adjointe à ladite courbe, supposée d'ordre n. Soit

$$\varphi(x, y, z) \equiv \sum_1^q \lambda_i \varphi_i(x, y, z) = 0 , \tag{12}$$

l'équation de la courbe adjointe à C qui correspond à l'intégrale J, φ_i ayant la même signification par rapport à l'intégrale J_i. On peut former ce polynome φ, homogène en x, y, z, si l'on remarque que les produits $y\varphi$ et $-x\varphi$ donnent l'ensemble des termes de degré maximum $(n-2)$ contenus dans les polynomes Mf'_x, Nf'_z [3]; on formera φ_i d'une façon analogue. Il s'ensuit que les coefficients de φ, φ_1, ..., φ_q dépendent rationnellement du paramètre t.

Si nous attribuons à ce paramètre une valeur constante $\bar{t}$, et laissons varier les λ, la courbe $\varphi = 0$ décrit un système linéaire ∞^{q-1} de courbes adjointes à la courbe C. Faisons varier maintenant le paramètre t et, par suite, la surface (7) qui, cependant, passera toujours par la courbe C. La courbe $\varphi = 0$ adjointe à C pourra bien changer; mais elle ne pourra pas sortir du système linéaire ∞^{q-1} qu'on vient de nommer; *ce système ne changera pas.* C'est ce qui résulte du lemme établi au n. 1; car nous savons que le système ∞^{q-1} des intégrales réductibles I, fournies sur C par les intégrales J de la surface (7), ne peut pas varier lorsque le paramètre t prend une succession continue de valeurs. Si donc nous désignons par $\psi(x, y, z)$ un polynome du degré $n-3$, adjoint à la courbe C et appartenant au système linéaire ∞^{q-1} nommé, ψ ne dépendra pas de t, et nous pourrons toujours déterminer les paramètres λ de façon à vérifier l'identité

$$\lambda_1\varphi_1(x, y, z) + \ldots + \lambda_q\varphi_q(x, y, z) \equiv \psi(x, y, z) .$$

Puisque les φ contiennent rationnellement le paramètre t, on trouvera, pour les λ, des expressions rationnelles de t. Remplaçons les λ par ces expressions dans les (11). Nous obtiendrons deux fonctions rationnelles M, N de x, y, z, t, telles que l'intégrale de première espèce

$$J = \int M\,dx + N\,dy , \tag{10}$$

relative à la surface

$$f(x, y, z, t) , \qquad t = \bar{t} , \tag{7}$$

---

[3] PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, t. I, pagg. 118, 128.

fournit, *quelle que soit* t, la même intégrale abélienne I sur la courbe à l'infini C des surfaces (7). Il résulte que *les périodes de l'intégrale* (10) *ne dépendent pas de* t.

Il suffit maintenant d'appliquer un procédé connu [dont M. PICARD a fait usage souvent dans la théorie des surfaces (4) et qui s'étend de suite à notre cas] pour construire une troisième fonction rationnelle P de x, y, z, t, telle que de l'expression

$$M\,dx + N\,dx + P\,dt\,, \tag{12'}$$

résulte une différentielle exacte, lorsqu'on regarde z comme fonction de x, y, t définie par l'équation

$$f(x, y, z, t) = 0\,. \tag{6}$$

On obtient ainsi une intégrale de différentielle totale de la (6)

$$Y = \int M\,dx + N\,dy + P\,dt\,, \tag{13}$$

qui fournit l'intégrale de première espèce (10) sur chacune des ∞^1 surfaces (7).

Cela ne suffit pas encore pour affirmer que Y est une intégrale de *première* espèce de la variété (6), car on peut douter que Y devienne infinie sur quelques-unes des surfaces (7), correspondant à des valeurs particulières de t. Or nous montrerons qu'on peut toujours choisir la fonction P de façon à exclure ces surfaces singulières. Rappelons, à cet effet, que la fonction $P(x, y, z, t)$ doit satisfaire à deux conditions; elle doit être rationnelle et rendre l'expression (12') une différentielle exacte. Or ces mêmes conditions sont remplies, si l'on ajoute à P une fonction rationnelle arbitraire $R(t)$, dépendant seulement de t. En d'autres termes, si $P_1(x, y, z, t)$ est une fonction particulière qui satisfait aux conditions nommées, la fonction

$$P(x, y, z, t) = P_1(x, y, z, t) + R(t)\,,$$

y satisfaira de même.

Cela posé, il suffit d'examiner si l'on peut choisir la fonction ration-

(4) Voir, par exemple, PICARD et SIMART, Ouvrage cité, t. I, pag. 102.

nelle $R(t)$ de façon que l'intégrale

$$\int M\,dx + N\,dy + (P_1 + R)\,dt$$

soit de première espèce.

Considérons l'intégrale

$$Y_1 = \int M\,dx + N\,dy + P_1\,dt\,.$$

Si Y_1 n'est pas de première espèce, elle aura des surfaces singulières, polaires ou logarithmiques; et, d'après une remarque précédente (en tenant compte que les axes sont arbitraires), on peut admettre que ces surfaces soient des sections irréductibles des espaces $t = \text{const.}$ Supposons, par exemple, que les surfaces logarithmiques de Y_1 soient découpées par les espaces $t = a, b, \ldots$, et que les périodes correspondantes soient $2\pi i\alpha$, $2\pi i\beta$, ..., où α, β, ... sont des constantes dont la somme est nulle. Alors la fonction

$$Y_1 - \alpha \log(t-a) - \beta \log(t-b) - \ldots = \int M\,dx + N\,dy + \left(P_1 - \frac{\alpha}{t-a} - \frac{\beta}{t-b} - \ldots\right) dt\,,$$

n'aura aucune singularité logarithmique, et sera, par conséquent, une intégrale de seconde espèce [5].

Supposons, en second lieu, que la surface coupée sur f par l'espace $t = c$ soit une surface polaire du premier ordre pour Y_1. La fonction Y_1 devient infinie en tout point de la surface, en dehors de la courbe à l'infini G, qui appartient aussi à la surface générale (7) sur laquelle Y_1 est partout régulière. Formons maintenant une fonction rationnelle de la variété (6), qui possède la même surface polaire, tout en restant finie sur la courbe C; telle est, par exemple, la fonction $1/(t-c)$. On reconnaît alors que la différence

$$Y_1 - \frac{\gamma}{t-c} = \int M dx + N\,dx + \left[P_1 + \frac{\gamma}{(t-c)^2}\right] dt\,,$$

où γ désigne une constante choisie convenablement, est régulière sur la surface nommée, tout en ayant ailleurs les mêmes singularités que Y_1;

[5] Cfr. PICARD et SIMART, Ouvrage cité, t. II, pag. 239.

il suffit, pour s'en assurer, de faire usage du même raisonnement que M. SEVERI a employé en une questione parfaitement analogue (6).

Il s'ensuit de ces considérations que si l'on prend dans (13)

$$P = P_1 - \frac{\alpha}{t-a} - \frac{\beta}{t-b} - \ldots + \frac{\gamma}{(t-c)^2} + \ldots,$$

où la somme contient un *nombre fini* de fractions analogues, l'intégrale Y résultera régulière en tout point de la variété (6) et sera, par conséquent, de première espèce.

Nous parvenons donc à construire une intégrale Y, simple, de première espèce de la variété (6), qui se réduit à une intégrale J *donnée a priori* sur la surface (7), section de (6) par l'espace $t = \bar{t}$. Et, puisque nous savons que, réciproquement, les intégrales distinctes, de première espèce, de la (6) fournissent des intégrales distinctes, de première espèce, de la surface (7), nous pouvons conclure enfin:

Une variété algébrique à trois dimensions possède autant d'intégrales simples, distinctes, de première espèce, que la surface découpée sur la variété par un hyperplan général. A chaque intégrale de la variété correspond une intégrale de la surface qui a les mêmes périodes sur des cycles linéaires convenablement fixés.

Un théorème analogue subsiste aussi pour les variétés à plusieurs dimensions et peut être démontré par les mêmes considérations. Pour l'énoncer d'une manière simple, appelons *irrégularité* d'une variété algébrique le nombre des intégrales simples, distinctes, de première espèce qui appartiennent à la variété (7). Alors on a le théorème:

L'irrégularité d'une variété algébrique à $d \geqslant 3$ dimensions, contenue dans l'espace à $d+1$ dimensions, est égale à l'irrégularité des variétés à $d-1, \ldots, 2$ dimensions qui sont les sections de celle-là par un espace général à $d, \ldots, 3$ dimensions.

Le théorème ne subsiste plus, comme on sait, pour les courbes sections planes de la variété primitive; l'irrégularité, c'est-à-dire le genre de ces courbes, surpasse, en général, l'irrégularité de la variété.

4. – Nous avons considéré jusqu'ici les sections d'une variété par des espaces linéaires. Mais, puisqu'il s'agit de propriétés invariables par rapport aux transformations birationnelles, notre théorème s'applique

---

(6) Cfr. le Mémoire *Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard ...*, pag. 37 (« Mathem. Annalen », t. 61, 1905).

(7) Le développement de la théorie des variétés algébriques portera à envisager plusieurs sortes d'*irrégularités*. La distinction n'était pas nécessaire ici, car ce mot est toujours employé dans le sens défini ci-dessus.

aussi aux sections obtenues par des variétés algébriques à trois ou à plusieurs dimensions.

Si l'on fait attention au point essentiel de la démonstration, on voit même que le théorème subsiste sous des hypothèses plus étendues. Supposons, par exemple, de connaître dans une variété à trois dimensions f un système linéaire ∞^1 de surfaces irrégulières F, passant par une même courbe C, qui soit simple pour la F générale; on n'exclut pas d'ailleurs que ce système ait d'autres courbes bases, simples ou multiples. Supposons encore qu'aucune intégrale simple de première espèce de F ne reste constante le long de la courbe C. Alors les intégrales simples de première espèce appartenant à chacune des F fournissent un même système d'intégrales réductibles de C. On en déduit, par le raisonnement déjà employé, que chaque intégrale d'une surface F provient d'une intégrale de la variété f, et *vice versa*.

On énoncera plus facilement le résultat si l'on suppose que les surfaces F forment, dans f, un système linéaire ∞^2 au moins, car alors deux surfaces F se rencontrent, en dehors de courbes bases, en une courbe C simple, qui est commune à ∞^1 surfaces F. Si la C est irréductible, elle ne peut pas être ligne de niveau pour aucune intégrale d'une des surfaces F passant par C; autrement les ∞^1 courbes découpées sur cette surface par les autres surfaces du système ∞^2 seraient aussi lignes de niveau pour la même intégrale, ce qui est absurde, vu que ces lignes dépendent rationnellement d'un paramètre. On a donc le théorème:

Si une variété algébrique à trois dimensions renferme un système linéaire ∞^2 (au moins) de surfaces irrégulières se coupant deux à deux en des courbes variables irréductibles (en dehors de courbes bases), la variété elle-même sera irrégulière et aura la même irrégularité que les surfaces du système.

On peut dire aussi:

L'irrégularité d'une surface contenue dans une variété algébrique à trois dimensions ne dépend pas de la surface qu'on envisage, pourvu que celle-ci puisse varier en un système linéaire ∞^2 de surfaces, satisfaisant à la condition énoncée.

5. – Il convient de rappeler ici que l'irrégularité d'une surface peut être exprimée à l'aide des invariants géométriques de celle-ci; c'est exactement la différence $p_g - p_a$ entre les genres géométrique et arithmétique de la surface (8). L'irrégularité d'une variété à trois dimensions est donc

(8) Voir les Notes de MM. CASTELNUOVO, et SEVERI dans les « Comptes rendus de l'Académie des Sciences » du 23 janvier et 3 avril 1905; voir aussi un Mémoire de M. CASTELNUOVO dans les « Rendiconti della R. Accad. d. Lincei », mai-juin 1905, et un Mémoire de M. SEVERI dans les « Annali di Matematica », 3e série, t. XII.

égale à la différence constante $p_g - p_a$ relative aux surfaces contenues dans la variété et appartenant à des systèmes linéaires ∞^2.

Il est naturel maintenant d'examiner comment l'irrégularité de la variété elle-même puisse s'exprimer à l'aide des invariants géométriques de celle-ci. Rappelons, à cet effet, que M. NOETHER a défini plusieurs caractères invariants d'une variété à trois dimensions; ce sont des caractères des *surfaces canoniques* découpées sur la variété, d'ordre n, par les variétés *adjointes*, d'ordre $n-5$, qui passent respectivement $i-1$, $i-2$ ou $i-3$ fois par une surface, une courbe ou un point ayant la multiplicité i (9). Ainsi, le nombre des variétés adjointes linéairement distinctes fournit le *genre géométrique* P_g de la variété; le genre géométrique $P_g^{(1)}$ et le genre arithmétique $P_a^{(1)}$ d'une surface canonique sont aussi des invariants, dont le premier a été considéré par NOETHER et appelé *Flächengeschlecht*; nous les dirons *genres superficiels géométrique et arithmétique* de la variété.

Appliquons maintenant le résultat du n. 4 au système linéaire formé par les surfaces canoniques; nous avons de suite:

Le nombre des intégrales simples, distinctes, de première espèce, d'une variété à trois dimensions (*que nous avons appelé son* irrégularité) *est égal à la différence* $P_g^{(1)} - P_a^{(1)}$ *entre les deux genres superficiels, géométrique et arithmétique, de la variété; on suppose cependant qu'il y a au moins* ∞^2 *surfaces canoniques* ($P_g > 2$), *se coupant deux à deux en des courbes variables irréductibles.*

Ces conditions semblent effectivement nécessaires pour la validité du théorème.

L'analogie avec la théorie des surfaces aurait porté à exprimer l'irrégularité de la variété par la différence $P_g - P_a$, où P_a est un caractère de la variété qu'on définit d'une manière analogue à celle qui a conduit CAYLEY et M. NOETHER à introduire le genre arithmétique p_a d'une surface. Mais on peut facilement construire des variétés ayant $P_g - P_a \neq 0$, qui ne possèdent aucune intégrale simple de première espèce.

Le dernier théorème peut être étendu facilement aux variétés algébriques ayant plus que trois dimensions.

6. – Une conséquence intéressante de la proposition du n. 4 regarde l'espace à trois dimensions, qui est évidemment une variété régulière. Il résulte, en effet, que (10):

---

(9) « Mathematische Annalen », vol. VIII, pag. 529.

(10) M. SEVERI, auquel nous avons communiqué ce théorème, vient d'en donner une nouvelle démonstration dans sa Note *Osservazioni varie di Geometria* ..., « Atti del R. Istituto Veneto », t. LXV, 22 avril 1906.

Un système linéaire ∞^2, au moins, de surfaces dans l'espace ordinaire se compose certainement de surfaces régulières, si la courbe intersection variable de deux surfaces est irréductible.

D'une manière plus précise:

Si un système linéaire ∞^r $(r \geqslant 2)$ de surfaces dans l'espace est formé par des surfaces irrégulières, celles-ci se coupent (en dehors des courbes bases) en des courbes réductibles, dont les composantes forment, sur une surface donnée du système, un faisceau irrationnel; en variant la surface, ces courbes composantes forment dans l'espace un système ∞^2 (congruence) *tel que par un point général de l'espace passe une seule courbe qui lui appartient.*

L'exemple le plus simple est fourni par un système linéaire de cônes (ou cylindres) ayant le même sommet ([11]). On démontre que tous les autres systèmes doués de la propriétés énoncée peuvent se déduire d'un système de cylindres par une transformation simplement rationnelle $(1, n)$ de l'espace. On peut donc représenter tout système linéaire (∞^2 au moins) de surfaces irrégulières par une équation du type

$$\sum \lambda_i f_i(\varphi, \psi) = 0 ,$$

où les f_i désignent des polynomes en φ et ψ (de genre > 0), tandis que φ et ψ sont des fonctions rationnelles de x, y, z.

Cette propriété, d'après laquelle une surface irrégulière ne peut appartenir à aucun système linéaire, sauf dans le cas très particulier considéré ci-dessus, est remarquable parce que rien d'analogue ne subsiste en Géométrie plane, où l'on peut former des systèmes de courbes *irrégulières* ayant le genre aussi élevé que l'on veut.

7. – Revenons au théorème fondamental du n. 3, d'après lequel chaque intégrale simple de première espèce appartenant à une variété à trois dimensions

$$f(x, y, z, t) = 0 , \tag{6}$$

est liée à une intégrale du même type, ayant les mêmes périodes, relative à la surface section

$$f(x, y, z, t) = 0 , \qquad t = \bar{t} , \tag{7}$$

([11]) Un autre exemple est fourni par le système ∞^3 des surfaces du sixième ordre qui ont huit points triples aux points bases d'un réseau de quadriques.

et *vice versa*. Rappelons, d'autre part, que, si q désigne le nombre des intégrales distinctes de la surface (7), le nombre de leurs périodes est $2q$, et $2q$ est aussi le nombre des cycles linéaires distincts qu'on peut tracer dans la surface (ou, d'une manière plus exacte, dans le *continuum* à quatre dimensions attaché à la surface) [12]. La variété (6) à son tour (regardée comme un *continuum* de RIEMANN à six dimensions) aura $2q$ cycles linéaires distincts, car les $2q$ périodes de chaque intégrale simple de la variété se rapportent nécessairement à des cycles distincts.

Le nombre des cycles distincts de la variété ne peut pas d'ailleurs dépasser $2q$, car, en imitant un procédé connu [13], on parvient à ramener, par une déformation continue, tout cycle linéaire de la (6) à être situé dans la surface (7). On peut donc énoncer les deux théorèmes suivants, où l'on désigne par *connexion linéaire* l'expression

$$p_1 = 2q + 1 ,$$

étant q le nombre des cycles linéaires distincts:

La connexion linéaire d'une variété algébrique à trois dimensions est égale à la connexion linéaire d'une surface section de celle-ci.

Le nombre des cycles linéaires distincts appartenant à une variété algébrique à trois dimensions est double du nombre des intégrales simples, distinctes, de première espèce, de la variété.

Le premier théorème appartient à l'*Analysis situs*. Tâchons donc de le retrouver directement par des considérations intuitives appartenant à cette branche de Géométrie. Considérons, à cet effet, la surface (7), que nous désignerons par F. Si nous laissons varier le paramètre $\bar{t}$, de façon que le point image sur le plan de la variable complexe t décrive une courbe fermée, la surface F variera et prendra les positions F_1, F_2, ..., F, dont la dernière se superpose à la position initiale. Toutes ces surfaces passent par une même courbe C, que nous regardons comme un *continuum* de RIEMANN à deux dimensions. Soit γ un cycle linéaire de F, dans la position initiale; nous savons qu'on peut ramener ce cycle, par une déformation continue à l'intérieur de F, à un cycle γ' situé en C. Suivons maintenant les variations de γ et des chemins qui en joignent les points aux points correspondants de γ', pendant la variation de $\bar{t}$. Nous obtiendrons des cycles $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_0$, dont le dernier est renfermé en F, cycles qui peuvent toujours être ramenés à γ' par des déformations continues ayant lieu à l'intérieur des surfaces $F_1, F_2, \ldots, F$ contenant ces cycles. On peut donc passer d'une manière continue du cycle γ au

[12] Voir les publications citées dans la première note du n. 5.

[13] PICARD et SIMART, Ouvrage cité, t. I, pag. 86.

cycle γ_0, *sans sortir de* F. Il s'ensuit que deux cycles de la surface de F sont équivalents (transformables l'un en l'autre) ou bien distincts par rapport à F, selon qu'ils sont équivalents ou distincts par rapport à la variété f. C'est précisément ce qui affirme notre théorème [14].

On pourrait se proposer de retrouver le théorème du n. 3, en prenant comme point de départ la propriété d'*Analysis situs*, dont nous venons de parler. On verrait d'abord, en suivant le procédé de M. PICARD, que le nombre des intégrales simples distinctes de *seconde* espèce est le même $(2q)$ pour une variété à trois dimensions et pour une surface section. Mais peut-être qu'on rencontrerait quelques difficultés à établir par cette voie le théorème analogue pour les intégrales de première espèce.

8. – Parmi les propriétés qui caractérisent, au point de vue géométrique, une surface irrégulière, la plus remarquable est celle qui se rapporte aux systèmes algébriques, non linéaires, de courbes appartenant à la surface. Sur une surface ayant l'irrégularité q (ayant donc $q = p_g - p_a > 0$ intégrales simples, distinctes, de première espèce) il existe des systèmes ∞^q de courbes qui ne renferment pas ∞^1 courbes appartenant à un même système linéaire; mais il n'existe aucun système ∞^{q+1} jouissant de la même propriété [15].

Or un théorème parfaitement analogue subsiste pour les variétés algébriques à plusieurs dimensions. C'est-à-dire que:

Une variété algébrique à trois dimensions possédant $q > 0$ *intégrales simples, distinctes, de première espèce* (ou, si l'on veut, une variété, dont les genres superficiels ont la différence positive: $P_g^{(1)} - P_a^{(1)} = q$, sous les restrictions du n. 5), *contient des systèmes* ∞^q *de surfaces, tels que* ∞^1 *surfaces n'appartiennent jamais à un système linéaire; il n'existe, d'ailleurs, dans la variété aucun système* ∞^{q+1} *jouissant de la même propriété.*

On parvient à établir le théorème énoncé, soit en s'appuyant sur le

---

[14] On sait bien que la propriété analogue ne subsiste pas lorsqu'on compare les connexions linéaires d'une surface et d'une section plane de celle-ci. On en voit maintenant la raison. C'est que les courbes sections d'une surface n'ont pas deux à deux un *continuum C* commun, où l'on puisse ramener les cycles appartenant à ces courbes; elles ont seulement un nombre *fini* de points communs.

[15] Ces systèmes de courbes d'une surface qui ne sont pas renfermées en des séries linéaires, ont été envisagés d'abord par M. HUMBERT (« Journal de Math », 4e série, t. X) qui a remarqué que les surfaces possédant de tels systèmes admettent des intégrales simples de première espèce; et M. ENRIQUES (« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XIII) [questo volume, XXVI] a ajouté que ces surfaces ont le genre géométrique supérieur au genre arithmétique: $p_g > p_a$.

Plus récemment, M. ENRIQUES a établi les théorèmes réciproques rappelés dans le texte, en examinant dans un premier Mémoire (« Ann. de la Faculté de Toulouse », 2e série, t. III) [questo volume, XXXI] une surface qui possède q intégrales de première espèce à $2q$ périodes, et dans un second Mémoire (« Atti dell'Academia di Bologna », 1904; voir aussi « Comptes rendus », janvier 1905) une surface pour laquelle $p_g > p_a$.

résultat déjà établi pour les surfaces sections de la variété (qui ont la même irrégularité q, n. 3), soit en étendant aux variétés à plusieurs dimensions les raisonnements développés dans le cas des surfaces.

Quant à la première voie, il suffira de remarquer que, si l'on envisage un faisceau de sections hyperplanes F de la variété, on peut déterminer sur chaque F *une* courbe k (ou un nombre fini de courbes k) d'un système ∞^q, jouissant de la propriété énoncée ci-dessus, par la condition que deux k appartenant à deux différentes surfaces F découpent sur la courbe plane commune aux deux F des groupes de points renfermés en une même série linéaire.

Nous allons développer la démonstration du théorème, qui s'obtient par la seconde voie citée, en suivant le procédé par lequel M. SEVERI [16] a établi d'une façon plus simple le théorème de M. ENRIQUES, exposé dans les « Annales de la Faculté de Toulouse ».

Soit

$$f(x, y, z, t) = 0 \tag{6}$$

la variété, dont nous désignerons les q intégrales simples, distinctes, de première espèce par $J_1, J_2, \ldots, J_q$. Considérons une série ∞^2 de courbes sur la variété, telle que par un point général passe une seule courbe de la série; telle est, par exemple, la série des sections planes

$$f(x, y, z, t) = 0\,, \qquad z = \bar{z}\,, \qquad t = \bar{t}\,, \tag{14}$$

où $\bar{z}$ et $\bar{t}$ sont des paramètres.

Sur chaque courbe (14) les intégrales J fournissent q intégrales distinctes $I_1, I_2, \ldots, I_q$ réductibles à $2q$ périodes. Déterminons maintenant q points $x_1, x_2, \ldots, x_q$ de la courbe par les conditions

$$I_i(x_1) + I_i(x_2) + \ldots + I_i(x_q) \equiv k_i\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, q), \tag{15}$$

où les k_i sont des constantes assignées.

D'après un théorème de M. PICARD [17] il existe un nombre *fini* m de groupes de q points x satisfaisant aux conditions (15). Les mq points qu'on obtient ainsi sur la courbe (14) décrivent, en variant les paramètres $\bar{z}, \bar{t}$, une surface Φ. Si l'on attribue aux constantes k_i les ∞^q valeurs qu'elles peuvent recevoir, on trouvera ∞^q surfaces telles que Φ, formant

---

[16] « Atti della R. Acad. d. Scienze di Torino », février 1904.

[17] « Bulletin de la Société mathématique », t. XI.

un système algébrique Σ, dont ∞^1 surfaces n'appartiennent jamais à un même système linéaire.

Le raisonnement qui précède n'exclut pas l'existence d'un système plus ample Σ', par exemple ∞^{q+1}, de surfaces, jouissant de la propriété énoncée tout à l'heure. Supposons que ce système existe et envisageons les intersections d'une surface Φ' de Σ' avec une des courbes (14), par exemple avec la courbe

$$f(x, y, 0, 0) = 0 . \tag{14'}$$

Calculons la somme h_i des valeurs qu'acquiert l'intégrale I_i en ces points. Les quantités $h_1, h_2, \ldots, h_q$ varient, en général, lorsque Φ' décrit le système ∞^{q+1} Σ'; mais à un système assigné de valeurs de $h_1, h_2, \ldots, h_q$ correspondront nécessairement (au moins) ∞^1 surfaces Φ', formant un certain système S. On peut répéter la même remarque pour les courbes Γ', intersections des Φ' avec une surface passant par la courbe (14'), par exemple avec la surface

$$f(x, y, z, t) = 0 , \qquad t = \lambda z . \tag{16}$$

On aura donc ∞^1 courbes Γ' de la (16) découpant sur la (14') des groupes de points tels que les sommes nommées aient les valeurs h_1, $h_2, \ldots, h_q$. Or, ces courbes Γ', d'après un théorème de M. SEVERI [18], appartiennent totalement à un même système linéaire. Donc, les ∞^1 surfaces Φ' de S découpent, sur chaque surface du faisceau (16), ∞^1 courbes appartenant à un système linéaire. Mais alors un raisonnement que M. SEVERI développe pour les courbes [19], mais qui s'étend de suite aux surfaces d'une variété, nous amène à conclure que les ∞^1 surfaces Φ' de S elles-mêmes appartiennent totalement à un système linéaire; ce qui est en contradiction avec la propriété que nous avions attribuée à Σ'. L'hypothèse du système ∞^{q+1} Σ' se trouve ainsi rejetée.

9. – Revenons une dernière fois au théorème du n. 3. Nous pouvons en déduire une application remarquable au sujet des relations qui passent entre les périodes des intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique irrégulière. Rappelons d'abord, pour plus de clarté, la question analogue relative aux courbes.

Soit C une courbe de genre $p > 0$, et soient $I_1, I_2, \ldots, I_p$ intégrales abéliennes, distinctes, de première espèce de la courbe. Sur la surface

---

[18] Consulter le Mémoire: *Il teorema di Abel sulle superficie algebriche*, teorema VII (« Annali di Matematica », 3e série, t. XII).

[19] Loc. cit., teorema VI.

de RIEMANN attachée à la courbe traçons les $2p$ coupures canoniques, qu'on désigne d'habitude par $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_p$; appelons ensuite a_{hk}, b_{hk} les périodes de l'intégrale I_h relatives aux coupures a_k, b_k ($h, k = 1, 2, \ldots, p$). On sait qu'on peut toujours choisir les p intégrales I_h, de façon que les périodes a_{hk} prennent les valeurs assignées:

$$a_{hh} = \pi i\,, \qquad a_{hk} = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, p;\ h \neq k). \tag{17}$$

Alors, la courbe C étant donnée, les périodes b_{hk} sont parfaitement déterminées; elles satisfont aux relations

$$b_{hk} = b_{kh}\,, \tag{18}$$

et à certaines inégalités qu'on peut résumer ainsi: en désignant par r_{hk} la partie réelle de b_{hk}, on doit avoir

$$\sum_{hk} r_{hk}\xi_h\xi_k < 0\,, \tag{19}$$

quelles que soient les valeurs réelles (non toutes nulles), attribuées aux variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$.

Inversement, supposons de connaître $2p^2$ quantités a_{hk}, b_{hk} satisfaisant aux égalités (17), (18) et à l'inégalité (19); est-ce qu'il existera une courbe C de genre p, dont p intégrales abéliennes de première espèce aient les périodes a_{hk}, b_{hk}? RIEMANN a montré qu'une telle courbe n'existe pas, en général, si $p > 3$. En effet, les $\frac{1}{2}p(p+1)$ quantités b_{hk} ($h \leqslant k$), dont dépend le tableau des périodes relatives à une courbe de genre p, ne sont pas toutes arbitraires; il passe entre elles des relations, inconnues jusqu'ici, en tel nombre que seulement $3p-3$ de ces quantités peuvent être choisies arbitrairement. Ce sont les $3p-3$ *modules* de la courbe considérée.

Examinons maintenant comment ces résultats peuvent être transportés aux surfaces. Une surface F_1, dont nous désignerons maintenant par p l'irrégularité, possède p intégrales simples distinctes, de première espèce $J_1, J_2, \ldots, J_p$, dont chacune a $2p$ périodes, relatives à $2p$ cycles linéaires distincts de la surface (*continuum* de RIEMANN à quatre dimensions). Si nous désignons par a_{hk}, b_{hk} ($h, k = 1, 2, \ldots, p$) les $2p^2$ périodes, on peut obtenir, par un choix convenable des intégrales et des cycles, que les p^2 périodes a_{hk} aient les valeurs (17), et les p^2 périodes b_{hk} satisfassent à $\frac{1}{2}p(p-1)$ relations linéaires qui sont du type (18) et expriment que le rapport $b_{hk}:b_{kh}$ est rationnel (non nécessairement égal à l'unité) [20].

---

[20] Voir la Note de M. SEVERI, *Intorno al teorema di Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degl'integrali di Picard*, n. 5 (« Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo », t. XXI).

Or, dans le cas des surfaces, ce résultat peut être inverti de la manière suivante:

Etant données $2p^2$ *quantités* a_{hk}, b_{hk} $(h, k = 1, 2, \ldots, p)$ *qui satisfont aux égalités* (17), (18) *et à l'inégalité* (19), *on peut toujours construire, d'une infinité de manières, une surface ayant l'irrégularité* p, *telle que* p *intégrales simples, distinctes, de première espèce, de la surface aient les périodes* a_{hk}, b_{hk} *par rapport à* $2p$ *cycles convenablement choisis.*

La démonstration s'appuie sur le théorème fondamental du n. 3, moyennant quelques propositions connues de la théorie des séries p-uples Θ, et des fonctions $2p$ fois périodiques de p variables qui sont formées à l'aide desdites séries ([21]).

On sait que, étant données $2p^2$ quantités a_{hk}, b_{hk} satisfaisant aux égalités (17), (18) et à l'inégalité (19), on peut construire une fonction uniforme de p variables

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_p),$$

dont la valeur ne change pas lorsqu'on augmente la variable u_h $(h = 1, 2, \ldots, p)$ de l'une des *périodes* $a_{h1}, \ldots, a_{hp}, b_{h1}, \ldots, b_{hp}$. On peut obtenir, en outre, que la fonction φ n'aie, au fini, aucune singularité essentielle, et ne puisse être regardée comme fonction de moins que p combinaisons linéaires des variables u. On peut même construire p fonctions indépendantes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ qui possèdent les mêmes propriétés de φ et les mêmes périodes; mais alors, d'après un théorème de WEIERSTRASS, toute autre fonction φ_0 du même type est liée aux précédentes par une relation algébrique irréductible. Si donc nous posons

$$x_k = \varphi_k(u_1, u_2, \ldots, u_p), \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, p), \tag{20}$$

on aura

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_p) = 0, \tag{21}$$

où f est un polynome.

La (21) représente une variété algébrique à p dimensions de l'espace à $p + 1$ dimensions; de cette variété les (20) nous fournissent une représentation paramétrique. La variété f possède p intégrales distinctes, de première espèce, de la forme

$$u_h = \int P_{h1}\,dx_1 + P_{h2}\,dx_2 + \ldots + P_{hp}\,dx_p \qquad (h = 1, 2, \ldots, p), \tag{22}$$

([21]) On trouvera exposées les propositions que nous employons dans l'ouvrage cité de M. KRAZER, pagg. 112-117.

où les P sont des fonctions rationnelles de $x_0, x_1, \ldots, x_p$; pour calculer les expressions différentielles du_h on a seulement à former les différentielles totales des (20) et à résoudre par rapport aux du_h les équations linéaires ainsi obtenues. L'intégrale (22) a précisément les périodes $a_{h1}, \ldots, a_{hp}$, $b_{h1}, \ldots, b_{hp}$, qui étaient assignées.

Que l'on découpe maintenant la variété f par un espace linéaire à p, $p-1, \ldots, 3$ dimensions. On obtiendra une variété algébrique à $p-1$, $p-2, \ldots, 2$ dimensions douée de p intégrales simples distinctes, de première espèce, ayant les périodes données. Telle est, en particulier, la surface

$$f(x_0, x_1, x_2, 0, 0, \ldots, 0) = 0 ,$$

dont les intégrales

$$u_h = \int P_{h1}\, dx_1 + P_{h2}\, dx_2$$

ont précisément les périodes a_{hk}, b_{hk} par rapport à des cycles linéaires convenables. Et cette surface n'aura aucune intégrale distincte des u_h, d'après le théorème du n. 3.

On remarquera ici que la section de ladite surface par le plan $x_2 = 0$ fournirait une courbe, qui aurait bien p intégrales abéliennes de première espèce avec les périodes assignées. Mais la courbe aurait un genre $p' > p$ et posséderait, par conséquent, encore $p' - p$ intégrales abéliennes de première espèce distinctes entre elles et des précédentes ([22]). Voilà pourquoi le procédé qui nous a fourni le dernier théorème relatif aux surfaces (ou aux variétés à plusieurs dimensions) ne s'applique pas aux courbes.

Il est juste d'ailleurs de remarquer que le problème de construire une surface ayant l'irrégularité p, dès qu'on connaît $\frac{1}{2}p(p+1)$ périodes b_{hk} relatives aux intégrales de première espèce, a un intérêt bien moindre que le problème de construire une courbe de genre p dès qu'on connaît ses $3p-3$ modules. En effet, tandis que la courbe est déterminée en conséquence, à une transformation birationnelle près, il existe, au contraire, une infinité de surfaces birationnellement distinctes, ayant la même irrégularité et les mêmes périodes. On peut dire seulement que

---

([22]) La considération relative à la variété (21) et à une *courbe* contenue en elle paraît déjà dans une Note de MM. POINCARÉ et PICARD (« Comptes rendus », t. XCVII), qui se propose de justifier les relations énoncées par RIEMANN entre les périodes d'une fonction $2p$ fois périodique de p variables. Nous supposons ici, au contraire, que ces relations (17), (18), (19) sont vérifiées *a priori*.

ces surfaces possèdent la même *variété de Picard* (21) ([23]). L'interprétation géométrique de ce résultat est la suivante. Si l'on construit sur chacune de ces surfaces un système algébrique ∞^p de courbes, tel que deux courbes n'appartiennent jamais à un même système linéaire, on peut, entre deux de ces systèmes, établir (en ∞^p manières) une correspondance birationnelle, de sorte qu'à toute courbe du premier système (regardée comme élément) corresponde une seule courbe du second système.

([23]) On trouvera exposée la relation entre la *variété de Picard* et la surface à laquelle celle-ci est liée, dans le Mémoire de M. CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », mai, juin 1905).

XXXIX.

SOPRA LE SUPERFICIE ALGEBRICHE DI BIGENERE UNO

« Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta " dei XL ") »,
s. 3ª, to. XIV (1906), pp. 327-352.

Nel 1896 mi si è presentata la superficie del 6° ordine F_6 passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro come primo esempio di superficie di genere $p_g = p_a = 0$, non razionale. Ho osservato che, pur mancando le superficie aggiunte d'ordine $6 - 4$, si ha una superficie *biaggiunta* d'ordine $2(6 - 4)$, costituita dal tetraedro nominato, e che le analoghe superficie biaggiunte conducono in generale per $p_g = 0$ a delle curve invarianti, cui si addice il nome di « *bicanoniche* »; quindi il numero delle curve bicanoniche linearmente indipendenti costituisce un nuovo invariante delle superficie « il *bigenere* » ecc.

L'importanza del bigenere risulta subito dal teorema di CASTELNUOVO per cui « le superficie di genere $p_a = p_g = 0$ e di bigenere $P_2 = 0$ sono razionali ».

Ora, dopo il primo esempio della sestica F_6, altri esempi si sono presentati di superficie non razionali di genere 0; ma da questi la sestica F_6 si distingue per le seguenti proprietà:

1) è una superficie regolare di genere 0 e bigenere 1, cioè

$$p_g = p_a = 0\,, \qquad P_2 = 1;$$

(si ha invece $P_2 > 1$ in un esempio di CASTELNUOVO e in alcuni piani doppi che io ho successivamente costruiti);

2) la superficie biaggiunta non sega la superficie fuori della curva doppia, cioè la curva bicanonica ha l'ordine 0 (un esempio di superficie, per cui $p_g = p_a = 0$, $P_2 = 1$, dotata di curva bicanonica d'ordine > 0, viene addotto al n. 3 di questa Memoria).

Ebbene, le proprietà suddette caratterizzano la sestica F_6 dal punto di vista delle trasformazioni birazionali.

Questo è il resultato fondamentale ottenuto nella presente Memoria.

Possiamo determinarlo più precisamente nei seguenti enunciati:

Perchè una superficie regolare di genere 0 *e bigenere* 1 ($p_g = p_a = 0$, $P_2 = 1$) *abbia la curva bicanonica d'ordine* 0, *basta che sia il trigenere* $P_3 = 0$ (*o il sestigenere* $P_6 = 1$) *anzichè* $P_3 > 0$ (e $P_6 > 1$).

Le superficie per cui

$$p_a = P_3 = 0\,, \qquad P_2 = 1\,,$$

si possono trasformare in superficie del 6° *ordine passanti doppiamente per gli spigoli d'un tetraedro.*

Queste superficie posseggono in generale un gruppo discontinuo di infinite trasformazioni birazionali in se stesse, onde i loro sistemi lineari di dato genere si distribuiscono in serie discontinue ecc. (cfr. n. 20).

I. - I plurigeneri delle superficie F di bigenere 1.

1. – Si abbia, nello spazio ordinario, una superficie F di un certo ordine n. Senza restringere la generalità, agli effetti dell'ordine di questioni che stiamo trattando, possiamo supporre che la F sia dotata soltanto di curva doppia χ e di un numero finito di punti tripli, tripli anche per la curva.

Ricordiamo la definizione dei caratteri invarianti fondamentali della superficie [1].

Il *genere geometrico* p_g è il numero delle superficie d'ordine $n-4$, linearmente indipendenti, che passano per la curva doppia χ di F (superficie *aggiunte* a F).

Il *genere aritmetico* p_a è l'espressione aritmetica del numero anzidetto calcolato in base alle *formule di postulazione* di NOETHER.

Il *bigenere* P_2 (o semplicemente P) è il numero delle curve linearmente indipendenti sezioni di F colle superficie d'ordine $2n-8$, che passano doppiamente per la curva χ (superficie *biaggiunte* a F).

Il *trigenere* P_3 è il numero delle curve linearmente indipendenti sezioni di F colle superficie d'ordine $3n-12$ che passano doppiamente per la χ e toccano le due falde di F per essa (superficie *triaggiunte* a F) ecc.

Le nostre ipotesi fondamentali sono

$$p_g = p_a = 0\,, \qquad P_2 = 1\,.$$

---

[1] Cfr. ENRIQUES, *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* (t. X, serie III di queste «Memorie», 1896) [queste *Memorie*, vol. I, XIII].

In tali ipotesi (adoperando eventualmente una trasformazione birazionale) si può supporre che la superficie F sia ridotta a non contenere *curve eccezionali*, cioè curve immagini di punti semplici sopra una superficie trasformata [2].

Facciamo questa supposizione semplificativa.

Essendo $p_g = 0$ mancano su F curve *canoniche* (sezioni di superficie aggiunte d'ordine $n-4$), mentre, per l'ipotesi $P_2 = 1$, si ha *una* curva *bicanonica*, sezione di una superficie biaggiunta d'ordine $2n-8$. Designando con π il genere delle sezioni piane della superficie F, l'ordine della curva bicanonica sarà

$$4\pi - 4 - 2n ,$$

essendo

$$2\pi - 2 \geqslant n .$$

Valutiamo il genere della curva bicanonica di F.

A tal fine ricordiamo che dato su F un qualsiasi sistema lineare $|C|$, p. es. quello delle sezioni piane di F, resta definito un sistema lineare *aggiunto* $|C'|$, un *secondo aggiunto* $|C''| = |(C')'|$ ecc.; il sistema canonico (nel nostro caso inesistente) verrebbe dato da

$$|C' - C| ,$$

il sistema bicanonico da

$$|C'' - C| = |2C' - 2C| \text{ ecc.}$$

Esprimiamo il genere π' di $|C'|$, come se questo sistema fosse la somma di $|C|$, di genere π e grado n, e di un sistema canonico di genere $p^{(1)}$; si avrà

$$\pi' = p^{(1)} + 3(\pi - 1) - n .$$

Il numero

$$p^{(1)} = \pi' - 3(\pi - 1) + n ,$$

nonostante la mancanza di $|C' - C|$, esprime un invariante di F, indipendente dalla scelta di $|C|$; ciò risulta dalla *relazione fondamentale* fra

---

[2] Cfr. ENRIQUES, *Introduzione* citata, n. 42; e CASTELNUOVO ed ENRIQUES, « Annali di Mat. », serie 3ª, t. VI, 1901 [questo volume, XXXIII].

gli aggiunti di due sistemi $|C|$ e $|K|$:

$$|C + K'| = |C' + K|.$$

L'invariante $p^{(1)}$ prende il nome di *genere lineare virtuale* della superficie (3). Si trova poi che il grado di $|C'|$ vale

$$n' = p^{(1)} - 1 + 4(\pi - 1) - n .$$

Ora si può valutare il genere e il grado di $|C''|$ e quindi anche i caratteri analoghi di $|C'' - C|$; si trova che il genere della curva bicanonica $|C'' - C|$ vale

$$3p^{(1)} - 2 ,$$

e il suo grado

$$4p^{(1)} - 4 .$$

Nel caso ($n = 2\pi - 2$) in cui si abbia una curva bicanonica d'ordine 0,

$$|C''| = |C|,$$

risulta

$$p^{(1)} = 1 .$$

In ogni caso, poichè $|C''|$ contiene $|C|$, si trova

$$p^{(1)} \geqslant 1 .$$

Poniamo che sia

$$n < 2\pi - 2 .$$

Partendo da un sistema $|C|$ irriducibile, si ha la dimensione di $|C'|$

$$r' \geqslant p_a + \pi - 1 ,$$

e

$$r' \leqslant p_a + \pi - 1 ,$$

(3) Cfr. ENRIQUES, *Introduzione* citata, n. 41.

cioè, nel nostro caso ($p_a = p_g = 0$),

$$r' = \pi - 1;$$

parimente la dimensione di $|C''|$ è

$$r'' = p^{(1)} - 1 + 3(\pi - 1) - n .$$

Il sistema $|C''|$ sega su una C generica una serie $g_{4\pi-4-n}$ non speciale ($n < 2\pi - 2$), quindi la dimensione del sistema bicanonico vale

$$P_2 - 1 \geqslant p^{(1)} - 1 .$$

Siccome si ha per ipotesi

$$P_2 = 1 ,$$

si deduce

$$p^{(1)} \leqslant 1 ,$$

quindi, ricordando la diseguaglianza $p^{(1)} \geqslant 1$, si deduce

$$p^{(1)} = 1 .$$

Si conclude che *il genere lineare della superficie* F ($p_g = p_a = 0$, $P_2 = 1$) *vale in ogni caso*

$$p^{(1)} = 1;$$

questo è anche il genere (virtuale) della curva bicanonica di F, supposta d'ordine > 0

$$(2\pi - 2 > n) .$$

2. – Il valore del genere lineare $p^{(1)}$ non permette di distinguere i due casi che una superficie F può presentare, cioè il caso

$$n < 2\pi - 2 ,$$

in cui vi è una effettiva curva bicanonica d'ordine

$$4\pi - 4 - 2n > 0 ,$$

e il caso

$$n = 2\pi - 2 ,$$

in cui codesta curva ha l'ordine 0 e quindi, per ogni sistema $|C|$, è

$$|C''| = |C| .$$

La distinzione si ottiene valutando i plurigeneri successivi della superficie.

Nel caso

$$n = 2\pi - 2 , \qquad |C''| = |C| ,$$

si ha anche

$$|C^{IV}| = |C''| \quad \text{ecc.} ,$$

quindi tutti i plurigeneri d'ordine pari sono uguali ad 1:

$$P_2 = P_4 = P_6 = \ldots = 1 ;$$

invece

$$|C'''| = |C'| \quad \text{ecc.} ,$$

quindi

$$p_g = P_3 = P_5 = \ldots = 0 .$$

Consideriamo invece il caso

$$n < 2\pi - 2 ,$$

in cui si ha una curva bicanonica K d'ordine

$$4\pi - 4 - 2n > 0 .$$

Costruiamo il sistema aggiunto a $|K|$, valendoci di un sistema ausiliario $|C|$; si avrà

$$|K'| = |K + C' - C| ,$$

dove

$$|K| = |C'' - C| ,$$

e perciò

$$|K'| = |C''' - C|.$$

Calcoliamo la dimensione di $|C'''|$, e teniamo conto che esso sega su una C una serie non speciale; segue così che la dimensione di $|K'|$ è

$$P_3 - 1 > 0.$$

Si ha dunque su F almeno una curva tricanonica K', d'ordine $3(\pi - 1) - 3n$; similmente si trovano le successive curve i-canoniche, per $i = 4, 5 \ldots$.

Pertanto i plurigeneri della superficie valgono

$$P_i > 0 \qquad \text{per} \qquad i > 1.$$

Ma è interessante di provare che, almeno per $i = 6$, risulta di più

$$P_6 > 1,$$

e si hanno quindi su F infinite curve sesticanoniche, ellittiche o composte di curve ellittiche.

Consideriamo le due curve

$$2K' \qquad \text{e} \qquad 3K;$$

esse appartengono ugualmente al sitema sesticanonico

$$|C^{VI} - C|,$$

e sono distinte, altrimenti K dovrebbe comporsi di parti contate due volte, le quali entrerebbero tre volte in K' e formerebbero perciò una curva canonica di F.

Si deduce così che le due curve sesticanoniche suddette determinano un fascio, quindi il sestigenere di F vale

$$P_6 > 1;$$

per conseguenza

$$P_8 > 1, \; P_9 > 1, \; \ldots, \; P_{12} > 2, \quad \text{ecc.}$$

Ci riserviamo di portare fra poco un effettivo esempio di superficie per cui

$$p_g = p_a = 0\,, \qquad P_2 = P_3 = 1\,, \qquad P_6 > 1\,.$$

Intanto raccogliamo le conclusioni dell'analisi precedente:

Le superficie F di genere 0 *e bigenere* 1 ($p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$) *possono avere una curva bicanonica d'ordine* 0, *o di ordine* > 0; *nel primo caso tutti i plurigeneri valgono* 0 *o* 1, *e precisamente*:

$$p_g = P_3 = P_5 = \ldots = 0\,,$$

$$P_2 = P_4 = P_6 = \ldots = 1\,;$$

nel secondo caso si ha:

$$P_i \geqslant 1 \qquad per \qquad i > 1\,,$$

ed in particolare

$$P_6 > 1;$$

cioè esiste sulla superficie un fascio di curve (ellittiche) *sesticanoniche.*

In tal modo restano distinti i due casi. Notiamo anzi che:

Le superficie regolari di genere 0 *e bigenere* 1 *con curva bicanonica d'ordine* 0 *sono caratterizzate semplicemente dai valori*

$$p_a = P_3 = 0\,, \qquad P_2 = 1\,,$$

donde $p_g = 0$; *oppure dai valori*

$$p_a = p_g = 0\,, \qquad P_6 = 1\,,$$

da cui segue come conseguenza $P_2 = 1$.

3. – Rechiamo ora un esempio di superficie per cui

$$p_a = p_g = 0\,, \qquad P_2 = 1\,, \qquad P_6 > 1\,.$$

Si abbia nel piano una curva irriducibile C_3, e designamo con z il suo integrale di 1ª specie, con 2ϖ, $2\varpi'$ i periodi di questo. Consideriamo una retta C_1, la quale segherà la C_3 in tre punti; la somma dei valori di z in questi punti può supporsi nulla rispetto ai periodi:

$$z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2\varpi, 2\varpi').$$

Si determinino ora su C_3 6 punti $z_4, z_5, \ldots, z_9$ per modo che sia p. es.

$$z_4 + z_5 + \ldots + z_9 \equiv \frac{2\varpi}{3} \qquad (\text{mod. } 2\varpi, 2\varpi') .$$

Sarà pure

$$\sum_1^9 z_i \equiv \frac{2\varpi}{3} \qquad (\text{mod. } 2\varpi, 2\varpi') ,$$

e quindi i 9 punti $z_1 \ldots z_9$ costituiranno i punti base tripli per un fascio di curve (ellittiche) C_9 d'ordine 9 (HALPHEN).

Ora nella costruzione precedente non è vietato di prendere

$$z_4 \equiv z_5 , \qquad z_6 \equiv z_7 , \qquad z_8 \equiv z_9 \qquad (\text{mod. } 2\varpi, 2\varpi'),$$

essendo p. es.

$$z_4 + z_6 + z_8 \equiv \frac{\varpi}{3} \qquad (\text{mod. } 2\varpi, 2\varpi') .$$

Si otterrà in tal modo una C_9 irriducibile con 9 punti tripli su C_3, di cui tre appartengono a C_1, e sei si distribuiscono in tre coppie di punti infinitamente vicini.

Ciò posto, consideriamo il *piano doppio che ha come curva di diramazione* $C_1 + C_9$.

Le sue curve canoniche dovrebbero venire rappresentate da coniche passanti per i sei punti $z_1, z_2, z_3, z_4, z_6, z_8$, spezzate quindi in C_1 e in una retta per z_4, z_6, z_8; ma questi tre punti non sono allineati (non essendo $z_4 + z_6 + z_8 \equiv 0$), quindi

$$p_g = p_a = 0 .$$

Si ha invece una curva bicanonica rappresentata sul piano dalla $C_1 + C_3$, seconda aggiunta alla curva di diramazione $C_1 + C_9$; dunque il bigenere vale

$$P_2 = 1 .$$

All'infuori della retta eccezionale C_1, la curva C_3 è immagine doppia di una curva bicanonica, la cui aggiunta ha per immagine semplice la C_9 di diramazione; le curve del 9° ordine, costituenti il fascio di HALPHEN determinato da C_9, rappresentano doppiamente le curve sesticanoniche della superficie.

Si noti che l'esempio addotto non si trova fra i piani doppi di genere lineare $p^{(1)} = 1$ che ho determinati nel 1898 (4), perchè ivi ho supposto la curva di diramazione spoglia di componenti eccezionali.

II. - Proprietà generali dei sistemi lineari sopra le superficie F.

Nel seguito di questa Memoria ci riferiremo alle superficie F per cui

$$p_a = P_3 = 0 \qquad P_2 = 1 ,$$

dotate dunque di *una* curva bicanonica d'ordine 0. E considereremo sopra F sistemi lineari *virtualmente privi di punti base*, sicchè parlando del sistema completo determinato da una curva si sottintenderà che questo non debba avere alcun punto base assegnato.

Richiamiamo qui e completiamo le proprietà generali dei sistemi lineari di curve tracciati su F.

4. – Anzitutto (cfr. I):

Ogni sistema lineare $|C|$, *irriducibile o no, di genere virtuale* $\pi \geqslant 1$, *ammette un sistema aggiunto* $|C'|$ *di dimensione* $\geqslant \pi - 1$ *che ha lo stesso genere e lo stesso grado di* $|C|$. *Il sistema* $|C|$ *è a sua volta l'aggiunto di* $|C'|$, *cioè*

$$|C''| = |C| .$$

I doppi dei due sistemi $|C|$ *e* $|C'|$ *sono equivalenti*:

$$|2C'| = |(2C)''| = |2C| .$$

Quindi il grado di un sistema $|C|$ *di genere* π $(\geqslant 1)$ *vale*

$$n = 2\pi - 2 .$$

5. – *Ogni sistema lineare completo* $|C|$, *irriducibile o no, di genere virtuale* $\pi \geqslant 1$, *ha la dimensione*

$$\geqslant \pi - 1$$

(teorema di RIEMANN-ROCH per la superficie F).

(4) « Rend. Acc. dei Lincei », serie 5ª, vol. VII, pagg. 234, 253 [queste *Memorie*, vol. I, XXII].

Ogni sistema $|C|$, *irriducibile completo di genere* $\pi > 1$, *ha la dimensione*

$$r = \pi - 1 ,$$

e non maggiore.

La prima parte del teorema si deduce subito dal fatto che $|C|$ è aggiunto a $|C'|$.

Per dimostrare la seconda parte, si consideri la serie (*caratteristica*) $g^{r-1}_{2\pi-2}$ segata su una C dalle altre C; il doppio di questa serie è la serie bicanonica $g^{3\pi-4}_{4\pi-4}$ di C, ma la serie stessa differisce dalla serie canonica, non essendo $|C| = |C'|$. Dunque la $g^{r-1}_{2\pi-2}$ è una serie non speciale, e perciò

$$r \leqslant \pi - 1 ,$$

donde (n. 5)

$$r = \pi - 1 .$$

6. – *Ogni sistema lineare irriducibile di genere virtuale* $\pi > 1$, *dotato di punti base multipli, è sempre contenuto in un sistema completo di curve dello stesso ordine privo di punti base o dotato soltanto di punti base semplici.*

Secondo il n. 5, il sistema dato è contenuto in un sistema completo $|C|$ (virtualmente privo di punti base), di dimensione $r = \pi - 1$. Ora se $|C|$ ha un punto base i-plo, il genere effettivo delle C vale

$$\pi_1 = \pi - \frac{i(i-1)}{2} ,$$

e la serie caratteristica che rimane, tolte le i^2 intersezioni fisse di due C, è una

$$g_{2\pi-2-i^2} = g_{2\pi_1-2-i} ,$$

speciale o non speciale; ma se

$$i > 1 ,$$

la dimensione di questa serie vale

$$r - 1 < \pi_1 - 1 ,$$

e

$$\pi_1 < \pi ,$$

quindi

$$r < \pi - 1 ,$$

contro il n. 5.

7. – *Se un sistema lineare irriducibile* $|C|$ *di genere virtuale* $\pi > 1$, *dotato di punti base semplici, non è contenuto in un sistema più ampio di curve dello stesso ordine, il sistema si compone di curve iperellittiche e vi sono due punti base, i quali risultano doppi per la* g_2^1 *appartenente alla* C *generica.*

Suppongasi che $|C|$ abbia $s \geqslant 1$ punti base semplici $A_1, A_2, \ldots, A_s$. Sopra una C generica, la serie caratteristica $g_{2\pi-2}^{\pi-2}$, tolti i punti fissi, dà una $g_{2\pi-2-s}^{\pi-2}$ speciale, che si ottiene dunque come residua di un gruppo di s punti $B_1, B_2, \ldots, B_s$ dalla serie canonica $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$; si ha così

$$g_{2\pi-2-s}^{\pi-2} \equiv g_{2\pi-2}^{\pi-2} - \sum_1^s A \equiv g_{2\pi-2}^{\pi-1} - \sum_1^s B .$$

Per il teorema di RIEMANN-ROCH il gruppo $\sum B$, presentando una sola condizione ai gruppi canonici che debbono contenerlo, appartiene ad una serie lineare g_s^{s-1} di dimensione $s-1$; ma poichè il genere π di C è > 1, si deve avere

$$s = 1 \qquad \text{o} \qquad s = 2 .$$

Supposto $s = 1$ $(A_1 = A,\ B_1 = B)$ si ha

$$g_{2\pi-2}^{\pi-2} - A \equiv g_{2\pi-2}^{\pi-1} - B;$$

ma

$$2g_{2\pi-2}^{\pi-2} \equiv 2g_{2\pi-2}^{\pi-1} ,$$

quindi

$$2A \equiv 2B .$$

I punti A e B essendo distinti, sono punti doppi di una g_2^1 appartenente a C; ma allora sopra la curva iperellittica C, la serie

$$g_{2\pi-2}^{\pi-1} - B$$

contiene ancora come punto fisso il punto B, il quale risulta dunque un nuovo punto base pel sistema $|C|$; ciò contraddice all'ipotesi $s = 1$.

Suppongasi $s = 2$. Si ha

$$g_{2\pi-4}^{\pi-2} \equiv g_{2\pi-2}^{\pi-2} - A_1 - A_2 \equiv g_{2\pi-2}^{\pi-1} - B_1 - B_2 ,$$

e la coppia $B_1 + B_2$ appartiene ad una g_2^1 colla quale risulta composta la $g_{4\pi-4}^{\pi-2}$.

La coppia $A_1 + A_2$ non appartiene alla suddetta g_2^1, ma

$$2(A_1 + A_2) \equiv 2(B_1 + B_2),$$

quindi la quaterna $2A_1 + 2A_2$ si compone di due coppie di g_2^1, e però A_1, A_2 sono punti doppi di questa g_2^1.

Resta così dimostrato l'asserto: la C generica è iperellittica, i punti base sono *due* e sono doppi per la g_2^1 appartenente a C.

Si può notare di più che le C passanti per un punto generico della superficie passano di conseguenza per un altro punto, coniugato al primo su ciascuna C.

In questa categoria di sistemi rientrano in particolare i *fasci di curve di genere due* (di cui dimostreremo poi l'esistenza), i quali hanno giusto due punti base.

8. – Passiamo ora a studiare le *curve ellittiche* tracciate su F, ed i loro sistemi.

In base al n. 4 si hanno anzitutto i teoremi:

Ogni curva C di genere (virtuale) 1 ha almeno una curva aggiunta C', che non ha punti comuni con C.

Le curve $2C$ e $2C'$ appartengono ad un medesimo fascio lineare di curve ellittiche.

Distinguiamo pertanto due specie di curve ellittiche irriducibili C che possono appartenere ad F:

α) curve C *isolate*, aventi *una* aggiunta C' pure isolata;

β) curve C di un fascio, che (per il n. 4) ha il grado 0 ossia è privo di punti base.

Consideriamo sopra F un fascio di curve ellittiche irriducibili $|C|$; vi sarà almeno una curva C' aggiunta a questo fascio, la quale non sega in alcun punto le C.

Se C' fosse irriducibile si dedurrebbe

$$|C| \equiv |C'|,$$

contro l'ipotesi che il genere di F sia

$$p_g = 0.$$

La C' sarà dunque una curva composta; designeremo con $C_1, C_2, \ldots$ le parti di C' che appartengono a curve C diverse fra loro. Ora si ha

$$|2C'| = |2C_1 + 2C_2 + \ldots| = |2C|,$$

quindi la curva

$$2C_1 + 2C_2 + \ldots$$

si può riguardare anche come composta mediante due C. Affinchè ciò accada, appartenendo $C_1, C_2, \ldots$ a diverse C, deve essere

$$2C_1 = C\,,$$
$$2C_2 = C\,,$$

e la C' deve comporsi di due sole curve:

$$C' = C_1 + C_2\,.$$

Segue poi che

$$|C_2 + C_1'| = |(C_1 + C_2)'| = |C''| = |C|,$$

quindi

$$C_1' = C_2\,,$$

e

$$C_2' = C_1\,.$$

Come conclusione si ha:

Un fascio di curve ellittiche irriducibili C, sopra F, ammette una sola curva aggiunte composta di due parti di genere 1, *isolate, C_1 e C_2, le quali sono aggiunte l'una all'altra. Le curve C_1, C_2 contate due volte costituiscono due curve particolari del fascio $|C|$.*

9. – Concludiamo l'esame delle proprietà generali dei sistemi lineari tracciati su F, determinando *tutti i sistemi lineari completi irriducibili.*

La questione viene risoluta dal seguente teorema:

A prescindere da componenti fisse sopprimibili senza diminuire il genere del sistema, i soli sistemi completi riducibili di genere virtuale > 0 che possano esistere su F sono quelli composti colle curve ellittiche (irriducibili) di un fascio e con una bisecante (irriducibile) di genere 0.

Occorre esaminare due casi di riducibilità che un sistema $|C|$ può presentare [5], cioè il caso in cui le parti variabili delle C sieno irriducibili e quello in cui esse si compongano colle curve d'un fascio.

---

[5] Cfr. la mia citata *Introduzione*, n. 5.

1° caso. - Sommiamo ad un sistema lineare irriducibile $|C_1|$ di genere π_1 ($\geqslant 1$) una curva C_2 di genere π_2 ($\geqslant 0$) secante le C_1 in i ($\geqslant 0$) punti. Si ottiene allora un sistema di genere

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1 ,$$

e quindi di dimensione

$$\geqslant \pi - 1 .$$

Ora se $\pi_1 > 1$, la dimensione di $|C_1|$ vale $\pi_1 - 1$ (n. 5), e quindi il sistema completo $|C_2 + C_1|$ risulterà più ampio del sistema riducibile $C_2 + |C_1|$ che contiene C_2 come parte fissa, ogniqualvolta sia $\pi > \pi_1$.

In altri termini, se il sistema completo $|C_2 + C_1|$ contiene C_2 come parte fissa, questa può essere soppressa senza diminuire il genere del sistema. (Una discussione approfondita mostrerebbe che questo caso è possibile soltanto per $\pi_2 = 0$, $i = 0, 1$).

Suppongasi ora

$$\pi_1 = 1 ,$$

cioè $|C_1|$ sia un fascio di curve ellittiche; esaminiamo quali curve C_2 possono sommarsi al fascio senza ampliarlo, in guisa da ottenere un sistema completo riducibile $C_2 + |C_1|$, che contenga C_2 come parte fissa.

In primo luogo C_2 può essere parte di una qualche C_1 ($i = 0$); ma allora il genere di

$$|C_1 + C_2|$$

vale

$$\pi = 1 .$$

Se C_2 non è parte di una C essa sega in due punti almeno le C_1, poichè incontra almeno in un punto le due componenti della C_1' che raddoppiate costituiscono due particolari C (n. 8).

Si ha dunque

$$i \geqslant 2 .$$

Affinchè la dimensione di $|C_2 + C_1|$ risulti uguale a quella del fascio $|C_1|$ deve aversi

$$\pi - 1 = 1 + \pi_2 + i - 2 = 1 ,$$

cioè

$$i = 2\,, \qquad \pi_2 = 0;$$

come nell'enunciato, la C_2 deve essere una curva di genere 0 bisecante le C_1:

È poi chiaro che se ad un sistema di genere due, composto colle curve ellittiche di un fascio e con una bisecante razionale, si somma un'altra curva per modo da aumentare il genere del sistema, si ottiene un sistema completo più ampio (di dimensione $\geqslant 2$).

2° caso. – Consideriamo sopra F un fascio di curve irriducibili C_1 di genere $\pi_1 \geqslant 1$, e formiamo il sistema multiplo $|rC_1|$ dove $r > 1$.

Se $\pi_1 > 1$, due C_1 si segano in $2\pi_1 - 2 \geqslant 2$ punti, e quindi il genere di $|rC_1|$ vale

$$\pi_r > r + 1\,,$$

e la sua dimensione è

$$> r;$$

il sistema completo $|rC_1|$ è dunque un sistema irriducibile più ampio di quello composto coi gruppi di r curve del fascio $|C_1|$.

Se $\pi_1 = 1$, $|rC_1|$ è il sistema ∞^r composto dei gruppi di r curve del fascio $|C_1|$ ed ha il genere

$$\pi_2 = 1\,.$$

Una curva C_2 la quale non sia parte di una C_1 sega le C_1 in due punti almeno (vedi 1° caso) e quindi le rC_1 in $2r$ punti; pertanto ove si sommi C_2 ad $|rC_1|$ si ottiene in tal caso un sistema di genere $> r + 1$ e di dimensione $> r$, cioè un sistema irriducibile più ampio di $C_2 + |rC_1|$.

Se invece si somma ad $|rC_1|$ una curva C_2 (di genere $\leqslant 1$) che sia parte di una C_1, il sistema completo $C_2 + |rC_1|$ contiene C_2 come parte fissa, ma il suo genere vale 1.

Confrontando i vari resultati ottenuti resta stabilito il teorema sopra enunciato.

III. - Rappresentazione delle superficie F sopra un piano doppio.

10. *Procedimento di riduzione.* – Sia $|C|$ un sistema lineare irriducibile di genere $\pi > 1$, e quindi di dimensione $\pi - 1$, sopra la superficie F.

Il sistema completo $|2C| = |2C'|$ ha il genere

$$4\pi - 3\,,$$

e quindi la dimensione

$$4\pi - 4;$$

in esso sono contenute

$$\infty^{2\pi-2}$$

curve spezzate in due C, ed altrettante curve spezzate in due C'.

Si troveranno dunque, entro $|2C|$, delle curve comuni ai due sistemi $\infty^{2\pi-2}$, le quali si compongono nello stesso tempo di due C e di due curve aggiunte C'.

Siccome le C, C' non appartengono ad uno stesso sistema lineare, le suddette C e C' componenti di una stessa curva

$$K = C + C = C' + C'$$

dovranno essere spezzate.

11. – Il procedimento accennato ci conduce dunque a costruire entro ogni sistema lineare irriducibile $|C|$ di genere $\pi > 1$, delle curve spezzate. Più precisamente, nel caso $\pi > 2$, esso ci permette di *costruire un sistema lineare di genere* $< \pi$ $e > 1$, *oppure di determinare una curva* C *spezzata in due componenti ellittiche secantisi in* $\pi - 1$ *punti.*

Si possono distinguere i seguenti casi:

1° caso. – Una delle due curve C, componenti K, sia composta di due parti irriducibili C_1 e C_2.

L'altra C sarà pure spezzata ed in essa si potranno distinguere due parti (irriducibili o no), C_4, C_3, le quali associate rispettivamente a C_1 e C_2 comporranno due curve C'; si avrà dunque

$$|C_1 + C_2| = |C_3 + C_4| = |C|,$$
$$|C_1 + C_4| = |C_2 + C_3| = |C'|.$$

Di qui si deduce

$$|C_1 + C_4| = |(C_1 + C_2)'| = |C_1 + C_2'|,$$
$$|C_4| = |C_2'|,$$

e quindi

$$|C_3| = |C_1'|.$$

Pertanto le curve C_1, C_2 avranno il genere $\geqslant 1$, e ci troviamo quindi nelle condizioni dell'enunciato.

2° caso. – Ciascuna delle due componenti C di K consti di più che due parti.

Distinguiamo qui varie ipotesi.

α) Togliendo da una C qualcuna delle sue parti si ottiene una curva composta di genere $\geqslant 2$.

Allora questa curva appartiene ad un sistema contenuto parzialmente in $|C|$ ed avente perciò una dimensione $< \pi - 1$ e un genere $< \pi$.

β) In una delle componenti C di K si trova una parte C_1 ellittica.

Siccome la C è connessa, si avrà in essa un'altra parte X secante C_1 in $i > 1$ punti, oppure se X ha il genere > 0, si ricade nell'ipotesi α) perchè la curva

$$C_1 + X$$

ha il genere > 1.

Se invece $i = 1$ e X ha il genere 0, la curva

$$2C_1 + X$$

ha il genere due, ed appartiene ad un fascio di curve (riducibili) dello stesso genere.

γ) Ognuna delle componenti C di K consti di $n > 2$ parti di genere 0, e quindi di grado -2.

Fra queste parti consideriamone una θ che seghi le C generiche nel minimo numero di punti e sia 1 questo numero; sia poi ϱ il genere della curva residua $C - \theta$, la quale segherà θ in $s + 2$ punti. Avremo

$$\pi = \varrho + s + 1 .$$

Ora se $\varrho \geqslant 2$ si ricade nell'ipotesi α); se invece $\varrho \leqslant 1$ deve essere

$$s \geqslant \pi - 2 .$$

Ma poichè

$$ns \leqslant 2\pi - 2 , \qquad n \geqslant 3 ,$$

si deduce

$$\pi \leqslant 4 ,$$

cioè (supponendosi $\pi > 2$)

$$\pi = 4 ,$$

o

$$\pi = 3 .$$

Esaminiamo separatamente questi due casi.

Sia $\pi = 4$; allora ognuna delle componenti C di K consterà di $n = 3$ parti, ed ognuna di queste parti segherà le C in $s = 2$ punti:

$$K = (C_1 + C_2 + C_3) + (C_4 + C_5 + C_6) ,$$

dove

$$|C_1 + C_2 + C_3| = |C_4 + C_5 + C_6| = |C| ,$$

e sarà p. es.

$$|C_1 + C_2 + C_6| = |C_4 + C_5 + C_3| = |C'| ,$$

e quindi si dedurrà

$$|C_6| = |C_3'| ;$$

ma ciò significa che il genere di C_3 risulterà > 0 contro il supposto.

Sia invece $\pi = 3$; allora essendo $s \geqslant 1$, si avrà, per ciascuna componente C di K, $n \leqslant 4$, cioè $n = 3$ o $n = 4$.

Ma se una C consta di tre parti ($n = 3$) si può ripetere il ragionamento precedente, da cui segue che una delle suddette parti ha il genere > 0 [ipotesi α) e β)].

Giova dunque supporre ciascuna C composta di quattro parti ($n = 4$), ed in tal caso si vede che ciascuna di queste sega in *un* punto le C generiche.

Si potrà porre

$$K = (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + (C_5 + C_6 + C_7 + C_8) ,$$

dove

$$|C_1 + C_2 + C_3 + C_4| = |C_5 + C_6 + C_7 + C_8| = |C| .$$

Ora si deve ottenere una C': o riunendo tre parti (p. es. C_1, C_2, C_3) della prima C ad una (C_8) della seconda; o riunendo due parti (p. es. C_1, C_2) della prima C a due (C_7, C_8) della seconda.

La prima ipotesi porta

$$|C_8| = |C_4'| ,$$

cioè C_4 ha il genere > 0 e si ricade così nelle ipotesi α) e β).

Riferiamoci alla seconda ipotesi, cioè sia p. es.

$$|C_1 + C_2 + C_7 + C_8| = |C'|.$$

Si deduce

$$|C_7 + C_8| = |(C_3 + C_4)'|,$$

e

$$|C_5 + C_6| = |(C_1 + C_2)'|.$$

Ora dunque le curve composte $C_1 + C_2$ e $C_3 + C_4$ avranno il genere 1 [lasciando da parte il caso in cui questo genere sia > 1, v. α)], e si segheranno in due punti.

Se $C_1 + C_2$ avesse due punti comuni con una delle C_3, C_4, si ricadrebbe nell'ipotesi α); dobbiamo dunque supporre che $C_1 + C_2$ seghi in un punto C_3 e in un punto C_4; ma allora [come nell'ipotesi β)] costruiamo tosto una curva di genere due

$$C_3 + 2(C_1 + C_2),$$

la quale appartiene ad un fascio di curve (riducibili) dello stesso genere.

12. – La conclusione del procedimento spiegato innanzi è la seguente:

Se sopra la superficie F è dato un sistema lineare irriducibile $|C|$ di genere $\pi > 2$, si può costruire:

1) o un fascio di curve, riducibili o irriducibili, di genere due;

2) o un sistema lineare $|C_1|$ di genere $< \pi$ e > 2 contenuto in $|C|$; questo sistema si può ritenere irriducibile, perchè (n. 9) la riducibilità può tenere soltanto a delle eventuali componenti fisse, tolte le quali resta sempre un sistema (di genere > 2) contenuto in $|C|$ e però di dimensione $< \pi - 1$ e genere $< \pi$;

3) o infine una curva C spezzata in due componenti ellittiche con $\pi - 1$ punti comuni.

Ora nel caso 2) la riduzione si può proseguire partendo da $|C_1|$ anzichè da $|C|$, e si arriverà finalmente ad un fascio di genere due [caso 1)], oppure s'incontrerà ad un certo punto il caso 3).

Ma anche in questo caso si può spingere avanti la riduzione, tutte le volte che sia $\pi > 2$. Dimostriamo infatti che: *se in un sistema lineare irriducibile $|C|$ di genere $\pi > 2$, dato su F, vi è una curva spezzata in due componenti ellittiche, si può costruire su F un sistema lineare di genere $< \pi$ e $\geqslant 2$.*

Ritorniamo all'osservazione del n. 10. Entro il sistema $|2C| = |2C'|$. le serie $\infty^{2\pi-2}$ di curve spezzate $C + C$ e $C' + C'$ hanno delle curve comuni. Il numero di queste, ove sia finito, è uguale al prodotto degli indici delle due serie $\infty^{2\pi-2}$, quindi è > 1 per $\pi > 2$.

Pertanto si avranno più curve K (distinte o infinitamente vicine) comuni alle serie $C + C$ e $C' + C'$. Se non si vuol ricadere in uno dei casi di riduzione considerati nel numero precedente, si deve supporre che ciascuna dele suddette curve K si componga di due C spezzate alla lor volta in *due parti* ellittiche *irriducibili*. Così avremo una prima curva

$$K = C_1 + C_2 + C_1' + C_2',$$

le cui parti C_1, C_2, C_1', C_2' saranno curve ellittiche *isolate*, giacchè se p. es. C_1 variasse in un fascio la sua aggiunta C_1' sarebbe spezzata.

Parimente troveremo una seconda curva

$$K = C_3 + C_4 + C_3' + C_4',$$

composta di 4 curve ellittiche isolate.

Ora occorre esaminare due casi:

1° caso. – Le 4 curve nominate $C_1 + C_2$, $C_3 + C_4$, $C_1' + C_2'$, $C_3' + C_4'$, sieno *distinte*.

Allora anche le 8 componenti C_1, C_2, C_3, C_4, C_1', C_2', C_3', C_4' saranno fra loro distinte, giacchè se fosse p. es.

$$C_3 = C_1,$$

le C_2, C_4 apparterrebbero ad un fascio di curve ellittiche, mentre per ipotesi esse sono curve ellittiche isolate.

Ciò posto, consideriamo le due coppie di curve $C_1 + C_2$, $C_3 + C_4$; esse si segano in

$$(C_1 + C_2)(C_3 + C_4) = 2\pi - 2$$

punti, quindi si avrà o

$$\pi - 1 > (C_1 C_3) > 0,$$

oppure

$$(C_1 C_3) = 0 \qquad \text{o} \qquad (C_1 C_4) = 0.$$

Nella prima ipotesi il sistema $|C_1 + C_3|$ avrà il genere > 1 e $< \pi$.

La seconda ipotesi è impossibile attesochè la curva ellittica C_1 è isolata; dimostriamo invero che dall'ammettere la suddetta ipotesi segue che C_1 appartiene ad un fascio. Infatti, essendo

$$(C_1 C_3) = 0 ,$$

e supponendosi C_3 distinta da C_1, C_1' e così C_1 da C_3', si considerino le due curve ellittiche composte

$$C_1 + C_3' , \qquad C_3 + C_1' ;$$

ciascuna di queste curve è aggiunta dell'altra, quindi esse appartengono ad un medesimo fascio; ma poichè le C_1, C_3' sono sconnesse, tutte le curve del fascio saranno del pari spezzate in due parti sconnesse, e queste parti varieranno in un fascio a cui appartiene C_1.

2° caso. – Due fra le curve nominate, p. es. $C_1 + C_2$ e $C_3 + C_4$ sieno *infinitamente vicine*; sia p. es. C_3 infinitamente vicina a C_1 (e C_4 a C_2).

Consideriamo come innanzi le curve composte

$$C_1 + C_3' , \qquad C_1' + C_3 ;$$

esse apparterranno ad un fascio di curve ellittiche spezzate, e le parti variabili di queste genereranno un fascio contenente C_1; la conclusione è assurda giacchè per ipotesi C_1 è una curva ellittica isolata.

13. – Confrontando le conclusioni dei nn. 11, 12 si deduce che:

Si può costruire sopra le superficie F un fascio di curve, riducibili o irriducibili, di genere due.

Sia $|C|$ questo fascio, e supponiamo dapprima che esso sia irriducibile, e possieda quindi due punti base A, B.

Entro il sistema $|2C|$ vi è *una* curva K composta ad un tempo di due C e di due C'; e si possono distinguere due casi:

1° caso: le due C componenti K sono distinte (e quindi non hanno parti comuni).

Allora in ciascuna C si possono distinguere due parti (irriducibili o no) le quali associate rispettivamente alle parti dell'altra compongono due C'; poniamo dunque

$$K = (C_1 + C_2) + (C_3 + C_4) ,$$

dove

$$|C_1 + C_2| = |C_3 + C_4| = |C| ,$$

$$|C_1 + C_4| = |C_2 + C_3| = |C'| .$$

Si avrà allora

$$C_4 = C_2',$$
$$C_3 = C_1',$$

donde segue che le C_1, C_2, C_3, C_4 hanno il genere 1.

Notiamo ora che ciascuna delle parti suddette incontra la C generica in *uno* dei due punti base A, B del fascio $|C|$, che sono punti doppi della g_2^1 di C.

Infatti le curve $C_1 + C_2$, $C_3 + C_4$ contengono la coppia A, B, mentre le $C_1 + C_4$, $C_2 + C_4$ (aggiunte a C) hanno come punto doppio uno dei punti di quella coppia.

Ciò posto, consideriamo il sistema

$$|L| = |C_1 + C| = |C_1 + C_1' + C_2'|;$$

esso è una rete di curve L di genere 3. Queste curve L incontrano la C_2 in *due* punti fissi P, Q, base per la rete; infatti il sistema

$$|C_1 + C_1' + C_2' - C_2| = |2C_1|,$$

è un fascio di curve ellittiche; i punti P, Q sono le intersezioni di C_2 rispettivamente con C_1 e con C_1'.

Le curve generiche L si segano a due a due, fuori dei punti base P e Q, in due punti variabili; quindi le L sono iperellittiche, e su ciascuna L i punti P, Q sono punti doppi della relativa g_2^1.

2° caso: le due componenti C di K coincidono.

Allora si ha nel fascio $|C|$ una curva C il cui doppio è anche il doppio di una C'. Perciò la C sarà spezzata e si otterrà una C' da questa C tralasciandone una qualche parte C_2 e duplicandone una qualche altra parte C_1; avremo dunque

$$C = X + C_1 + C_2,$$
$$C' = X + 2C_1,$$

e quindi

$$C_2 = C_1';$$

sicchè le curve C_1, C_2 saranno di genere 1. Affinchè $X + 2C_1$ riesca di genere due occorre che la X sia una curva di genere 0 secante C_1 e così C_2 in *un* punto.

In questo caso consideriamo ancora il sistema

$$|L| = |C_1 + C| = |X + 2C_1 + C_1'|;$$

le L sono curve di genere 3 di una rete; esse sono iperellittiche poichè incontrano in due punti le curve ellittiche del fascio $|2C_1|$; inoltre passano tutte per due punti base P, Q, uno sopra la X, che ha come residuo il fascio $|2C_1| + C_1'$, ed uno sulla C_1' che ha come residuo il fascio di genere 2 $|C'| = X + |2C_1|$.

In ciò che precede abbiamo supposto il fascio $|C|$ irriducibile, ma se esso si spezza si avrà

$$|C| = X + |2C_1| = X + |2C_1'|,$$

dove C_1, C_1' sono curve di genere 1 ed X è una curva di genere 0 che le sega in un punto. Allora il fascio aggiunto

$$|C'| = |X + C_1 + C_2|$$

è irriducibile, e ricadiamo nell'ipotesi precedente (2° caso).

La conclusione è che:

Sopra la superficie F si può costruire una rete di curve iperellittiche L di genere 3, secantisi a due a due in due punti variabili, ed aventi due punti base che, su ciascuna L, sono doppi per la relativa g_2^1.

14. – Riferiamo proiettivamente la rete $|L|$ al piano rigato: si ottiene così la rappresentazione di F sopra un piano doppio con una curva di diramazione d'ordine 8, la quale si compone:

1) di due rette p, q corrispondenti ai punti P, Q;

2) e di una sestica K_6.

Cerchiamo di determinare le singolarità di K_6. Riferiamoci anzitutto al primo caso trattato nel numero precedente, ove la rete

$$|L| = |C_1 + C_1' + C_2'| = |2C_1 + C_2|$$

ha i suoi punti base P, Q sopra C_2.

Alla curva C_2 corrisponderà nel piano il punto $O \equiv (pq)$, e poichè il fascio

$$|2C_1| = |L - C_2|$$

è costituito di curve ellittiche, le rette per O segheranno $p + q + K_6$ in quattro punti fuori di O; dunque O sarà un punto doppio per K_6.

Alla curva C_2', che fa parte di *una* L $(= C_2' + C_1 + C_1')$ corrisponderà nel piano una retta o, non passante per O, ed i punti $M = (op)$, $N = (oq)$ saranno almeno doppi per $p + q + K_6$, cioè apparterranno a K_6. Questi punti debbono rappresentare le curve C_1, C_1'; ma poichè $|L - C_1| = |C_2' + C_1'|$ è un fascio di curve di genere 2 secanti C_1 in un punto (C_1C_2), si deduce che le rette per M debbono avere (oltre alle due intersezioni assorbite nel punto M doppio per $K_6 + p + q$) una intersezione con K_6 infinitamente vicina ad M; quindi M è triplo per $K_6 + p + q$, e doppio per K_6. Analogamente anche N è doppio per K_6.

Ora consideriamo sul piano doppio il fascio di coniche determinato da $2o$ e da $p + q$; esso rappresenta il fascio delle curve $|2C_2| = |2C_1'|$, e poichè queste curve sono ellittiche, la $K_6 + p + q$ avrà un punto triplo su p infinitamente vicino ad M, ed un punto triplo su q infinitamente vicino ad N. In altre parole K_6 avrà due tacnodi in M, N e p, q saranno le rispettive tangenti tacnodali.

In conclusione, *la superficie F viene rappresentata sopra un piano doppio con una curva di diramazione di* 8° *ordine, composta*

1) *di una sestica K_6 con due tacnodi M, N e un punto doppio nel punto di incontro delle rispettive tangenti tacnodali p, q,*

2) *e di queste due rette p, q.*

Alla *medesima rappresentazione* si arriva anche *nel secondo caso* del numero precedente, salvochè si presenta la *particolarità che uno dei tacnodi di K_6 cade infinitamente vicino ad $O = (pq)$.*

La nostra deduzione si trova confermata dall'analisi che occorre per invertire il resultato ottenuto.

Si abbia un piano doppio dotato di una curva di diramazione d'ordine 8, la quale si componga di una K_6 con un punto doppio O e di due rette p, q per O; e si cerchi quali altre singolarità sono da imporre alla curva di diramazione affinchè risulti il genere

$$p_a = p_g = 0 ,$$

e il bigenere

$$P_2 = 1 .$$

Si trova che bisogna dotare $K_6 + p + q$ di due coppie di punti tripli allineati con O; e si vede che queste coppie possonsi supporre appartenenti a p, q, altrimenti da K_6 si staccano una o due rette di diramazione per O, e si ricade in un caso particolare del precedente.

Le p, q saranno dunque due tangenti tacnodali di K_6; prese insieme, esse costituiranno la curva di ordine $8 - 6 = 2$ seconda aggiunta alla curva

di diramazione $K_6 + p + q$, e quindi la curva bicanonica del piano doppio, ridotta in questo caso a due rette eccezionali ($P_2 = 1$).

Una curva canonica dovrebbe essere rappresentata da una retta passante per O, M, N; una tal retta non esiste ($p_g = 0$) e il numero virtuale di tali rette è pure $p_a = 0$.

IV. - Tipo delle superficie F nello spazio S_3.

15. – Vogliamo ora illuminare il resultato generale ottenuto, mostrando come le superficie F che costituiscono i primi esempi noti di superficie con $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$, si lascino rappresentare sul nostro piano doppio tipico, in modo semplice e diretto.

In particolare, invertendo poi la rappresentazione della sestica F_6 passante doppiamente per gli spigoli d'un tetraedro, riconosceremo come la suddetta F_6 possa prendersi come tipo della famiglia delle superficie per cui $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$.

Si consideri dunque la superficie F che si è presentata dapprima, cioè la sestica F_6 di S_3 che passa doppiamente per gli spigoli di un tetraedro.

Trattiamo anzitutto il caso generale in cui si abbia un tetraedro proprio. Prendiamo allora uno spigolo a di questo, e due altri spigoli b, c incidenti ad a e sghembi fra loro; le quadriche per a, b, c segano su F_6 una rete di curve iperellittiche d'ordine 6 e di genere 3, che ha due punti base sullo spigolo d opposto ad a; questa rete conduce alla rappresentazione sul piano doppio, con una curva di diramazione $K_6 + p + q$, indicato al numero precedente. I punti del piano doppio corrispondono alle coppie segate su F_6 dalle rette incidenti a b, c. Le immagini delle sezioni piane di F_6, sopra il piano doppio, sono curve del 6° ordine di genere 4, aventi in O un punto doppio, gli stessi tacnodi M, N di K_6 colle stesse tangenti tacnodali, ed infine dotate di un punto doppio variabile in corrispondenza alla coppia che si trova determinata sopra la sezione piana omologa dalla retta del piano incidente a b, c; le nominate curve del 6° ordine toccano la K_6 in 8 punti semplici.

16. – Fermiamoci ora a trattare alcuni casi particolari notevoli della F_6.

Fra questi si presenta il caso (osservato dal sig. CASTELNUOVO) in cui il tetraedro diventa un angoloide, avente i sei spigoli doppi per la F_6. In questo caso limite vale ancora la costruzione precedente: si considerino tre spigoli a, b, c dell'angoloide i quali non giacciano in una medesima faccia, ed i coni quadrici per a, b, c; questi segano su F_6 una rete di curve iperellittiche di genere 3 che conduce al solito piano doppio.

Infatti la costruzione indicata equivale alla seguente:

1) si proietti la F_6 dal punto 4-plo, vertice dell'angoloide; si ottiene allora un piano doppio che ha una curva di diramazione di ordine 10, composta di quattro rette a_1, a_2, a_3, a_4 (le tracce dei piani dell'angoloide) e di una sestica L_6 passante doppiamente per i 6 vertici del quadrilatero formato da codeste rette;

2) si operi quindi una trasformazione quadratica del piano, prendendo come punti fondamentali tre vertici non allineati del quadrilatero suddetto, p. es. i vertici

$$A_{34} = (a_3a_4), \qquad A_{13} = (a_1a_3), \qquad A_{14} = (a_1a_4);$$

allora la L_6 si trasforma in una K_6 che ha un punto doppio nel punto A_{34} corrispondente alla retta $a_1 \equiv A_{13}A_{14}$, due tacnodi nei punti A'_{14}, A'_{13} omologhi alle altre due rette fondamentali, ed anche un punto doppio nel punto A'_{12} omologo ad $A_{12} = (a_1a_2)$; inoltre le due rette a_1, a_2 si trasformano in due rette di diramazione, tangenti tacnodali di K_6 passanti per A'_{12}.

Si potrebbero considerare ora altri casi particolari notevoli della sestica F_6; notiamo in ispecie il caso di degenerazione del tetraedro i cui spigoli sono doppi per F_6, che conduce al piano doppio particolare considerato nel numero precedente, ove uno dei due tacnodi M, N cade infinitamente vicino al punto doppio O di K_6. Questo caso si ottiene immaginando che due spigoli opposti b, c del tetraedro, e quindi le due coppie di facce per essi, si accostino indefinitamente; allora la F_6 ha una retta tripla b, una retta doppia c infinitamente vicina a b e sghemba con essa, ed infine altre due rette doppie sghembe fra loro e incidenti a b, c. La rappresentazione sul piano doppio si ottiene ancora particolarizzando la costruzione generale.

17. – Senza fermarci più a lungo sul caso suddetto, esaminiamo un secondo esempio, cioè la superficie F_{10} del 10° ordine di S_5, che si è presentata al sig. FANO (6), come immagine della congruenza delle rette principali di un sistema lineare ∞^3 di quadriche senza punti base in S_3 (7). Il sig. FANO ha osservato che la F_{10} ha il genere $p_a = p_g = 0$ e il bigenere $P_2 = 1$, ed ha una curva bicanonica d'ordine 0; essa contiene 20 cubiche piane, ed è facile vedere che fra queste si trovano delle terne di cubiche secantisi a due a due in un punto; una di queste terne appartiene quindi ad un sistema lineare ∞^3 di curve di genere 4, secantisi a

(6) Accad. di Torino, « Memorie », serie II, t. L (1901).

(7) Congruenza considerata per la prima volta da REYE, *Geometrie der Lage*, 3te Auflage, III, pag. 140.

due a due in 6 punti. Mercè un tale sistema la F_{10} si rappresenta sopra una sestica F_6 di S_3, a sezioni di genere 4, dotata dunque di una curva doppia del 6° ordine; e poichè questa curva deve esser doppia per una superficie (biaggiunta) d'ordine 4, essa si compone dei 6 spigoli di un tetraedro. Ricadiamo così nel caso della sestica F_6 già esaminato innanzi. Del resto si potrebbe ottenere direttamente la rappresentazione di F_{10} sul nostro piano doppio considerando due cubiche piane incidenti di F_{10}, e la cubica aggiunta ad una di queste; si ottiene così una curva spezzata di genere 3 che appartiene ad una rete di curve iperellittiche dello stesso genere.

18. – Abbiamo veduto (nn. 15, 16) come la superficie del 6° ordine, F_6, passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro si rappresenti sopra un piano doppio la cui curva di diramazione si compone:

1) di una sestica K_6 con due tacnodi M, N ed un punto doppio O intersezione delle tangenti tacnodali p, q;

2) e di queste rette p, q.

Viceversa, prendiamo ad arbitrio la curva piana $p + q + K_6$ dotata delle singolarità indicate; si domanda se il piano doppio definito da questa curva [presa come curva di diramazione] può rappresentarsi sopra una sestica F_6 di S_3, passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro.

Un conto di costanti ci guida anzitutto ad una risposta affermativa.

Vi sono nello spazio ∞^{25} superficie del 6° ordine F_6, passanti doppiamente per gli spigoli d'un tetraedro; e poichè si hanno ∞^{15} omografie, le F_6 posseggono 10 invarianti assoluti. Questi invarianti si possono riguardare come i *moduli* da cui dipende la famiglia delle superficie rappresentabili sulle F_6, attesochè queste superficie non ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in se stesse.

Ora altrettanti moduli si riscontrano nella famiglia dei piani doppi sopra nominati, poichè la costruzione delle anzidette curve $p + q + K_6$ dipende da 18 costanti arbitrarie, ma ∞^8 curve trasformate omografiche l'una dell'altra conducono a piani doppi birazionalmente identici.

Questo conto di costanti basta già ad accertarci che la trasformazione della F_6 generale in un piano doppio con curva di diramazione $p+q+K_6$ deve essere invertibile.

Ora indicheremo brevemente in qual modo, data una superficie F riferita al piano doppio suindicato, possa compiersi la trasformazione di F in una sestica F_6 o in un caso particolare di questa.

A tale scopo basterà costruire sopra F un sistema lineare (∞^3) di curve di genere 4, mercè cui la F si trasformi in una superficie del 6° ordine; allora questa avrà una curva doppia del 6° ordine, doppia per una superficie del 4° ordine e non appartenente ad una quadrica,

cioè una curva doppia costituita dagli spigoli di un tetraedro (eventualmente degenere).

Ora la rappresentazione di F sul nostro piano doppio, pone in evidenza sopra F almeno un fascio irriducibile di curve C di genere 2, rappresentato dal fascio delle rette per un tacnodo (p. es. M) di K_6, distinto da O.

Cerchiamo di costruire su F una curva ellittica D che seghi le C in due punti diversi dai punti base di $|C|$; il sistema lineare $D + |C|$ sarà contenuto in un sistema irriducibile ∞^3 $|D + C|$ di curve di genere 4, secantisi a due a due in 6 punti; le curve del sistema segheranno sopra D le ∞^1 coppie di una g_2^1, e sopra una C generica le ∞^2 quaterne di una g_4^2 non composta colle coppie della g_2^1; pertanto il sistema $|D + C|$ non avrà punti base e le curve di esso passanti per un punto non passeranno in conseguenza per altri punti; in conclusione $|D + C|$ condurrà alla trasformazione domandata della F in una F_6.

Si tratta dunque di costruire su F una curva ellittica D bisecante le curve C. E la soluzione del problema si ottiene riferendosi al piano doppio rappresentativo di F nel modo seguente.

Si consideri sul piano il sistema ∞^{12} delle sestiche che hanno comuni con K_6 il punto doppio O, i tacnodi M, N e le tangenti tacnodali; entro questo sistema lineare si trovano due sistemi non lineari:

1) quello ∞^4 delle sestiche di genere 5, toccanti K_6 in 8 punti semplici, che rappresentano le curve del sistema lineare determinato su F dall'immagine di K_6;

2) quello ∞^8 costituito da tutte le possibili coppie di cubiche K_3 aggiunte a K_6.

I due sistemi hanno comuni delle coppie di K_3 quadritangenti a K_6; ogni K_3 rappresenta su F una curva composta di due parti ellittiche, e ciascuna di queste parti biseca le curve C di genere 2 omologhe alle rette per M, di guisa che una qualunque di tali parti può prendersi come curva D che sommata a C fornisce un sistema $|C + D|$ ∞^3, costituito di curve di genere 4.

È opportuno osservare in qual modo il sistema $|D + C|$ venga rappresentato sul piano doppio. Bisogna sommare alla nominata K_3 una retta per M contata due volte, e poi la retta q (tangente tacnodale di K_6 in N) che è immagine di un punto base del fascio $|C|$, poi anche l'intorno del punto M che rappresenta l'altro punto base di $|C|$; si ottiene così un sistema ∞^3 di curve del 6° ordine aventi comuni con K_6 il punto doppio O, i due tacnodi M, N e le rispettive tangenti tacnodali, e dotate inoltre di un punto doppio variabile e di 8 contatti semplici con K_6.

Questo sistema ∞^3 di sestiche rappresenta il sistema delle sezioni piane di una superficie F_6 del 6° ordine, la quale ha in generale 6 rette

doppie, spigoli di un tetraedro, in corrispondenza ai due tacnodi M, N di K_6, al punto doppio O, alla retta $o = MN$, alla cubica K_3 quadritangente K_6 e ad un'altra cubica analoga che sommata alle rette (doppie) per N condurrebbe al medesimo sistema di sestiche tangenti in 8 punti a K_6.

Giova osservare che alle rette del piano doppio corrispondono le sezioni di F_6 colle quadriche di una rete che passano per due spigoli opposti del tetraedro e per un terzo spigolo. Si vede quindi che la costruzione data innanzi conduce ad invertire direttamente la rappresentazione di F_6 sul piano doppio, ottenuta al n. 15.

È ovvio che si possono ottenere i casi particolari della F_6, indicati al n. 16, in corrispondenza ad opportune particolarizzazioni del piano doppio.

Così si ottiene la F_6 che passa doppiamente per gli spigoli di un angoloide tetraedro, se la K_6 ha un ulteriore punto doppio R (oltre O, e i tacnodi M, N); allora le ∞^3 sestiche di genere 4 aventi gli stessi punti doppi di K_6, e tangenti ad essa in 6 punti, rappresentano il sistema delle sezioni piane di F_6.

Se invece la K_6 ha un tacnodo N infinitamente vicino ad O, si ottiene la F_6 dotata di una retta tripla e di tre rette doppie, due (in generale) sghembe fra loro e incidenti alla retta tripla, la terza retta infinitamente vicina alla retta tripla e incidente all'altre due. Si possono anche sovrapporre le due particolarizzazioni se K_6 ha il tacnodo N infinitamente vicino ad O, e contiene (oltre O, M, N) un altro punto doppio R, ecc.

Infine possiamo concludere:

Ogni superficie coi generi

$$p_a = P_3 = 0\,, \qquad P_2 = 1$$

si può trasformare birazionalmente in una sestica passante doppiamente per gli spigoli d'un tetraedro, o in un caso particolare di questa superficie.

V. - Gruppo discontinuo delle superficie F e proprietà dei sistemi di curve che vi si collegano.

19. – Non intendiamo di proseguire sistematicamente lo studio delle superficie F coi generi

$$p_a = P_3 = 0\,, \qquad P_2 = 1\,;$$

ma, riferendoci alla sestica F_6, ottenuta come tipo di esse, ci proponiamo di metterne in luce alcune proprietà generali, di notevole interesse.

Ci riferiremo alla sestica F_6 che passa doppiamente per gli spigoli di un *tetraedro proprio* (tipo *generale*).

Consideriamo il fascio di quadriche passanti per un quadrilatero sghembo formato con due coppie di spigoli opposti aa' e bb' del tetraedro; si ottiene così su F un fascio di quartiche ellittiche $|C|$.

Una C generica viene segata in due punti A_1A_2 da a, e in due punti B_1B_2 da b.

Le due coppie di punti A_1A_2, B_1B_2 su C, non sono equivalenti; infatti se lo fossero, le due rette doppie a, b sarebbero curve equivalenti su F_6, oppure si ridurrebbero equivalenti sommate a delle componenti di C spezzate (8); ma le sole curve spezzate nel fascio $|C|$ sono in generale le $2c$, $2c'$, ove c, c' designano le rette doppie costituenti la terza coppia di spigoli del tetraedro, e non si ha

$$a + c \equiv b + c' .$$

Per la medesima ragione non sono equivalenti i multipli delle suddette coppie secondo un intero r qualsiasi, $r(A_1 + A_2)$ ed $r(B_1 + B_2)$.

Ciò posto, si designi con z l'integrale ellittico di 1ª specie appartenente ad una C generica, con 2ϖ, $2\varpi'$ i suoi periodi, e con α, β le somme dei valori di z nei punti delle coppie A_1A_2 e B_1B_2. Sopra la C verrà determinata razionalmente una trasformazione birazionale

$$z' \equiv z + \alpha - \beta \pmod{2\varpi, 2\varpi'},$$

trasformazione *non periodica* perchè non esiste alcun intero r per cui sia

$$r\alpha \equiv r\beta \pmod{2\varpi, 2\varpi'}.$$

Si deduce che:

La superficie F ammette una trasformazione birazionale non ciclica in se stessa, e quindi la serie infinita delle potenze di questa trasformazione, lascianti ferme tutte le curve ellittiche del fascio $|C|$.

La superficie F_6 conduce così ad un nuovo esempio di superficie dotata di una *infinità discontinua di trasformazioni birazionali* in se stessa, non contenuta in un gruppo continuo (infatti le superficie non razionali con un gruppo continuo hanno $p_a < 0$). Due esempi analoghi sono già noti; il primo fu segnalato dal sig. HUMBERT (Comptes rendus, 30 janvier 1897), il secondo dal sig. PAINLEVÉ (ibidem, 14 février 1897) (9).

---

(8) Cfr. F. SEVERI, « Annali di Mat. », serie III, t. 12, n. 6.

(9) Cfr. PICARD e SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. II, pag. 462.

20. – È ovvio che il gruppo discontinuo formato dalla totalità delle trasformazioni di F_6 è più ampio di quello costruito innanzi che lascia ferme le curve del fascio ellittico $|C|$, giacchè si hanno su F_6 altri fasci di curve ellittiche analoghi a $|C|$, ed anzi se ne hanno infiniti.

Infatti se si prende su F_6 una curva ellittica isolata K, non appartenente a $|C|$ (p. es. la retta doppia a), questa viene trasformata in una *infinità discontinua di curve ellittiche isolate*, raddoppiando le quali si ottengono su F_6 *infiniti fasci di curve ellittiche.*

Consideriamo ora le infinite curve ellittiche isolate appartenenti ad F_6. Secondo un teorema del sig. SEVERI [10] (ora da lui stesso recentemente completato), tutte queste curve debbonsi poter ottenere per *somma* e *sottrazione* da un numero finito di curve costituenti una *base minima* sulla superficie, ed anzi è facile vedere qui che le curve della base debbono essere fra le suddette curve ellittiche isolate. Orbene una curva ellittica isolata di F_6 non può certo ottenersi *per somma* da altre curve, sicchè si conclude che:

Sopra la superficie F_6 non è possibile costruire tutti i sistemi lineari operando soltanto per somma a partire da un numero finito di sistemi.

Per quanto sappiamo, una tale circostanza non era stata fin qui riscontrata sopra nessuna *superficie regolare*; anzi alcune ragioni di analogia facevano sospettare che essa non fosse possibile, e cioè che si potesse estendere a tutte le superficie regolari un noto teorema del sig. HILBERT sulle forme, in virtù del quale « tutti i sistemi lineari di curve *sopra una superficie razionale* si ottengono *per somma* da un numero finito di sistemi ».

Ebbene si vede così che l'estensione del teorema di HILBERT non può aversi neppure per tutte le superficie regolari; che nella costruzione dei sistemi lineari su queste a partire da una base minima, è necessario (almeno in qualche caso) operare per sottrazione oltrechè per somma, come appunto accade nella costruzione di SEVERI.

21. – Terminiamo questa Memoria segnalando all'attenzione degli studiosi alcune belle questioni concernenti la superficie F_6:

1) se la totalità delle sue trasformazioni birazionali formi un gruppo *propriamente* o *impropriamente discontinuo*;

2) come si distribuiscano su F_6 i sistemi lineari di curve di un dato ordine, ed in ispecie le curve ellittiche isolate di dato ordine;

3) quali particolarizzazioni portino nel gruppo le degenerazioni del tetraedro i cui spigoli sono doppi per F_6, ed in ispecie se possa accadere che il gruppo si riduca ad un numero finito di trasformazioni cicliche.

---

[10] *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica*, « Mathem. Annalen », Bd. 62, 1906.

XL.

SULLE SUPERFICIE ALGEBRICHE CHE AMMETTONO UNA SERIE DISCONTINUA DI TRASFORMAZIONI BIRAZIONALI

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XV (2° sem., 1906), pp. 665-669.

La Nota, che mi onoro di presentare all'Accademia, porta un primo contributo al problema di determinare tutte le superficie algebriche che ammettono una trasformazione birazionale non periodica, e quindi una serie discontinua di trasformazioni. La possibilità di superficie siffatte, che non posseggano un gruppo continuo di trasformazioni, era conosciuta per gli esempii del sig. HUMBERT (superficie di KUMMER) e del sig. PAINLEVÉ, ai quali ho aggiunto recentemente l'esempio delle superficie di genere $p_a = p_g = 0$ coi plurigeneri $P_2 = 1$, $P_3 = 0$.

Qui si dimostra che *le superficie con una trasformazione non periodica* (non possedenti un gruppo continuo di trasformazioni) *contengono sempre un fascio di curve ellittiche, all'infuori del caso* $p_a = P_2 = 1$. Questo caso sembra dar luogo ad una *vera eccezione* al teorema; infatti il sig. FANO mi comunica che una superficie del 4° ordine F_4, contenente una sestica di genere due, ammette una serie discontinua di trasformazioni in sè, e pare che la suddetta F_4 non possieda in generale fasci di curve ellittiche.

A prescindere dalle superficie coi generi 1, il teorema sopra enunciato trae il suo interesse da ciò, che, sotto alcune condizioni complementari, esso è invertibile, di guisa chè si può dire che *le superficie con un fascio di curve ellittiche ammettono in generale gruppi discontinui di trasformazioni in se stesse.*

Un'analisi approfondita della questione permetterà di porre il resultato qui ottenuto sotto una forma più notevole. Infatti (lasciando sempre da parte il caso $p_a = P_2 = 1$) si potranno esprimere le condizioni perchè una superficie possegga una serie discontinua, ma non un gruppo continuo, di trasformazioni birazionali, scrivendo che il genere lineare $p^{(1)}=1$ ($p_a \geqslant 0$, $P_2 > 0$), e che il numero degli *integrali doppi di 2ª specie* soddisfa ad una certa diseguaglianza.

Ma riservo questo teorema (che esige ancora qualche sviluppo) ad un'altra comunicazione.

1. – Sia F una superficie algebrica la quale ammetta una trasformazione birazionale non periodica, ma non un gruppo continuo di trasformazioni in se stessa. Anzitutto sarà il suo genere aritmetico

$$p_a \geqslant 0 ,$$

ed il suo bigenere

$$P_2 > 0 , \qquad (P_2 \geqslant p_a);$$

infatti una superficie per cui $p_a = P_2 = 0$ è razionale (CASTELNUOVO), ed una superficie per cui $p_a < 0$ è riferibile ad una rigata, oppure è ellittica o iperellittica (ENRIQUES), cioè tutte queste superficie posseggono gruppi continui di trasformazioni.

S'indichi con $p^{(1)}$ il genere lineare (virtuale) di F; il bigenere P_2, il trigenere P_3 ecc. soddisferanno rispettivamente alle diseguaglianze

$$P_2 \geqslant p_a + p^{(1)} ,$$
$$P_3 \geqslant p_a + 3p^{(1)} - 2 ,$$
$$P_4 \geqslant p_a + 6p^{(1)} - 5 ,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Quindi, se $p^{(1)} > 1$ e $p_a \geqslant 0$, si avranno su F almeno ∞^3 curve tricanoniche ecc.; ed è facile vedere che queste, a prescindere tutt'al più da parti fisse, saranno irriducibili, per modo che si potrà costruire una superficie φ, trasformata di F appartenente ad un certo spazio S_i, avente come sezioni iperpiane curve pluricanoniche.

Ora se F ammette trasformazioni birazionali in sè, queste si rispecchiano in trasformazioni proiettive di φ. Ma, com'è noto, una superficie che ammetta una trasformazione proiettiva non periodica, ammette tutto un gruppo continuo di trasformazioni proiettive, ed è razionale o rigata (ENRIQUES-FANO). Ciò non potendo accadere per la φ, si conclude intanto che *il genere lineare di* F *vale*

$$p^{(1)} = 1 .$$

2. – Ora, lasciando da parte l'ipotesi che la F possegga trasformazioni in sè, vogliamo stabilire un teorema generale sulle superficie di genere lineare $p^{(1)} = 1$, per cui $p_a \geqslant 0$, $P_2 > 0$.

Designando con p_g $(= P_1)$ il genere geometrico, si possono distinguere i seguenti casi:

1) $$p^{(1)} = 1\,, \qquad p_g > 1\,.$$

Allora la superficie F contiene un fascio di curve ellittiche, costituito dalle curve canoniche o dalle loro componenti, se quelle sono riducibili.

2) $$p^{(1)} = 1\,, \qquad p_g = p_a = 1\,.$$

Qui il bigenere P_2 può avere i valori

$$P_2 = 1 \qquad \text{o} \qquad P_2 > 1\,.$$

Se $P_2 = 1$ la superficie ha tutti i plurigeneri uguali ad 1; le curve pluricanoniche hanno l'ordine 0; ogni sistema lineare puro di genere π su F ha il grado $n = 2\pi - 2$. Il primo esempio di tali superficie è dato dalla superficie del 4° ordine che non contiene in generale fasci di curve ellittiche.

Se $P_2 > 1$ si ha su F un fascio di curve ellittiche bicanoniche, o componenti delle curve bicanoniche.

3) $$p^{(1)} = 1\,, \qquad p_g = p_a = 0\,, \qquad P_2 > 0\,.$$

Può aversi

$$P_2 = 1 \qquad \text{o} \qquad P_2 > 1\,.$$

Se $P_2 = 1$ la curva bicanonica può avere l'ordine 0 (essendo $P_3 = P_5 = \ldots = 0$, $P_2 = P_4 = P_6 = \ldots = 1$), oppure l'ordine > 0 (essendo $P_3 > 0$, $P_6 > 1$); ed in ambi i casi la F possiede fasci di curve ellittiche (1).

Se $P_2 > 1$ le curve bicanoniche, o le loro componenti, formano su F un fascio di curve ellittiche.

4) $$p^{(1)} = 1\,, \qquad p_a = 0\,, \qquad p_g = 1\,.$$

Essendo l'irregolarità

$$p_g - p_a = 1\,,$$

(1) Cfr. ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, « Memorie della Società Italiana delle scienze (detta dei XL) », 1906 [questo volume, XXXIX].

la superficie possiede un integrale semplice di 1ª specie con due periodi e quindi un fascio ellittico di curve C, di grado 0 e di un certo genere π (> 0). Essa possiede poi una curva canonica K ellittica secante in $2\pi - 2$ punti ogni curva C.

Vogliamo dimostrare che, dato possa essere $\pi > 1$, sarà il bigenere $P_2 > 1$, e quindi si avrà su F un fascio di curve ellittiche costituito dalle curve bicanoniche o dalle componenti di queste.

Pongasi che sia $\pi > 1$ e $P_2 = 1$; facciamo vedere che si arriva ad un assurdo.

Si costruisca il sistema lineare $|C''|$ secondo aggiunto ad una curva C del fascio; esso ha la dimensione $3\pi - 3$ (perchè il primo aggiunto $|C'| = |C + K|$ ha il genere $3\pi - 2$), e, stante l'ipotesi $P_2 = 1$, sega sulla C la serie bicanonica completa $g_{4\pi-4}^{3\pi-4}$.

Ora, designando con $\overline{C}$ un'altra curva qualsiasi del fascio ellittico dato su F, il sistema

$$|C'' + \overline{C} - C| = |\overline{C}''|$$

è il secondo aggiunto a $\overline{C}$. Al variare di $\overline{C}$ tutti questi sistemi lineari formano un sistema continuo non lineare

$$\{C''\},$$

di dimensione $3\pi - 2$, le cui curve segano su C gruppi della anzidetta serie bicanonica $g_{4\pi-4}^{3\pi-4}$. Pertanto dovranno esistere ∞^1 curve residue di C rispetto a $\{C''\}$, una delle quali è la curva bicanonica di F. Queste curve saranno, come la bicanonica, di genere 1, e comporranno un fascio ellittico. Ma tale conclusione è incompatibile coll'ipotesi $p_g = 1$, perchè a questo secondo fascio ellittico corrisponderà un secondo integrale semplice di 1ª specie di F, ciò che porta $p_g - p_a > 1$.

Raccogliendo i resultati dell'analisi precedente possiamo enunciare la conclusione:

Una superficie ($p_a \geqslant 0$, $P_2 > 0$) *di genere lineare* $p^{(1)} = 1$ *contiene sempre un fascio (razionale o irrazionale) di curve ellittiche; fa eccezione il caso delle superficie con tutti i generi* 1 ($p_a = P_2 = 1$).

3. – In base ai nn. 1, 2, ogni superficie che ammetta una trasformazione generante una serie discontinua, ma non un gruppo continuo, di trasformazioni birazionali in se stessa, possiede un fascio di curve ellittiche, oppure ha tutti i generi uguali ad 1.

Si tratta ora d'invertire, fin dove è possibile, questo resultato.

Sia F una superficie contenente un fascio di curve ellittiche C; e sup-

pongasi che vi siano due curve K_1, K_2 secanti le C in uno stesso numero m di punti e secondo gruppi G'_m, G''_m i cui multipli non siano equivalenti.

Sopra una C generica consideriamo l'integrale ellittico di 1ª specie I, coi periodi ϖ, ϖ'; siano a_1, a_2 rispettivamente le somme dei valori di I nei punti dei due gruppi G_m, G'_m. Allora si può definire razionalmente una trasformazione birazionale della curva C in se stessa, ponendo

$$I' \equiv I + a_1 - a_2 .$$

Questa trasformazione non è periodica, poichè si avrebbe altrimenti

$$r(a_1 - a_2) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \varpi, \varpi').$$

Al variare di C nel fascio si ha una trasformazione birazionale della superficie F, le cui potenze formano un gruppo discontinuo.

È chiaro che se le curve K_1, K_2 segassero le C in un numero diverso di punti, p. es. in m_1, m_2 punti rispettivamente, basterebbe sostituire ad esse due multipli convenienti, p. es. m_2K_1, m_1K_2, e si otterrebbe sempre una trasformazione non periodica di F, semprechè non vi sia equivalenza fra due multipli qualsiansi dei gruppi segati da K_1, K_2 sulle C.

Si può dunque affermare che:

Se una superficie algebrica contiene un fascio di curve ellittiche C, *e due curve secanti sulle* C *dei gruppi i cui multipli non sono equivalenti, essa ammette una trasformazione non periodica e quindi una serie discontinua di trasformazioni birazionali, che lasciano ferme le* C.

Questo caso si può considerare come il *caso generale* delle superficie con un fascio di curve ellittiche, quando le suddette superficie si definiscano come luogo di curve ellittiche, appoggiantisi, in un certo numero di punti, a delle linee direttrici.

Aggiungasi infine l'osservazione che se una superficie contiene due fasci di curve ellittiche, mutate in sè rispettivamente da due trasformazioni non periodiche, moltiplicando queste trasformazioni si otterrà in generale un gruppo discontinuo che non ammetterà fasci invarianti di curve ellittiche.

XLI.

INTORNO ALLE SUPERFICIE ALGEBRICHE DI GENERE LINEARE $p^{(1)} = 1$

« Rend. dell'Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », vol. XI (1907), pp. 11-15.

Riprendendo da un punto di vista più semplice un argomento trattato in una recentissima comunicazione all'*Accademia dei Lincei* (2 Dec. 1906; cfr. n. 2), sono pervenuto al resultato più espressivo che qui espongo:

Ogni superficie di genere lineare $p^{(1)} = 1$, di genere aritmetico $p_a \geqslant 0$ e di genere geometrico $p_g > p_a$, contiene un *fascio di genere* $p_g - p_a$, costituito da curve ellittiche. (Per ciò che è osservato in quella comunicazione, il teorema si estende all'ipotesi $p_g = p_a$, escluso il caso $p_a = P_2 = 1$, dove P_2 designi il bigenere).

Deduco quindi che:

se una superficie di genere geometrico $p_g = 1$ ha il quadrigenere $P_4 = 1$, tutti i suoi plurigeneri sono uguali all'unità e la curva canonica ha l'ordine 0; il suo genere aritmetico vale $p_a = 1$ o $p_a = -1$.

1. – Si abbia una superficie F di genere aritmetico p_a ($\geqslant 0$), di genere geometrico $p_g > p_a$, e di genere lineare $p^{(1)} = 1$.

Si può supporre F senza curve eccezionali e scegliere su di essa un sistema lineare $|C|$, di un certo genere π e di un certo grado n, privo di punti base, per modo che il sistema lineare $|C'|$ aggiunto a $|C|$ (di dimensione $p_a + \pi - 1$) appartenga ad un sistema continuo $\{C'\}$ $\infty^{p_g + \pi - 1}$, composto dunque di $\infty^{p_g - p_a}$ sistemi lineari [1].

Uno generico $|\overline{C}'|$ fra i sistemi lineari contenuti in $\{C'\}$ sega sopra una curva C una serie lineare non speciale $g_{2\pi-2}$, la cui dimensione è $\leqslant \pi - 2$; perciò esiste, qualunque sia $|\overline{C}'|$, un sistema residuo $|\overline{C}' - C|$. Questo fatto si può anche esprimere dicendo che, nelle ipotesi sopra

---

[1] Cfr. la mia Nota nei « Rendiconti » di quest'Accademia, 11 Dicembre 1904 [questo volume, XXXV].

espresse, il sistema lineare canonico è contenuto in un sistema continuo composto di $\infty^{p_g - p_a}$, e non di meno, sistemi lineari completi; le curve di codesto sistema continuo si possono denominare (come ho già proposto in altra occasione) curve *paracanoniche*.

E qui è opportuno rilevare che il ragionamento precedente esclude implicitamente il caso, che potrebbe pensarsi possibile per $p_g = 1$ e $p_a = 0$, in cui vi sia una *curva canonica d'ordine* 0, cioè pel sistema $|C|$ sia $n = 2\pi - 2$; infatti codesta ipotesi porterebbe

$$|\overline{C}'| = |C| = |C'|.$$

Or dunque, abbiam detto, esiste sopra F un sistema continuo di curve paracanoniche, composto di $\infty^{p_g - p_a}$ sistemi lineari completi. Tutte le curve paracanoniche avranno lo stesso genere $p^{(1)} = 1$, e il grado del sistema sarà (come il grado del sistema canonico)

$$p^{(1)} - 1 = 0 .$$

Si deduce che le curve paracanoniche, non segandosi fra loro, sono composte colle curve irriducibili di un fascio $\{K\}$. Il fascio $\{K\}$ sarà irrazionale, ed anzi il suo genere sarà $\varrho \geqslant p_g - p_a$, perchè esistono $\infty^{p_g - p_a}$ gruppi di curve K non equivalenti; d'altra parte si sa che deve essere

$$p_g - p_a \geqslant \varrho \ (^2);$$

dunque si conclude

$$\varrho = p_g - p_a .$$

Cioè:

Ogni superficie irregolare di genere aritmetico $p_a \geqslant 0$, *di genere geometrico* p_g $(> p_a)$ *e di genere lineare* $p^{(1)} = 1$, *contiene un fascio di genere* $p_g - p_a$, *di curve ellittiche*; le curve canoniche sono composte con curve di questo fascio ed, anche per $p_g = 1$, il loro ordine è > 0, cioè per ogni sistema lineare di grado n e genere π tracciato sulla superficie, si ha sempre

$$n < 2\pi - 2 .$$

2. – Il teorema dato innanzi non si estende al caso $p_a = -1$. Sappiamo infatti (^{3}) che in questo caso:

1) se $p_g > 1$ la superficie contiene due fasci irrazionali, uno di genere p_g composto di curve ellittiche, l'altro di genere 1;

(^{2}) Cfr. SEVERI, « Atti dell'Accad. di Torino », 1904.

(^{3}) ENRIQUES, « Rendiconti del Circolo di Palermo », 14 Maggio 1905 [questo volume, XXXVII].

2) se $p_g = 1$ la superficie è iperellittica oppure contiene due fasci ellittici di curve (uno dei quali è costituito di curve ellittiche);

3) se $p_g = 0$ la superficie possiede un fascio ellittico di curve di genere qualsiasi (ed un fascio lineare di curve ellittiche).

3. – Ora i risultati sopra esposti ci permettono di rispondere alla domanda di distinguere le superficie di genere $p_g = 1$ contenenti una curva canonica di ordine 0, da quelle che hanno una effettiva curva canonica d'ordine > 0; cioè le superficie sopra cui ogni sistema puro $|C|$ di genere π ha il grado

$$n = 2\pi - 2 ,$$

da quelle per cui è sempre

$$n < 2\pi - 2 .$$

Infatti consideriamo le tre ipotesi possibili per $p_g = 1$: $p_a = 1$, $p_a = 0$, $p_a = -1$.

1ª *ipotesi* ($p_g = p_a = 1$) (4). Se esiste una curva canonica d'ordine > 0, e di genere $p^{(1)}$ ($\geqslant 1$), il numero delle *curve bicanoniche* linearmente indipendenti, cioè il *bigenere* della superficie, vale

$$P_2 \geqslant p_a + p^{(1)} ,$$

quindi

$$P_2 > 1 .$$

Invece se la curva canonica ha l'ordine 0, si ha

$$P_2 = 1 .$$

2ª *ipotesi* ($p_g = 1$, $p_a = 0$). La superficie contiene sempre una curva canonica K d'ordine > 0, e questa appartiene ad una serie ∞^1 di curve paracanoniche, le cui parti variabili costituiscono un fascio ellittico (n. 1). In conseguenza la curva bicanonica $2K$ appartiene ad un fascio lineare (o ad un sistema più ampio) di curve, cioè

$$P_2 > 1 .$$

(4) Cfr. ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere uno*, « Memorie della società italiana delle Scienze », 1896 [queste *Memorie*, vol. I, XVI].

3ª *ipotesi* ($p_g = 1$, $p_a = -1$). La superficie data F è riferibile ad una superficie iperellittica Φ, semplice o multipla, e, come abbiamo dimostrato altrove (5), il quadrigenere di F vale $P_4 > 1$ nel secondo caso, mentre è evidentemente $P_4 = 1$ nel primo caso, dove la curva canonica ha l'ordine 0.

Tenendo conto che l'ipotesi $P_2 > 1$, porta a *fortiori* $P_4 > 1$, si può concludere:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie di genere $p_g = 1$ *non possegga una effettiva curva canonica d'ordine* > 0 ($n = 2\pi - 2$), *si esprime uguagliando ad* 1 *il suo quadrigenere*, cioè scrivendo

$$P_4 = 1 .$$

Tutti i plurigeneri sono allora di conseguenza uguali ad 1:

$$p_g = P_2 = P_3 = P_4 = \ldots = P_i = 1 .$$

---

(5) « Circolo di Palermo », l. c.

XLII.

INTORNO ALLE SUPERFICIE IPERELLITTICHE

di FEDERIGO ENRIQUES e FRANCESCO SEVERI

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XVI (1º sem., 1907),

pp. 443-453.

1. – Una superficie algebrica

$$F(xyz) = 0$$

si dice *iperellittica*, quando ammette una rappresentazione parametrica per mezzo di funzioni abeliane quadruplamente periodiche, di due parametri:

$$x = f_1(uv)\,, \qquad y = f_2(uv)\,, \qquad z = f_3(uv)\,.$$

Ad ogni punto (xyz) corrisponderanno in generale $r \geqslant 1$ *coppie* u, v *incongrue rispetto ai periodi primitivi* delle f_1, f_2, f_3; diremo in tal caso che F è una *superficie iperellittica di rango* r.

Le superficie razionali e le rigate ellittiche si possono considerare sia come degenerazioni di superficie iperellittiche di rango 1, sia come superficie iperellittiche di rango $r > 1$.

Ma, nel seguito, parlando di superficie iperellittiche, escluderemo sempre codeste due classi di superficie.

Come è noto, i periodi primitivi delle funzioni f_1, f_2, f_3 si possono ridurre alla *forma normale*

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \dfrac{1}{\delta} & h & g' \end{matrix},$$

ove δ è un intero positivo.

Quantunque questa riduzione si effettui (con sostituzioni lineari su u, v e sui periodi) in più modi diversi, l'intero positivo δ che qui figura, risulta sempre lo stesso; esso è un carattere del sistema delle funzioni f_1, f_2, f_3.

Lo diremo il *divisore* di queste funzioni, ed F si chiamerà una *superficie iperellittica di divisore* δ.

2. – Le superficie iperellittiche di rango 1 (talvolta considerate esclusivamente sotto il nome di « superficie iperellittiche ») hanno formato oggetto di classici lavori per parte del sig. PICARD e del sig. HUMBERT. Il primo di questi autori le ha studiate come superficie dotate di un gruppo permutabile ∞^2 di trasformazioni birazionali in se stesse; perciò appunto tali superficie hanno ricevuto il nome di *superficie di Picard*.

Le superficie di PICARD corrispondenti a un divisore δ qualsiasi, si possono costruire geometricamente nel modo seguente:

Si consideri la *superficie di Jacobi* F che rappresenta le coppie di punti di una curva di genere 2; questa è la più generale superficie di PICARD di divisore 1.

Ora F ammette un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sè (trasformazioni di 2ª specie), fra cui vi è un numero finito di trasformazioni cicliche d'ordine δ. Ebbene, una trasformazione siffatta genera su F un'involuzione I_δ d'ordine δ; una qualsiasi superficie F_δ, i cui punti corrispondano biunivocamente ai gruppi di I_δ, è una superficie di PICARD di divisore δ.

Tale costruzione fornisce tutte le superficie di PICARD di divisore qualsiasi, e conduce subito ad illustrarne le note proprietà, sotto l'aspetto geometrico.

Essa conduce anche a proprietà nuove, fra cui sembra particolarmente importante la seguente (che tuttavia esige una dimostrazione un po' delicata):

Sopra una superficie di Picard a moduli generali, di divisore δ, *tutti i sistemi continui di curve si ottengono per moltiplicazione da un sistema continuo* $\infty^{\delta+1}$, $\{C_\delta\}$, *di genere* $\delta + 1$ *e grado* 2δ.

Ne segue in particolare che:

Una superficie di PICARD di divisore $\delta > 3$, può trasformarsi in una superficie d'ordine 2δ senza curve eccezionali, ma non in una superficie senza curve eccezionali d'ordine $< 2\delta$.

Per $\delta = 3, 2$ si hanno superficie di PICARD, senza curve eccezionali, d'ordine minimo 24 e 16 rispettivamente; per $\delta = 1$ l'ordine minimo di una superficie di JACOBI a moduli generali e senza curve eccezionali è 18, perchè la superficie d'ordine 8 le cui sezioni piane appartengono ad un sistema $|2C_1|$, si riduce ad una superficie del 4° ordine (di KUMMER) contata due volte.

Le condizioni affinchè una superficie sia iperellittica di rango 1, sono state date da un teorema del sig. PICARD. Uno di noi (ENRIQUES) ha fatto vedere ch'esse possono tradursi come segue:

Affinchè una superficie sia iperellittica di rango 1, *occorre e basta che i suoi generi* (il genere numerico p_a, il genere geometrico p_g e il quadrigenere P_4) *abbiano i valori*

$$p_a = -1\,, \qquad p_g = P_4 = 1\,.$$

Riesce quindi interessante riconoscere che tali condizioni determinano infinite famiglie di superficie, dipendenti da un intero arbitrario (il divisore δ) e da tre parametri (moduli).

3. – Lo studio delle superficie iperellittiche di rango $r > 1$, si riattacca a quello delle superficie di PICARD, o in particolare delle superficie di JACOBI, mercè l'osservazione seguente:

Ogni superficie iperellittica di rango r e divisore δ corrisponde ad una involuzione d'ordine r sopra una superficie di PICARD F_δ, e quindi ad una involuzione d'ordine $r\delta$ sopra una superficie di JACOBI.

Consideriamo l'involuzione I_r su F_δ che corrisponde ad una superficie iperellittica di rango r. Sussistono le due proprietà seguenti:

1) la I_r ha un numero finito ($\geqslant 0$) di coincidenze, se (come si è avvertito) si escludono dal novero delle superficie iperellittiche le superficie razionali e le rigate ellittiche;

2) la I_r non è composta coi gruppi di una involuzione I_d, generata da una trasformazione ciclica di 2ª specie di F_δ.

Orbene, da queste proprietà si trae che « l'involuzione I_r è generata da r trasformazioni birazionali della F_δ in se stessa, costituenti un gruppo finito d'ordine r ».

Si ha dunque il *teorema fondamentale*:

Ogni superficie iperellittica di rango $r > 1$ e divisore δ, corrisponde ad una involuzione generata da un gruppo di r trasformazioni birazionali sopra una superficie di Picard F_δ.

Cioè:

Sia $F(x\,y\,z) = 0$ una superficie iperellittica, ed essendo x, y, z funzioni abeliane di due parametri u, v, accada che ad ogni gruppo di valori di x, y, z corrispondano r coppie $(u\,v)$ incongrue rispetto ai periodi primitivi di queste funzioni:

$$(u_1\,v_1) \qquad (u_2\,v_2) \qquad \ldots \qquad (u_r\,v_r);$$

allora tali coppie saranno legate da $r-1$ sostituzioni lineari

$$\begin{cases} u_i = a_i u_1 + b_i v_1\,, \\ v_i = c_i u_1 + d_i v_1\,, \end{cases} \qquad (i = 2, 3, \ldots, r),$$

a coefficienti indipendenti da $(x\,y\,z)$.

Queste sostituzioni formano gruppo insieme alla sostituzione identica, e le costanti a_i, b_i, c_i, d_i si possono esprimere mediante combinazioni lineari a coefficienti interi dei periodi.

La dimostrazione di questo teorema fondamentale è assai delicata, soprattutto perchè *non si può escludere a priori che l'involuzione I_r possegga dei punti fondamentali* appartenenti ad ∞^1 gruppi dell'involuzione. Indicheremo qui le grandi linee del procedimento dimostrativo che abbiamo seguito, e a tale scopo potremo riferirci al caso più semplice in cui la I_r è data sopra una superficie di JACOBI F.

Consideriamo su questa un sistema $\{C_1\} = \{C\}$ costituito da ∞^2 curve di genere due senza punti doppi, e costruiamo la curva K coniugata ad una generica C rispetto ad I_r, cioè il luogo dei gruppi di $r-1$ punti coniugati ai punti di C.

La dimostrazione del nostro teorema fondamentale si riconduce a stabilire che la K si compone di $r-1$ curve birazionalmente identiche a C. A priori invece si potrebbe supporre K irriducibile, o spezzata in meno di $r-1$ componenti.

Limitiamoci all'ipotesi che K sia irriducibile, ed indichiamo la via che da codesta ipotesi fa scaturire un assurdo, in relazione alle proprietà 1), 2) di I_r.

Se il sistema $\{K\}$ che viene descritto dalla curva K mentre C descrive $\{C\}$, è costituito da curve generalmente irriducibili, si possono fare due supposizioni:

a) questo sistema è trasformato in se medesimo dalle ∞^2 trasformazioni di 2ª specie di F;

b) esiste un sistema $\{\overline{K}\}$, più ampio di $\{K\}$, che contiene infinite curve birazionalmente identiche ad ogni K.

Ma la supposizione *a*) conduce a contraddire la proprietà 2), che innanzi abbiamo detto valere per I_r.

La supposizione *b*) porta a questo, che esiste una serie continua di curve $\overline{K}$ avente per limite una K. Costruiamo la curva coniugata ad una generica $\overline{K}$ della serie, rispetto ad I_r; sia L questa curva. Mentre $\overline{K}$ tende a K, L deve tendere alla curva $C+(r-2)K$. Ora, mediante considerazioni di *Analysis situs*, si deduce da qui che L non può essere una curva irriducibile (cioè una superficie di RIEMANN *connessa*), perchè altrimenti qualcuno dei punti comuni a C, K risulterebbe un punto di coincidenza di I_r, mentre [per la proprietà 1)] una C generica non contiene di tali punti. Un esame più approfondito mostra che L deve spezzarsi precisamente in una C ed in un'altra curva; ma allora K deve essere curva coniugata di una C, cioè appartenere a $\{K\}$, e si ricade nell'ipotesi *a*).

4. – Il teorema fondamentale sopra espresso permette virtualmente di determinare tutte le famiglie birazionalmente distinte di superficie iperellittiche di rango $r > 1$. Queste superficie possono essere regolari o irregolari.

Le superficie iperellittiche irregolari di rango $r > 1$ sono superficie ellittiche, e, come facilmente si prova, contengono, oltrechè un fascio razionale di curve ellittiche, anche un fascio ellittico di curve parimente ellittiche.

Il rango delle superficie iperellittiche predette può valere $r = 2, 3, 4, 6$, giacchè esse si presentano come immagini di involuzioni cicliche d'ordine 2, 3, 4, 6. Si ottengono i tipi più semplici partendo da una superficie di JACOBI con due fasci di curve ellittiche unisecantisi [1] o dalla superficie di JACOBI che corrisponde ad una curva di genere 2 possedente un'involuzione singolare di 2° ordine.

A proposito delle superficie ellittiche contenenti due fasci di curve ellittiche si noti che esse si possono classificare, secondo i risultati di ENRIQUES [2], in 4 famiglie alle quali appartengono appunto i 4 tipi suindicati.

I plurigeneri di codeste famiglie, secondo le formule di ENRIQUES (nn. 8, 9), sono rispettivamente:

1) $p_a = -1\,, \quad p_g = 0\,, \quad P_2 = P_6 = 1\,,$

2) $p_a = -1\,, \quad p_g = P_8 = 0\,, \quad P_3 = 1\,,$

3) $p_a = -1\,, \quad p_g = P_6 = P_{10} = 0\,, \quad P_4 = 1\,,$

4) $p_a = -1\,, \quad p_g = P_4 = P_{14} = 0\,, \quad P_6 = 1\,.$

Questi valori dei plurigeneri caratterizzano le superficie ellittiche possedenti due fasci di curve ellittiche.

Infatti, se una superficie ellittica contiene, accanto ad un fascio razionale di curve ellittiche, un fascio ellittico di curve di *genere maggiore d'uno*, si possono presentare 4 casi, corrispondentemente ai quali i generi hanno i valori indicati per le 4 famiglie suddette, eccezione fatta pei generi P_6, P_8, P_{10}, P_{14} che hanno valori > 1. Come si possa dedurre da qui un modo di *definire mediante caratteri le superficie iperellittiche irregolari*, è una questione su cui ci proponiamo di ritornare in un'altra Nota.

---

[1] La possibilità di uno di questi tipi, e precisamente di quello che corrisponde al gruppo generato da una sostituzione del tipo $\begin{cases} u' = u + \frac{1}{3} \\ v' = e^{2\pi i/3} v \end{cases}$, ci fu annunciata dai signori BAGNERA e DE FRANCHIS prima che la nostra analisi si volgesse alle superficie iperellittiche irregolari.

[2] *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero* (« Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo », 1905) [questo volume, XXXVI].

5. – Le superficie iperellittiche irregolari di rango $r > 1$ (superficie ellittiche) dipendono per la prima famiglia da 2 moduli e per le altre da un modulo. Esse sono dunque superficie iperellittiche a *moduli particolari*. Questo fatto rientra d'altronde nel seguente teorema, che consegue immediatamente dal teorema fondamentale del n. 3:

Le superficie iperellittiche di rango $r > 1$ a moduli generali, sono superficie regolari di rango 2, e di generi $p_a = p_g = P_2 = \ldots = 1$.

Esse corrispondono alle involuzioni generate, sopra superficie di PICARD, da trasformazioni di 1ª specie:

$$u + u' = \text{cost.}, \qquad v + v' = \text{cost.}.$$

È facile costruire i modelli di tali superficie per un divisore δ qualsiasi. Si ottengono superficie di ordine 4δ in uno spazio $S_{2\delta+1}$, dotate di 16 punti doppi conici e di 16 iperpiani tangenti lungo curve razionali normali d'ordine 2δ, formanti una ben definita configurazione. Per $\delta = 1$ si ha, com'è noto, *la superficie di Kummer*; per $\delta = 2, 3$ si ottengono superficie di cui recentemente i sig.ⁱ TRAYNARD e REMY hanno considerato le proiezioni nello spazio ordinario, in varie Note pubblicate nei Comptes Rendus dal 1904 in poi.

6. – Si tratta ora di determinare le superficie iperellittiche regolari di rango $r > 2$, le quali esistono soltanto per particolari valori dei moduli. Perciò occorre stabilire una completa classificazione delle superficie di PICARD che ammettono trasformazioni birazionali (*singolari*) in se stesse all'infuori di quelle *ordinarie* di 1ª e 2ª specie, e classificare inoltre le diverse involuzioni che possono ottenersi sopra una medesima superficie di PICARD, in corrispondenza a gruppi isomorfi di trasformazioni.

Una superficie di PICARD può ammettere due specie diverse di trasformazioni singolari: *trasformazioni principali* o *di Hermite* e *trasformazioni di Humbert*. (HUMBERT riserva a queste soltanto il nome di « trasformazioni singolari »).

Riferiamoci, per semplicità di discorso, al caso delle superficie di JACOBI, essendo facile passare di qua al caso del divisore $\delta > 1$. Le trasformazioni di HERMITE sono quelle che nascono da una *trasformazione birazionale della curva di genere due*, di cui la superficie di JACOBI rappresenta le coppie.

Si possono avere superficie iperellittiche di rango $r > 2$ corrispondenti ad involuzioni generate sopra una superficie di JACOBI (o di PICARD) da gruppi di HERMITE o da gruppi di HUMBERT. I due casi si distinguono come segue: *le superficie iperellittiche corrispondenti ai gruppi di Hermite ammettono una rappresentazione parametrica* propria *per mezzo di fun-*

zioni Θ; cioè una rappresentazione

$$\varrho x_i = \Theta_i(u\ v) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

tale che le equazioni (1) per valori dati delle coordinate omogenee x_i di un punto variabile sopra una di queste superficie, hanno in comune un *numero finito* di soluzioni (uv) incongrue rispetto ai periodi.

All'opposto le superficie provenienti da gruppi di HUMBERT ammettono *rappresentazioni improprie* per mezzo delle Θ; cioè le equazioni (1) relative a queste superficie, hanno in comune infinite soluzioni fisse e un numero finito di soluzioni variabili colle x_i.

Una rappresentazione parametrica propria per una superficie iperellittica corrispondente ad un gruppo di Humbert, si ottiene mediante funzioni intermediarie.

Ciò posto, noi ci proponiamo di classificare le superficie iperellittiche di rango $r > 2$, che ammettono una rappresentazione parametrica propria mediante funzioni Θ. Ci riferiremo per semplicità al caso $\delta = 1$. Abbiamo dunque da considerare le superficie di JACOBI, che ammettono trasformazioni singolari principali in se stesse. Ed occorre distinguere due casi: quello di una superficie di JACOBI corrispondente ad una curva di genere due irriducibile, ed il caso particolare della superficie con due fasci di curve ellittiche unisecantisi.

Ci limiteremo in questa Nota al 1° caso, rimandando la trattazione del 2° caso ad una ulteriore comunicazione.

Le superficie di JACOBI che ammettono trasformazioni singolari principali in se stesse, risultano note dall'analisi di BOLZA delle curve di genere due con trasformazioni in sè [3]. Ma alcuni fra i gruppi di BOLZA conducono a superficie razionali o a rigate ellittiche, anzichè a vere superficie iperellittiche.

Sia data una superficie di JACOBI F che ammetta un gruppo di trasformazioni d'HERMITE G_r d'ordine r, generante una involuzione I_r, e (in corrispondenza all'ipotesi che I_r sia di divisore 1) si supponga che G_r non contenga alcuna trasformazione ciclica di 2ª specie.

Si può costruire una superficie Φ immagine di I_r, col procedimento che segue:

Si consideri sopra F un sistema ∞^2, $\{C\}$ $(=\{C_1\})$, di curve di genere due senza punti doppi (n. 2); le trasformazioni hermitiane di G_r *mutano questo sistema in se stesso*, facendo corrispondere ad una curva generica C le

---

[3] BOLZA, *On binary sextics with linear transformations into themselves* (« American Journal of Mathematics », t. X, 1888).

curve C', C'', ..., $C^{(r-1)}$ del medesimo sistema. Ebbene le curve

$$C + C' + C'' + \ldots + C^{(r-1)}$$

sono contenute tutte in un sistema lineare di grado $2r^2$ appartenente all'involuzione I_r. Quindi la superficie immagine di I_r contiene un sistema lineare di grado $2r$, di genere $r+1$ e di dimensione pure $r+1$.

Si può supporre che il suddetto sistema lineare (che è semplice) venga segato su Φ dagli iperpiani di un S_{r+1}, e si ha allora una superficie Φ_{2r} d'ordine $2r$, a sezioni iperpiane di genere $r+1$ in S_{r+1}.

Questa non è la superficie d'ordine minimo fra le immagini proiettive dell'involuzione I_r, ma si distingue per la circostanza di possedere un certo numero di punti doppi e d'iperpiani tangenti che formano una *configurazione massimamente simmetrica.*

Si ottengono punti doppi di Φ_{2r} in corrispondenza ai punti uniti delle trasformazioni di G_r su F, e iperpiani tangenti più volte lungo curve razionali, in corrispondenza alle curve C di $\{C\}$ unite per le suddette trasformazioni.

Si ottengono inoltre *gruppi di omografie che mutano in sè la* Φ_{2r}, in corrispondenza alle trasformazioni di 1ª e di 2ª specie che mutano in sè il gruppo dei punti uniti esistente sulla superficie F.

In tal modo si perviene ai seguenti risultati:

Le superficie iperellittiche regolari di rango $r > 1$ *e divisore* 1, *le quali ammettono una rappresentazione propria mediante funzioni* Θ *non riducibili a prodotti di* Θ *dipendenti da una sola variabile* (4), *sono superficie coi generi* 1, *le quali possono ricondursi birazionalmente ai seguenti tipi*:

1) $r = 2$: superficie Φ_4 di KUMMER;

2) $r = 3$: superficie Φ_r di ordine 6 in S_4, dotata di 9 punti biplanari ordinari e 9 iperpiani tangenti ciascuno lungo una conica contata tre volte. Le proprietà della configurazione costituita dai 9 punti e dalle 9 coniche, vengono espresse in modo completo da un simbolismo analogo a quello adottato da HUMBERT pei 16 punti e pei 16 piani singolari della superficie di KUMMER.

Precisamente: indicati i punti coi simboli $(\alpha\alpha')$ e le coniche coi simboli $\alpha\alpha'$ $(\alpha, \alpha' = 1, 2, 3)$ si ha che:

Pel punto biplanare $(\alpha\alpha')$ passano le coniche $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\alpha'\beta$, $\alpha'\gamma$.	Sulla conica $\alpha\alpha'$ giacciono i punti $(\alpha\beta')(\alpha\gamma')(\alpha'\beta)(\alpha'\gamma)$.

(4) Con ciò si vengono ad escludere le superficie provenienti dalla particolare superficie di JACOBI con 2 fasci ellittici unisecantisi. Esamineremo in appresso tali superficie.

Delle 4 coniche per un punto doppio due toccano un piano tangente e due l'altro. Per due punti doppi possono passare due coniche o una sola, e due coniche possono avere comuni due punti doppi o uno solo.

La Φ_6 ammette un gruppo di 18 omografie: 9 involutorie e 9 cicliche di 3° ordine (compresa l'identità). Queste ultime formano un sottogruppo; ecc.

La Φ_6 è intersezione completa di una quadrica e di una varietà cubica. Anzi i 9 punti biplanari di Φ_r son doppi per un fascio di varietà cubiche, tra le quali ve n'ha una con un 10° punto doppio. La cfg. dei 9 punti biplanari e delle 9 coniche, viene così a riconnettersi ad una cfg. già studiata da SEGRE e da CASTELNUOVO. Tutto ciò permette di scrivere le equazioni algebriche della superficie Φ_6.

3) $r = 4$: superficie Φ_8 di ordine 8 in S_5, con 10 punti doppi, di cui 4 biplanari e 6 conici; ogni punto biplanare ha infinitamente vicino un altro punto doppio.

Alla cfg. dei 10 punti doppi, è legata una cfg. di 10 curve razionali, e cioè di 4 coniche e di 6 quartiche; lungo le coniche si hanno iperpiani con contatto di 3° ordine, lungo le quartiche iperpiani con contatto di 1° ordine.

Per brevità, ora e nel seguito, tralasceremo di enunciare le relazioni di appartenenza tra gli elementi della cfg.

4) $r = 6$: superficie Φ_{12} d'ordine 12 di S_7, con dieci punti doppi: 1 punto biplanare singolare, 4 punti biplanari ordinari, 5 punti conici. Al punto biplanare singolare sono infinitamente vicini due punti doppi, l'uno nell'intorno di 1° ordine e l'altro nell'intorno di 2° ordine. Alla cfg. dei punti doppi è legata una cfg. di 10 curve razionali, e cioè: 1 conica, 4 quartiche e 5 sestiche; lungo cui si hanno rispettivamente iperpiani con contatti di 5°, 2°, 1° ordine; ecc.

(Questi quattro tipi di superficie corrispondono a *gruppi ciclici* di HERMITE sopra una superficie di JACOBI).

5) $r = 8$: *tre tipi distinti di superficie* Φ corrispondenti ad involuzioni generate sopra una superficie di JACOBI, da un gruppo di trasformazioni in isomorfismo [1, 2] col *gruppo diedrico*:

a) superficie Φ_{16} di ordine 16 dello spazio S_9, con 7 punti doppi: 4 punti uniplanari ordinari e tre punti conici.

Sulla Φ_{16} esiste una cfg. di 7 curve razionali: 6 quartiche e 1 curva dell'8° ordine, lungo le quali si hanno iperpiani con contatti di 3° e di 1° ordine.

In questo caso e nel successivo, a differenza dei precedenti, le proprietà della cfg., formata dai punti, non si associano per *dualità* alle proprietà della cfg. formata dalle curve.

b) Superficie Φ_{16} d'ordine 16 dello spazio S_9 con sette punti doppi e sette curve razionali; e cioè: 6 punti biplanari e 1 punto conico; 4 coniche e 3 curve dell'8° ordine.

Ognuno dei punti biplanari ha infinitamente vicino un punto doppio.

c) Superficie Φ_{16} d'ordine 16 dello spazio S_9, con 7 punti doppi e 7 curve razionali.

Dei punti doppi 6 sono biplanari con un punto doppio infinitamente vicino, il rimanente è conico. Delle curve 6 sono quartiche e la rimanente è dell'8° ordine. Le proprietà delle due cfg. di punti e di curve, si possono in tal caso associare secondo una certa legge di dualità.

6) $r = 24$: *tre tipi distinti di superficie* Φ corrispondenti ad involuzioni generate sopra una superficie di JACOBI da un gruppo di trasformazioni in isomorfismo [1, 2] col *gruppo tetraedrico*:

a) Superficie Φ_{48} d'ordine 48 dello spazio S_{25}, con 7 punti doppi e 7 curve razionali. Dei punti doppi uno è un punto uniplanare singolare (che ha un punto doppio infinitamente vicino in ciascuno degl'intorni di 1°, 2°, 3° ordine), uno è un punto uniplanare ordinario, 4 sono punti biplanari ordinari e 1 è conico. Delle curve razionali, 1 è dell'8° ordine, 2 sono del 12° e 4 del 16° ordine. Lungo queste curve si hanno iperpiani con contatti di 5°, 3°, 2° ordine.

b) Superficie Φ_{48} d'ordine 48 dello spazio S_{25} con 7 punti doppi e 7 curve razionali; e cioè: un punto biplanare avente 1 punto doppio infinitamente vicino in ciascuno degli intorni di 1° e di 2° ordine, due punti biplanari ognuno dei quali ha 1 sol punto doppio infinitamente vicino, 4 punti biplanari ordinari; quanto alle curve: 1 conica, 1 sestica, 4 curve di 16° ordine ed 1 di 24° ordine; ecc.

c) Superficie Φ_{48} dello S_{25} con 7 punti doppi e 7 curve razionali. Dei punti doppi 1 è un punto biplanare singolare con due punti doppi successivi, due son punti biplanari singolari con un sol punto doppio successivo e gli altri 4 son punti biplanari ordinari. Delle 7 curve 1 è dell'8° ordine, 2 del 12° e 4 del 16° ordine.

Tutte queste superficie si possono rappresentare (per proiezione) su piani doppi $\{z^2 = f_6(x\,y)\}$ *con sestica di diramazione.*

7. – La configurazione dei punti doppi e degli iperpiani tangenti ad una Φ_{2r} vale a *caratterizzare le superficie iperellittiche regolari di rango r.*

Infatti data una Φ_{2r} che possegga la suddetta cfg. di punti e curve singolari, si riesce a costruire una superficie multipla di generi $p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$ rappresentata sulla Φ_{2r} contata r volte, la quale risulta (in questo caso) una superficie di JACOBI.

Si ottiene codesta costruzione per la superficie di KUMMER

$$f(x_1\,x_2\,x_3\,x_4) = 0\,,$$

considerando 4 piani tangenti lungo coniche, che costituiscano un tetraedro di ROSENHAIN; se questi piani sono

$$x_1 = 0\,, \qquad x_2 = 0\,, \qquad x_3 = 0\,, \qquad x_4 = 0\,,$$

basta considerare la superficie dello spazio $S_4(x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5)$

$$f = 0\,, \qquad x_1 x_5 = \sqrt{x_1 x_2 x_3 x_4}\,.$$

Per la superficie Φ_6 di S_4 si procede analogamente considerando 3 iperpiani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ tangenti ad essa lungo coniche e comprendenti nel loro insieme i 9 punti biplanari. Basta quindi costruire la superficie rappresentata sulla Φ_6 contata 3 volte per mezzo del radicale

$$\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}\,; \quad \text{ecc.}$$

8. – Si possono pure assegnare in modo esplicito le sostituzioni lineari su u, v rappresentanti le trasformazioni birazionali che generano sulla superficie di JACOBI l'involuzione I_r immagine di una superficie Φ_{2r}.

Una volta conosciute tali sostituzioni lineari, si costruisce *la rappresentazione parametrica di ciascuna di queste superficie mediante funzioni* Θ.

Così p. es. la involuzione I_3 corrispondente al tipo 2° (superficie Φ_6 di S_4), è generata dalla sostituzione lineare ciclica del 3° ordine

$$(2) \qquad \begin{cases} u' = -\dfrac{1}{2}\,u - 3gv\,, \\ v' = -3g'u - \dfrac{1}{2}\,v\,, \end{cases}$$

relativa alla superficie di JACOBI coi periodi

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2} & g' \end{matrix} \qquad \left(gg' = -\frac{1}{12}\right).$$

Una sezione iperpiana della superficie Φ_6 può rappresentarsi annullando una funzione $\Theta(uv)$ di 3° ordine; ma non già una funzione di 3° ordine arbitraria, sibbene una che sia trasformata in sè, a meno di un esponenziale, dalla sostituzione lineare (2). Scegliendo quindi cinque funzioni Θ di 3° ordine siffatte, tra di loro indipendenti, le coordinate omo-

genee di un punto di Φ_6 si possono assumere proporzionali a queste Θ, e in tal modo si ottiene la rappresentazione parametrica di Φ_6.

Le 9 coniche della superficie Φ_6 hanno per equazioni

$$\vartheta\left(u-\frac{\lambda}{3},\quad v-\frac{\mu}{3}\right)=0 \qquad (\lambda,\mu=0,1,2),$$

ove $\vartheta(u,v)$ è la funzione theta normale di 1° ordine a caratteristica nulla (una delle 16 ϑ di ROSENHAIN).

Quanto ai punti doppi di Φ_6, essi si ottengono in corrispondenza alle seguenti coppie di valori di u, v:

$$(0,0)\left(0,\frac{1}{3}\right)\left(0,\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3},0\right)\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3},0\right)\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right).$$

Da ciò si deduce nuovamente il simbolismo già introdotto per esprimere le proprietà della cfg. di punti e coniche, esistente sulla superficie Φ_6 (n. 6).

XLIII.

INTORNO ALLE SUPERFICIE IPERELLITTICHE IRREGOLARI

di FEDERIGO ENRIQUES e FRANCESCO SEVERI

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XVII (1° sem., 1908), pp. 4-9.

1. – Scopo di questa Nota è di esporre un teorema che permette di caratterizzare, mediante i valori dei generi e dei plurigeneri, le superficie iperellittiche irregolari (di rango $r \geqslant 1$). Il teorema può essere enunciato sinteticamente come segue:

Le condizioni necessarie e sufficienti perchè una superficie algebrica irregolare sia iperellittica, si possono esprimere dicendo che il genere numerico $p_a = -1$ *e che i plurigeneri* P_i $(i = 1, 2, ...)$ *assumono soltanto i valori* 0, 1.

Più precisamente queste condizioni corrispondono a un numero finito di tipi che si lasciano definire mediante i valori dei primi plurigeneri (n. 4).

Il teorema sopra enunciato si riattacca alla determinazione mediante i valori dei plurigeneri delle « superficie ellittiche possedenti due fasci di curve ellittiche », la qual determinazione — appunto per questo scopo — fu da noi indicata nella Nota che avemmo l'onore di presentare all'Accademia nell'aprile scorso.

Ma sebbene possedessimo già allora, nelle sue linee generali, la dimostrazione del fatto che « ogni superficie ellittica con due fasci di curve ellittiche è iperellittica », ci trattenne dall'enunciare la conclusione un dubbio che, per motivi di salute, non potemmo appurare. Si tratta precisamente di questo: quando si procede ad un'analisi aritmetica delle superficie iperellittiche irregolari di rango $r > 1$, si trovano (in rapporto cogli ordini dei corrispondenti gruppi) delle superficie ellittiche con due fasci di curve ellittiche il cui determinante riceve soltanto valori particolari (e precisamente i valori $n = 2, 3, 4, 6, 8, 9$) [1], e non si vede subito

[1] Questo risultato è implicito nelle tabelle che i sigg. BAGNERA e DE FRANCHIS hanno pubblicato al n. 5 della Nota inserita in questi Rendiconti (aprile 1907); e da parte nostra fu sviluppato mediante un'analisi contenuta nella parte addizionale di una Memoria che abbiamo inviato all'Accademia di Francia (luglio 1907).

a priori che si esauriscono per tal modo tutte le superficie ellittiche predette; onde per questo lato si affaccia il dubbio che l'imposizione di valori particolari al determinante, costituisca una condizione da aggiungere ai valori dei generi, per esprimere che una data superficie ellittica è iperellittica.

Mentre ci proponevamo di ritornare su questo punto, i sigg. BAGNERA e DE FRANCHIS sono giunti dal canto loro a chiarire la cosa e a riconoscere — in modo indipendente dalla nostra ricerca — il fatto che « tutte le superficie ellittiche con due fasci di curve ellittiche sono iperellittiche »; questo fatto essi hanno enunciato in una recente Nota dei Comptes Rendus dell'Accademia di Francia, ricca di altri risultati importanti.

Siccome però in codesta Nota non si trova messo in rapporto il fatto suaccennato coi valori dei plurigeneri, stimiamo non inutile ritornare sull'argomento esponendo i brevi sviluppi che seguono.

2. – Ci sia permesso anzitutto di riassumere la nostra dimostrazione del teorema che « le superficie ellittiche con due fasci di curve ellittiche sono iperellittiche ».

Sia data una superficie ellittica con due fasci di curve ellittiche C, K (secantisi in $n > 1$ punti).

Si tratta di costruire una superficie F iperellittica di rango 1, che sia rappresentata sulla Φ multipla senza punti di diramazione; le coordinate dei punti di Φ sono allora funzioni razionali di quelle dei punti di F.

Accenneremo brevemente come si possa procedere all'effettiva costruzione dell'anzidetta superficie multipla. Perciò ricordiamo alcune cose intorno alle superficie ellittiche [2].

Una superficie ellittica Φ — di determinante $n > 1$ — può rappresentarsi sopra un cilindro ellittico

$$\varphi(x\,y) = 0\,,$$

multiplo secondo il numero n, con una curva di diramazione composta di t sezioni piane $z = a_1$, $z = a_2$, ..., $z = a_t$. A queste componenti della curva di diramazione competono certi ordini

$$s_1, s_2, \ldots, s_t\,,$$

e, se le curve C formanti il fascio ellittico di Φ debbono essere ellittiche,

---

[2] ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*, « Rendic. Circolo di Palermo », 1905 (§§ 8, 9) [questo volume, XXXVI].

si deve avere

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=t} \frac{s_i - 1}{s_i} = 2 ,$$

d'onde segue

$$t = 4 , \qquad s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2 ,$$

oppure:

$$t = 3 , \qquad s_1 = s_2 = s_3 = 3 ,$$

o: $$s_1 = 2 , \qquad s_2 = s_3 = 4 ,$$

o: $$s_1 = 2 , \qquad s_2 = 3 , \qquad s_3 = 6 .$$

In corrispondenza a questi casi si avrà

$$n = 2\delta ,$$

$$n = 3\delta ,$$

$$n = 4\delta ,$$

$$n = 6\delta ,$$

dove δ è un intero *a priori* arbitrario.

Limitiamoci per semplicità al primo caso.

Allora, si può costruire una superficie iperellittica F rappresentata sulla Φ contata due volte senza punti di diramazione, nel modo seguente.

Essendo

$$\Phi(x\,y\,z) = 0 ,$$

l'equazione della superficie Φ, avente un certo ordine m, esiste una superficie di ordine $2m - 8$

$$\chi(x\,y\,z) = 0 ,$$

biaggiunta alla Φ, la quale è di bigenere 1 (n. 3, *a*).

Consideriamo le equazioni:

$$(2) \qquad \begin{cases} \Phi(x\,y\,z) = 0 , \\ u^2 = \chi(x\,y\,z); \end{cases}$$

esse rappresentano nello spazio $S_4(x\,y\,z\,u)$ una superficie F. Ora si può verificare che le sezioni di F cogli iperpiani paralleli all'asse u sono curve *irriducibili* secantisi secondo gruppi *canonici*, e se ne deduce che la F è una superficie irriducibile di genere $p_g = 1$, avente inoltre tutti i plurigeneri $P_i = 1$ ($i = 2, 3, 4 \ldots$). D'altra parte, poichè sulla Φ doppia non vi sono punti di diramazione, per una nota formula di corrispondenza [3] il genere numerico di F risulterà, come quello di Φ,

$$p_a = -1;$$

ma queste condizioni definiscono, come è noto [4], le superficie iperellittiche di rango 1.

3. – Ciò premesso, passiamo a caratterizzare le superficie ellittiche con due fasci di curve ellittiche, mediante i valori dei loro plurigeneri.

Si ha anzitutto $p_g = 0$, $p_a = -1$. Per calcolare i valori dei plurigeneri distinguiamo i 4 casi sopra menzionati:

$$a) \qquad t = 4\,, \qquad s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2\,.$$

Le superficie così definite dipendono da due moduli arbitrari, cioè dal modulo di φ e dal birapporto $(a_1 a_2 a_3 a_4)$. I valori dei plurigeneri si calcolano mediante la formula di ENRIQUES [5]:

$$P_m = 1 + m(t-2) - \sum_{i=1}^{t} \varrho_i\,, \tag{3}$$

ove ϱ_i è un intero soddisfacente alle condizioni

$$\frac{m}{s_i} \leqslant \varrho_i < \frac{m}{s_i} + 1\,,$$

e ove si prenda $P_m = 0$ tutte le volte che il 2° membro risulti negativo. Si trova così:

$$p_a = -1\,, \qquad P_{2i+1} = 0\,, \qquad P_{2i} = 1\,.$$

Reciprocamente questi valori caratterizzano le superficie di cui si

---

[3] SEVERI, « Rendiconti del R. Ist. Lombardo », (2), t. 36, 1903.

[4] ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo ecc.*, « Rendic. Circolo di Palermo », 1905 [questo volume, XXXVII].

[5] 1ª Memoria citata, § 8.

tratta, giacchè anzi basta che si abbia

$$p_a = -1\,, \qquad p_g = 0\,, \qquad P_2 = P_4 = 1\ (^6)\,.$$

Infatti, essendo $p_a = -1$, $p_g = 0$, si ha una superficie ellittica i cui plurigeneri possono essere calcolati mediante la formola (3). Ora, poichè $P_2 = t - 3 = 1$, verrà $t = 4$; e poichè $P_4 = 1$, verrà $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2$; donde segue che, essendo soddisfatta la (1), sulla superficie ellittica in questione le curve del fascio ellittico sono ellittiche.

$$b) \qquad t = 3\,, \qquad s_1 = s_2 = s_3 = 3\,.$$

Le superficie corrispondenti dipendono da un sol modulo: quello di φ (e le curve ellittiche C delle superficie stesse sono equianarmoniche). Pei valori dei relativi plurigeneri trovasi:

$$p_a = -1\,, \qquad P_{3i+1} = P_{3i+2} = 0\,, \qquad P_{3i} = 1\,.$$

Questi valori caratterizzano le superficie in questione. Basta anzi che sia

$$p_a = -1\,, \qquad P_3 = 1\,, \qquad P_8 = 0\,,$$

giacchè dalla formola (3), con un'ovvia analisi aritmetica, si trae

$$t = 3\,, \qquad s_1 = s_2 = s_3 = 3\,.$$

$$c) \qquad t = 3\,, \qquad s_1 = 2\,, \qquad s_2 = s_3 = 4\,.$$

Le superficie così definite, possedenti un fascio ellittico di C armoniche, dipendono da un sol modulo. Si ha per esse:

$$p_a = -1\,, \qquad P_{4i+1} = P_{4i+2} = P_{4i+3} = 0\,, \qquad P_{4i} = 1\,.$$

Come nei casi precedenti si vede che questi valori dei plurigeneri caratterizzano le superficie in questione, bastando anzi che si abbia

$$p_a = -1\,, \qquad P_4 = 1\,, \qquad P_6 = P_{10} = 0\,.$$

$$d) \qquad t = 3\,, \qquad s_1 = 2\,, \qquad s_2 = 3\,, \qquad s_3 = 6\,.$$

(6) In luogo di $P_4 = 1$ si può anche scrivere $P_6 = 1$.

Le superficie così definite — possedenti, come nel caso b), un fascio ellittico di curve equianarmoniche — dipendono da un modulo. Per esse

$$p_a = -1\,, \qquad P_{6i+1} = P_{6i+2} = \ldots = P_{6i+5} = 0\,, \qquad P_{6i} = 1\,.$$

Questi valori caratterizzano tali superficie ellittiche, ed anzi basta p. es. che sia

$$p_a = -1\,, \qquad P_2 = P_3 = P_{14} = 0\,, \qquad P_6 = 1\,.$$

In tal caso la discussione che conduce al risultato è un po' meno semplice che nei casi precedenti, e perciò la riferiremo.

Essendo $P_2 = 0$ e quindi $p_g = 0$, la superficie in questione, di genere $p_a = -1$, è una superficie ellittica i cui plurigeneri possono calcolarsi mediante la (3). Dall'ipotesi $P_2 = 0$ segue intanto $t = 3$. L'ipotesi $P_6 = 1$ dà facilmente:

$$\alpha) \qquad s_i \geqslant 3\,, \qquad\qquad (i = 1, 2, 3),$$

oppure:

$$\beta) \qquad s_1 = 2\,, \qquad s_2 \geqslant 2\,, \qquad s_3 \geqslant 6\,.$$

Osserviamo ora che $P_4 = 0$. Infatti se fosse $P_4 > 0$, poichè $P_6 = 1$, esisterebbe il sistema bicanonico, contro l'ipotesi $P_2 = 0$. La relazione $P_4 = 0$, tenendo conto dei possibili valori α), β) per le s_i, porta

$$\alpha') \qquad s_1 = s_2 = s_3 = 3\,,$$

oppure:

$$\alpha'') \qquad s_1 = s_2 = 3\,, \qquad s_3 \geqslant 4\,,$$

$$\beta') \qquad s_1 = 2\,, \qquad s_2 = 3\,, \qquad s_3 \geqslant 6\,.$$

Poichè i valori α'), α'') dànno $P_3 = 1$, l'ipotesi $P_3 = 0$ porta a scartarli e restano quindi come possibili i soli valori β'). L'ipotesi $P_{14} = 0$ porta infine a concludere che $s_3 = 6$.

4. – Riassumendo, e ricordando che le superficie iperellittiche di rango 1 (superficie di PICARD) sono caratterizzate dai valori $p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$ dei plurigeneri (7), si ha il seguente teorema:

(7) ENRIQUES, 2ª Memoria citata.

Le condizioni affinchè una superficie irregolare sia iperellittica di rango $r \geqslant 1$, *si possono esprimere mediante i valori dei relativi generi e plurigeneri, indicati nella tabella seguente*:

$$p_a = -1 \begin{cases} 1^o) & r > 1, & p_g = 0, & P_2 = P_4 = 1 \\ 2^o) & r > 1, & P_3 = 0, & P_3 = 1 \\ 3^o) & r > 1, & P_6 = P_{10} = 0, & P_4 = 1 \\ 4^o) & r > 1, & P_2 = P_3 = P_{14} = 0, & P_6 = 1 \\ 5^o) & r = 1, & p_g = P_4 = 1 . \end{cases}$$

Mediante l'analisi aritmetica accennata in principio, il teorema acquista una maggiore determinazione, e precisamente risulta che:

I valori del rango r, *del divisore* δ *e del determinante* n $(= r\delta)$ *corrispondentemente ai singoli casi* 1°), 2°), ..., 5°) *della tabella precedente, son dati da quest'altra tabella*:

$$\begin{array}{lll} 1^o) & r = 2 & \begin{cases} \delta = 1, & n = 2 \\ \delta = 2, & n = 4 \end{cases} \\ 2^o) & r = 3 & \begin{cases} \delta = 1, & n = 3 \\ \delta = 3, & n = 9 \end{cases} \\ 3^o) & r = 4 & \begin{cases} \delta = 1, & n = 4 \\ \delta = 2, & n = 8 \end{cases} \\ 4^o) & r = 6 & \delta = 1, \quad n = 6 \\ 5^o) & r = 1 & \delta \text{ qualunque} . \end{array}$$

I casi 1°), 2°), 3°) comprendono ciascuno due famiglie, dipendenti nel 1° caso da due moduli e negli altri due da un sol modulo.

Il 4°) caso comprende una sola famiglia dipendente da un sol modulo e il 5°) infinite famiglie dipendenti da tre moduli.

XLIV.

UN' OSSERVAZIONE RELATIVA ALLE SUPERFICIE DI BIGENERE UNO

« Rend. dell'Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », vol. XII (1908), pp. 40-45.

1. – In una ricerca intorno alle superficie iperellittiche, di ENRIQUES-SEVERI, si è presentata l'osservazione che una superficie regolare con tutti i generi uguali ad 1 ($p_a = p_g = P_2 = 1$) può possedere un'involuzione di coppie di punti, di genere 0 e bigenere 1 ($p_a = p_g = P_3 = 0$, $P_2 = 1$); si è condotti ad una siffatta involuzione considerando in S_5 l'intersezione di 3 quadriche aventi una medesima coppia di piani polari.

Ora mi sono proposto di vedere se, inversamente, le superficie di bigenere 1 che così si ottengono sieno le più generali della loro famiglia, ed in questa Nota appunto rispondo affermativamente alla domanda, dimostrando il teorema seguente:

Ogni superficie F *di generi*

$$p_a = p_g = P_3 = 0\,, \qquad P_2 = 1$$

si può considerare come una superficie doppia di generi 1.

Più precisamente: *le coordinate dei punti di* F *si possono esprimere razionalmente per mezzo di* x, y, z *e di* $z = \sqrt{f_8(xy)}$, dove il polinomio f_8 è del 4° grado separatamente rispetto ad x, y, ed ammette una trasformazione involutoria in se stesso priva di coincidenze; ad ogni punto di F rispondono due terne (x, y, z).

Tale resultato getta luce sulla circostanza da me stabilita fino dal 1896, che esistono superficie di genere $p_g = 0$ e bigenere $P_2 > 0$: *queste appaiono come superficie di genere* > 0 *che si riducono ad una superficie doppia.*

2. – Debbo ricordare anzitutto che ogni superficie coi generi

$$p_a = p_g = P_3 = 0\,, \qquad P_2 = 1$$

si può trasformare in una sestica $F_6(x\,y\,z) = 0$ che passa doppiamente per gli spigoli di un tetraedro (1). Questa superficie possiede una biaggiunta

$$\Phi_4(x\,y\,z) = 0\,,$$

costituita dai 4 piani del tetraedro anzidetto.

Ciò posto, dico che la superficie

$$F_6(x\,y\,z) = 0\,, \qquad u^2 = \Phi_4(x\,y\,z)$$

è irriducibile ed ha i generi

$$p_a = p_g = P_2 = \ldots = 1\,.$$

La proposizione da dimostrare si ricondurrà al seguente lemma.

3. *Lemma.* – Sia $f_6(xy) = 0$ una curva piana del 6° ordine dotata di 6 punti doppi che cadono nei vertici di un quadrilatero completo $\varphi_4(xy) = 0$. Le equazioni

$$f_6(x\,y) = 0\,, \qquad z^2 = \varphi_4(x\,y)\,,$$

rappresentano una curva gobba *irriducibile* C, su cui i piani

$$ax + by + c = 0\,,$$

paralleli all'asse z, segano gruppi canonici.

Dimostriamo anzitutto che la curva C, d'ordine 24, è irriducibile.

A tal fine consideriamo le ∞^1 curve, componenti un fascio, che vengono segate sul cilindro $f_6 = 0$ dalle superficie $z^2 = \lambda\varphi_4$, al variare del parametro λ. Tra queste curve consideriamo quelle rispondenti a $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, ciascuna delle quali si riduce ad una curva doppia, che designeremo rispettivamente con $2K_1$, $2K_2$; la curva K_1 consta della sezione piana f_6 e delle 6 rette all'infinito del cilindro; la curva K_2 consta delle 6 generatrici del cilindro, da contarsi 2 volte. Se una curva generica del fascio sopranominato, come è la C, si spezzasse in due, unisecanti le generatrici del cilindro, le due curve di 12mo ordine K_1 e K_2 dovrebbero appartenere ad un fascio e segare quindi, sopra una sezione piana del

(1) ENRIQUES, « Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL) », 1906 [questo volume, XXXIX].

cilindro, gruppi equivalenti. Ma ciò non accade, perchè K_1 sega su una sezione piana L di f_6 un gruppo appartenente ad una conica (coppia di rette), e K_2 il gruppo costituito dai 12 punti doppi infinitamente vicini ai 6 punti doppi; infatti il secondo gruppo appartiene alla serie completa segata su L dalle quartiche aggiunte, il primo no, perchè non esiste una conica aggiunta alla curva L.

Ora si vuol mostrare che i piani $ax + by + c = 0$ segano sulla curva irriducibile C dei gruppi canonici.

La cosa si può verificare direttamente basandosi sopra un noto teorema di NOETHER; si tratta di far vedere che uno qualunque dei piani suddetti, preso insieme ai 4 piani rappresentati da $\varphi_4 = 0$ e al piano all'infinito, costituisce una superficie (d'ordine $4 + 6 - 4$) aggiunta alla curva gobba intersezione delle superficie

$$f_6 = 0 , \qquad z^2 = \varphi_4 .$$

Ma si giunge anche al medesimo scopo colla dimostrazione che segue. Sopra la superficie

$$z^2 = \varphi_4 ,$$

vi è un sistema lineare ∞^6, $|C'|$, aggiunto alla curva C, di genere 7. A $|C'|$ appartiene il sistema ∞^3, rappresentato doppiamente sul piano $z = 0$ dalle cubiche che passano per i 6 punti doppi di f_6. L'immagine completa di $|C'|$, sul detto piano, è fornita da un sistema non lineare di sestiche aventi i medesimi punti doppi di f_6. Ora in questo sistema vi sono ∞^2 curve residue del quadrilatero φ_2; il sistema lineare corrispondente sulla superficie è mutato in sè dall'involuzione

$$x' = x , \qquad y' = y , \qquad z' = -z ,$$

e però contiene almeno ∞^1 curve trasformate in se stesse da quell'involuzione (2). Se ne deduce che vi sono sul piano $z = 0$ infinite rette, rappresentanti doppiamente delle curve C'; quindi tutte le rette (appartenenti sul piano al medesimo sistema completo) saranno immagini doppie di C'.

In altre parole, i piani

$$ax + by + c = 0$$

(2) Si adopra qui in altra forma la proprietà nota che una omografia piana involutoria è un'omologia o l'identità.

segano sulla superficie

$$x^2 = \varphi_4$$

curve aggiunte alla C, e però su questa gruppi canonici, c. d. d.

4. – In forza del lemma stabilito risulta che la superficie

$$F_6(x\,y\,z) = 0\,, \qquad u^2 = \Phi_4(x\,y\,z)\,,$$

rappresentata doppiamente sulla F_6, è irriducibile e contiene un sistema lineare, nascente (in parte) da quello delle sezioni piane di F_6, la cui serie caratteristica è canonica; segue da ciò che l'anzidetta superficie è di genere $p_g = 1$. I suoi plurigeneri P_i ($i = 2, 3 \ldots$) saranno pure tutti $=1$, perchè non vi è una curva canonica d'ordine > 0. Il suo genere numerico potrà dunque valere $p_a = 1$ o $p_a = -1$ [3]; ma la seconda ipotesi si esclude perchè porterebbe ad una superficie iperellittica di rango 1 contenente un'involuzione regolare di genere 0 di coppie di punti.

Risulta dunque anche $p_a = 1$.

5. – Consideriamo la superficie di generi

$$p_a = p_g = P_2 = 1:$$

$$F_6(x\,y\,z)\,, \qquad u^2 = \Phi_4(x\,y\,z)\,,$$

designandola con Ψ. Vogliamo ridurre Ψ ad un tipo normale.

A tale scopo rammentiamo che F_6 contiene dei fasci di curve C di genere 2, con 2 punti base. Ad un tal fascio $|C|$ risponde su Ψ un sistema lineare $|K|$ di grado 4 e genere 3; il sistema $|K|$ reso completo è ∞^3. A prima vista sembra dunque che si possa ridurre Ψ ad una quartica; ma è facile vedere che questa degenera in una quadrica doppia con curva di diramazione d'ordine 8 e perciò Ψ può ricondursi ad una superficie del tipo

$$z^2 = f_8(x\,y)\,,$$

dove $f_8 = 0$ possiede due punti quadrupli ecc. La circostanza affermata discende da ciò, che si otterrebbe altrimenti una superficie quartica con una trasformazione proiettiva involutoria, la quale avrebbe necessariamente delle coincidenze, mentre non vi sono punti di diramazione sulla superficie doppia F_6. Con ciò restano provati i teoremi enunciati in principio di questa Nota.

---

[3] ENRIQUES, « Rendiconti » di questa Accademia, Decembre 1906 [questo volume, XLI].

XLV.

SUI MODULI DELLE SUPERFICIE ALGEBRICHE

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XVII (1° sem., 1908),

pp. 690-694.

1. – Si designino al solito con p_g e p_a i generi superficiali, geometrico ed aritmetico, di una superficie algebrica, e con $p^{(1)}$ il suo genere lineare (virtuale), escludendo la famiglia delle superficie rigate. Per esprimere il numero dei moduli appartenenti ad una classe di superficie, vi è luogo ad introdurre un nuovo carattere invariante

$$\theta \geqslant 0 ,$$

che si lascia definire semplicemente come vedremo al n. 2.

Ogni superficie avente i caratteri p_g, p_a, $p^{(1)}$, θ, appartiene ad una classe di superficie coi medesimi caratteri, dove si distinguono

$$10p_a - p_g - 2p^{(1)} + 12 + \theta$$

moduli. Questo è, in altre parole, il numero delle condizioni richieste per l'identità birazionale di due superficie della classe.

E qui importa osservare che tutte le superficie di una classe, corrispondenti al medesimo genere aritmetico p_a, conservano sempre la medesima irregolarità e quindi lo stesso p_g, sicchè: *dal punto di vista invariantivo non accade che le superficie irregolari si presentino come casi particolari delle regolari*; *e neppure le superficie regolari si presentano come casi particolari delle irregolari*, in una famiglia che debba mantenere fisso il p_a.

Queste affermazioni (pur contrarie ad alcune fallaci apparenze) si giustificano osservando che all'irregolarità di una superficie corrisponde un ordine di connessione lineare del relativo spazio riemanniano a 4 dimensioni, il quale ordine non può variare quando lo spazio suddetto vari per

trasformazione continua senza strappi e duplicature, cioè quando la superficie corrispondente varii in modo continuo senza acquistare nuove singolarità.

Quanto al numero θ, che figura nella formula di sopra, non possiamo dire se e quale funzione esso sia di p_a, p_g, $p^{(1)}$; ma è facile vedere che, per definirlo in modo da comprendere *tutti* i casi ($p^{(1)} \geqslant 1$), si debbono prendere in considerazione almeno i plurigeneri P_i ($i = 2, 3, \ldots$) della superficie.

Per ogni classe di superficie coi generi

$$p_a = p_g = P_i = 1 \qquad (p^{(1)} = 1),$$

risulta che *il numero dei moduli è almeno* 19 (come per la classe delle superficie di 4° ordine, $\theta = 0$).

Per le superficie regolari ($p_g = p_a = p$) di *genere* $p > 3$ con sistema canonico irriducibile (e quindi $p^{(1)} > 5$) si trova

$$\theta = p + \theta', \qquad \text{con} \qquad \theta' \geqslant 0,$$

e quindi *il numero dei moduli* è

$$10p - 2p^{(1)} + 12 + \theta'.$$

Prendendo $\theta' = 0$ si ricade nella espressione che il sig. NOETHER [1] ha dedotto da alcune ipotesi sulla validità delle note formule di postulazione. Risulta pertanto:

1) che la formula di NOETHER ($p > 3$, $p^{(1)} > 5$) dà almeno un minimo pel numero dei moduli;

2) che la eventuale differenza θ' è la deficienza di una serie covariante del sistema canonico, definita sopra la jacobiana di una rete del sistema (n. 4).

2. – Per calcolare il numero dei moduli di una classe di superficie algebriche, procediamo come segue.

Consideriamo una superficie della classe priva di curve eccezionali e su questa un sistema regolare $|C|$ di dimensione $\geqslant 3$, senza punti base (*puro*). Mediante un sistema ∞^3 contenuto in $|C|$, la superficie si lascia trasformare in una F di S_3, dotata di curva doppia e punti tripli (che sono tripli anche per la curva); la F appartiene ad una serie continua $\{F\}$

[1] *Anzahl der Moduln einer Klasse algebraischer Flächen*, « Sitzungsberichte Akademie zu Berlin », 1888.

di superficie dotate di una curva doppia dello stesso ordine e collo stesso numero di punti tripli; si tratta di valutare la dimensione D di questa serie continua di superficie, e di detrarre da questo numero l'infinità S delle superficie trasformate di F che appartengono alla serie stessa; ciò che rimane è il numero dei moduli:

$$M = D - S .$$

Ora la dimensione D della serie continua completa a cui appartiene F, si potrà valutare in base all'osservazione seguente:

Tutte le superficie della serie, infinitamente vicine ad F, segano su F il sistema lineare completo ∞^{D-1} che si ottiene sommando il sistema segato dalle prime polari e il sistema $|C|$ delle sezioni piane (*sistema caratteristico* della serie $\{F\}$).

Infatti ogni superficie della serie infinitamente vicina alla F, d'ordine n, si può considerare come una superficie dello stesso ordine che passi semplicemente per la curva doppia di F e per i punti doppi (pinch-points) ad essa infinitamente vicini; viceversa, ogni superficie d'ordine n che passi per questa curva e per questi punti doppi, e che sia infinitamente vicina ad F, ha una curva doppia dello stesso ordine infinitamente vicina a quella di F e similmente altrettanti punti doppi in prossimità ai pinch-points di F, quindi appartiene ad $\{F\}$.

Ciò posto, essendo n il grado di $|C|$ (ordine di F) e π il suo genere, le superficie φ_{n-1} polari di F segano su F un sistema lineare (contenuto in $2C + C'$) di genere

$$\bar{\pi} = 9\pi + p^{(1)} - 9 .$$

Il grado δ di codesto sistema è il numero delle C d'un fascio dotate d'un punto doppio; perciò $I = \delta - n - 4\pi$ è il valore dell'invariante di ZEUTHEN-SEGRE, cioè

$$I = 12p_a - p^{(1)} + 9;$$

si deduce

$$\delta = n + 4\pi + 12p_a - p^{(1)} + 9 .$$

Sommando $|C|$ al sistema segato dalle φ_{n-1} si ha il sistema caratteristico della serie continua $\{F\}$: il genere e il grado di questo sistema varranno dunque

$$\Pi = \bar{\pi} + 2n + 3\pi - 3 = 12\pi + 2n + p^{(1)} - 12 ,$$

e

$$N = \delta + 2(2n + 2\pi - 2) + n = 6n + 8\pi + 12p_a - p^{(1)} + 5 .$$

Quindi la dimensione $D - 1$ del sistema stesso, calcolata in base al teorema di RIEMANN-ROCH, sarà

$$D - 1 = p_a + N - \Pi + 1 + \theta = 4n - 4\pi + 13p_a - 2p^{(1)} + 18 + \theta ,$$

con

$$\theta \geqslant 0 .$$

Procediamo ora a valutare il numero S che esprime l'infinità delle trasformate di F appartenenti alla serie continua $\{F\}$. Essendo $|C|$ un sistema regolare di dimensione

$$r = p_a + n - \pi + 1 ,$$

vi sono in esso ∞^{4r-12} sistemi ∞^3, a ciascuno dei quali corrispondono ∞^{15} superficie trasformate di F proiettivamente identiche. Si avrà dunque

$$S = 4r + 3 ,$$

se il sistema $|C|$ non appartiene ad una serie continua più ampia di curve dello stesso ordine, ciò che accade per $p_a = p_g$: ma se $p_a < p_g$, $|C|$ appartiene ad un sistema continuo non lineare

$$\infty^{r + p_g - p_a} \ (^2) ,$$

formato di $\infty^{p_g - p_a}$ sistemi lineari di dimensione r, e quindi si avrà in generale

$$S = 4r + 3 + (p_g - p_a) .$$

Si deduce dunque che *il numero dei moduli* della classe a cui appartiene F è

$$M = D - S = 10p_a - p_g - 2p^{(1)} + 12 + \theta .$$

Ecco ora il significato di θ.

(²) ENRIQUES, « Atti Acc. di Bologna », dec. 1904 [questo volume, XXXV].

Essendo $|C|$ un sistema generico di F, il sistema caratteristico di $\{F\}$ è costituito dalle curve di $|3C + C'|$ che passano per i pinch-points di F; questi punti, in numero di

$$s = 2n + 8\pi + 2p^{(1)} - 12p_a - 22 ,$$

offrono $s - \theta$ condizioni indipendenti alle curve del sistema regolare $|3C + C'|$ che debbono contenerli; si dirà perciò che θ *è la sovrabbondanza del sistema* $|3C + C'|$ *per riguardo al gruppo* G_s *degli* s *punti*, i quali sono definiti dalla proprietà di essere punti doppi per ∞^1 curve C appartenenti al sistema ∞^3 delle sezioni piane, o — come brevemente diremo — sono *punti neutri* di questo sistema ∞^3.

Ora, poichè M esprime un carattere invariante di F, anche θ dovrà essere un invariante, cioè: *Per ogni sistema generico* $|C|$ *scelto su* F, *la sovrabbondanza del sistema* $|3C + C'|$ *in ordine al gruppo dei punti neutri di un qualsiasi sistema* ∞^3 *contenuto in* $|C|$, *assumerà un valore costante* $\theta \geqslant 0$, *che dipenderà dalla superficie* F *e non dal sistema scelto su di essa.*

3. – Consideriamo ora una superficie di genere

$$p_g = p_a = p > 3 ,$$

con curve canoniche irriducibili ($p^{(1)} \geqslant 6$), e cerchiamo di assegnare per essa un limite inferiore del carattere θ.

A tale scopo poniamo al posto di un sistema generico $|C|$ il sistema canonico $|K|$; la formula che dà il numero dei moduli diviene

$$M = 9p - 2p^{(1)} + 16 + \overline{\theta} ,$$

dove $\overline{\theta}$ è la sovrabbondanza di $|3K + K'| = |5K|$ rispetto ad un gruppo G_s di punti neutri per un qualsiasi sistema ∞^3 contenuto in $|K|$. In questa formula, figura la costante numerica 16 al posto di 12, perchè nell'espresdi M figurava $-4r$, e la dimensione r del sistema canonico è inferiore di un'unità al valore virtuale; si ha dunque

$$\overline{\theta} = \theta - 4 .$$

Per valutare $\overline{\theta}$, consideriamo la jacobiana K_j di una rete di curve K; ogni sistema ∞^3 di $|K|$, contenente la rete, dà luogo ad un gruppo di punti neutri G_s, appartenente a K_j. Ora K_j è una curva del sistema $|4K|$, su cui $|5K|$ sega la serie canonica completa; la sovrabbondanza del

sistema dedotto da $|5K|$ con l'imposizione del gruppo base G_s risulterà quindi uguale alla dimensione della serie speciale descritta da G_s su K_j (teorema di RIEMANN-ROCH sulla curva K_j). Ma per ogni sistema ∞^3 contenente la rete di $|K|$ considerata vi è un G_s su K_j, e perciò la dimensione della serie completa descritta da G_s sarà

$$p - 4 + \theta' ,$$

dove θ' ($\geqslant 0$) designa la deficienza eventuale della serie costituita dai gruppi neutri G_s.

Si conclude che per

$$p_a = p_g = p > 3 \qquad (p^{(1)} \geqslant 6),$$

il numero dei moduli di una classe di superficie algebriche vale

$$M = 10p - 2p^{(1)} + 12 + \theta' ,$$

dove θ' ($\geqslant 0$) *designa la deficienza eventuale della serie descritta dai gruppi neutri dei sistemi* ∞^3 *contenuti nel sistema canonico, sopra la jacobiana di una rete*; si ha quindi

$$\theta = p + \theta' .$$

XLVI.

LE SUPERFICIE DI GENERE UNO.

« Rend. dell'Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », vol. XIII (1909), pp. 25-28.

Fino dal 1893 [1] notai che una superficie algebrica (regolare) di genere $p_a = p_g = 1$, priva di curva canonica d'ordine > 0, può essere trasformata in una superficie F_π, d'ordine $2\pi - 2$, normale in un S_π, le cui sezioni iperpiane sono di genere π.

Nel 1896 [2] avvertii che la condizione d'inesistenza di una curva canonica d'ordine > 0, risulta dal supporre che oltre il genere sia uguale ad uno (e non maggiore) anche il bigenere P_2; e così dall'essere $p_a = P_2 = 1$, segue che tutti i plurigeneri sono pure uguali ad 1 ($P_i = 1$, $i = 1, 2, 3, 4 \ldots$).

Riassumendo: *Ogni superficie algebrica di generi*

$$p_a = P_2 = 1$$

può trasformarsi in una superficie F_π, *d'ordine* $2\pi - 2$, *normale in uno spazio* S_π, *ed avente come sezioni iperpiane curve (canoniche) di genere* π.

Il numero π che figura in questo enunciato non è determinato a priori; anzi alcuni semplici esempi bastano a mostrare che esistono classi distinte di superficie di generi 1. Sono note appunto le famiglie corrispondenti a $\pi = 2$ (piano doppio con sestica di diramazione), a $\pi = 3$ (superficie del 4° ordine di S_3), a $\pi = 4$ (sestica intersezione di una quadrica e di una varietà cubica in S_4), ecc. Ed è facile vedere direttamente che p. es. la quartica generale di S_3 non è riducibile al piano doppio, o la sestica di S_4 alla quartica di S_3.

---

(1) *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, « R. Accad. di Torino, Memorie » [queste *Memorie*, vol. I, V].

(2) *Sui piani doppi di genere uno*, « Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL) » [queste *Memorie*, vol. I, XVI].

Ma nasce la domanda: Al di là dei primi casi, in cui è facile assegnare una costruzione diretta, esisteranno superficie F_π corrispondenti a qualunque valore intero di π?

E, dato che esistano, queste superficie corrispondenti a diversi valori di π, saranno generalmente irriducibili fra loro?

Per rispondere a queste domande ho veduto la necessità d'istituire il calcolo dei moduli delle superficie di generi 1, ricerca che mi ha condotto ad un resultato più generale [3].

Si deduce in particolare da codesto resultato (nota citata, n. 2) che ogni famiglia di superficie coi generi $p_a = p_g = P_2 = 1$ (e quindi $p^{(1)} = 1$) dipende da almeno 19 moduli.

Su questa base si appoggia il teorema che segue:

Per ogni valore intero di π $(= 3, 4, 5 \ldots)$ *si può costruire una famiglia di superficie* F_π, *d'ordine* $2\pi - 2$, *a sezioni* (*canoniche*) *di genere* π *in* S_π, *famiglia dipendente da* (*almeno*) 19 *moduli*; *le* F_π *costruite in corrispondenza a valori diversi di* π, *e con moduli generali, sono birazionalmente irriducibili.*

Esporrò qui soltanto nelle sue linee generali la dimostrazione di questo teorema, senza approfondirne lo studio, perchè vengo informato che il sig. SEVERI, partendo pure dalla mia nota sui *moduli* e adoperando un procedimento simile, è riuscito, indipendentemente, allo stesso resultato, ch'egli ignorava essere in mio possesso già da sei mesi. Lasciando dunque a lui la cura di giustificare questo procedimento, mi limiterò ad indicare la costruzione delle F_π, che segue.

Pongasi dapprima che π sia un numero dispari:

$$\pi = 2\delta + 1 .$$

Allora si può costruire una superficie F_π iperellittica di rango 2 e di divisore δ, corrispondente ad una tabella normale di periodi:

$$\begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \dfrac{1}{\delta} & h & g' \end{cases} .$$

Le superficie iperellittiche, per un divisore $\delta > 1$, sono state considerate dai signori TRAYNARD, REMY, ENRIQUES e SEVERI. Nella memoria di questi, in corso di pubblicazione negli « Acta Mathematica », la $F_\pi = F_{2\delta+1}$

---

[3] *Sui moduli delle superficie algebriche*, « Rendiconti R. Accad. dei Lincei », 6 giugno 1908 [questo volume, XLV].

(d'ordine 4δ in $S_{2\delta+1}$) è indicata con $\Phi_{4\delta}$ (cfr. n. 50) e si trova che essa possiede 16 punti doppi. Risulta inoltre dalla suddetta memoria, che, sulla F_π iperellittica corrispondente a moduli generali g, h, g', tutti i sistemi di curve si ottengono per somma e sottrazione da 16 curve razionali d'ordine 2δ (curve di contatto dei 16 iperpiani singolari) e dagli intorni dei 16 punti doppi, che possono considerarsi come curve d'ordine 0. Le 32 curve indicate non sono del resto tutte indipendenti fra loro.

Ora la superficie iperellittica Φ, di cui si è discorso, appartiene ad una serie continua di superficie, a sezioni canoniche, dello stesso ordine $2\pi - 2$; ed in questa serie vi sono ∞^{19} superficie F_π birazionalmente distinte. Una generale fra queste non possiede dunque alcun punto doppio.

Si può provare che *su una F_π, a moduli generali, non vi sono altri sistemi lineari di curve se non quello delle sezioni iperpiane e i suoi multipli.* La prova riposa sull'esame della degenerazione che un altro sistema esistente su F_π subirebbe quando F_π si riduce per continuità a Φ.

Risultano per tal modo costruite delle F_π corrispondenti ad un qualsiasi valore dispari di π, e risulta anche che le F_π così costruite sono generalmente irriducibili.

Per π pari si procede in modo analogo partendo dalla proiezione di una Φ iperellittica, proiezione fatta da un suo punto doppio.

N. B. - Accade per es. per $\pi = 9$ che si trovino due famiglie distinte di F_9, in S_9, dipendenti ugualmente da 19 moduli; una di queste nasce per trasformazione delle quartiche di S_3. Le F_9 dell'altra famiglia che noi costruiamo invece a partire da funzioni iperellittiche di divisore $\delta=4$ sono irriducibili alle quartiche di S_3 e quindi alle F_9 della prima famiglia.

XLVII.

MÉMOIRE SUR LES SURFACES HYPERELLIPTIQUES

par FEDERIGO ENRIQUES et FRANCESCO SEVERI

« Acta Mathematica », tomes XXXII et XXXIII (1909, 1910),
couronné par l'Académie des Sciences de Paris (1907),
pp. 283-392, 321-403.

I. - Introduction.

1. – On appelle *surface hyperelliptique* toute surface algébrique

$$F(x, y, z) = 0 ,$$

qui admet une représentation paramétrique par des *fonctions uniformes quadruplement périodiques* de deux variables

$$(1) \qquad x = f_1(u, v) , \qquad y = f_2(u, v) , \qquad z = f_3(u, v) .$$

D'après un théorème classique de WEIERSTRASS, on peut construire une surface hyperelliptique F de la façon suivante:

Soient x, y, z trois fonctions analytiques uniformes indépendantes de u, v ayant le caractère de fonctions rationnelles pour toute valeur finie de u, v; si ces fonctions sont quadruplement périodiques aux mêmes périodes, elles seront toujours liées par une équation algébrique

$$F(x, y, z) = 0 .$$

Si au lieu de *trois* fonctions quadruplement périodiques, on en considérait $r > 3$, on aurait analoguement une surface hyperelliptique de l'hyperespace S_r, à r dimensions; celle-ci se ramenerait d'ailleurs par une projection à une surface de l'espace ordinaire.

Si, étant donnée une surface hyperelliptique

$$F(x, y, z) = 0 ,$$

on choisit trois (ou plusieurs) fonctions rationnelles indépendantes

$$X = X(x, y, z), \qquad Y = Y(x, y, z), \qquad Z = Z(x, y, z),$$

celles-ci seront liées par une nouvelle équation algébrique

$$\Phi(X, Y, Z) = 0,$$

qui représente, ainsi que $F = 0$, une surface hyperelliptique. On peut exprimer cette remarque en disant que « si une surface Φ admet une transformée rationnelle hyperelliptique (F), elle est elle-même hyperelliptique ».

En considérant en particulier le cas où la substitution rationnelle soit invertible (par des fonctions rationnelles), on a que « toute transformée birationnelle d'une surface hyperelliptique est elle-même hyperelliptique ».

Au point de vue des problèmes dont nous nous occuperons, deux surfaces liées par une correspondance birationnelle nous apparaîtront comme deux surfaces identiques, en tant qu'elles correspondent au même corps de fonctions abéliennes. Ainsi, dans la suite, nous considérerons toujours une surface donnée comme une image projective de la classe à laquelle elle appartient; c'est-à-dire qu'il sera permis de remplacer cette image par une autre quelconque de ses transformées birationnelles.

2. *Premiers caractères des surfaces hyperelliptiques*: *le diviseur.* – D'après le théorème fondamental de la théorie des fonctions abéliennes [1], étant données les fonctions

$$x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v),$$

on peut ramener leurs *périodes primitives à un tableau normal* de la forme

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \dfrac{1}{\delta} & h & g' \end{array} \right.$$

où δ est un entier positif. Cette réduction peut être effectuée par des substitutions linéaires, d'une infinité de manières différentes. Mais on

[1] Voir les travaux généraux de WEIERSTRASS et de MM. POINCARÉ et PICARD concernant les fonctions abéliennes de genre p; voir en particulier pour $p = 2$ le mémoire classique de M. APPELL (« Journal de Math. », 1891) et la note recente de M. PAINLEVÉ (« Comptes rendus »).

est toujours amené au même valeur de δ. C'est ce que nous allons démontrer. Soit:

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{matrix}$$

un tableau quelconque de périodes primitives des f; on a la relation bilinéaire à coefficients entiers:

$$\sum_{i,\varkappa} c_{i\varkappa}\alpha_i\beta_\varkappa = 0 . \qquad (c_{ii} = 0,\ c_{i\varkappa} = -c_{\varkappa i}). \tag{3}$$

Lorsqu'on veut construire un tableau normal de périodes, on commence à transformer les périodes au moyen d'une transformation linéaire d'ordre 1, telle que la relation bilinéaire entre les périodes transformées

$$\begin{matrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' & \alpha_4' \\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' & \beta_4' \end{matrix}$$

ait la forme normale:

$$\alpha_1'\beta_3' - \beta_1'\alpha_3' + \delta(\alpha_2'\beta_4' - \beta_2'\alpha_4') = 0 ,$$

1, δ étant les *diviseurs élémentaires* de la forme (3). On prend ensuite de nouvelles variables

$$\lambda_0 u + \mu_0 v , \qquad \lambda_1 u + \mu_1 v ,$$

où les constantes λ, μ sont déterminées de telle sorte que

$$\lambda_0\alpha_1' + \mu_0\beta_1' = 1 , \qquad \lambda_1\alpha_1' + \mu_1\beta_1' = 0 ,$$

$$\lambda_0\alpha_2' + \mu_0\beta_2' = 0 , \qquad \lambda_1\alpha_2' + \mu_1\beta_2' = \frac{1}{\delta} .$$

Ainsi le nombre δ vient dépendre seulement des diviseurs élémentaires de la forme (3). Comme deux systèmes différents de périodes *primitives* sont toujours liées par une transformation linéaire d'ordre 1, d'après un théorème bien connu de WEIERSTRASS, les formes bilinéaires relatives à ces systèmes, auront les mêmes diviseurs élémentaires; ainsi la valeur de δ est la même quel que soit le système de périodes primitives dont on part, tant que ces périodes ne sont pas liées par des relations singulières à coefficients entiers.

Nous venons de prouver que, *pour des périodes arbitraires*, la réduction des périodes primitives des fonctions f à la forme normale, nous amène à un tableau (2) où *l'entier δ résulte défini sans ambiguité par rapport aux fonctions f*; ce nombre entier est donc un caractère du système de fonctions abéliennes données; nous l'appelerons le *diviseur* de ces fonctions.

Nous dirons aussi qu'une surface F est une *surface hyperelliptique de diviseur δ*, lorsqu'elle admet une représentation paramétrique par des fonctions abéliennes de diviseur δ.

3. *Le rang.* – Soit encore un système de fonctions abéliennes

$$(1) \qquad x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v).$$

Un autre caractère de ce système peut être défini de la façon suivante:

A tout point (x, y, z) de la surface F il peut correspondre ou bien un seul couple (u, v), ou bien $r > 1$ couples (u, v), incongrus par rapport aux périodes primitives des fonctions f.

Dans le premier cas il y a une correspondance biunivoque entre les points de la surface F et les points (u, v) intérieurs à un prismatoïde de périodes primitives; dans le second cas au contraire on a qu'à tout point (x, y, z) de F correspondent $r > 1$ points intérieurs à ce prismatoïde.

Le nombre r $(\geqslant 1)$ des points (u, v) intérieurs au prismatoïde des périodes, qui correspondent à un même point (x, y, z) de F, sera désigné dans la suite sous le nom de *rang du système de fonctions f*; on dira aussi que la *surface F est hyperelliptique de rang r.*

4. *Surfaces rationnelles et réglées elliptiques.* – D'après les définitions que nous venons de poser, toute surface rationnelle et de même toute surface réglée elliptique, peut être considérée comme une surface hyperelliptique, et cela de différentes façons.

On peut considérer une surface rationnelle (ou une réglée elliptique) F comme un cas de dégénérescence des surfaces hyperelliptiques de rang 1; mais on peut aussi exprimer les coordonnées des points de F par des fonctions abéliennes *non dégénérescentes*, formant un système *de rang* > 1.

Dans la suite nous laisserons de côté les surfaces rationnelles et celles qui peuvent être transformées en des réglées elliptiques; *le nom de surfaces hyperelliptiques ne sera donc pas appliqué aux surfaces de ces familles*, tout au moins lorsqu'il s'agira de surfaces que l'on se donnera à priori.

5. *La surface de Jacobi.* – Dans la théorie des surfaces hyperelliptiques joue un rôle fondamental la *surface que l'on construit* de la façon suivante:

Soit

$$f(\xi, \eta) = \eta^2 - \varphi(\xi) = 0$$

une courbe de genre deux, et soient (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) deux points variables de f; posons

(1) $$x = \xi_1 + \xi_2 , \qquad y = \xi_1 \xi_2 , \qquad z = \eta_1 + \eta_2 .$$

D'après le théorème d'inversion de JACOBI, le point (x, y, z) décrit une surface hyperelliptique

$$F(x, y, z) = 0 ,$$

dont l'équation s'obtient en éliminant ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 entre les (1) et les

$$f(\xi_1, \eta_1) = 0 , \qquad f(\xi_2, \eta_2) = 0 .$$

A chaque couple de points de la courbe f correspond par les formules (1) un point de la surface F, et réciproquement.

La surface F, ou toute transformée birationnelle de celle-ci, dont les points correspondent (élément par élément) aux couples de points d'une courbe de genre deux, sera désignée dans la suite sous le nom de *surface de Jacobi*.

REMARQUE. – La courbe de genre deux peut dégénérer en se réduisant à un couple de courbes elliptiques; on tombe alors sur la *surface de Jacobi particulière* qui représente les couples de points de ces courbes.

Il y a aussi d'autres dégénérescences possibles de la courbe f, mais ces cas amènent aux surfaces hyperelliptiques dégénérescentes (surfaces rationnelles et réglées elliptiques) que nous venons d'exclure de notre étude (n. 4).

6. *Transformées rationnelles d'une surface hyperelliptique.* – Le rôle qui est joué par la surface de JACOBI dans la théorie des surfaces hyperelliptiques, ressortira du théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique admet une transformée rationnelle qui est une surface de Jacobi.

Considérons la surface hyperelliptique Φ qui est représentée par les formules

(1) $$x = f_1(u, v) , \qquad y = f_2(u, v) , \qquad z = f_3(u, v) ,$$

et supposons d'avoir effectuées d'avance sur u, v les substitutions linéaires

qui ramènent les périodes des fonctions abéliennes f_1, f_2, f_3 au tableau normal

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \dfrac{1}{\delta} & h & g' \end{array} \right. ,$$

où le diviseur δ sera un entier positif (n. 2). Entre les parties imaginaires g_1, h_1, g_1', de g, h, g' on aura l'inégalité

$$(3) \qquad g_1 g_1' > h_1^2 .$$

En désignant par r ($\geqslant 1$) le rang des fonctions (1), on aura qu'à un point quelconque (x, y, z) de Φ correspondent r couples (u, v) incongrus par rapport aux périodes (2), soit

$$(4) \qquad (u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_r, v_r) .$$

Par rapport au tableau (2) ces couples ne sont pas distincts des couples

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \left(u_1, v_1 + \dfrac{\varkappa}{\delta}\right), \left(u_2, v_2 + \dfrac{\varkappa}{\delta}\right), \ldots, \left(u_r, v_r + \dfrac{\varkappa}{\delta}\right), \\ \varkappa = 1, 2, \ldots, \delta - 1 . \end{array} \right.$$

Mais, toutefois, les couples (4), (5), qui sont au nombre de $n = r\delta$, sont distincts par rapport au tableau

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{array} \right. .$$

Ceci posé, nous allons construire une surface de JACOBI F, en partant d'une courbe f de genre deux dont les intégrales de première espèce aient les périodes normales (6); nous sommes assurés que cette courbe existe d'après l'inégalité (3).

En désignant par $\omega_1(\xi)$, $\omega_2(\xi)$ les intégrales considérées de f, sommons les valeurs que ω_1, ω_2 prennent en deux points (ξ_1), (ξ_2) de f; on peut regarder ces sommes comme des fonctions du point (X) de la surface F, qui correspond au couple (ξ_1), (ξ_2) de f.

Soit:

$$u(X) = \omega_1(\xi_1) + \omega_1(\xi_2) , \qquad v(X) = \omega_2(\xi_1) + \omega_2(\xi_2) .$$

Les fonctions u, v seront deux intégrales simples de première espèce attachées à la surface F, et elles auront les périodes primitives (6).

Les coordonnées d'un point de F seront des fonctions uniformes quadruplement périodiques de u, v ayant les périodes (6).

Or, entre les points de la surface Φ et ceux de F il y a une correspondance $[1, n]$ de façon qu'à un point (x) de Φ répondent n points (X) de F, donnés par les couples (4), (5).

Etant donné un point (X) de F, on a un couple (u, v) par rapport au tableau des périodes (6) et à fortiori par rapport à (2); ainsi par les formules (1) à (X) répond un point (x) de Φ qui résulte une fonction rationnelle de (X).

La surface Φ admet donc une transformée rationnelle qui est la surface de JACOBI F. La proposition énoncée se trouve ainsi justifiée.

REMARQUE. – On reconnaît en cette proposition une expression géométrique du théorème fondamental d'après lequel toute fonction abélienne est une fonction rationnelle des séries Θ.

La propriété que nous venons d'établir peut être énoncée d'une autre façon.

Entre la surface hyperelliptique donnée Φ et la surface de JACOBI F nous avons trouvé une correspondance $[1, n]$ de sorte qu'à un point de Φ répond un groupe G_n de n points de F. Les groupes G_n qu'on obtient sur F en variant le point homologue de Φ, forment une série algébrique ∞^2 qui jouit de la propriété suivante: chaque point de F appartient à *un* groupe de la série, les points du groupe jouant un rôle symmétrique par rapport à la détermination de celui-ci.

On exprime cette propriété en disant que les groupes G_n forment sur F une *involution I_n d'ordre n*. On dira aussi que Φ (ou toute autre surface en correspondance birationnelle avec celle-ci) *représente* l'involution I_n, ou qu'elle en est une *image*.

Ces définitions établies, notre résultat peut être exprimé en disant que « toute surface hyperelliptique correspond à une involution I_n appartenant à une surface de JACOBI ».

On peut même préciser cet énoncé en tenant compte de la valeur de n; en effet nous avons trouvé

$$n = r\delta ,$$

r et δ désignant respectivement le rang et le diviseur de la surface hyperelliptique donnée.

Nous aurons donc le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique de diviseur δ et de rang r correspond à une involution d'ordre $r\delta$ appartenant à une surface de Jacobi; la surface donnée est une image de l'involution.

En particulier: *Toute surface hyperelliptique de diviseur et de rang* 1 *est une surface de Jacobi.*

On a aussi:

Toute surface hyperelliptique de rang r et diviseur δ, correspond à une involution d'ordre r appartenant à une surface hyperelliptique de rang 1 *et de diviseur δ.*

II. - Les surfaces hyperelliptiques de rang 1.

7. – Les surfaces hyperelliptiques de rang 1 ont été étudiées par M. PICARD comme des surfaces admettant un groupe permutable ∞^2 de transformations birationnelles en elles-mêmes, c'est pourquoi elles ont reçu le nom de *surfaces de Picard.*

Aux propriétés découvertes par M. PICARD, M. HUMBERT a ajouté une étude approfondie de ces surfaces, de façon qu'on en possède maintenant une théorie qui peut être regardée comme complète sous plusieurs points de vue.

Cependant il ne paraîtra pas inutile que nous nous arrêtons à rappeler en ce chapitre les théorèmes fondamentaux qui constituent cette théorie, en les rapprochant au point de vue géométrique, auquel nous nous placerons souvent dans la suite de ces recherches; nous aurons occasion ainsi d'ajouter aux résultats connus quelques résultats nouveaux, qui ne nous semblent pas dépourvus d'interêt.

Nous nous proposons d'abord de construire toutes les surfaces de PICARD en partant de la surface de JACOBI (nn. 11, 12). Cette construction mettra simplement en lumière les propriétés fondamentales qu'on peut considérer comme caractéristiques pour notre famille de surfaces (nn. 13, 14, 16). Enfin elle nous amenera à reconnaître les types, birationnellement distincts, de surfaces hyperelliptiques de rang 1, en classifiant celles-ci d'après leur diviseur δ (n. 30).

8. *Transformations de la surface de Jacobi en elle-même.* – Reprenons la surface de JACOBI F que nous avons définie au n. 5; elle est représentée par les équations

$$x = \xi_1 + \xi_2\,, \qquad y = \xi_1\xi_2\,, \qquad z = \eta_1 + \eta_2\,,$$

$$f(\xi_1, \eta_1) = 0\,, \qquad f(\xi_2, \eta_2) = 0\,,$$

en désignant par $f(\xi, \eta) = \eta^2 - \varphi(\xi) = 0$ une courbe de genre deux.

Ainsi que nous l'avons rappelé, la surface F possède deux intégrales simples de première espèce que l'on obtient en sommant les valeurs des intégrales analogues de f, aux points (ξ_1, η_1) et (ξ_2, η_2) (voir n. 6).

Or il est bien connu que:

La surface de Jacobi F admet deux séries ∞^2 de transformations birationneles en elle-même, qui forment un groupe mixte.

Ces transformations sont représentées par les formules

$$(1) \qquad \begin{cases} u + u' = \text{const.}, \\ v + v' = \text{const.}, \end{cases}$$

et

$$(2) \qquad \begin{cases} u' - u = \text{const.}, \\ v' - v = \text{const.}, \end{cases}$$

Les transformations (1) s'appellent des *transformations de première espèce*, les (2) des *transformations de seconde espèce*; ce sont là les deux sortes de transformations qui appartiennent à F pour toute valeur des modules; il peut en exister d'autres seulement pour des valeurs particulières de ces modules, ainsi que nous le verrons dans la suite.

Une transformation de première espèce définit sur F une involution de second ordre, les points homologues étant conjugués par rapport à celle-ci.

Le produit de deux transformations de première espèce est une transformation de seconde espèce.

Deux transformations de 2^{de} espèce engendrent par multiplication une nouvelle transformation de 2^{de} espèce; cela revient à dire que les transformations de 2^{de} espèce forment, à elles seules, un *groupe continu* qui est un sous-groupe du groupe mixte renfermant toutes les transformations (1), (2) de F.

A l'égard de la multiplication des transformations de F ajoutons que: *les transformations de 2^{de} espèce sont deux à deux permutables entr'elles.*

Il n'en est plus ainsi généralement pour deux transformations de première espèce.

Enfin rappelons que:

Etant donnés sur F deux points (x), (x'), il existe deux transformations de notre groupe mixte qui font correspondre au premier point le second; l'une de celles ci est une transformation de première espèce, l'autre une transformation de seconde espèce.

REMARQUE I. – Si une transformation de seconde espèce

$$\begin{cases} u' - u = \lambda \\ v' - v = \mu \end{cases}$$

ramène en lui-même un point de la surface, les équations de la transformation seront satisfaites pour $u' = u$, $v' = v$. Il faudra donc que l'on ait $\lambda = \mu = 0$, c'est-à-dire que la transformation soit *l'identité*. Donc:

Une transformation de seconde espèce qui ne soit pas l'identité n'admet aucun point de coïncidence.

Au contraire une transformation de première espèce

$$\begin{cases} u + u' = \lambda \\ v + v' = \mu \end{cases}$$

admet toujours 16 points de coïncidence qui tombent en les points

$$\frac{\lambda + \omega_1}{2}, \qquad \frac{\mu + \omega_2}{2},$$

ω_1, ω_2 étant un couple de périodes simultanées de u, v.

REMARQUE II. – Faisons une autre remarque utile pour la suite.

Lorsque un point de F se meut sur un cycle linéaire quelconque σ, le point qui lui correspond au moyen d'une transformation de seconde espèce

$$\begin{cases} u' - u = \lambda \\ v' - v = \mu \end{cases}$$

décrit un cycle σ' homologue à σ. En effet, si les paramètres λ, μ aboutissent à zéro par une variation continue, le cycle σ' se réduit au cycle σ.

9. *Transformations de seconde espèce cycliques.* – Tandis que les transformations de première espèce de F sont périodiques (d'ordre 2) il n'en est pas ainsi, en général, pour les transformations de seconde espèce.

Reprenons les équations (2) du n. 8 en les écrivant sous la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} u' - u \equiv \lambda \\ v' - v \equiv \mu; \end{cases}$$

et rappelons qu'il est sous-entendu que les congruences se rapportent aux périodes simultanées de u, v. Pour que ces équations représentent une transformation périodique d'ordre n, il faut avoir

$$n\lambda \equiv 0, \qquad n\mu \equiv 0;$$

cela revient à dire que

$$\lambda = \frac{\omega_1}{n}, \qquad \mu = \frac{\omega_2}{n},$$

ω_1, ω_2 désignant un couple de périodes simultanées de u, v.

On obtient ainsi des transformations de la surface de Jacobi F, qui sont périodiques d'ordre n.

En tenant compte du fait que parmi ces transformations il y en a en général qui sont périodiques d'un ordre diviseur de n, au moyen d'une formule connue de DEDEKIND on reconnait que: *les transformations périodiques d'ordre n (et non moindre que n) sont au nombre de* $n^4 (1 - 1/\alpha^4)(1 - 1/\beta^4)(1 - 1/\gamma^4)\ldots$, *où α, β, γ, ... désignent les diviseurs premiers de n* (2).

REMARQUE. – Les transformations périodiques d'ordre n de F en elle-même peuvent être définies de la façon suivante:

Soit G_n un groupe de n points de F et sommons les valeurs des intégrales u, v aux points de G_n; désignons ces sommes par h, k. Il y aura ∞^{2n-2} groupes analogues à G_n qui donnent lieu aux mêmes sommes h, k; ceux-ci formeront une certaine série qu'on pourra désigner par Γ_n. Or parmi les groupes de Γ_n il y en aura un nombre fini (et précisément n^4) qui seront formés par un seul point compté n fois (3). Eh bien: les transformations périodiques d'ordre n sont définies parmi les transformations de seconde espèce de F, par la propriété de changer un point de coïncidence n-ple de Γ_n en un point analogue.

Considérons une transformation périodique de seconde espèce de F, et ses puissances; on obtient un groupe cyclique de transformations qui sont représentées par les formules:

$$(3) \qquad \begin{cases} u' - u \equiv k\dfrac{\omega_1}{n} \\ v' - v \equiv k\dfrac{\omega_2}{n} \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

où ω_1, ω_2 constituent un certain couple de périodes de u, v. On peut même ramener ces formules à une expression plus simple; en effet par des substitutions linéaires convenables effectuées sur les cycles normaux et sur les intégrales u, v, elles se réduisent à la forme

$$(3') \qquad \begin{aligned} u' - u &\equiv 0 \\ v' - v &\equiv \frac{k}{n}. \end{aligned}$$

(2) Voir p. ex. CASTELNUOVO, « Rend. dell'Istituto Lombardo », s. II, t. XXV, 1892; n. 8.
(3) Voir p. ex. CASTELNUOVO, l. c.

Cette réduction s'effectuera de la façon suivante: désignons par ϱ_2 le cycle de F qui correspond aux périodes ω_1, ω_2 et construisons un système normal de cycles $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$, renfermant ϱ_2; il suffira de prendre comme nouvelles variables les intégrales de F qui ont les périodes 1, 0 et 0, 1 le long de ϱ_1, ϱ_2.

Il est bon d'ajouter que la construction du système normal de cycles auquel appartient ϱ_2, peut être effectuée en remarquant que la surface F renferme des courbes C de genre deux (n. 20); il suffit alors de ramener le cycle ϱ_2 à un cycle de la surface riemannienne C et de construire ensuite sur celle-ci les retrosections riemanniennes $\varrho_1\varrho_2$, $\varrho_3\varrho_4$ [4].

10. – Opérons sur un point quelconque P de F au moyen des transformations (3) ou (3′) du n. 9; on a ainsi un groupe de points $G_n = (P, P', P'', \dots, P^{(n-1)})$.

Ce groupe est défini d'une façon symétrique par rapport à ses points; en conséquence, au varier de P, il décrit une *involution cyclique d'ordre n* que nous pouvons désigner par I_n. On obtient le nombre des involutions I_n, en divisant le nombre des transformations périodiques d'ordre n par le nombre des transformations qui ramènent en lui-même tout groupe d'une I_n donnée. Ce dernier nombre est évidemment égal à la fonction $\varphi(n)$ de GAUSS.

Il y a donc, sur F, $n^3(1+1/\alpha)(1+1/\alpha^2)(1+1/\beta)(1+1/\beta^2)\dots$ *involutions cycliques d'ordre n engendrées par les transformations de seconde espèce* (3), [ou (3′)].

Ces involutions cycliques I_n jouissent des *propriétés suivantes*:

a) *Elles sont transformées en elles-mêmes par les transformations de seconde espèce de F.*

b) *Elles sont transformées en elles-mêmes par les transformations de première espèce de F.*

Cette dernière affirmation a besoin d'être justifiée. Soit ω une transformation cyclique de seconde espèce d'ordre n, qui engendre sur F une involution I_n. Il ne subsiste pas que ω soit transformée en elle-même par une transformation quelconque de première espèce π. Mais, en multipliant ω par π, on obtient un groupe fini composé par les $2n$ transformations

$$\omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}, \omega^n \equiv 1,$$

$$\pi, \omega\pi, \dots, \omega^{n-1}\pi.$$

---

[4] Voir le Traité de MM. PICARD et SIMART (t. I, pag. 86) et les remarques de SEVERI dans son mémoire publié par les « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », 7 Gennaio 1906.

Ces transformations donnent lieu à une involution I_{2n} dont chaque groupe est composé par *deux* groupes de I_n, qui sont échangés l'un en l'autre par chacune des transformations de première espèce

$$\pi, \omega\pi, \ldots, \omega^{n-1}\pi .$$

Il s'ensuit que I_n est transformée en elle-même par toute transformation de première espèce de F.

c) *Elles n'ont pas des points de coïncidence*, c'est-à-dire que tout point P d'un groupe G_n de I_n est distinct des autres $n-1$.

En effet un point de coïncidence de I_n serait un point uni pour une transformation de seconde espèce, tandis que ces transformations n'ont pas des points unis (voir la remarque I au n. 8).

11. *Construction des surfaces de Picard de diviseur δ.* – Considérons une involution I_δ engendrée par une transformation périodique de seconde espèce d'ordre δ, appartenant à une surface de JACOBI F.

Nous allons démontrer que *toute surface F_δ qui représente l'involution I_δ est une surface hyperelliptique de rang* 1 — *c'est-à-dire une surface de Picard de diviseur δ.*

En désignant par u, v les intégrales normales de première espèce attachées à F, nous considérerons les sommes des valeurs que u, v prennent aux δ points d'un groupe de I_δ; ces sommes divisées par δ seront désignées par U, V.

Alors U, V seront deux intégrales de première espèce attachées à la surface F_δ; il s'agit:

a) de déterminer les périodes primitives de U, V et de montrer que celles-ci sont

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \dfrac{1}{\delta} & h & g' \end{matrix};$$

b) de prouver que les coordonnées des points de F_δ s'expriment par des fonctions uniformes de U, V; ces fonctions seront de rang 1, puisqu'en tout point de F_δ les intégrales U, V résultent définies sans ambiguité, aux périodes près.

a) Soient σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 les quatre cycles de la surface F qui correspondent aux périodes normales, ce que l'on peut représenter par le tableau suivant

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
u	1	0	g	h
v	0	1	h	g'

On peut supposer que les équations de la transformation périodique qui engendre I_δ soient

$$\begin{matrix} u' - u \equiv 0 \\ v' - v \equiv \dfrac{1}{\delta} \end{matrix} \qquad \text{mod} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{Bmatrix}$$

(voir n. 9).

Ceci posé, considérons les cycles σ_1', σ_2', σ_3', σ_4' de F_δ, correspondant à σ_1, σ_2, σ_3, σ_4.

On peut évaluer les périodes de U, V le long de ces cycles, en rappelant la remarque II du n. 8; d'après cette remarque au cycle σ_1', décrit par un point P' de F_δ, correspondent sur F des cycles homologues décrits par les δ points homologues $P_1, \ldots, P_\delta$; un de ces cycles a été déjà désigné par σ_1.

On trouve ainsi que les périodes de U, V correspondant aux cycles σ_1', σ_2', σ_3', σ_4' sont celles représentées par le tableau suivant

	σ_1'	σ_2'	σ_3'	σ_4'
U	1	0	g	h
V	0	1	h	g'.

Mais les cycles σ_1', σ_2', σ_3', σ_4' de F_δ ne sont pas primitifs; c'est là un point délicat qu'il faut mettre en lumière.

A cet effet remarquons que l'on obtient un cycle de F_δ qui n'est pas une combinaison linéaire de σ_1', σ_2', σ_3', σ_4' par la construction suivante: Considérons les points P_1, $P_2, \ldots, P_\delta$ de F qui correspondent à un même point P' de F_δ. Soit Θ_1 une ligne ouverte joignant P_1 à P_2. Tandis que P_1 décrit cette ligne, P_2 parcourira une ligne Θ_2 qui aboutit à $P_3, \ldots, P_\delta$ une ligne Θ_δ qui aboutit à P_1. Eh bien, au chemin ouvert Θ_1 correspond sur F_δ un cycle fermé Θ'; ce cycle parcouru δ fois correspond au cycle

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \ldots + \Theta_\delta$$

de la surface F.

Evaluons les périodes des intégrales U, V correspondant au cycle Θ' de F_δ. Elles correspondent aux valeurs que les intégrales u, v de F prennent le long de Θ_1; la correspondance $(P_1 P_2)$ étant représentée par les équations

$$u' \equiv u$$

$$v' \equiv v + \frac{1}{\delta},$$

ces valeurs sont respectivement

$$0 \text{ et } \frac{1}{\delta}, \quad \text{mod} \begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g'. \end{cases}$$

Nous sommes arrivés à la conclusion que les intégrales U, V de F admettent les périodes simultanées 0, $1/\delta$ par rapport au cycle Θ'; ce cycle compté δ fois donne le couple de périodes $(0, 1)$ et résulte ainsi homologue à σ_2'.

On voit ainsi, ce que nous avons affirmé, que les périodes

$$\begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{cases}$$

ne sont pas des périodes primitives pour U, V sur F_δ, puisque ces intégrales admettent les périodes

$$(2) \qquad \begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g' \end{cases}$$

correspondant aux cycles

$$(3) \qquad \sigma_1', \quad \Theta', \quad \sigma_3', \quad \sigma_4'.$$

On peut prouver au contraire que les périodes (2) sont primitives. A cet effet il faut montrer que tout cycle de F_δ est homologue à une combinaison linéaire à coefficients *entiers* des cycles (3).

Observons d'abord qu'un système de chemins analogues aux chemins $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_\delta$, peut être défini sur F pour tout groupe G_δ de l'involution I_δ, et que le cycle Θ' correspondant aux nouveaux chemins sur F_δ, est homologue au chemin Θ' obtenu auparavant, parce qu'il donne encore les valeurs 0, $1/\delta$ pour les intégrales U, V.

Ajoutons que sur F un chemin allant de P_1 à P_{i-1} ($i = 3, 4, \ldots$) est homologue à la somme du chemin $\Theta_1 + \Theta_2 + \ldots + \Theta_i$ et d'un cycle linéaire; par conséquent le chemin fermé qui lui correspond sur F_δ est homologue à la somme de $i\Theta'$ et d'une combinaison linéaire à coefficients entiers des cycles σ_1', $\sigma_2' = \delta\Theta_1'$, σ_3', σ_4', c'est-à-dire à une combinaison des cycles σ_1', Θ', σ_3', σ_4'.

Comme tout cycle linéaire de F_δ a pour correspondant sur F ou bien un cycle linéaire — qui s'exprime au moyen des cycles $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ — ou bien un chemin ouvert joignant deux points conjugués — qui s'ex-

prime au moyen de ces mêmes cycles et des chemins $\Theta_1, \ldots, \Theta_\delta$ — on en conclût que tout cycle de F_δ restera homologue à une combinaison à coefficients entiers des cycles

$$\sigma_1', \quad \Theta', \quad \sigma_3', \quad \sigma_4'. \tag{3}$$

b) Il s'agit maintenant de montrer que les coordonnées des points de F_δ sont des fonctions uniformes de U, V, c'est-à-dire que U, V ne peuvent reprendre les mêmes valeurs, par rapport aux périodes (2), en des points différents de la surface.

Revenons à la définition des intégrales U, V: elles s'obtiennent en divisant par δ les sommes des valeurs des intégrales u, v attachées à F, aux points d'un groupe de I_δ. On a donc

$$\begin{aligned} U &\equiv u \\ V &\equiv v + \frac{\delta - 1}{2\delta} \end{aligned} \mod \begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g'. \end{cases}$$

Soient U_0, V_0 et U_1, V_1 deux couples de valeurs de U, V, congrus par rapport au tableau (2), et désignons par X_0, X_1 les points correspondants de F_δ; il faut prouver que ceux-ci ne sont pas distincts.

Désignons par x_0 un des δ points de F correspondants à X_0, et par x_1 un des points correspondants à X_1. On aura alors

$$\begin{aligned} U_0 &\equiv u(x_0), & U_1 &\equiv u(x_1), \\ V_0 &\equiv v(x_0) + \frac{\delta - 1}{2\delta}, & V_1 &\equiv v(x_1) + \frac{\delta - 1}{2\delta}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} u(x_0) &\equiv u(x_1), \\ v(x_0) &\equiv v(x_1), \end{aligned}$$

les congruences ayant lieu par rapport au tableau (2). Ces relations peuvent donc s'écrire

$$\begin{aligned} u(x_0) &\equiv u(x_1), \\ v(x_0) &\equiv v(x_1) + \frac{\varepsilon}{\delta} \end{aligned} \qquad (\varepsilon \text{ entier} \leqslant \delta),$$

les nouvelles congruences étant considérées par rapport au tableau (1).

Il s'ensuit que x_0 est amené en x_1 par la transformation

$$u' \equiv u$$
$$v' \equiv v + \frac{1}{\delta}$$

et par conséquent que x_0, x_1 appartiennent à un même groupe de I_δ, ou, enfin, que les points X_0, X_1 ne sont pas distincts.

12. – Nous venons de prouver que toute involution cyclique I_δ engendrée sur une surface de JACOBI par une transformation périodique de seconde espèce, est représentée par une surface de PICARD. Il est aisé de montrer que, réciproquement, toutes les surfaces de PICARD peuvent être obtenues par cette construction.

C'est là une conséquence immédiate de ces faits: a) que par la construction indiquée on obtient des surfaces hyperelliptiques de rang 1 (c'est-à-dire des surfaces de PICARD) correspondant à un tableau normal de périodes

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g' \end{matrix}$$

qui peut être assigné à priori (en satisfaisant à l'inégalité classique); b) que des surfaces de PICARD, correspondant à un même tableau, peuvent être transformées birationnellement l'une dans l'autre.

Ainsi on peut résumer les résultats obtenus en énonçant le théorème suivant:

Que l'on se donne une surface de Jacobi F et une transformation périodique de seconde espèce d'ordre δ, de F; l'involution I_δ engendrée sur F par cette transformation, est représentée par une surface F_δ qui est une surface de Picard de diviseur δ.

Réciproquement, toute surface de Picard F_δ de diviseur δ admet comme transformée rationnelle une surface de Jacobi F ($\delta = 1$), de façon qu'à un point de F_δ correspondent sur F δ points homologues par rapport à une transformation périodique de seconde espèce et à ses puissances.

REMARQUE. – Au lieu de considérer sur F le groupe cyclique engendré par une transformation périodique

$$u' \equiv u$$
$$v' \equiv v + \frac{1}{\delta},$$

on peut considérer le groupe engendré par deux transformations

$$u' \equiv u \qquad u' \equiv u + \frac{1}{\delta}$$

$$v' \equiv v + \frac{1}{\delta}, \qquad v' \equiv v .$$

De même que par le premier groupe cyclique on définit sur F une involution I_δ, d'ordre δ, par ce second groupe on définit sur F une involution I_{δ^2}, d'ordre δ^2. Celle-ci vient représentée aussi par une surface de PICARD F'. Mais les intégrales de F' admettent les périodes normales

$$\begin{matrix} 1 & 0 & \delta g & \delta h \\ 0 & 1 & \delta h & \delta g' \end{matrix}$$

de façon que F' est une nouvelle surface de JACOBI (de diviseur 1) (5).

Il est intéressant de remarquer que la surface de PICARD F_δ correspondant à l'involution I_δ, est une transformée rationnelle de la surface de JACOBI F, et qu'il y a entre F', F_δ une correspondance $[1, \delta]$ sans points de diramation sur F'.

On obtient ainsi une construction des surfaces de PICARD, en quelque sorte réciproque à celle que nous avons développée au n. 11: *Toute surface de Picard F_δ de diviseur δ, est une transformée rationnelle d'une surface de Jacobi F, qui correspond à une involution d'ordre δ sur F_δ; ainsi F_δ vient représentée sur une surface de Jacobi comptée δ fois sans points de diramation.*

13. *Les surfaces de Picard considérées comme des surfaces qui admettent un groupe de transformations en elles-mêmes.* – D'après notre construction des surfaces de PICARD F_δ (n. 11), les propriétés des involutions I_δ appartenant à une surface de JACOBI [propriétés que nous avons indiquées par a), b) au n. 10] se traduisent en les propriétés suivantes.

---

(5) Il est essentiel de remarquer que, d'après les nn. 2, 3, le diviseur Δ et le rang r de F résultent en effet $\Delta = 1$, $r = 1$, et cela parce qu'en ces définitions on se rapporte toujours à des périodes primitives. Il n'en serait pas ainsi si l'on se rapportait aux périodes

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{matrix}$$

car on aurait alors

$$r = \delta^2 .$$

Mais ces périodes ne sont pas primitives puisque les intégrales correspondantes admettent les périodes simultanées $[1/\delta, 0][0, 1/\delta]$.

Toute surface F_δ hyperelliptique de rang 1, admet deux séries ∞^2 de transformations birationnelles en elles-mêmes, qui seront désignées comme des transformations de première et de seconde espèce. Les transformations de première espèce sont périodiques d'ordre 2; celles de seconde forment un groupe continu de transformations permutables.

D'ailleurs, étant donnée la représentation paramétrique de F_δ par les intégrales U, V, les transformations de première et de seconde espèce de F_δ en elle-même, résultent définies par les formules

$$U' + U \equiv \text{const.}$$

$$V' + V \equiv \text{const.},$$

et respectivement

$$U' - U \equiv \text{const.}$$

$$V' - V \equiv \text{const.}$$

de même que dans le cas de la surface de JACOBI (n. 8).

Or M. PICARD a établi le théorème suivant:

Toute surface algébrique qui admet un groupe continu permutable ∞^2 *de transformations birationnelles en elle-même, opérant sur les points de la surface d'une manière transitive, est une surface hyperelliptique de rang* 1 *ou une dégénérescence* (surfaces rationnelles ou réglées elliptiques).

C'est même à cause de ce théorème qu'on a donné aux surfaces en question le nom de *surfaces de Picard.*

L'énoncé qui précède ne diffère de celui de M. PICARD que par l'introduction du mot « rang », d'après la definition du n. 3.

14. *Sur les conditions pour qu'une surface soit hyperelliptique de rang* 1. *Théorème de M. Picard.* – Les surfaces de PICARD F_δ jouissent des propriétés suivantes:

a) Il y a *deux* intégrales simples de première espèce attachées à F_δ; nous les avons désignées par U, V.

b) Il y a *une* intégrale double de première espèce

$$\iint dU\, dV,$$

c'est-à-dire que le genre de F_δ est

$$p_g = 1.$$

En désignant par m l'ordre de F_δ il y aura donc une surface adjointe φ_{m-4} d'ordre $m-4$.

c) La surface φ_{m-4} adjointe à F_δ coupe celle-ci, hors de la courbe double, suivant des *courbes exceptionnelles*, qui peuvent manquer, et que l'on peut toujours faire disparaître par une transformation de la surface.

Outre que par le raisonnement analytique de M. PICARD, la propriété c) peut être justifiée géométriquement de la façon suivante. On remarquera d'abord qu'elle subsiste pour la surface de JACOBI F ($\delta = 1$): en effet en se rapportant au modèle défini au n. 5, l'adjointe φ_{m-4} coupera F suivant la ligne exceptionnelle qui correspond à la g_2^1 de la courbe de genre deux, dont F représente les couples. Mais, d'après la construction du n. 11, la même propriété subsistera pour toute F_δ, quel que soit δ; en effet à une courbe non exceptionnelle découpée sur F_δ par son adjointe, répondrait une courbe analogue sur la surface de JACOBI, qui est une transformée rationnelle de F_δ (6).

Or c'est une circonstance de la plus haute importance que les propriétés a), b), c) des surfaces F_δ suffisent à caractériser la famille de ces surfaces. On a en effet *le théorème de M. Picard* que nous énoncerons sous la forme suivante:

Toute surface d'ordre m et de genre $p_g = 1$, qui possède deux intégrales simples de première espèce et qui n'est pas découpée par son adjointe d'ordre $m-4$ en dehors des courbes exceptionnelles, est une surface hyperelliptique de rang 1.

M. PICARD a établi ce théorème en 1885; il est revenu sur le même sujet en 1889 et enfin en 1906 dans le « Traité » écrit en collaboration avec M. SIMART (7).

La dernière démonstration du théorème est particulièrement simple et il suffira de la rappeler ici dans ses grandes lignes; on aura ainsi l'occasion de mettre en lumière explicitement comment les surfaces hyperelliptiques définies par les propriétés a), b), c) peuvent avoir un diviseur $\delta \geqslant 1$.

En supposant que la surface donnée possède deux intégrales simples de première espèce U, V, celles-ci auront 4 couples de périodes. Effectuons sur ces périodes une substitution linéaire convenable à coefficients entiers, substitution dont le déterminant δ sera $\geqslant 1$, et ajoutons une transformation linéaire sur les intégrales, de façon à ramener les périodes de U, V au tableau

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{matrix}.$$

(6) Voir la note à pag. 358.

(7) Voir ce Traité, t. II, pagg. 453-456.

Ce tableau correspond à une surface de JACOBI F, que l'on peut supposer dépourvue de courbes exceptionnelles; et il est aisé de reconnaître que la surface donnée F_δ est une transformée rationnelle de F. F_δ se trouve représentée ainsi sur la *surface F comptée δ fois, sans points de diramation.*

Il en résulte (Remarque au n. 12) que F_δ est une surface hyperelliptique de rang 1 et de diviseur δ.

Il est à remarquer que la condition c) que nous avons énoncée parmi les propriétés caractéristiques de F_δ, joue un rôle essentiel; si on la laisse tomber, F_δ sera encore représentée sur la surface de JACOBI F comptée δ fois, mais on trouvera sur F une courbe de diramation (qui résultera elliptique) à laquelle correspondra une courbe non exceptionnelle découpée sur F_δ par son adjointe d'ordre $m-4$.

En ce cas F_δ ne serait pas une surface hyperelliptique. Mais on peut démontrer qu'elle serait une surface elliptique, c'est-à-dire une surface douée d'un groupe elliptique ∞^1 de transformations en elle-même (ENRIQUES).

15. *Rappel de notions appartenant à la théorie des surfaces algébriques.* – Pour achever le tableau des propriétées des surfaces de PICARD, il nous conviendra de rappeler quelques notions empruntées à la théorie géométrique des surfaces algébriques [8].

D'abord on définit pour toute surface les invariants désignés respectivement par p_a, p_g, P_i ($i = 2, 3, \ldots$). p_a désigne le *genre numérique*; p_g le *genre géométrique*; P_i le *genre d'ordre i* ($P_1 = p_g$), c'est-à-dire le nombre des courbes i fois canoniques linéairement indépendantes de la surface.

On a ensuite à considérer le *genre linéaire* (virtuel) $p^{(1)}$, c'est-à-dire une certaine expression arithmétique du genre des courbes canoniques; cette expression sera rapportée à la surface elle-même si celle-ci ne renferme pas des courbes exceptionnelles; dans le cas contraire elle sera rapportée à une surface transformée dépourvue de courbes exceptionnelles; d'après MM. CASTELNUOVO et ENRIQUES cette transformée existe toujours, si la surface donnée n'appartient pas à la famille des réglées.

L'ordre de la courbe canonique d'une surface n'est pas un invariant de celle-ci; mais si, étant $p_g = 1$, cet ordre est égal à zéro (en faisant toujours abstraction des courbes exceptionnelles), cette propriété est invariant par rapport aux transformations birationnelles.

En ce cas la surface jouit de propriétés remarquables.

---

[8] Voir les travaux de M. NOETHER et de M. ENRIQUES, ou la note expositive de MM. CASTELNUOVO et ENRIQUES qui se trouve à la fin du *Traité des fonctions algébriques de deux variables* de MM. PICARD et SIMART.

Rapportons-nous à une surface de la classe qui soit dépourvue de courbes exceptionnelles; soit m l'ordre de la surface et π le genre des sections planes; on a toujours

$$m = 2\pi - 2 .$$

Sous une forme plus générale: Si l'on a sur cette surface un système linéaire $|C|$ de courbes C de genre π, celles-ci se coupent deux à deux en

$$m = 2\pi - 2$$

points (c'est-à-dire que m est le *degré* du système).

Mais on en a davantage: le groupe des m points communs à deux courbes C est un *groupe canonique* sur chacune de ces courbes.

C'est ce qu'on exprime en disant que la *série caractéristique* g_m découpée sur une courbe C par les autres courbes du système, est la *série canonique* de C, ou une partie de celle-ci. Si le système $|C|$ appartient à un système continu non linéaire, les courbes infiniment prochaines à C, contenues dans le système, coupent sur C des groupes de la même série caractéristique; c'est de cette façon que M. SEVERI définit la série caractéristique sur C, même dans le cas où le système linéaire $|C|$ ait la dimension égal à zéro.

Une surface de genre $p_g = 1$, dont la courbe canonique a l'ordre zéro, a le genre linéaire $p^{(1)} = 1$; elle ne renferme pas des courbes i fois canoniques, quel que soit i, de sorte que:

$$P_i = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Cette dernière propriété sert à definir la famille des surfaces de genre $p_g = 1$ dont la courbe canonique a l'ordre 0; en effet on a le théorème suivant (9):

Toute surface dont les genres d'ordre 1 *et* 4 *sont égaux à l'unité*

$$(p_g = P_4 = 1)$$

a une courbe canonique d'ordre 0; *le genre numérique de la surface est*

$$p_a = 1 \qquad ou \qquad p_a = -1 .$$

(9) Cfr. ENRIQUES, « Rendic. del Circolo mat. di Palermo », 1905 [questo volume, XXXVII] e « Rendic. Accademia di Bologna », Decembre 1906 [questo volume, XLI].

16. *Les surfaces de Picard caractérisées par leurs nombres invariants.* – D'après les notions que nous venons de rapporter, on peut transformer le théorème de M. PICARD (n. 14) de la façon suivante:

Rappelons d'abord que le nombre des intégrales de première espèce attachées à une surface, est $p_g - p_a$; c'est là un résultat connu auquel ont amené récemment les recherches établies par M. PICARD d'un côté, par MM. SEVERI, ENRIQUES et CASTELNUOVO de l'autre côté.

Alors les conditions a), b), c) du n. 14 se traduiront par les égalités

$$p_g = 1\,, \qquad p_g - p_a = 2\,, \qquad P_4 = 1\,.$$

On aura donc le théorème suivant (qui a été donné par M. ENRIQUES dans le Mémoire cité du Circolo di Palermo):

Les conditions pour qu'une surface soit hyperelliptique de rang 1 *sont exprimées par les égalités*

$$p_a = -1\,, \qquad p_g = P_4 = 1\,.$$

17. *Courbes appartenant à une surface de Picard: courbes rationnelles.* – On a la proposition suivante:

Une surface de Picard ne saurait renfermer une courbe rationnelle qui ne soit pas exceptionnelle.

Soit

$$F_\delta(x, y, z) = 0$$

une surface de PICARD d'ordre m.

Il y a deux intégrales simples de première espèce u, v et l'on a

$$du = \frac{B\,dx - A\,dy}{F'_z}\,, \qquad dv = \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{F'_z}\,;$$

A, B, A_1, B_1 désignent ici des polynomes liés par l'identité de M. NÖTHER

$$AB_1 - A_1B = F'_z \cdot Q(x, y, z)\,,$$

Q étant le polynome d'ordre $m - 4$ adjoint à F_δ.

Or si F_δ renferme une courbe rationnelle E, on a sur E

$$B\,dx - A\,dy = 0\,,$$

$$B_1\,dx - A_1\,dy = 0\,,$$

et par conséquent

$$AB_1 - A_1B = 0 .$$

Mais comme on peut supposer que E n'ait aucune relation particulière avec les axes coordonnés, on en déduit

$$Q(x, y, z) = 0 .$$

Or, en général, Q coupe F suivant une courbe composée de courbes exceptionnelles et de la courbe canonique qui, en ce cas, est d'ordre zéro. D'après la relation précédente on en déduit que E est une courbe exceptionnelle de F_δ, ce qu'il fallait démontrer.

Convention. – Dans la suite en raisonnant de courbes appartenant à une surface F_δ *nous nous rapporterons toujours à des surfaces dépourvues de courbes exceptionnelles* (n. 15); *ces surfaces ne renfermeront donc pas des courbes rationnelles.*

18. *Courbes elliptiques. – La surface de Picard F_δ peut renfermer une courbe elliptique C; en ce cas C appartient à un faisceau elliptique de courbes analogues, et il y a sur F_δ un second faisceau elliptique de courbes elliptiques.*

Supposons que F_δ renferme une courbe elliptique C; si celle-ci appartient à une série continue, le degré de la série sera égal à zéro ($m = 2\pi - 2$); en conséquence C ne saurait appartenir à une série qui ne soit pas un faisceau.

Transformons C par les ∞^2 transformations de seconde espèce de F_δ (n. 13); comme C ne peut admettre que ∞^1 transformations birationnelles en elle-même, on aura ∞^1 courbes transformées de C, qui formeront un faisceau.

Il y aura *une* intégrale simple de première espèce attachée à F_δ, c'est-à-dire une combinaison linéaire $\lambda u + \mu v$ des deux intégrales u, v, qui demeure constante le long des courbes du faisceau; on en déduit que le faisceau est elliptique.

L'intégrale $\lambda u + \mu v$ aura deux périodes distinctes; d'après MM. PICARD et POINCARÉ, à côté de cette intégrale réductible, il y en aura une autre associée, à laquelle correspond un second faisceau elliptique de courbes elliptiques de niveau.

Les deux faisceaux que nous venons de considérer, sont formés par les trajectoires de deux sous-groupes algébriques ∞^1 renfermés dans le groupe des transformations de seconde espèce de F_δ.

REMARQUE. – On voit que la surface de PICARD correspondant à des modules généraux, ne renferme pas des courbes elliptiques.

Parmi les surfaces de JACOBI renfermant des courbes elliptiques, il y a la *surface particulière* dont les points correspondent aux couples de points choisis sur deux courbes de genre un. Cette surface vient caractérisée par la propriété de renfermer *deux faisceaux elliptiques de courbes elliptiques se coupant en un seul point.*

19. *Si une surface de Picard renferme un faisceau irrationnel de courbes, le faisceau est elliptique et les courbes sont de même elliptiques.* – On établit aisément que le faisceau est elliptique, en remarquant qu'il ne peut y avoir qu'*une* intégrale qui demeure constante le long de ses courbes.

On reconnait que ces courbes C sont de genre $\pi = 1$ d'après le n. 15, puisque le faisceau étant irrationnel ne peut pas avoir des points base (CASTELNUOVO-ENRIQUES), et par conséquent deux courbes C se coupent en $m = 2\pi - 2 = 0$ points.

20. *Courbes de genre deux.* – Nous avons remarqué qu'une surface de PICARD F_δ ne renferme pas en général des courbes elliptiques. Au contraire on construit sur F_δ des courbes de genre deux par le procédé suivant:

Considérons sur F_δ un système linéaire complet de courbes K de genre π; ce système $|K|$, qui est l'adjoint de lui-même, aura la dimension $\pi - 2$ (théorème de RIEMANN-ROCH pour la surface F_δ); ainsi en imposant aux courbes K de posséder $h = \pi - 2$ points doubles, on obtiendra un nombre fini de courbes de genre deux, renfermées dans le système $|K|$.

Or toute courbe C de genre deux, appartenant à F_δ et douée de h points doubles, est amenée par les ∞^2 transformations de seconde espèce, en ∞^2 courbes birationnellement identiques; nous allons prouver que ces courbes forment un système, que nous désignerons pas Σ_{h+1}, dont les éléments correspondent d'une façon biunivoque aux points de la surface F_δ.

Comme les points de F_δ correspondent biunivoquement aux transformations du groupe continu qui appartient à la surface (voir le n. 8), il suffira de prouver qu'il y a une seule transformation de seconde espèce amenant une courbe C en un'autre courbe du système Σ_{h+1}; cela revient à dire que: *toute transformation de seconde espèce de F_δ qui laisse invariant la courbe C, se réduit à l'identité.*

Soit en effet

$$(\tau) \quad \begin{cases} u' - u = \lambda, \\ v' - v = \mu \end{cases}$$

une transformation de seconde espèce de F_δ qui ramène en elle-même

la courbe C. Il s'agit de prouver que

$$\lambda = \mu = 0 .$$

Considérons sur C la série canonique g_2^1 et désignons par h, k les sommes des valeurs des intégrales u, v, aux points d'un couple de cette série; les points conjugués par rapport à la g_2^1 seront conjugués par rapport à la transformation de première espèce:

$$(\omega) \begin{cases} u + u' = h , \\ v + v' = k . \end{cases}$$

En multipliant les deux transformations on obtient une transformation de première espèce:

$$(\tau\omega) \begin{cases} u + u' = \lambda + h , \\ v + v' = \mu + k . \end{cases}$$

Or, d'après le théorème d'ABEL, si λ, μ étaient différents de zéro, les points de C conjugués par rapport à $(\tau\omega)$ résulteraient conjugués en une nouvelle g_2^1, qui devrait ainsi exister sur C. Mais comme C renferme une seule série linéaire de seconde ordre, qui est la g_2^1 canonique, on en conclut que

$$\lambda = \mu = 0 .$$

REMARQUE. – Nous venons de prouver que toute courbe de genre deux sur F_δ, appartient à un système qui est transformé en lui-même par les ∞^2 transformations de seconde espèce, système birationnellement identique à la surface F_δ.

Il est aisé de reconnaître que ce système est transformé en lui-même par les ∞^2 transformations de première espèce. Il suffit à cet effet de rappeler ce que nous avons déjà remarqué, que, étant donnée une courbe de genre deux, C, il y a une transformation de première espèce de F_δ qui laisse invariant la courbe C, et par rapport à laquelle sont conjugués les couples de points de la g_2^1 de C.

21. *Systèmes Σ appartenant à une surface de Jacobi.* – D'après la construction du n. 5, une surface de JACOBI F, dont les points correspondent aux couples d'une courbe f de genre deux, irréductible, renferme toujours des courbes de genre deux irréductibles qui n'ont pas des points doubles (hors de la courbe double de F).

En effet on obtient sur F une telle courbe, en considérant les ∞^1 couples qui ont un point fixe sur f.

Soit C une courbe de genre deux irréductible et dépourvue de points doubles, tracée sur F. Il y a un système ∞^2 Σ $(= \Sigma_1)$ de courbes analogues, auquel C appartient (n. 20); les courbes C se coupent deux à deux en 2 points (2 est le *degré* de Σ), et la série caractéristique, découpée sur une C par les courbes infiniment prochaines du même système, est la g_2^1 canonique de C (n. 15). Comme cette série est complète, il s'ensuit que le système Σ n'est pas renfermé en un système continu plus ample de courbes du même ordre.

Il est aisé d'évaluer le nombre des courbes C de Σ qui passent par deux points de F; ce nombre, qu'on appelle l'*indice* de Σ, est égal à 2.

En effet la surface F ne saurait pas renfermer un système de degré 2 et d'indice > 2, sans être rationnelle.

C'est là une conséquence d'un théorème bien connu de MM. HUMBERT et CASTELNUOVO, que M. CASTELNUOVO a mis explicitement en lumière [10].

En résumant les résultats obtenus, on aura le théorème suivant:

Toute surface de Jacobi, correspondant à une courbe de genre deux irréductible, renferme un système ∞^2 Σ *de courbes de genre deux irréductibles sans points doubles; ce système, qui est transformé en lui-même par les* ∞^2 *transformations de première et de seconde espèce, a le degré* 2 *et l'indice* 2.

Fait exception la surface de JACOBI particulière renfermant deux faisceaux de courbes elliptiques qui se coupent en un point; c'est la surface correspondant au cas où la courbe de genre deux se décompose en deux courbes elliptiques (n. 5).

REMARQUE. – Nous avons vu que, en considérant la surface de JACOBI F qui correspond point par couple à une courbe f de genre deux, on obtient sur F une courbe de genre deux représentant les couples de f qui renferment un même point. On construit de cette façon ∞^1 courbes de genre deux qui ont un point fixe; eh bien, cette série ∞^1 de courbes sera contenue en une série complète ∞^2 qui constituera sur F un système Σ de degré et d'indice 2.

Ainsi que nous le verrons dans la suite, le système Σ obtenu sur F, est le seul système de degré et d'indice 2 appartenant à F, lorsque f a des modules généraux. Pour des modules particuliers il peut y avoir sur F plusieurs systèmes Σ doués des mêmes caractères.

22. – Il y a lieu maintenant de montrer que:

L'existence d'un système ∞^2 Σ *de courbes de genre deux, ayant aussi le degré et l'indice égaux à deux, est une propriété caractéristique de la surface de Jacobi.*

---

[10] « Atti della R. Acc. di Torino », 1893.

En effet si une surface F renferme un tel système Σ de courbes C, il est aisé de construire une courbe de genre deux qui correspond couple par point à F.

Considérons les courbes C passant par un point fixe P de F, et choisissons en particulier une de ces courbes C. Toute C par P coupe C en un point hors de P, et par tout point de C passe une courbe C qui contient aussi P.

Or par un point quelconque de F passent deux courbes C renfermant P, qui coupent C, hors de P, en deux points; réciproquement étant donnés deux points sur C, ceux-ci détermineront avec P deux courbes C se coupant en un point de F.

De cette façon les points de F viennent correspondre aux couples de points de la courbe C, ce qu'il fallait démontrer.

REMARQUE. – Il a été implicitement reconnu, en effectuant la construction précédente, que toute courbe C de Σ est birationnellement identique à la série Γ des C, qui passent par un point P de F.

La correspondance point par couple entre F et Γ est établie de la façon suivante: deux courbes C de Γ se coupent hors de P en *un* point X; réciproquement tout point X appartient à deux courbes C de Γ.

On sait que la variété Γ, de genre deux, renferme une série canonique g_2^1; eh bien, les C de Γ qui forment un couple de cette g_2^1 sont les courbes C *qui ont un contact en* P.

Ainsi la variété Γ vient représentée sur le continuum rationnel constitué par les points infiniment prochains à P à compter deux fois; et il y a 6 *points de diramation*, c'est-à-dire que, parmi les ∞^1 couples de courbes C se touchant en P, il y en a 6 qui sont constitués par des courbes coïncidantes.

23. *Remarque concernant une certaine dualité.* – D'après une propriété générale établie au n. 20, un système Σ constitué par ∞^2 courbes de genre deux sur une surface F_δ est birationnellement identique à cette surface; cela signifie que si l'on représente les éléments (courbes) de Σ par une surface F', on pourra passer de F à F' par une transformation birationnelle.

Nous allons étudier de plus près la correspondance remarquable entre points et courbes que l'on obtient ainsi, lorsque, F étant une surface de JACOBI, on considère le système Σ de degré et d'indice 2, que nous venons de définir.

On a par construction qu'à tout point de F' correspond sur F *une* courbe C de Σ et réciproquement. Mais si l'on considère les ∞^1 courbes C issues par un point P de F, on aura qu'à ces courbes répondent des points décrivant sur F' une courbe C' que l'on regardera comme homo-

logue au point P. Or les ∞^2 courbes définies ainsi sur F', formeront un certain système Σ', et l'on voit de suite que le degré de Σ' est l'indice de Σ et l'indice de Σ' est le degré de Σ; par conséquent ces nombres sont égaux à 2. Il s'ensuit (n. 15) que le genre des courbes C' est aussi égal à 2; c'est ce qu'on peut reconnaître aisément d'une façon directe, parce que la série des courbes C issues par un point P de F, est birationnellement identique à une courbe quelconque C de la même série (Remarque au n. 22).

Le système Σ' étant parfaitement analogue au système Σ de F, ces remarques nous amènent à établir une sorte de *principe de dualité* liant les propriétés des surfaces F, F', ou si l'on aime mieux, liant les propriétés de la surface F et de la variété Σ.

Cette dualité consiste en ce qu'à toute propriété de F répond une propriété correlative où l'on remplace les points par les courbes d'un système Σ de degré et d'indice 2, et réciproquement.

24. *Autres remarques concernant les courbes de genre deux sur une surface de Jacobi.* – Nous avons remarqué qu'une surface de JACOBI F renferme un système $\infty^2\Sigma$ de courbes C de genre deux, sans points doubles. Hors de Σ il y aura d'autres courbes K de genre deux; nous allons montrer que K doit couper les courbes C de Σ en plus que deux points. C'est dire qu'on a le théorème suivant:

Toute courbe K de genre deux coupant les courbes C d'un système Σ en deux points, appartient à ce système.

Pour le démontrer remarquons d'abord que K ne saurait toucher toutes les ∞^2 courbes C, car il s'ensuivrait que les ∞^1 C issues par un point de K n'auraient pas des intersections variables.

Ceci posé, considérons une série $\infty^1\Gamma$ de C passant par un point P de K et ne touchant pas K.

Si K n'appartient pas à la série Γ, pour tout point M variable sur K il y a *deux* C de la série Σ; réciproquement toute courbe C de Γ coupe K en *un* point variable. Ainsi on obtient une correspondance $[1, 2]$ entre la courbe K et la série algébrique $\infty^1\Gamma$. Mais la série Γ a le genre deux puisqu'elle correspond élément par élément à une courbe C de Γ); ainsi la conclusion obtenue vient contredire un théorème connu de WEBER, d'après lequel, étant données deux variétés algébriques ∞^1 de genre deux (ou du même genre supérieur à deux) toute transformation entre elles qui soit rationnelle dans un sens, est rationnelle aussi dans le sens inverse.

Cette contradiction prouve que la courbe K appartient à la série Γ des courbes C, c'est-à-dire qu'elle est une courbe C; ce qu'il fallait démontrer.

25. *Système Σ_δ appartenant à une surface de Picard F_δ.* – Considérons maintenant une surface F_δ (de diviseur $\delta > 1$) comme représentant une involution cyclique I_δ, qui appartient à une surface de JACOBI F (n. 11).

Il y a sur F un système $\infty^2 \Sigma$ constitué par des courbes C de genre deux sans points doubles; cherchons les caractères des courbes qui correspondent aux C sur F_δ. D'abord ce seront des courbes de genre deux; mais il est aisé de reconnaître qu'elles aurons $\delta - 1$ points doubles.

En effet à une C sont conjuguées, par rapport à I_δ, $\delta - 1$ courbes du même système Σ, qui coupent la C donnée en $\delta - 1$ couples; à chacune de celles-ci correspond un point double de la courbe homologue à C sur F_δ, courbe que nous désignerons par C_δ.

Or les ∞^2 courbes C_δ que l'on construit analoguement sur F_δ, formeront un système Σ_δ qui (d'après un théorème de M. ENRIQUES) sera renfermé en un système $\infty^{\delta+1}$ de courbes du même ordre et de genre $\delta + 1$, système constitué par ∞^2 systèmes linéaires dont le degré sera égal à 2δ (n. 15).

Évaluons les caractères du système Σ_δ.

D'abord son degré, c'est-à-dire le nombre des points communs à deux courbes C_δ, sera égal à 2δ.

L'indice de Σ_δ est aussi 2δ. En effet considérons deux points A, B de F_δ; à ceux-ci correspondent sur F deux groupes de points $A_1, A_2, \ldots, A_\delta$, $B_1, B_2, \ldots, B_\delta$ et il y a $2\delta^2$ courbes C renfermant un point A_s ($s = 1, 2, \ldots$) et un point B_t ($t = 1, 2, \ldots$); mais ces $2\delta^2$ courbes C se partagent en 2δ groupes, chaque groupe étant constitué par δC conjuguées par rapport à l'involution I_δ; il s'ensuit qu'il y a sur F_δ 2δ courbes C_δ passant par A et B.

En résumant, *toute surface de Picard, de diviseur δ, renferme un système $\infty^2 \Sigma_\delta$ de courbes de genre deux irréductibles douées de $\delta - 1$ points doubles, système dont le degré et l'indice sont égaux à 2δ.*

Fait exception le cas des surfaces F_δ renfermant deux faisceaux de courbes elliptiques qui se coupent en δ points; en ce cas F_δ représente une involution I_δ sur une surface de JACOBI particulière (admettant deux faisceaux de courbes elliptiques unisécantes) de sorte que *les courbes du système Σ_δ dégénèrent* en des couples de courbes elliptiques choisies dans les deux faisceaux.

REMARQUE. – Néanmoins, même en ce cas, le système $\infty^{\delta+1}$ de courbes de genre $\delta + 1$ qui renferme Σ_δ, est composé par des courbes généralement irréductibles.

26. *Courbes de genre quelconque appartenant à une surface de Jacobi de modules généraux.* – Nous avons reconnu que toute surface de JACOBI générale, F, renferme un système continu ∞^2 de courbes de genre deux

sans points doubles; ce système, que nous avons appelé Σ, a le degré et l'indice égaux à 2.

Or les groupes de n (>1) courbes C de Σ seront renfermés en un système continu ∞^{n^2+1} de courbes irréductibles, système qu'on pourra désigner par $[nC]$ et que l'on appellera multiple de $\Sigma \equiv [C]$ suivant le nombre n.

Le système $[nC]$ sera aussi transformé en lui-même par les transformations de première et de seconde espèce de la surface; il sera constitué de ∞^2 systèmes linéaires $|nC|$ de genre n^2+1, de degré $2n^2$ et de dimension n^2-1.

REMARQUE. – Il est intéressant pour la suite de montrer que: *tout système $|nC|$ est invariant vis-à-vis des transformations cycliques de seconde espèce, d'ordre n, de la surface F.*

C'est ce qu'on prouve de la manière suivante: soit π une transformation de seconde espèce, périodique d'ordre n; toute courbe C de Σ est amenée par π en $n-1$ courbes homologues, qui avec la première forment un certain groupe nC; on obtient ainsi ∞^2 groupes, invariant vis-à-vis de π, et dont deux quelconques n'appartiennent pas au même système linéaire; ces groupes définissent donc les ∞^2 systèmes linéaires complets $|nC|$ de la série $[nC]$, et l'on voit ainsi que tous ces systèmes $|nC|$ sont invariant par rapport à π, C. Q. F. D.

Sans nous arrêter davantage sur cette remarque, rappelons que l'on a le théorème suivant:

Les modules de la surface F ayant des valeurs générales, toute courbe appartenant à F est renfermée en un système $[nC]$ de courbes du même ordre.

C'est là une conséquence immédiate d'un théorème établi par M. SEVERI [11]. Ainsi que nous l'expliquerons tout à l'heure, cette propriété correspond aussi à un fait connu de la théorie des fonctions abéliennes.

Il en découle en particulier que *la surface de Jacobi ne renferme en général qu'un seul système de courbes de genre deux sans points doubles.*

27. *Courbes de genre quelconque appartenant à une surface de Picard de modules généraux.* – Nous nous proposons d'étendre le théorème rappelé ci-dessus aux surfaces F_δ de diviseur $\delta > 1$.

Nous savons que F_δ renferme ∞^2 courbes C_δ de genre deux, qui sont contenues dans un système continu $\infty^{\delta+1}[C_\delta]$ de genre $\delta+1$ et de degré 2δ, constitué par ∞^2 systèmes linéaires.

Nous voulons établir le théorème suivant:

Toute courbe appartenant à une surface F_δ de modules généraux, est renfermée en un système $[nC_\delta]$ de courbes du même ordre, c'est-à-dire en

[11] « Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino », t. 54, s. II, 1903, n. 23.

un système multiple de $[C_\delta]$ suivant un certain nombre n choisi d'une façon convenable.

Nous considérerons F_δ comme représentant une involution cyclique I_δ sur une surface de JACOBI F de modules généraux (n. 11). Les C_δ de F_δ correspondent aux courbes C engendrant le système Σ de F.

Soit K une courbe quelconque de F_δ et $|K|$ le système linéaire complet auquel elle appartient.

A $|K|$ correspond sur F un système linéaire $|K'|$, qui sera contenu totalement dans le système continu $[sC]$, pour une certaine valeur de s; cette valeur a la signification suivante: *le degré de* $|K|$ *est*

$$\frac{2s^2}{\delta}.$$

Il faut remarquer que $|K'|$ ne sera pas un système linéaire complet; en effet les courbes K' satisfont à la condition d'être transformées en elles-mêmes par la transformation cyclique de seconde espèce π, qui engendre l'involution I_δ; en laissant tomber cette condition on trouvera un système linéaire plus ample $|sC|$ renfermant $|K'|$. La seule chose qu'on peut affirmer, c'est que $|K'|$ est un système linéaire *complet par rapport à l'involution* I_δ, c'est-à-dire qu'il n'y a pas en $|sC|$ un système lineaire plus ample de $|K'|$ qui soit transformé en lui-même par π et qui renferme $|K'|$.

Ceci posé, considérons une transformation périodique de seconde espèce, ω, d'ordre s, engendrant une involution cyclique; on peut supposer que ω soit choisie de telle façon qu'il n'y ait pas des puissances communes à π, ω.

Or nous savons que ω transforme en lui-même notre système linéaire complet $|sC|$ ainsi que tout autre système de la série ∞^2 constituant $[sC]$ (n. 26); en outre ω transforme en elle-même l'involution I_δ; par conséquent ω transformera en lui-même le système linéaire $|K'|$ qui, étant renfermé en $|sC|$, est complet par rapport à I_δ.

Passons à la surface F_δ. La transformation ω de F étant permutable avec π, donne lieu à une transformation de seconde espèce $\overline{\omega}$ périodique d'ordre s, sur F_δ; le système linéaire $|K|$ vient transformé en lui-même par $\overline{\omega}$.

On en déduit qu'il y a en $|K|$ des courbes unies par rapport à $\overline{\omega}$, se partageant en un certain nombre de systèmes linéaires; nous considérerons un de ces systèmes $|\overline{K}|$, de dimension $\geqslant 0$.

Soit I_s l'involution cyclique d'ordre s engendrée par $\overline{\omega}$ sur F_δ et soit F_h la surface hyperelliptique (ayant un certain diviseur h) qui représente I_s.

Au système $|\overline{K}|$ de F_δ correspond sur F_h un système linéaire de courbes dont le degré s'obtient de celui de $|\overline{K}|$ en le divisant par s; le degré du système obtenu sur F est donc

$$\frac{2s}{\delta}.$$

Or ce degré doit être un nombre entier pair (voir n. 15); par conséquent *s est divisible par δ.*

En posant

$$s = n\delta,$$

on aura donc sur F, que $|K'|$ appartient à $[n\delta C]$, et sur F_δ que $|K|$ appartient totalement à $|nC_\delta|$, C. Q. F. D.

28. *Rapprochement entre les résultats qui précèdent et la théorie des séries Θ. Représentation des courbes tracées sur une surface de Jacobi.* – Il y a lieu de rapprocher les résultats que nous venons d'établir, à quelques théorèmes connus de la théorie des fonctions abéliennes.

Nous commençons à rappeler les notions suivantes sur les *séries Θ* et sur les *fonctions intermédiaires.*

Soit un système de périodes normales

$$(1) \qquad \begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{cases}$$

satisfaisant à l'inégalité classique $g_1 g_1' > h_1^2$, g_1, h_1, g_1' étant les parties imaginaires des périodes g, h, g'.

On suppose ordinairement que g_1, et par conséquent g_1', soient positifs, ce qu'on peut toujours obtenir en changeant au besoin les signes de g, h, g' simultanément.

Une *fonction thêta* relative au tableau (1), est définie par les conditions fonctionnelles

$$(2) \qquad \begin{cases} \Theta(u+1, v) = \Theta(u, v+1) = \Theta(u, v) \\ \Theta(u+g, v+h) = \Theta(u, v)\, e^{-2\pi i l u + v} \\ \Theta(u+h, v+g') = \Theta(u, v)\, e^{-2\pi i l v + v'} \end{cases}$$

(l entier; v, v' constantes données).

Les conditions d'existence d'une telle fonction reviennent aux conditions de convergence de la série qu'on obtient en développant Θ par la formule de FOURIER. On trouve ainsi qu'il doit être $g_1 g_1' > h_1^2$ et que le nombre entier l doit avoir le signe de g_1, c'est-à-dire, dans notre hypothèse, que $l > 0$.

Le nombre l est *l'ordre* de la fonction Θ.

Les exponentielles

$$e^{-2\pi i l u + v}, \qquad e^{-2\pi i l v + v'}$$

sont les *multiplicateurs* de Θ.

On trouve aisément que les fonctions Θ aux mêmes multiplicateurs (c'est-à-dire rélatives aux mêmes valeurs des constantes v, v'), peuvent s'exprimer par des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients constants, de l^2 d'entre elles.

On a aussi, d'après un théorème bien connu de M. POINCARÉ, que deux fonctions Θ d'ordres l, l' ont $2ll'$ zéros communs, incongrus par rapport aux périodes.

Les fonctions Θ peuvent être généralisées en introduisant des fonctions que (d'après une dénomination de BRIOT et BOUQUET) MM. POINCARÉ et HUMBERT ont appelées *fonctions intermédiaires*.

Il s'agit des fonctions se reproduisant par l'addition d'une des périodes 1, 0; 0, 1; g, h; h, g', à un *multiplicateur* près, qui est une exponentielle de première degré $e^{\lambda u + \mu v + \nu}$ [12].

En multipliant une fonction intermédiaire par une exponentielle de seconde degré $e^{au^2 + buv + cv^2 + du + fv}$, on peut disposer des constantes $a, b, \ldots$ de façon que la nouvelle fonction $\varphi(u, v)$ vérifie les relations

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi(u+1, v) = \varphi(u, v), \quad \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v) e^{\theta u} \\ \varphi(u+g, v+h) = \varphi(u, v) e^{\lambda u + \mu v + \nu} \\ \varphi(u+h, v+g') = \varphi(u, v) e^{\lambda' u + \mu' v + \nu'} \end{cases}$$

les θ, λ, μ, ν, λ', μ', ν' étant des constantes.

Pour que ces équations soient compatibles, il faut qu'il existe entre g, h, g' une relation de la forme

$$(4) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

les A, B, C, D, E étant des entiers — premiers entre eux — dépendant des constantes θ, λ, μ, λ', μ'.

---

[12] Voir surtout: POINCARÉ, « American Journal », t. VII, p. 316; « Acta math. », t. 26, pag. 81; HUMBERT, « Journal de Math. », s. V, t. V (1899); t. VI (1900), etc.

Les relations de la forme (4) entre les périodes g, h, g', ont été l'objet de recherches remarquables de M. HUMBERT et dans la suite nous aurons à les considérer par rapport aux transformations birationnelles d'une surface de JACOBI en elle-même.

Nous distinguerons ces relations d'autres relations singulières (à coefficients entiers) qu'on peut avoir entre les périodes, en les appelant *relations de Humbert*.

En exprimant les constantes θ, λ, μ, λ', μ' en fonction des entiers A, B, C, D, E on a les conditions

$$(5)\quad \begin{cases} \varphi(u+1, v) = \varphi(u, v), \qquad \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i D k u} \\ \varphi(u+g, v+h) = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i [lu - (C - Dg)kv] + \nu} \\ \varphi(u+h, v+g') = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i [Aku + (l + Bk + Dkh)v] + \nu'}, \end{cases}$$

où l, k sont deux entiers que M. HUMBERT appelle les *indices* de la fonction φ.

Lorsque $k = 0$, on tombe sur les fonctions Θ d'ordre l.

Si les périodes g, h, g' sont arbitraires, de sorte que la relation (4) soit une identité ($A = B = C = D = E = 0$), la φ se réduit de même à une fonction Θ d'ordre l, c'est-à-dire que *les fonctions intermédiaires n'existent que pour des valeurs particulières des périodes.*

Les conditions d'existence des fonctions intermédiaires correspondant à une relation de HUMBERT, le nombre des fonctions linéairement indépendantes qu'on trouve dans un système de fonctions φ aux mêmes multiplicateurs, et enfin le nombre des zéros communs à deux fonctions φ répondant à une même relation singulière, ont été donnés par M. HUMBERT dans ses mémoires sur les fonctions abéliennes, auxquelles nous renverrons [13].

Ces notions rappelées, nous allons nous occuper de la représentation des courbes tracées sur une surface de JACOBI, représentation que l'on obtient au moyens des fonctions Θ ou des fonctions intermédiaires.

Soit F la surface de JACOBI relative au tableau (1) et u, v les intégrales normales de première espèce attachées à F. Si entre les paramètres u, v on pose l'équation

$$\Theta(u, v) = 0\,,$$

la Θ étant d'ordre l et de multiplicateurs donnés, on obtient une courbe ***algébrique*** appartenant à un système linéaire ∞^{l^2-1}, car entre les $\Theta(u, v)$

[13] Voir en particulier le mémoire dans le « Journal de Math. », 1900, pag. 313.

il y en a l^2 linéairement indépendantes. Ce système linéaire à son tour, est contenu totalement dans un système continu de ∞^2 systèmes linéaires analogues, qui sont représentés par l'équation

$$\Theta(u + \lambda, v + \mu) = 0 ,$$

renfermant deux paramètres λ, μ. On remarquera que le premier membre de cette équation est encore une fonction thêta de u, v; mais elle a des multiplicateurs différents de ceux qui appartiennent à $\Theta(u, v)$.

Le degré du système continu envisagé, est égal au nombre des zéros communs à deux fonctions Θ d'ordre l, c'est-à-dire à $2l^2$. En se rappelant la relation entre le genre et le degré d'un système continu tracé sur F (n. 15), on trouve que le genre de notre système est

$$\pi = l^2 + 1 .$$

En particulier, lorsque $l = 1$, le système continu représenté par l'équation

$$\Theta(u + \lambda, v + \mu) = 0$$

a la dimension, le degré, le genre égaux à 2, c'est-à-dire qu'il est un système Σ (n. 21).

Comme entre les fonctions thêta d'ordre l et de multiplicateurs donnés, il y a aussi la puissance l^{me} d'une fonction thêta de premier ordre ayant des multiplicateurs convenables, on en conclut que:

Le système continu donné par l'équation

$$\Theta(u + \lambda, v + \mu) = 0 ,$$

où la Θ, d'ordre l, renferme l^2 paramètres linéaires et homogènes, est le multiple d'ordre l du système Σ formé par les courbes de zéro des fonctions thêta de premier ordre.

Si l'on ajoute que, pour g, h, g' arbitraires, toute courbe tracée sur F s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta ([14]), on tombe de nouveau sur la conclusion déjà établie au n. 26 que: *Sur une surface de Jacobi à modules généraux il n'y a d'autres courbes algébriques que celles d'un système Σ* (déterminé d'une façon unique) *et de ses multiples.*

Lorsque — pour des valeurs particulières des modules g, h, g' —

([14]) HUMBERT, « Journal de Math. », 1893, pag. 371.

on trouve sur la surface F plusieurs systèmes Σ différents entre eux, il est aisé de reconnaître que toute courbe d'un de ces systèmes, peut être représentée en égalant à zéro une fonction Θ, pourvu que l'on choisisse convenablement les intégrales normales u, v. Il nous sera permis d'omettre la démonstration de ce fait dont nous n'aurons pas besoin dans la suite.

Supposons maintenant qu'on ait fixé le choix des intégrales normales u, v et qu'il s'agisse d'une surface F à modules particuliers. En égalant à zéro une fonction Θ, on aura une courbe appartenant à un système déterminé $\Sigma \equiv [C]$ ou à son multiple d'ordre l, $[lC]$.

Toute autre courbe L de F sera représentée en égalant à zéro une fonction intermédiaire, soit $\varphi(u, v) = 0$.

C'est là un théorème fondamental de M. APPELL [15], qui explique le rôle des fonctions intermédiaires dans l'étude des surfaces de JACOBI à modules particuliers.

On peut ajouter que, si la relation de HUMBERT correspondant à la fonction φ, d'indices l, k, est

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0 ,$$

le système linéaire complet $|L|$ a la dimension

$$r = l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2 - 1 ,$$

le degré $2r + 2$, le genre $r + 2$, et la courbe L coupe en $2l + Bk$ points toute courbe C de Σ.

Le systèmes $|L|$ appartient à une série continue ∞^2 de système linéaires analogues $\varphi(u + \lambda, v + \mu) = 0$.

29. *Représentation des courbes tracées sur une surface F_δ.* – Soit

$$(1) \qquad \begin{Bmatrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g' \end{Bmatrix}$$

le tableau des périodes primitives des intégrales normales u, v attachées à une surface F_δ de rang l et diviseur δ quelconque.

On peut construire aisément des fonctions satisfaisant non seulement aux relations générales (2), du n. 28, mais aussi aux relations particulières

$$\Theta(u + 1, v) = \Theta\left(u, v + \frac{1}{\delta}\right) = \Theta(u, v) ,$$

[15] APPELL, « Journal de Math. », 1891, pag. 195; HUMBERT, ibidem, 1893, pagg. 42-43.

de sorte que les quatre paires de périodes relatives à ces fonctions soient données par le tableau (1).

Nous appelerons Θ_δ les fonctions Θ satisfaisant à cette condition. On obtient en particulier une fonction Θ_δ en considérant le produit

$$\Theta_\delta(u, v) = \Theta(u, v)\ \Theta\left(u, v + \frac{1}{\delta}\right)\ \Theta\left(u, v + \frac{2}{\delta}\right) \dots\ \Theta\left(u, v + \frac{\delta - 1}{\delta}\right),$$

où $\Theta(u, v)$ est une fonction thêta relative au tableau

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g'. \end{array}\right.$$

Si la fonction $\Theta(u, v)$ est d'ordre l_0, la $\Theta_\delta(u, v)$ est évidemment d'ordre $l = \delta l_0$. Réciproquement, on peut démontrer que *toute fonction thêta vérifiant les relations*

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \Theta(u + 1, v) & = \Theta\left(u, v + \frac{1}{\delta}\right) = \Theta(u, v), \\ \Theta(u + g, v + h) & = \Theta(u, v)\, e^{-2\pi i l u + v} \\ \Theta(u + h, v + g') & = \Theta(u, v)\, e^{-2\pi i l v + v'} \end{array}\right.$$

est d'ordre l multiple de δ.

En effet la dernière de ces relations donne

$$\Theta\left(u + h, v + \frac{1}{\delta} + g'\right) = \Theta\left(u, v + \frac{1}{\delta}\right) e^{-2\pi i l v - 2\pi i l/\delta + v'}$$

d'où, en vertu de la condition

$$\Theta\left(u, v + \frac{1}{\delta}\right) = \Theta(u, v),$$

on tire

$$\Theta\left(u + h, v + \frac{1}{\delta} + g'\right) = \Theta(u + h, v + g') = \Theta(u, v)\, e^{-2\pi i l v - 2\pi i l/\delta + v'}.$$

Il faudra donc qu'il soit

$$e^{-2\pi i l/\delta} = 1 \quad \text{c'est-à-dire:} \quad \frac{l}{\delta} = \text{entier}.$$

On trouve aisément, par le même procédé qu'on emploie dans le cas des fonctions Θ générales, que les fonctions Θ_δ — les ν, ν' étant des constantes données — peuvent s'exprimer par des combinaisons linéaires à coefficients constants de l^2/δ d'entre elles.

Deux fonctions Θ_δ d'ordres l, l' ont $2ll'$ zéros communs incongrus par rapport au tableau (2), tandis qu'elles ont seulement $2ll'/\delta$ zéros incongrus par rapport au tableau (1), car les zéros incongrus par rapport à (2) se distribuent en $2ll'/\delta$ groupes de δ zéros congrus par rapport à (1).

Ceci posé, remarquons qu'au moyen de la correspondance $[1, \delta]$ entre la surface F_δ et la surface de JACOBI F relative au tableau (2), à une courbe C

$$\Theta(u, v) = 0 ,$$

d'un système Σ tracé sur F, répond sur F_δ la courbe C_δ

$$\Theta(u, v)\,\Theta\left(u, v + \frac{1}{\delta}\right) \ldots \Theta\left(u, v + \frac{\delta - 1}{\delta}\right) = 0 ,$$

appartenant au système Σ_δ homologue de Σ (n. 25).

Lorsque on ne regarde pas comme distincts deux zéros de $\Theta(u, v)$ incongrus par rapport à (2), mais congrus par rapport à (1), on peut aussi représenter la courbe C_δ avec la même équation $\Theta(u, v) = 0$, qui représente la courbe correspondante C.

Il s'ensuit que *sur la surface F_δ les courbes de zéro des fonctions thêta du premier ordre, rélatives au tableau* (2), *sont de courbes C_δ d'un système Σ_δ.*

Un système linéaire complet $|C_\delta|$ est donné par l'équation

$$\Theta_\delta(u, v) = 0 , \tag{4}$$

Θ_δ étant une fonction d'ordre *minimum* δ satisfaisant aux conditions (3) pour des valeurs données des constantes ν, ν'. Cette fonction renferme $\delta^2/\delta = \delta$ paramètres linéaires et homogènes, de sorte que le système $|C_\delta|$ a la dimension $\delta - 1$. Le degré de ce système est $2\delta^2/\delta = 2\delta$, le genre $\pi = \delta + 1$ (n. 15).

Au varier des multiplicateurs de la fonction Θ_δ on obtient toute courbe C_δ de Σ_δ, c'est-à-dire que ce système est donné par l'équation

$$\Theta_\delta(u + \lambda, v + \mu) = 0 . \tag{5}$$

Si la fonction Θ_δ envisagée a l'ordre $l = l_0\delta$, on voit aisément que l'équation (4) donne un système linéaire $|l_0 C_\delta|$ et que l'équation (5) donne le système continu complet $[l_0 C_\delta]$.

Ce que nous avons dit des fonctions thêta peut se répéter aussi pour les fonctions intermédiaires.

Une fonction intermédiaire $\varphi_\delta(u, v)$ définie par rapport au tableau (2), c'est-à-dire satisfaisant aux conditions (5) du n. 28, pourra être regardée comme une fonction intermédiaire relative au tableau (1), lorsqu'on aura

$$\varphi_\delta\left(u, v + \frac{1}{\delta}\right) = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i D k u}.$$

On obtient p. ex. une fonction intermédiaire de cette espèce en considérant le produit

$$\varphi(u, v) \quad \varphi\left(u, v + \frac{1}{\delta}\right) \ldots \varphi\left(u, v + \frac{\delta - 1}{\delta}\right),$$

$\varphi(u, v)$ étant une fonction intermédiaire relative au tableau (1); et l'on déduit aisément la théorie des fonctions φ_δ de celle des fonctions φ étudiées par M. HUMBERT.

Le théorème de M. APPELL nous dit actuellement que *toute courbe algébrique tracée sur F_δ peut être représentée en égalant à zéro une fonction φ_δ.*

Lorsque les modules g, h, g' de la surface F_δ ou de la surface de JACOBI attachée à F_δ sont généraux, toute fonction φ_δ se réduit à une fonction Θ_δ.

Or, d'après la remarque que toute fonction Θ_δ a un ordre multiple de δ, on retrouve ainsi le résultat établi au n. 27, que *sur une surface F_δ à modules généraux il n'y a d'autres courbes algébriques que celles d'un système $[C_\delta]$ bien déterminé et de ses multiples.*

30. *Surfaces de Picard d'ordre minimum dépourvues de courbes exceptionnelles.* – Les quelques remarques que nous venons d'établir par des voies différentes aux nn. 26, 27 et 28, 29, nous amènent à construire des types, projectivement définis, des surfaces de PICARD; et ce sera un résultat remarquable que, en exceptant des modules particuliers, on obtiendra ainsi, pour chaque valeur du diviseur δ, les surfaces de PICARD d'ordre minimum, parmi celles qui ne renferment pas des courbes exceptionnelles.

Nous avons reconnu qu'à toute surface de PICARD F_δ appartient un système Σ_δ renfermé en un système $\infty^{\delta+1}$ de courbes (généralement irréductibles) de genre $\delta + 1$; et nous avons ajouté que le système $\infty^{\delta+1}$ est constitué par ∞^2 systèmes linéaires.

Considérons un quelconque $|C_\delta|$ parmi ces systèmes linéaires $\infty^{\delta-1}$ de genre $\delta + 1$ et de degré 2δ.

En supposant $\delta > 3$ ($\delta - 1 \geqslant 3$) on pourra transformer F_δ de façon que les courbes du système considéré deviennent des sections planes ou hyperplanes de la surface; on obtiendra ainsi *une surface F_δ d'ordre 2δ appartenant à un espace $S_{\delta-1}$ de dimension $\delta - 1$ et cette surface ne renfermera pas des courbes exceptionnelles*, puisque le système linéaire qui nous a fourni la transformation n'a pas de points base.

Ajoutons, sans appuyer sur les détails, qu'il est aisé de reconnaître que notre surface d'ordre 2δ ne saurait se réduire à une surface d'ordre δ comptée deux fois.

Faisons maintenant $\delta = 3$, 2. Il suffira alors de considérer le double d'un système linéaire $|C_\delta|$ c'est-à-dire $|2C_\delta|$.

Ce système est de genre

$$\delta + 1 + \delta + 1 + 2\delta - 1 = 4\delta + 1,$$

de degré

$$8\delta,$$

et de dimension

$$4\delta - 1.$$

On obtient donc des *surfaces de Picard F_2, F_3 d'ordre 16, 24, qui appartiennent respectivement à un espace S_7, S_{11}, et qui sont dépourvues de courbes exceptionnelles.*

Pour $\delta = 1$ la dimension de $|2C|$ est 3; il semble donc qu'on sera amené à une surface de JACOBI d'ordre 8 sans courbes exceptionnelles. Mais une circonstance particulière se presente; les courbes du système transformant $|2C|$ passant par un point, renferment en conséquence un autre point, qui est conjugué au premier en une transformation de première espèce, bien définie par la condition de laisser invariant le système $|2C|$.

Ainsi la surface d'ordre 8 que l'on construit se réduit à une surface de quatrième ordre (de KUMMER) comptée deux fois.

Il faut donc considérer un système linéaire $|3C|$ qui a le genre 10, le degré 18 et la dimension 9. On en est amené à une *surface de Jacobi d'ordre* 18 *en un espace S_9, qui est dépourvue de courbes exceptionnelles.*

Il est bien entendu qu'en projetant les surfaces appartenant à des hyperespaces, que nous venons de construire, on obtiendra des surfaces de l'espace ordinaire, qui seront dépourvues de courbes exceptionnelles et aurons le même ordre que les surfaces données, si l'on a projeté par des points extérieurs.

En projetant par des points de la surface l'ordre en est abaissé, mais des courbes exceptionnelles prennent naissance.

III. - Classification des involutions appartenant à une surface de Jacobi.

31. *Invariants des involutions appartenant à une surface de Jacobi.* – D'après les remarques développées dans le n. 6, étant donnée une surface hyperelliptique Φ, on peut toujours construire une surface de JACOBI F transformée rationnelle de Φ; on aura entre Φ, F une correspondance $[1, n]$, de telle sorte qu'aux points de Φ correspondront les groupes G_n de n points d'une certaine involution I_n sur F. La surface Φ est une *image* de l'involution I_n. Ainsi le problème de déterminer les familles, birationnellement distinctes, de surfaces hyperelliptiques, se trouve ramené à l'étude et à la classification des involutions appartenant à une surface de JACOBI F.

Et *nous supposerons toujours que F ne renferme pas des courbes exceptionnelles*, puisque ces courbes, si elles existent, peuvent être éliminées par une transformation de la surface.

Ajoutons les remarques suivantes:

1) Toute involution I_n donnée sur F (soit toute surface — image de I_n — dont F est une transformée rationnelle) a le genre géométrique

$$p_g \leqslant 1 .$$

En effet, si l'on fait abstraction des courbes exceptionnelles, il ne peut pas exister sur Φ des courbes canoniques d'ordre > 0, car à une courbe canonique de Φ devrait correspondre une courbe faisant partie d'une courbe canonique de F ([16]).

Cette remarque prouve même davantage, c'est-à-dire que (en faisant toujours abstraction des courbes exceptionnelles) Φ ne saurait renfermer des courbes pluricanoniques d'ordre > 0, et par conséquent, en désignant par P_i ses genres d'ordre $i = 2, 3, \ldots$, on aura

$$P_i \leqslant 1 .$$

2) Le genre numérique d'une involution appartenant à F, ne saurait descendre au dessous de -1, soit

$$p_a \geqslant -1 .$$

([16]) ENRIQUES, *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche* (« Memorie dell'Acc. di Torino », s. III, t. 44, 1893), cap. VI [queste *Memorie*, vol. I, V]. Voir aussi SEVERI, « Rendiconti dell'Ist. Lombardo », s. II, t. 36, 1903.

En effet, si l'on avait $p_a < -1$, la surface pourrait être ramenée birationnellement à une réglée dont la section plane aurait le genre $-p_a$; alors aux génératrices de celle-ci correspondraient sur F les courbes d'un faisceau irrationnel, de genre $-p_a > 1$; mais un tel faisceau ne saurait appartenir à une surface de JACOBI (n. 19).

Ces remarques nous amènent à établir une distinction des involutions qui peuvent appartenir à F, d'après les valeurs des caractères invariants.

On pourra avoir des involutions irrégulières (c'est-à-dire des involutions représentées par des surfaces irrégulières) et des involutions régulières; nous désignerons en tous cas, par d ($\geqslant 0$) l'irrégularité d'une involution appartenant à F, ou de la surface qui en est l'image; d sera donc la différence $p_g - p_a$ entre le genre géométrique et le genre numérique de Φ.

Or trois cas seront possibles:

$$d = 2\,, \qquad d = 1\,, \qquad d = 0\,.$$

Si $d = 2$ les inégalités $p_g \leqslant 1$, $p_a \geqslant -1$, ne peuvent être satisfaites qu'en faisant

$$p_g = 1\,, \qquad p_a = -1;$$

et, comme il n'y a pas des courbes pluricanoniques d'ordre > 0, on tombe sur des surfaces Φ hyperelliptiques de rang 1; ainsi que nous l'avons remarqué, ces surfaces représentent des involutions engendrées sur F par des transformations cycliques de 2^{de} espèce (n. 12).

Si $d = 1$, on peut supposer à priori

$$p_g = 1\,, \qquad p_a = 0\,,$$

ou

$$p_g = 0\,, \qquad p_a = -1\,;$$

mais la première hypothèse doit être écartée parce qu'il n'existe pas des courbes canoniques d'ordre > 0 [17]; on aura donc

$$p_g = 0\,, \qquad p_a = -1\,.$$

On tombe alors sur des *surfaces elliptiques*, douées d'un groupe elliptique ∞^1 de transformations birationnelles en elles-mêmes [18]; parmi ces

---

[17] Cfr. ENRIQUES, *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 1$, « Atti Accad. di Bologna », 9 Dec. 1906 [questo volume, XLI].

[18] Cfr. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*, « Circolo Matematico di Palermo », 5 Marzo 1905 [questo volume, XXXVI].

surfaces on pourra rencontrer des surfaces qui se ramènent à des réglées elliptiques, et des surfaces irréductibles à des réglées; on peut distinguer les deux cas d'après la valeur du genre d'ordre 12, P_{12}; on a

$$P_{12} = 0 \qquad (P_4 = P_6 = 0),$$

dans le premier cas; et $P_{12} > 0$, et ici donc $P_{12} = 1$, dans le second [19].

Si enfin $d = 0$, on aura

$$p_g = p_a = 0\,,$$

ou

$$p_g = p_a = 1\,.$$

Dans le premier cas on pourra considérer le bigenre P_2; si

$$P_2 = 0$$

la surface est rationnelle (CASTELNUOVO) [20].

L'hypothèse $P_2 > 0$, jointe à nos inégalités $P_i \leqslant 1$ $(i = 2, 3, \ldots)$, ne peut être satisfaite que pour des surfaces réductibles à un type connu, pour lesquelles

$$P_2 = 1\,, \qquad P_3 = 0 \qquad (P_{2i} = 1,\ P_{2i+1} = 0).$$

Les résultats de cette discussion viennent résumés par le tableau suivant, où nous indiquons les valeurs possibles des caractères invariants qui appartiennent à une surface hyperelliptique quelconque (soit les caractères des involutions qui peuvent appartenir à F):

a) $d = p_g - p_a = 2$:

$p_a = -1$, $p_g = 1$ $(P_i = 1;\ i = 2, 3, \ldots)$ (*surfaces hyperelliptiques de rang* 1 — n. 16);

b) $d = p_g - p_a = 1$:

$p_a = -1, p_g = 0$ { $P_{12}=0$ (*réglées elliptiques*); $P_{12}=1$ (*surfaces elliptiques* non réductibles à des réglées);

c) $d = p_g - p_a = 0$:

$p_g = p_a = 0$ { $P_2 = 0$ (*surfaces rationnelles*); $P_2 = 1,\ P_3 = 0$,

$p_g = p_a = P_2 = 1$ $(P_i = 1;\ i = 3, 4, \ldots)$,

---

[19] Ibidem.

[20] *Sulle superficie di genere zero*, « Memorie della Società italiana delle Scienze » (1896).

Ces résultats sont obtenus *à priori* d'après les théorèmes de classification établis récemment dans la théorie des surfaces algébriques; il y a lieu maintenant de les retrouver à posteriori en classifiant les involutions qui peuvent appartenir à une surface de JACOBI F, d'après deux points de vue différents:

1) d'après le *nombre des transformations de seconde espèce* de F qui les ramènent en elles-mêmes;

2) d'après le *nombre de leurs coïncidences.*

Chacun de ces points de vue nous fournira ainsi un critérium pour reconnaître si une involution donnée sur F, appartient à l'une ou à l'autre des familles que nous venons de déterminer.

REMARQUE. – Les résultats auxquels nous serons amenés subsistent de même pour les involutions appartenant à une surface de PICARD de diviseur quelconque.

32. *Les involutions classifiées d'après leurs transformations en elles-mêmes.* – Plaçons nous d'abord au premier point de vue.

Soit donc I_n une involution donnée sur la surface de JACOBI F, Φ une surface image de I_n.

L'involution I_n (soit la surface Φ qui la représente) pourra être régulière ou irrégulière, son irrégularité d ($\geqslant 0$) étant exprimée par la différence $p_g - p_a$ entre son genre géométrique et son genre numérique.

Or nous allons démontrer le théorème suivant:

Une involution appartenant à F sera irrégulière ou régulière, suivant qu'il existe ou qu'il n'existe pas une infinité (continue) de transformations de seconde espèce qui la transforment en elle-même.

Considérons d'abord une involution I_n régulière; nous prouverons qu'il ne peut exister qu'un nombre fini (tout au plus) de transformations de seconde espèce par rapport auxquelles I_n jouit de la propriété d'invariance.

Soient u, v deux intégrales indépendantes de première espèce, attachées à la surface F; évaluons les sommes des valeurs qu'elles prennent aux n points d'un groupe $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de I_n.

Soit

$$\sum u(x_i) \equiv u(x_1) + u(x_2) + \ldots + u(x_n) \equiv h\,,$$

$$\sum v(x_i) \equiv v(x_1) + v(x_2) + \ldots + v(x_n) \equiv k\,.$$

En faisant varier le groupe $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, h, k demeurent constantes, autrement elles fourniraient des intégrales de Φ (tandis que le nombre de celles-ci est $d = 0$).

Or une transformation de 2^{de} espèce de F est donnée par les formules

$$u(y) \equiv u(x) + a\,,$$
$$v(y) \equiv v(x) + b\,.$$

Si cette substitution doit transformer en elle-même l'involution I_n, on aura

$$(1) \qquad \begin{cases} \sum u(y_i) \equiv \sum u(x_i) + na \equiv h\,, \\ \sum v(y_i) \equiv \sum v(x_i) + nb \equiv k\,, \end{cases}$$

(les congruences subsistant toujours par rapport aux périodes de u, v); il suit

$$na \equiv 0$$
$$nb \equiv 0\,,$$

et par conséquent a et b ne sauraient recevoir qu'un *nombre fini* de valeurs, distinctes par rapport aux périodes.

Supposons au contraire que l'involution I_n soit irrégulière. Si elle était transformée en elle-même par un nombre fini de transformations de 2^{de} espèce, elle serait transportée en ∞^2 involutions distinctes par les ∞^2 transformations de 2^{de} espèce; et, comme le groupe formé par les transformations est transitif, on aurait ainsi une série continue d'involutions *irrégulières* jouissant de la propriété que les groupes de la série qui passent par un point donné de F *remplissent la surface.*

Cette conclusion est absurde; en effet M. SEVERI a montré [21] que si l'on a sur une surface une série continue d'involutions irrégulières, les groupes de celles-ci qui renferment un point donné, appartiennent tous à une même *courbe* algébrique (variable dans un faisceau irrationnel).

Pourtant on arrive à la conclusion que « toute involution régulière de F est transformée en elle-même par un nombre fini de transformations de 2^{de} espèce » et réciproquement, C. Q. F. D.

33. – Mais on peut en dire davantage.

En effet il est aisé de prouver que « si une involution I_n donnée sur la surface F a l'irrégularité $d = 2$, elle demeure invariante par rapport aux ∞^2 transformations de 2^{de} espèce de F, et réciproquement ».

---

[21] *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* (« Annali di Matematica », s. III, t. XII, 1905).

Soit Φ une surface image de I_n. D'après le n. 31 on a

$$p_g = 1, \qquad p_a = -1.$$

En outre Φ ne renferme pas des courbes pluricanoniques d'ordre > 0 (n. 31). On en conclût que Φ est une surface hyperelliptique de rang 1, admettant un groupe ∞^2 de transformations birationnelles en elle-mêmes (n. 16). Entre Φ, F il y a une correspondance algébrique $[1, n]$ dépourvue de courbe de diramation; et à toute transformation birationnelle de Φ en elle-même répondent n transformations de 2^{de} espèce distinctes de F [22].

Ainsi I_n vient transformée en elle-même par les ∞^2 transformations; en particulier il y a parmi celles-ci n transformations qui laissent invariant chaque groupe de I_n, et engendrent l'involution au sens du n. 10.

La proposition réciproque s'établit de suite. Si I_n est transformée en elle-même par les ∞^2 transformations de 2^{de} espèce de F, la surface Φ — image de I_n — admet ∞^2 transformations en elle-même; par conséquent elle a les genres $p_g = 1$, $p_a = -1$, et l'irrégularité $d = 2$.

Que l'on rapproche maintenant le résultat obtenu à celui du n. 32; un raisonnement par exclusion nous permet de conclure que:

Toute involution irrégulière donnée sur F admet ∞^2 ou ∞^1 transformations de 2^{de} espèce en elle-même, suivant que son irrégularité est

$$d = 2 \qquad ou \qquad d = 1.$$

Le cas $d = 2$ nous ramène aux surfaces hyperelliptiques de rang 1.

Le cas $d = 1$ nous ramène à des surfaces elliptiques [23] de genre numérique $p_a = -1$ et par conséquent de genre géométrique $p_g = 0$; parmi ces surfaces nous verrons qu'il existe des surfaces qui se laissent transformer en des réglées elliptiques (cas de dégénérescence) et aussi en *des surfaces elliptiques non réductibles à des réglées.*

34. *Les involutions classifiées d'après leurs coïncidences.* – Nous allons nous placer maintenant au second des points de vue dont nous avons parlé au n. 31.

Dans une involution I_n de F, il peut exister des groupes G_n, constitués de n points qui ne sont pas tous distincts entre eux, c'est-à-dire renfermant des *coïncidences*. Or trois cas pourront se présenter.

---

[22] Cfr. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in se stesse* (n. 5), « Circolo di Palermo », 14 Maggio 1905 [questo volume, XXXVII].

[23] On appelle ainsi les surfaces admettant un groupe elliptique de transformations en elles-mêmes. Après MM. PICARD et PAINLEVÉ ces surfaces ont été étudiées, notamment dans le cas $p_g = 0$, par M. ENRIQUES (« Circolo di Palermo », Marzo 1905, l. c.).

35. *Premier cas*: *L'involution I_n possède une infinité de coïncidences*, c'est-à-dire une courbe K de points de coïncidence. – En ce cas nous allons prouver que *I_n est rationnelle ou peut être représentée par une surface réglée elliptique.*

Désignons par m l'ordre de la surface F, et par π le genre de ses sections planes; on aura (F ne renfermant pas des courbes exceptionnelles):

$$m = 2\pi - 2 .$$

Soit

$$h \ (> 0)$$

l'ordre de la courbe K, et D l'ordre de la courbe décrite par les $n-1$ points conjugués à un point (x) qui décrit une section plane de F.

Considérons sur la surface Φ, image de I_n, les courbes C correspondant aux sections planes de F.

Les courbes C se couperont deux à deux en $D + m$ points, chaque point commun à deux C répondant à un point commun aux sections planes homologues de F, ou bien à un groupe G_n de I_n dont un point appartient à la première de ces sections, et un autre point (conjugué au premier) appartient à la seconde.

Les courbes C auront le genre effectif π, ce genre étant égal à celui des sections de F; mais elles aurons un certain nombre de points doubles variables qui prennent naissance de la façon suivante: la courbe, d'ordre D, conjuguée à une section plane de F, rencontre cette section en D points; de ceux-ci, h tombent sur la courbe de coïncidence K; les autres $D - h$ se partagent en $(D - h)/2$ couples de points conjugués par rapport à I_n; eh bien, à ces couples correspondent $(D - h)/2$ points doubles de la courbe C, homologue à la section considérée de F.

Or la série des courbes C sur Φ est rationnelle; par conséquent [24] elle appartient à un système linéaire $|C|$. Le genre Π et le degré M auront respectivement les valeurs suivantes:

$$\Pi = \pi + \frac{D-h}{2} ,$$

$$M = m + D = 2\pi - 2 + D .$$

Pourtant on a ($h > 0$):

$$M > 2\Pi - 2 .$$

---

[24] ENRIQUES, « Rendiconti di Palermo », t. X, 25 Agosto 1895 [queste *Memorie*, vol. I, XV].

D'après un théorème de MM. CASTELNUOVO-ENRIQUES ([25]) cela suffit pour que la surface Φ soit rationnelle ou puisse être ramenée à une surface réglée irrationnelle, qui, dans notre cas, serait une réglée elliptique, son genre numérique ne pouvant pas descendre au-dessous de -1 (n. 31).

36. *Deuxième cas*: *Il n'existe pas des coïncidences de l'involution* I_n. – D'après une formule de M. SEVERI, on peut alors évaluer le genre numérique de la surface Φ image de I_n, qui se trouve en correspondence $[1, n]$ avec F; puisqu'il n'y a pas sur Φ des points de diramation, on trouve que ce genre numérique est

$$p_a = -1 .$$

Relativement au genre géométrique, on pourra distinguer deux hypothèses:

$$p_g = 1 \qquad \text{ou} \qquad p_g = 0 .$$

Dans l'hypothèse $p_g = 1$ il y aura sur Φ une courbe canonique d'ordre zéro (n. 31) et par suite la surface résultera une surface hyperelliptique de rang 1.

Examinons ensuite l'hypothèse $p_g = 0$. La surface Φ sera une *surface elliptique* qui ne saurait pas être ramenée à une réglée.

C'est ce que l'on peut reconnaître en raisonnant par absurde. Si une surface réglée est en correspondance $[1, n]$ avec F, aux génératrices de la première surface ne sauraient répondre sur F des courbes réductibles en n parties rationnelles; partant sur une courbe homologue à une des génératrices sus-nommées, ou sur une composante irréductible de cette courbe, il y aurait des points de coïncidence.

Ajoutons que la surface elliptique Φ renferme deux faisceaux de courbes elliptiques, un parmi ceux faisceaux étant elliptique, l'autre rationnel. Cette propriété, qui découle immédiatement de la construction de la surface Φ, s'accorde avec la circonstance que nous avons reconnue au n. 31, que les plurigenres de Φ ne peuvent surpasser 1.

37. *Troisième cas*: *L'involution* I_n *possède un nombre fini de coïncidences*. – En ce cas il ne peut y avoir qu'un nombre fini de transformations de la surface F, qui laissent invariant I_n, puisque ces transformations doivent échanger entre eux les points de coïncidence. Il s'ensuit (n. 32)

([25]) « Annali di Matematica », s. III, t. 6, pag. 165, 1901 [questo volume, XXXIII].

que Φ est régulière, et l'on a

$$p_g = p_a = 0 ,$$

ou

$$p_g = p_a = 1 .$$

En le premier cas le bigenre P_2 aura l'une des valeurs suivantes:

$$P_2 = 0 ,$$

ou

$$P_2 = 1 ;$$

et lorsque $P_2 = 0$ on tombe sur des surfaces rationnelles.

38. *Involutions appartenant à une surface régulière de genres* 1. – Il nous sera utile pour la suite de considérer les involutions, et notamment les involutions de couples de points, appartenant à une surface régulière de

$$\text{genres } 1 \qquad (p_a = p_g = P_2 = 1) .$$

En classifiant ces involutions, on tombera toujours sur des surfaces régulières et on aura les trois cas possibles:

$$p_a = p_g = P_2 = 0 \quad \text{(cas rationnel)} ,$$
$$p_a = p_g = 0 , \qquad P_2 = 1 \qquad (P_3 = 0) ,$$
$$p_a = p_g = P_2 = 1 .$$

Nous voulons montrer par un exemple que les deux derniers cas peuvent se presenter, tous deux, effectivement.

A cet effet considérons une surface F_8 intersection complète de trois quadriques dans un espace à 5 dimensions S_5. Il peut arriver que F_8 soit transformée en elle-même par une homographie involutoire de cet espace, et cette homographie pourra appartenir à l'une des trois espèces suivantes:

1) homologie;

2) homographie douée d'une droite de points unis qui ne coupe pas F, et d'un S_3 de points unis;

3) homographie douée de deux plans de points unis, qui ne coupent pas F.

Or l'homographie transformant F en elle-même donne lieu à une involution I_2 sur F. Eh bien, cette involution représente une surface rationnelle dans le premier cas; elle représente une surface de genres $p_a = p_g = P_2 = 1$ dans le second cas; enfin elle représente une surface de genres $p_a = p_g = 0$ et $P_2 = 1$, dans le troisième cas.

Nous allons justifier ces assertions en laissant de côté le premier cas, qui ne présente d'ailleurs aucune difficulté, puisqu'il suffit de répéter le raisonnement du n. 35.

En nous plaçant d'abord dans le cas 2), considérons les sections découpées sur F par les hyperplans renfermant l'axe de l'homographie. A ces sections répondrons sur la surface image de I_2 ∞^3 courbes de genre 3 se coupant deux à deux en 4 points; on en déduit que cette surface est birationnellement identique à une

surface générale du quatrième ordre $(p_a = p_g = P_2 = 1)$.

Dans le cas 3), considérons les sections découpées sur F par les hyperplans qui renferment l'un ou l'autre parmi les deux plans de points unis. A ces courbes répondrons sur la surface image de I_2 des courbes de genre 3, qui donneront lieu à deux systèmes ∞^2 de degré 4; les courbes de l'un système couperons toute courbe de l'autre système en 4 points formant sur cette courbe un groupe de la série canonique g_4^2. Pourtant les deux systèmes seront adjoint l'un à l'autre et l'on aura

$$p_a = p_g = 0,\ P_2 = 1, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il est à remarquer qu'entre les cas 1), 2), 3) il y a le critérium de distinction suivant: dans le cas 2) l'involution donnée sur F a un nombre fini de coïncidences, dans le cas 3) l'involution n'a pas du tout de coïncidence; on en a au contraire une infinité dans le cas 1).

Or cette remarque peut être généralisée. Toute involution de couples de points donnée sur une surface régulière, F, de genres 1, peut être engendrée par une homographie sur une surface F', transformée de F, appartenant à un hyperespace convenable. On peut donc répéter pour F' les considérations que nous venons de développer ci-dessus.

On arrive ainsi à la conclusion suivante:

Etant donnée une surface régulière de genres $p_a = p_g = P_2 = 1$, on peut y avoir trois sortes d'involutions de couples de points:

1) *involutions rationnelles* $(p_a = P_2 = 0)$;

2) *involutions de genres* 1 $(p_a = p_g = P_2 = 1)$;

3) *involutions de genre* 0 *et de bigenre* 1, *dépourvues de courbes bicanoniques d'ordre* > 0 $(p_a = p_g = P_3 = 0,\ P_2 = 1)$.

On a une infinité de coïncidences dans le cas 1), *un nombre fini* > 0 *de coïncidences dans le cas* 2), *point de coïncidences dans le cas* 3).

IV. - Théorème fondamental au sujet des surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$.

39. – Soit F une surface hyperelliptique de rang 1 ($p_g = 1$, $p_a = -1$). Nous avons déjà établi une distinction entre les involutions I_n qui peuvent appartenir à F, suivant qu'il existe une courbe de coïncidence, ou bien qu'il y a seulement un nombre fini $N > 0$ de points de coïncidence, ou qu'il n'y en a pas du tout ($N = 0$).

Nous allons considérer dans la suite les involutions I_n qui possèdent un nombre fini N ($\geqslant 0$) de coïncidences.

Parmi ces involutions nous avons déjà considéré en particulier celles qui sont engendrées par des transformations cycliques de seconde espèce de F ($N = 0$); ce sont des involutions représentées par des nouvelles surfaces hyperelliptiques de rang 1, ou brièvement des *involutions de rang* 1.

Or une involution I_n étant donnée sur F, deux cas peuvent se présenter:

1) il peut arriver que chaque groupe G_n de I_n soit composé par un certain nombre r ($\geqslant 1$) de groupes G_δ de δ (> 1) points ($n = r\delta$), de façon que les groupes G_δ engendrent une involution I_δ de rang 1; en ce cas on dira que *l'involution I_n est composée par la I_δ*;

2) au contraire il se peut que les groupes de I_n ne soient pas composés par des groupes d'une involution de rang 1.

La même distinction peut être établie aussi de la façon suivante:

On se trouve dans le cas 1) s'il existe des transformations de 2de espèce qui transforment en lui-même chaque groupe de I_n; au contraire le cas 2) correspond à l'hypothèse que de telles transformations n'existent pas.

Il y a lieu maintenant d'établir un critérium qui nous permettra de reconnaître plus aisément si une involution I_n donnée sur F est composée par une involution de rang 1.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n points d'un groupe G_n de I_n; d'après une locution déjà établie, deux quelconques parmi ces points sont dits *conjugués* par rapport à I_n. Si I_n est composée par une involution I_δ ($\delta > 1$) de rang 1, il y a en G_n des points conjugués par rapport à I_n, p. ex. les points x_1, x_2, qui sont aussi conjugués par rapport à I_δ.

Cette hypothèse entraîne la conséquence suivante: toute transformation de 2de espèce de F amène les points x_1, x_2 en des points conjugués par rapport à I_n.

En effet l'involution I_δ est transformée en elle-même par les transformations de 2de espèce, et, comme I_n est composée par I_δ, deux points conjugués par rapport à I_δ sont aussi conjugués par rapport à I_n.

Maintenant il y a lieu de remarquer qu'il subsiste la proposition réciproque suivante.

Que l'on ait sur F une involution I_n; si deux points x_1, x_2, conjugués par rapport à celle-ci, sont transformés en des points conjugués, par toute transformation de 2^de^ espèce, l'involution I_n est composée par une involution de rang 1.

Nous allons démontrer ce théorème.

Considérons une transformation de 2^de^ espèce, π, de F, choisie d'une façon générale; elle amenera le point x_1 en un point x_1' et sera définie par la correspondance de ces deux points, de façon qu'on pourra la désigner en écrivant

$$\pi = (x_1 x_1') .$$

Le point x_1 appartient à un groupe G_n de I_n dont les points sont désignés par $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Or, d'après notre hypothèse, la transformation π qui amène x_1 en x_1', amène x_2 en un point x_2' qui est conjugué à x_1' par rapport à I_n. Il pourra arriver aussi que d'autres points de G_n, p. ex. $x_3, \ldots, x_\delta$, soient transformés par π en des points $x_3', \ldots, x_\delta'$, conjugués à x_1', et que cela arrive d'ailleurs quel que soit la transformation de 2^de^ espèce π.

Les points $x_1, x_2, \ldots, x_\delta$ formeront en G_n un groupe G_δ qui se trouve défini de façon à satisfaire aux conditions suivantes:

a) le groupe G_δ est déterminé à partir du point x_1, que l'on peut faire varier sur F;

b) le groupe G_δ est défini d'une façon symétrique par rapport à ses points $x_1, x_2, \ldots, x_\delta$, puisqu'on a

$$\pi = (x_1 x_1') = (x_2 x_2') = \ldots = (x_\delta x_\delta') .$$

Il suit que G_δ décrit, au varier de x_1, une involution I_δ par laquelle I_n résulte composée. Mais comme I_δ est transformée en elle-même par les transformations de 2^de^ espèce, elle est une involution de rang 1 (n. 32). Ainsi notre proposition se trouve établie.

40. – En ce qui suit nous allons supposer que l'involution I_n douée de $N \geqslant 0$ points de coïncidence, que nous considérons sur la surface F, ne soit pas composée par une involution I_δ ($\delta \geqslant 1$) de rang 1. Ce n'est pas là une restriction essentielle que nous imposons à I_n, puisque cette condition pourra toujours être remplie en remplaçant la surface donnée par une autre surface de PICARD.

Ceci posé, nous nous proposons d'établir que l'involution I_n est engendrée par n transformations birationnelles de la surface F en elle-même, transformations formant un groupe d'ordre n. Plus clairement nous disons

que, si l'on considère les n points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'un groupe variable de I_n, chacun de ceux-ci dépend rationnellement de l'un des autres; p. ex. $x_2, \ldots, x_n$ sont des fonctions rationnelles de x_1.

Pour arriver à cette conclusion fondamentale, nous poursuivons l'étude de l'involution I_n, en rappelant nos hypothèses fondamentales:

1) que I_n soit douée d'un nombre fini $N \geqslant 0$ de points de coïncidence;

2) que I_n ne soit pas composée par une involution I_δ ($\delta > 1$) de rang 1.

Considérons sur F un système continu complet Σ de courbes C (de genre $\pi \geqslant 2$) sans points-base, choisi d'ailleurs d'une façon quelconque, et construisons le système des courbes K (*conjuguées* aux C) qui sont définies de la façon suivante:

tandis qu'un point décrit une courbe C, les $n-1$ points conjugués décrivent une courbe K, que l'on dit conjuguée à la première.

Nous nous proposons d'établir que chaque courbe K se décompose en $n-1$ courbes, birationnellement identiques à la courbe C dont elle prend naissance. Cette conclusion, qui nous permettra de démontrer aisément le théorème fondamental que nous avons en vue, sera établie par un procédé de réduction à l'absurde. Nous supposerons d'abord que les courbes K soient (généralement) irréductibles et nous montrerons que cette hypothèse contredit à l'hypothèse 2). Ensuite nous examinerons le cas où les K seraient réductibles, mais le nombre de leurs composantes irréductibles serait $< n-1$ et nous en tirerons la même conclusion.

41. – Adoptons les hypothèse 1), 2) du n. préc. et supposons en outre que la courbe K conjuguée à une courbe C (choisie d'une façon générale en Σ), soit irréductible. Il y aura sur K une involution γ^1_{n-1} de genre π (π étant le genre de C); deux points conjugués par rapport à γ^1_{n-1} — c'est-à-dire deux points appartenant à un même groupe de cette série — seront conjugués aussi par rapport à l'involution I_n.

Considérons les transformations de 2de espèce de la surface F en elle-même. On pourra supposer: ou bien que ces transformations changent la série des courbes K en elle-même; ou bien qu'elles changent une courbe K en une nouvelle courbe $\overline{K}$ qui n'est pas conjuguée à une courbe C de notre système Σ.

Si la série des courbes K est transformée en elle-même, c'est-à-dire si une courbe K est transformée en une autre courbe K, l'involution γ^1_{n-1} considerée sur la première courbe, se transformera dans l'involution γ^1_{n-1} qui vient définie analoguement (par rapport à I_n) sur la seconde courbe; en effet s'il n'en était pas ainsi on trouverait qu'une courbe K, en tant qu'elle peut correspondre à une infinité de courbes analogues par les ∞^2 transformations de 2de espèce, renferme une infinité continue d'involutions

irrationnelles γ^1_{n-1}, ce qui contredit à un théorème connu de MM. PAINLEVÉ, HUMBERT et CASTELNUOVO.

Il suit de cette remarque que, si la série des courbes K est transformée en elle-même par les transformations de 2^{de} espèce de F, deux points situés sur une courbe K et conjugués par rapport à I_n (c'est-à-dire appartenant à un même groupe de I_n) seront amenés par toute transformation de 2^{de} espèce, en des points conjugués de même par rapport à I_n; d'après le critérium établi au n. 39 cela signifie que l'involution I_n est une involution de rang 1, ou qu'elle est composée par une involution de rang 1, ce qui contredit à notre hypothèse 2).

Nous devons donc supposer qu'une transformation de 2^{de} espèce (choisie d'une façon générale) change une courbe K en une nouvelle courbe $\overline{K}$ qui n'est pas conjugués à une courbe C de notre système Σ.

Construisons alors la courbe L conjuguée à $\overline{K}$ par rapport à I_n, c'est-à-dire la courbe engendrée par les $n-1$ points conjugués à un point variable sur $\overline{K}$.

La courbe $\overline{K}$ correspondant à K en une transformation de 2^{de} espèce π, on peut faire varier $\overline{K}$ tout en tenant fixe K pourvu qu'on laisse varier π, et d'une façon continue on peut réduire ainsi $\overline{K}$ à K, tandis que π se réduit à la transformation identique.

Or, lorsque K variant d'une façon continue se réduit à K, la courbe L conjuguée à $\overline{K}$ variera aussi et devra se réduire à la courbe conjuguée à K, c'est-à-dire à la courbe composée $(n-2)K + C$.

Il s'agit de voir comment cette réduction est possible.

Supposons d'abord que la courbe L, qui tend à la limite $(n-2)K+C$, soit irréductible.

Envisageons un groupe de points de I_n dont un point se trouve sur $\overline{K}$; nous voulons désigner par x_2 ce point, et par $x_1, x_3, \ldots, x_n$ les $n-1$ points conjugués qui appartiennent à L.

Si, ainsi que nous l'avons supposé, L est irréductible, on peut échanger entre eux les points x_1, x_3, en faisant décrire un cycle au point x_2 sur $\overline{K}$; il est sous-entendu que l'on envisage $\overline{K}$ comme une surface de RIEMANN.

Or $\overline{K}$ se réduit d'une façon continue à K; le cycle décrit sur $\overline{K}$ par x_2 se réduit à un cycle sur K, qui est d'ailleurs une surface de RIEMANN identique à $\overline{K}$.

En force d'un *postulat de continuité* qu'on a le droit d'appliquer ici, il doit donc arriver le fait suivant: considérons un groupe de points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de I_n, et supposons que le premier point appartienne à la courbe C, et les autres $n-1$ points à la courbe conjuguée K; on peut faire décrire au point x_2 sur K un tel cycle que x_1 se change avec x_3.

Comment ce fait est-il possible?

Suivons par la pensée le mouvement du point x_2 qui décrit un cycle

sur K, et suivons de même le chemin qui vient décrit par un point x_3 conjugué à x_2 et situé sur la même courbe K.

Pour que x_3 se change en x_1, il faut qu'il passe de la courbe K à la courbe C, et ce passage ne peut avoir lieu que par l'un des points communs à C, K. Or x_3 coïncidera avec l'un, A, de ces points, lorsque x_2 occupera la position A' d'un des points conjugués sur K; mais si on continue le mouvement de x_2 au delà de A', où se trouvera la continuation du chemin décrit par x_3? appartiendra-t-elle à K, ou bien se trouvera-t-elle sur C?

Pour éclaircir ce point, remarquons que lorsque x_2 décrit un cycle en passant par A', il y a toujours un chemin décrit par x_3 qui lui correspond et qui est situé en totalité sur K; une autre branche de la même fonction algébrique (correspondant à l'involution I_n) est la branche x_1 qui se meut sur C; pour que le chemin de x_3 se continue, en passant par A, sur C, il faut donc que cette branche x_1 aboutisse de même à A lorsque x_2 atteind A', c'est-à-dire que les deux branches x_3 et x_1 se réunissent en A; mais cela signifie qu'en A doit tomber un *point de coïncidence* de l'involution I_n.

Or cette conclusion contredit à notre hypothèse 1). En effet s'il n'y a qu'un nombre fini de points de coïncidence de I_n, une courbe C choisie d'une façon générale en Σ, n'en renferme pas.

On en déduit que la courbe L ne saurait être irréductible. Cette courbe sera donc composée et parmi ses composantes il y en aura une, que nous pouvons désigner par X, qui renfermera un seul point x_1 parmi les conjugués à x_2; en effet si x_1 décrivait une courbe renfermant un autre parmi ses points conjugués, p. ex. x_3, il y aurait sur K un cycle de x_2 auquel correspondrait un échange entre x_1, x_3, et on en conclurait, comme avant, qu'il y aurait sur C des points de coïncidence.

Nous venons de reconnaître que L se décompose, et précisement qu'il y a une de ses composantes (X) qui est décrite simplement par le point x_1 conjugué au point x_2, se mouvant sur K. Lorsque K se réduit par continuité à K, X se réduira à C.

En effet on pourrait se douter seulement que X se réduise à $C + \theta$, θ désignant une *courbe fondamentale*, lieu des points conjuguée à un *point fondamental* de I_n appartenant à K; mais une analyse approfondie porte à exclûre cette hypothèse.

Ce n'est pas qu'on ne puisse supposer *à priori* que toutes les courbes K aient communs des points fondamentaux de I_n, qui seraient multiples pour les K, mais il est aisé de reconnaître que, si l'on transforme un point fondamental en une courbe exceptionnelle, cette courbe ne fait pas partie de la K envisagée comme limite de K, et en conséquence la courbe θ conjuguée à la courbe exceptionnelle, ne fait pas partie de la courbe limite de X, qui est simplement C et non $C + \theta$.

Ceci posé, rappelons-nous que le système Σ des C est un système continu complet; on en déduira que la courbe X, qui en variant par continuité se réduit à une C, appartient elle-même à ce système Σ. Mais cette conséquence entraîne que la courbe $\overline{K}$, transformée d'une courbe K par une transformation de 2de espèce, soit le lieu décrit par un point conjugué à une courbe C, et par conséquent qu'elle appartienne au même système des K. Ce système sera donc invariant par rapport aux transformations de 2de espèce si, ainsi que nous l'avons supposé, les K sont irréductibles; c'est là une conclusion qui contredit à l'hypothèse 2) du n. 40, ainsi que nous l'avons remarqué.

On en conclût que *les courbes K ne sont pas irréductibles.*

42. – Il faut analyser maintenant les différentes hypothèses qu'on peut faire au sujet de la décomposition des courbes K. On peut supposer:

ou bien que K se décompose en un certain nombre $h < n-1$ de composantes $K_1, \ldots, K_h$;

ou bien qu'elle se décompose en $n-1$ composantes.

Si c'est le premier cas qui a lieu, il y aura une partie irréductible de K, soit p. ex. K_1, qui renferme une involution irrationnelle γ_r^1 $(r > 1)$ dont chaque groupe est constitué par r points conjugués de I_n.

Nous pourrons maintenant répéter pour les K_1, le raisonnement que nous avons développé avant au sujet des K.

Nous transformons les K_1 par les transformations de 2de espèce. Si les courbes transformées sont des courbes K_1 du même système, il s'ensuit que l'involution I_n est composée par une involution de rang 1.

Il faut donc supposer que la courbe $\overline{K}_1$, transformée d'une K_1, n'appartienne pas au système de celle-ci. Maintenant $\overline{K}_1$ peut varier par continuité se réduisant à K_1; la courbe L conjuguée à $\overline{K}_1$ se réduit alors à la courbe conjuguée à K_1, c'est-à-dire à la courbe

$$(r-1)K_1 + K_2 + \ldots + K_h + C\,.$$

Considérons un groupe de points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de I_n dont un point x_2 est situé sur K_1, et un point x_1 est sur C. Lorsque x_2 décrit un cycle sur K_1, il n'est pas possible échanger x_1 avec un autre point x_3 du groupe, n'existant pas sur C des points de coïncidence. Mais d'un autre côté, à cause de raisons de continuité, cet échange devrait se présenter comme possible si un échange analogue a lieu sur L, c'est-à-dire si la courbe L est irréductible ou si elle ne renferme pas une composante (décrite simplement par le point x) qui se réduit à C lorsque $\overline{K}_1$ se réduit à K_1.

On en conclût que L est réductible et renferme une composante appartenant au système complet Σ des C; et il s'ensuit que $\overline{K}_1$, est une

partie de la courbe conjugué à une C et qu'elle appartient au même système que K_1, c'est-à-dire que le système des K_1 est invariant par rapport aux transformations de 2de espèce. C'est là une conclusion absurde, ainsi que nous l'avons déjà remarqué.

Cet absurde prouve que *la courbe K conjuguée à une C par rapport à I_n, se décompose en $n-1$ parties décrites simplement par les $n-1$ points conjugués à celui qui se meut sur C, et par conséquent birationnellement identiques à C.*

43. – Il est aisé maintenant d'achever la démonstration du théorème que nous avons en vue.

Supposons que Σ soit du type envisagé aux nn. 21, 25 et considérons en Σ les ∞^1 courbes C passant par un point x_1; le courbes conjuguées à ces C se décomposent en $n-1$ parties $C', \ldots, C^{(n-1)}$, qui passent respectivement par les points $x_2, \ldots, x_n$ du groupe de I_n déterminé par x_1.

Or un point quelconque P de la surface F appartient à un nombre fini de courbes C par x_1, courbes qui, se coupant en ce point, servent à le déterminer; aux C par P correspondent des C' par x_2 se coupant en un point conjugué P' qui se meut avec P et résulte ainsi dépendre rationnellement de P.

On voit d'ailleurs que cette correspondance rationnelle fait correspondre au point x_1 le point x_2.

On arrive ainsi à la conclusion suivante:

Toute involution I_n appartenant à une surface hyperelliptique F de rang 1 et satisfaisant aux hypothèses 1), 2) *du n.* 40, *est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même; ces transformations amènent un point quelconque de la surface F respectivement en ses $n-1$ conjugués par rapport à I_n.*

44. *Théorème fondamental.* – Le théorème que nous venons d'établir peut être énoncé sous une autre forme comme une propriété fondamentale des surfaces hyperelliptiques.

D'après les nn. 6, 35, toute surface hyperelliptique Φ de rang r (>1) et de diviseur δ, correspond à une involution I_n d'ordre $n = r\delta$ appartenant à une surface de JACOBI F, et possédant un nombre fini $N \geqslant 0$ de points de coïncidence (les surfaces rationnelles et les réglées elliptiques étant laissées de côté d'après le n. 4). Lorsque $\delta = 1$, l'involution I_n remplit les conditions 1), 2) demandées par le théorème précédent. Si au contraire $\delta > 1$, l'involution I_n résulte composée par une involution I_δ de rang 1; cette involution I_δ vient représentée par une surface de PICARD F_δ, et l'on a sur F_δ une involution I_r d'ordre r dont les groupes

correspondent aux points de la surface Φ, et qui remplit les mêmes conditions 1), 2).

On a donc le théorème fondamental suivant:

Toute surface hyperelliptique de rang $r > 1$ et de diviseur δ correspond à une involution engendrée par un groupe de r transformations birationnelles sur une surface de Picard F_δ.

C'est ce qu'on peut exprimer aussi de la façon suivante:

Soit $\Phi(x, y, z) = 0$ une surface hyperelliptique, et supposons que, les x, y, z étant des fonctions abéliennes de deux paramètres u, v, il arrive qu'à tout groupe de valeurs de x, y, z, correspondent r couples (u, v) incongrus par rapport aux périodes primitives, soit:

$$(u_1, v_1), \quad (u_2, v_2), \quad \ldots, \quad (u_r, v_r);$$

en ce cas les u, v seront liées par $r - 1$ substitutions linéaires

$$\begin{cases} u_i = a_i u_1 + b_i v_1 + c_i \\ v_i = d_i u_1 + e_i v_1 + f_i \end{cases} \qquad i = 2, 3, \ldots, r,$$

dont les coefficients ne dépendent pas de x, y, z.

Ces substitutions, ajoutée la substitution identique, forment un groupe d'ordre r; et les constantes a_i, b_i, d_i, e_i, sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes.

V. - Surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$ dépendant de trois modules arbitraires.

45. *Surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$ dépendant de trois modules arbitraires.* – D'après le théorème fondamental du n. 44, la détermination des familles birationnellement distinctes de surfaces hyperelliptiques, se trouve ramenée à celle des groupes finis de transformations birationnelles d'une surface hyperelliptique de rang 1 en elle-même.

On se rattache ainsi à la théorie des transformations des fonctions abéliennes de genre 2, théorie qui a pris naissance dans les Notes classiques de HERMITE (1855) ([26]) et qui a été développée successivement par les recherches de MM. FROBENIUS, WEBER, HURWITZ, WILTHEISS, HUMBERT ([27]), ce dernier ayant considéré les transformations dans toute leur généralité, ainsi que nous aurons lieu de le rappeler dans la suite.

([26]) « Comptes rendus de l'Academia des Sciences », t. XL.

([27]) « Journal de mathématiques » (1899-1900-1901-1903-1904-1906).

Rappelons d'abord le résultat auquel on est amené dans le cas où les modules sont arbitraires.

Soit F une surface de JACOBI, et u, v les integrales normales de 1re espèce attachées à F. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que la substitution linéaire

$$u' = \lambda u + \mu v + \alpha ,$$
$$v' = \lambda' u + \mu' v + \beta ,$$

établisse une transformation rationnelle de la surface F en elle-même, de sorte que les coordonnées du point (u', v') soient des fonctions rationnelles des coordonnées du point (u, v), est que u', v' augmentent d'une des périodes simultanées, lorsque u, v augmentent d'une telle période. Soit

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{matrix}$$

le tableau des périodes normales des intégrales u, v: alors la condition précédente peut s'exprimer sous forme analytique en écrivant les relations:

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda = a_0 + a_3 g + a_2 h & \mu = b_0 + b_3 g + b_2 h \\ \lambda' = a_1 + a_3 h + a_2 g' & \mu' = b_1 + b_3 h + b_2 g' \\ \lambda g + \mu h = d_0 + d_3 g + d_2 h & \lambda h + \mu g' = c_0 + c_3 g + c_2 \\ \lambda' g + \mu' h = d_1 + d_3 h + d_2 g' & \lambda' h + \mu' g' = c_1 + c_3 h + c_2 g' \end{cases}$$

où les a_i, b_i, c_i, d_i sont 16 *entiers caractéristiques* de la transformation.

Si l'on veut exprimer que la transformation est birationnelle, on doit supposer que la valeur du déterminant (*degré* de la transformation):

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

soit égale à ± 1 [28].

[28] Il faut toujours prendre la valeur $+1$, lorsque ainsi, que nous le supposons, on a entre les parties imaginaires des périodes, l'inégalité classique $g_1 g_1' > h_1^2$. Voir HUMBERT, « Journal de Math. », 1900, pag. 291.

En éliminant les constantes λ, λ', μ, μ' entre les équations (1), on a les relations

$$(A) \quad g^2a_3 + gh(a_2 + b_3) + h^2b_2 + g(a_0 - d_3) + h(b_0 - d_2) - d_0 = 0$$

$$(B) \quad gha_3 + gg'a_2 + h^2b_3 + hg'b_2 + ga_1 + h(b_1 - d_3) - g'd_2 - d_1 = 0$$

$$(C) \quad gha_3 + gg'b_3 + h^2a_2 + hg'b_2 - gc_3 + h(a_0 - c_2) + g'b_0 - c_0 = 0$$

$$(D) \quad h^2a_3 + hg'(a_2 + b_3) + g'^2b_2 + h(a_1 - c_3) + g'(b_1 - c_2) - c_1 = 0 .$$

Si les périodes g, h, g' sont arbitraires, ces relations se réduisent à des identités et l'on tombe sur les transformations

$$u' = \pm u + \text{const} .$$

$$v' = \pm v + \text{const} .$$

de 1re et de 2de espèce.

Nous les appelerons les *transformations ordinaires* de la surface F en elle-même, car *elles existent sur F pour toute valeur des modules.*

Si au lieu de considérer une surface de JACOBI, on se rapporte à une surface de PICARD F_δ de diviseur $\delta > 1$, on arrive de même à la conclusion que, pour des modules arbitraires, cette surface ne saurait admettre d'autres transformations en elle-même que les *transformations ordinaires*:

$$u' = \pm u + \text{const} .$$

$$v_4 = \pm v + \text{const} .$$

Or parmi ces transformations, celles qui sont (périodiques) de 2de espèce nous amènent à des nouvelles surfaces hyperelliptiques de rang 1 (n. 11), ainsi donc les seules transformations correspondantes à des surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$, seront les transformations de 1re espèce, que l'on peut toujours réduire à la forme

$$u' = -u , \qquad v' = -v .$$

On en déduit le théorème suivant:

Il n'y a d'autres surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$, dépendant de trois modules arbitraires, que des surfaces régulières de rang $r = 2$. Ces surfaces peuvent être représentées en exprimant les coordonnées de leurs points par des fonctions hyperelliptiques paires, d'ailleurs arbitraires. Elles

se partagent en une infinité de familles birationnellement distinctes, d'après la valeur du nombre entier δ qui en est le diviseur.

Les surfaces hyperelliptiques de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 1$ ont été l'objet d'études classiques (KUMMER, WEBER, HUMBERT); le cas $\delta > 1$ a appelé récemment l'attention de MM. TRAYNARD et REMY.

46. *Surfaces de* KUMMER. – Nous allons considérer d'abord les surfaces régulières de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 1$; s'il n'y aura ici rien d'essentiel à ajouter aux résultats connus, nous aurons au moins l'occasion de développer la méthode que nous employerons dans la suite pour étudier les cas nouveaux qui se présentent pour $r > 2$.

Remarquons d'abord que toute surface hyperelliptique régulière de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 1$, correspond à une involution de couples de points appartenant à une surface de JACOBI et représentée sur celle-ci par

$$u + u' = \lambda, \qquad v + v' = \mu \tag{2}$$

(λ, μ constantes).

Ceci posé, considérons sur F le système fondamental Σ constitué de ∞^2 courbes C de genre 2, se coupant deux à deux en 2 points (n. 21).

Nous allons supposer d'abord que les C soient irréductibles, ce qui est le cas général.

Le système Σ est transformé en lui-même par toute involution du type (2). Ainsi si l'on se donne une involution I_2 de ce type, il y aura ∞^2 couples de courbes C conjuguées par rapport à I_2. Construisons une surface Φ image de I_2, dont les points correspondent *sans exception* aux couples de cette involution. Aux courbes C répondront sur Φ des courbes K; chaque K représentera deux C conjuguées par rapport à I_2.

Il est aisé de reconnaître que deux courbes K se coupent en 4 points, puisque deux couples de courbes C sur F ont communs 8 points (qui se partagent ici en 4 couples de I_2). De même on voit que les courbes K (dont le genre est 2 comme celui des C) ont un point double variable; en effet toute K renferme un point double correspondant au couple de I_2 qui est commun aux deux C homologues à K et conjuguées entr'elles par rapport à I_2.

La surface Φ étant régulière, c'est-à-dire dépourvue d'intégrales simples, on aura d'après une remarque de M. HUMBERT, que les ∞^2 courbes K, tracées sur Φ, appartiennent à un système linéaire sans points base, de courbes de genre 3 se coupant deux à deux en 4 points.

On peut même supposer que les courbes de ce système ∞^3 soient les sections planes de la surface Φ. En effet il est aisé de reconnaître que, étant excepté le cas de la surface de JACOBI particulière associée à une

courbe réductible, les courbes K passant par un point de Φ ne renferment pas en conséquence d'autres points variables avec celui-là, et par suite on peut toujours transformer la surface choisie comme image de I_2, de façon que les courbes K viennent coupées par des plans.

Alors la surface Φ sera du quatrième ordre à sections planes de genre trois (c'est-à-dire dépourvue de courbes multiples); les ∞^2 courbes K qui répondent aux C de F, seront les sections découpées sur Φ par les plans tangents.

En outre Φ aura des points doubles qu'on déterminera de la façon suivante:

Il y a sur F 16 points de coïncidence de l'involution I_2 qui tombent dans les points

$$\frac{\lambda + \omega_1}{2}, \qquad \frac{\mu + \omega_2}{2},$$

ω_1 et ω_2 désignant un couple de périodes simultanées des intégrales u, v.

A chacun de ces points correspond un point de Φ dont nous allons calculer la multiplicité.

A cet effet considérons le système linéaire $|K|$ formé par les sections planes de Φ. A ce système correspond sur F un système linéaire auquel appartiennent les ∞^2 couples de courbes $C + C'$ de Σ, conjuguées par rapport à l'involution I_2; système linéaire qu'on pourra désigner par

$$|D| = |C + C'|.$$

Ceci posé, considérons les ∞^1 couples de courbes $C + C'$ qui passent par un point uni P de I_2. Il a lieu de rappeler que les ∞^1 courbes C par P forment une série d'éléments de genre 2, et que dans cette série il y a *une* g_2^1, qui est constituée par les ∞^1 couples de courbes C se touchant en P; on en conclût que, les ∞^1 couples $C + C'$ formant aussi une g_2^1, sont constituées de courbes tangentes en P.

Il s'ensuit que le système linéaire ∞^2 des courbes D passant par P, a en P un point-base double, de sorte que deux courbes de ce système se coupent hors de P en $8 - 4 = 4$ points mobiles. Par conséquent aux courbes D par P correspondent sur Φ des courbes de $|K|$ par un point P', se coupant deux à deux hors de P' en $4/2 = 2$ points mobiles; ainsi donc P' est un point double de Φ.

On reconnaît aisément qu'il s'agit d'un point double conique, parce que toute courbe D, arbitrairement choisie parmi celles qui passent par P, a en P deux branches distinctes, auxquelles correspondent deux branches distinctes de la section plane homologue de Φ, et parce que

d'un autre côté le cône tangent à Φ en P' correspond élément par élément au domaine de P sur F et il est en conséquence irréductible.

Nous venons de reconnaître qu'aux 16 points de coïncidence de I_2 sur F, répondent 16 *points doubles coniques de* Φ.

Il y a lieu maintenant de rappeler le principe de dualité que nous avons établi au n. 23.

Le système Σ des courbes C constitue une variété ∞^2 d'éléments, birationnellement identique à la surface F, et transformée en elle-même par l'involution I_2; aux couples de C conjuguées correspondent les sections de Φ par les plans tangents, qui forment une variété identique à la surface Φ elle-même.

Il y aura donc 16 courbes C de coïncidence, transformées en elles-mêmes par I_2, auxquelles répondront 16 *plans singuliers qui touchent* Φ *suivant des coniques.*

On trouvera d'ailleurs aisément que: toute courbe C de coïncidence renferme 6 points de coïncidence de I_2 (puisqu'une g_2^1 sur une courbe de genre deux a justement 6 coïncidences); par dualité tout point de coïncidence appartiendra à 6 courbes C de coïncidence.

Deux C de coïncidence se couperons en 2 points de coïncidence, et réciproquement deux points de coïncidence appartiendront à 2 courbes C de coïncidence, etc.

Ces propriétés se réflechissent en des propriétés analogues des 16 points doubles et des 16 plans tangents suivant des coniques de la surface Φ; on a ainsi les propriétés bien connues des points et des plans singuliers d'une *surface de Kummer.*

Ces propriétés trouvent leur expression la plus simple en une représentation symbolique qui a été introduite par M. HUMBERT, et qui est la suivante.

Considérons les deux séries de nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ 4 \qquad \text{et} \qquad 1',\ 2',\ 3',\ 4',$$

et désignons par α, β, γ, δ les nombres de la première série pris suivant un ordre quelconque, et analoguement par α', β', γ', δ' les nombres de la seconde série.

On peut représenter les 16 plans singuliers de Φ par

$$\alpha\alpha',\ \alpha\beta',\ \ldots,\ \beta\alpha',\ \beta\beta',\ \ldots,$$

et les 16 points doubles par

$$(\alpha\alpha'),\ (\alpha\beta'),\ \ldots,\ (\beta\alpha'),\ (\beta\beta'),\ \ldots,$$

de façon que:

1) les six plans singuliers par les points $(\alpha\alpha')$ soient $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\alpha\delta'$, $\alpha'\beta$, $\alpha'\gamma$, $\alpha'\delta$, etc.;

2) corrélativement les six points doubles appartenant au plan $\alpha\alpha'$ soient $(\alpha\beta')$, $(\alpha\gamma')$, $(\alpha\delta')$, $(\alpha'\beta)$, $(\alpha'\gamma)$, $(\alpha'\delta)$, etc.

REMARQUE. – Ce même symbolisme sert à représenter la configuration des points et des courbes de coïncidence de l'involution I_2 sur F.

47. *Cas de dégénérescence.* – Nous venons d'établir le théorème connu qu'on peut énoncer de la façon suivante:

Toute surface hyperelliptique de rang $r = 2$ *et de diviseur* $\delta = 1$ *est birationnellement identique à une surface de Kummer du quatrième ordre, douée de* 16 *points doubles et de* 16 *plans tangents suivant des coniques, qui forment la configuration bien connue.*

Il y a pourtant un cas d'exception, dans lequel la surface de Kummer Φ *se réduit à une quadrique double* Q, douée d'une courbe de diramation.

C'est le cas où l'on part d'une surface de JACOBI qui représente les couples de deux courbes elliptiques.

Alors les courbes C de Σ sont réductibles; chacune se compose d'une courbe elliptique C_1 et d'une courbe elliptique C_2 se coupant en un point; et C_1 et C_2 appartiennent respectivement à deux faisceaux elliptiques. Si l'on construit, comme avant, une surface Φ image de I_2, on trouve sur Φ deux faisceaux linéaires de courbes elliptiques K_1, K_2, homologues aux C_1, C_2 respectivement; une K_1 et une K_2 se coupent en 2 points. Or les ∞^2 courbes $K_1 + K_2$ seront renfermées en un système ∞^3 de courbes K de genre 3, se coupant deux à deux en 4 points; mais il est aisé de voir:

1) que les K sont des courbes hyperelliptiques, puisqu'elles sont coupées en 2 points par les courbes du faisceau $|K_1|$ ou par les courbes de $|K_2|$;

2) que par conséquent les courbes K passant par un point de Φ passent par un point conjugué, deux points étant conjugués lorsqu'ils sont communs à une K_1 et à une K_2;

3) qu'à cause de cette circonstance la surface transformée de Φ ayant comme sections planes les courbes K, se réduit à une quadrique double Q, ainsi que nous l'avons énoncé.

Quant à la courbe de diramation sur Q, on voit d'abord qu'elle est d'ordre 8, coupant les droites des deux systèmes (génératrices et directrices) de la quadrique également en 4 points.

Il y a sur F 16 points de coïncidence de I_2, et il y a 4 courbes de coïncidence C_1 et 4 C_1, qui se coupent en ces 16 points.

Or aux 4 C_1 répondent 4 droites, soit 4 génératrices de Q, aux 4 C_2

quatres directrices de la même quadrique. Eh bien, il est aisé de reconnaître que ces 8 droites forment la courbe de diramation de la surface Q, regardée comme une image double de Φ.

48. *La surface hyperelliptique* ($r = 2$, $\delta = 1$) *représentée sur un plan double.* – La surface de KUMMER peut être projetée par un de ses points doubles sur un plan; on peut la transformer ainsi en un *plan double*, c'est-à-dire en une surface de la forme

$$z^2 = f(x, y);$$

la courbe de diramation du plan double,

$$f = 0,$$

se compose de 6 *droites tangentes à une même conique* C.

En cette représentation se trouve renfermé aussi le cas particulier que nous venons de considérer; il correspond à une dégénérescence de la conique C, considérée comme enveloppe, c'est-à-dire au *cas où* $f = 0$ *se compose de deux ternes de droites passant respectivement par deux points.*

49. *La surface du quatrième ordre hyperelliptique caractérisée par ses points doubles.* – Nous venons de reconnaître que toute surface hyperelliptique régulière de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 1$, peut être transformée en une surface de KUMMER du 4^{me} ordre à 16 points doubles et 16 plans singuliers; fait exception le cas particulier où la surface de KUMMER se réduit à une quadrique double.

Or il y a lieu de rappeler que « toute surface du quatrième ordre possédant 16 points doubles, possède aussi 16 plans tangents suivant des coniques, plans qui forment avec les 16 points la configuration de KUMMER, que nous avons définie ».

C'est là une conséquence immédiate de ce fait, qu'en projetant la surface donnée Φ par un de ses 16 points doubles sur un plan double, on a sur celui-ci une courbe de diramation douée de 15 points doubles, qui se décompose en 6 droites. En effet il suit de cette remarque que pour chacun des 16 points doubles de Φ il passe 6 plans tangents suivant des coniques, renfermant chacune 6 points doubles; et pourtant il y a 16 plans singuliers.

Or la configuration formée par ces plans en union aux 16 points doubles de Φ, jouit des propriétés connues de la configuration de KUMMER, propriétés que l'on peut exprimer au moyen du symbolisme de M. HUMBERT,

et qui découlent, de la propriété fondamentale établie, savoir que:

il y a 6 plans singuliers par chaque point double,	il y a 6 points doubles sur chaque plan singulier.

Ceci posé, considérons la série des surfaces du quatrième ordre (de KUMMER) douées de 16 points doubles. Cette série est ∞^3 et elle est *irréductible*; ainsi toute surface Φ dépend exclusivement de *trois modules*.

En supposant ce point bien établi, il en résulte que toute surface Φ est une surface hyperelliptique de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 1$.

Pourtant, si l'on se donne une surface du quatrième ordre Φ douée de 16 points doubles, il doit être possible de construire une surface de JACOBI F dont Φ est une transformée rationnelle, et telle que les coordonnées de ses points s'expriment par celles des points de Φ à l'aide d'une racine carrée.

Nous allons montrer comment on peut effectuer cette construction. Celà signifie que nous nous proposons le problème suivant:

Etant donnée une surface du quatrième ordre Φ douée de 16 *points doubles et par conséquent aussi de* 16 *plans tangents suivant des coniques (points et plans formant la configuration de Kummer), il s'agit d'exprimer les coordonnées des points de Φ par des fonctions Θ de deux paramètres.*

Ce problème peut être résolu par le procédé qui suit.

Soit

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

l'équation homogène de la surface donnée.

Considérons une forme algébrique

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

de degré pair $2n$, que nous allons déterminer dans la suite, et construisons dans l'espace à 4 dimensions $(y_1y_2y_3y_4y_5)$ la surface F qui est définie par

$$y_1 = x_1^n, \qquad y_2 = x_2^{n-1}x_1, \qquad y_3 = x_3^{n-1}x_1, \qquad y_4 = x_4^{n-1}x_1, \qquad y_5 = \sqrt{f}.$$

Cette *surface* est représentée sur la *surface double* Φ; la *courbe de diramation* est donnée par $f = 0$; toutefois il faut retrancher de l'intersection de $f = 0$, $\Phi = 0$, les parties qui comptent doubles.

Nous tâcherons de déterminer f de façon que la surface double Φ ne

possède d'autres points de diramation que ses 16 points doubles, et nous montrerons qu'en ce cas la surface F est une surface hyperelliptique de rang 1 (ainsi donc, d'après nos hypothèses, une surface de JACOBI).

Il y a lieu de supposer d'abord que f ne renferme pas comme facteur une forme algébrique des x à une puissance supérieure à la première.

Ceci posé considérons l'intersection de $f = 0$, $\Phi = 0$:

1) Si parmi les composantes de cette courbe il y en a une comptée $2s$ fois, cette composante ne fait pas partie de la courbe de diramation; s'il y a une composante comptée $2s + 1$ fois, celle-ci doit être comptée comme si elle était simple.

2) Si $f = 0$ renferme un point double, O, de Φ, et si toute droite du cône tangent par O a, en O, s intersections avec $f = 0$, il arrive que le domaine du point O sur Φ doit être regardé comme une courbe de diramation infiniment petite de Φ, lorsque s est impair; au contraire, si s est pair, ce même domaine ne constitue pas une courbe de diramation de Φ.

Cette remarque se ramène à la première en effectuant une transformation birationnelle de l'espace (x), de façon que le point O soit transformé en une courbe.

3) La surface F peut être réductible en deux parties dont chacune soit représentée simplement sur Φ. En ce cas il n'y a pas des points de diramation sur la surface double Φ.

Ceci posé, rappelons les propriétés de la configuration de KUMMER appartenant à Φ. On sait qu'il y a des tétraèdres de ROSENHAIM se composant de 4 plans tangents suivant des coniques, qui renferment dans leur ensemble les 16 points doubles de la surface.

On peut supposer d'avoir pris un tétraèdre de ROSENHAIM comme tétraèdre fondamental pour le système des coordonnées auxquelles nous nous rapportons, soit

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = 0 .$$

Posons

$$f = x_1 x_2 x_3 x_4 ,$$

et considérons la surface F définie par les équations

$$(3) \qquad y_1 = x_1^2 , \quad y_2 = x_2 x_1 , \quad y_3 = x_3 x_1 , \quad y_4 = x_4 x_1 , \quad y_5 = \sqrt{f} .$$

Comme $f = 0$ est tangent à Φ suivant les 4 coniques situées dans les plans

$$x_1 = 0 , \qquad x_2 = 0 , \qquad x_3 = 0 , \qquad x_4 = 0 ,$$

on voit que ces coniques ne sont pas des courbes de diramation de la surface double Φ, leurs points étant des points critiques apparents.

Au contraire $f = 0$ a en chaque point double de Φ une multiplicité 1 ou 3, et n'a aucun contact particulier avec les droites du cône tangent à Φ en ce point; ainsi donc le domaine de tout point double de Φ doit être regardé comme une courbe de diramation infiniment petite.

Il s'ensuit d'abord que la surface F décrite par le point (y) est irréductible.

Evaluons les genres de F.

D'abord on aura

$$p_0 = P_2 = P_3 = \ldots = 1;$$

c'est là une conséquence immédiate de ce qu'aux sections planes de Φ correspondent sur F des courbes de genre 5 se coupant deux à deux suivant de groupes canoniques de 8 points. Aux courbes de diramation infiniment petites constituées par les domaines des points doubles de Φ, répondrons sur la surface F, ou sur une transformée de celle-ci, des points simples ou des courbes exceptionnelles [29].

Pour calculer le genre numérique p_a de F, nous considérerons l'invariant de ZEUTHEN-SEGRE

$$I = 12p_a - p^{(1)} + 9\,,$$

où (étant $P_i = 1$) le genre linéaire

$$p^{(1)} = 1\,.$$

La valeur de cet invariant pourra être déduite de celle qui appartient à l'invariant analogue de Φ, qui est

$$I' = 20\,.$$

On sait que l'invariant I' peut être évalué de la façon suivante:

Considérons un faisceau de sections planes C de la surface Φ. Elles sont de genre $\pi = 3$ et il y a $n = 4$ points-base, pourtant

$$I' = \delta - n - 4\pi = \delta - 16;$$

[29] Autrement ces courbes seraient des courbes canoniques proprement dites (ENRIQUES, *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche*, « Accad. Torino Mem. », 1893, VI [queste *Memorie*, vol. I, V]), tandis que F ne renferme pas de telles courbes ($P_i = 1$).

δ désigne ici le nombre des courbes C douées d'un point double, mais les sections planes C qui passent par un point double de Φ comptent deux fois dans ce nombre.

Ainsi on a

$$\delta = 2 \cdot 16 + \delta' ,$$

où $\delta' = 4$ est la classe de la surface, et on retrouve la valeur de I':

$$I' = 20 .$$

Aux courbes C correspondent sur F des courbes K de genre $\Pi = 5$, formant un faisceau qui a $N = 8$ points-base. On aura

$$I = \Delta - N - 4\Pi = \Delta - 28 ,$$

où Δ désigne le nombre des courbes K de notre faisceau qui sont douées d'un point double.

Or, parmi ces courbes K, il y en a d'abord $\delta' = 4$ douées chacune de 2 points doubles, correspondant au point double de la courbe homologue C; en second lieu il y a 16 K correspondant aux C qui passent par les points doubles de Φ, et douées chacune d'un point double tombant en un point simple de F (ou d'une surface transformée de celle-ci). Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 \cdot 4 + 16 = 24 \\ I &= -4 \qquad\qquad (= 12 p_a + 8) \\ p_a &= -1 . \end{aligned}$$

On conclût que la surface F, ayant les genres

$$p_a = -1 , \qquad p_g = P_4 = 1 ,$$

est une surface hyperelliptique de rang 1 (n. 16).

Ainsi notre problème se trouve résolu, au moins théoriquement. En effet il est aisé d'exprimer les coordonnées des points de Φ en renversant les formules (3), ce qui se fait rationnellement; en suite il faudra construire les deux intégrales simples de première espèce u, v attachées à F; les coordonnées des points de Φ seront des fonctions hyperelliptiques de u, v.

50. *Surfaces hyperelliptiques de diviseur* $\delta > 1$. – Passons maintenant aux surfaces hyperelliptiques régulières de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta > 1$.

Toute surface Φ de cette espèce correspond à une involution I_2 sur une surface hyperelliptique de rang 1 et de diviseur δ.

L'involution I_2 est engendrée par une transformation de 1re espèce:

$$u + u' \equiv \lambda$$
$$v + v' \equiv \mu ,$$

par rapport aux périodes

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g' \end{matrix}$$

Par conséquent on a, comme pour $\delta = 1$, 16 points de coïncidence de I_2 qui tombent en les points

$$\frac{\lambda + \omega_1}{2}, \qquad \frac{\mu + \omega_2}{2} \qquad (\omega_1, \omega_2 \text{ périodes simultanées}).$$

Or il y a sur F_δ un système ∞^2 de courbes C_δ de genre 2, douées de $\delta - 1$ points doubles, se coupant deux à deux en 2δ points. Ce système est invariant par rapport à toute involution I_2 de 1re espèce.

Aux couples de courbes C_δ conjuguées par rapport à I_2, correspondent, sur une surface Φ image de I_2, des courbes de genre 2, se coupant deux à deux en 4δ points et douées de $2\delta - 1$ points doubles. La surface Φ étant régulière, ces courbes seront renfermées dans un même système linéaire $\infty^{2\delta+1}$ de genre $2\delta + 1$ et de degré 4δ.

On peut supposer que Φ soit transformée en une surface de l'espace $S_{2\delta+1}$ de telle façon que ses sections hyperplanes soient les courbes de genre 2 que nous venons de nommer.

Alors Φ sera une surface d'ordre 4δ, dont les sections hyperplanes sont des courbes canoniques; elle aura 16 points doubles correspondant aux 16 points de coïncidence de I_2 sur F_δ.

Il y aura en outre 16 hyperplans singuliers touchant Φ suivant des courbes rationnelles normales d'ordre 2δ; ces hyperplans correspondent aux 16 courbes C_δ qui sont transformées en elles-mêmes par I_2.

Les points et les hyperplans singuliers de la surface Φ en $S_{2\delta+1}$ formeront une configuration qui pourra être représentée par le même symbolisme de M. HUMBERT, que nous avons adopté pour la configuration

de KUMMER. Ce symbolisme exprime en effet les propriétés fondamentales suivantes: tout hyperplan singulier renferme 6 points doubles, deux hyperplans ont communs (outre que $\delta - 1$ points simples de la surface) deux points doubles et correlativement. A ce symbolisme on est aussi amené par la représentation paramétrique de la surface. C'est ce qu'on exprimera en disant que ces points et ces hyperplans forment une *configuration semblable* à celle de KUMMER.

Ainsi nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique régulière de rang $r = 2$ *et de diviseur* $\delta > 1$ *peut être transformée en une surface d'ordre* 4δ *à sections de genre* $2\delta + 1$ *en* $S_{2\delta+1}$, *surface possédant* 16 *points doubles et* 16 *hyperplans singuliers qui la touchent suivant des courbes rationnelles normales d'ordre* 2δ; *ces* 16 *points et ces* 16 *hyperplans singuliers forment une configuration semblable à celle de Kummer pour* $\delta = 1$. C'est pourquoi on dira aussi que Φ est une *surface de Kummer généralisée.*

REMARQUE. – Il est aisé de reconnaître que pour $\delta > 1$ la surface Φ ne dégénère pas en une surface double, même dans le cas auquel donne naissance une courbe de genre 2 réductible.

51. *La surface hyperelliptique d'ordre* 4δ *en* $S_{2\delta+1}$ *caractérisée par ses points et ses hyperplans singuliers.* – Nous venons de prouver que toute surface hyperelliptique régulière de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta > 1$ peut être transformée en une surface d'ordre 4δ de $S_{2\delta+1}$, douée de 16 points doubles et de 16 hyperplans singuliers, qui touchent la surface suivant des courbes rationnelles d'ordre 2δ formant une configuration semblable à celle de KUMMER.

Il y a lieu d'établir la proposition réciproque suivante, qui est d'ailleurs analogue à celle que nous avons établie pour $\delta = 1$.

Toute surface $\Phi_{4\delta}$ *d'ordre* 4δ *en* $S_{2\delta+1}$, *douée de* 16 *points doubles et de* 16 *hyperplans singuliers formant une configuration semblable à celle de Kummer, est une surface hyperelliptique de rang* 2 *et de diviseur* δ.

Il suffit de répéter ici la démonstration que nous avons développée pour $\delta = 1$. On construira ainsi une surface F représentée sur $\Phi_{4\delta}$ comptée deux fois, où il y aura 16 points de diramation qui tomberont en les 16 points doubles; il s'ensuivra que la surface F aura le genre géométrique $p_g = 1$ et le genre numérique $p_a = -1$. Comme il n'y aura pas d'ailleurs des courbes pluricanoniques, F sera une surface hyperelliptique de rang 1 (n. 16). Quant à son diviseur il est aisé de reconnaître qu'il aura la valeur δ, ou tout au moins qu'il sera $\leqslant \delta$.

La surface hyperelliptique $\Phi_{4\delta}$ peut être caractérisée aussi d'une autre façon remarquable. Rappelons d'abord que le système linéaire des sections hyperplanes de $\Phi_{4\delta}$ correspond à un système linéaire de F_δ auquel appar-

tiennent les couples de courbes $C_\delta + C'_\delta$ conjuguées par rapport à l'inlution I_2, système qu'on peut désigner par $|C_\delta + C'_\delta|$.

Or ce système est renfermé dans un système linéaire complet $|2C_\delta|$ qui a la dimension $4\delta - 1$.

On peut supposer que le système $|2C_\delta|$ soit découpé sur F_δ par les hyperplans d'un espace $S_{4\delta-1}$. Alors l'involution I_2 sera engendrée par une homographie de cet espace, homographie qui laisse invariant la surface F_δ.

Parmi les hyperplans de $S_{4\delta-1}$, il y en a $\infty^{2\delta+1}$ découpant sur F_δ les courbes du système $|C_\delta + C'_\delta|$; ce sont des hyperplans doubles pour notre homographie involutoire. Il y aura donc une seconde série $\infty^{2\delta-3}$ de hyperplans doubles coupant sur F_δ $\infty^{2\delta-3}$ courbes unies par rapport à I_2.

Ces $\infty^{2\delta-3}$ courbes unies forment un système linéaire qui a 16 points-base, tombant en les 16 points doubles de I_2.

En correspondance à ces courbes on a sur $\Phi_{4\delta}$ un système linéaire de courbes passant par les 16 points doubles de la surface, et telles que comptées deux fois appartiennent au système complet double de celui qui est découpé par les hyperplans. En se rappelant que ce système double est découpé tout entier par les quadriques de $S_{2\delta+1}$ [30], on voit que les courbes nommées ci-dessus sont des courbes de contact de $\infty^{2\delta-3}$ quadriques passant par les 16 points doubles de la surface.

Ainsi donc:

Toute surface hyperelliptique $\Phi_{4\delta}$ de $S_{4\delta+1}$ $(\delta > 1)$ *possède* $\infty^{2\delta-3}$ *quadriques passant par ses* 16 *points doubles, qui la touchent suivant une courbe d'ordre* 4δ.

Réciproquement toute surface d'ordre 4δ *de* $S_{2\delta+1}$ *à sections de genre* $2\delta+1$, *possédant* 16 *points doubles et une quadrique tangente suivant une courbe d'ordre* 4δ *qui passe par ces points, est une surface hyperelliptique.*

En effet en désignant par x_i $(i = 1, 2, \ldots 2\delta + 2)$ les coordonnées homogènes des points de la surface, et étant $f(x_i) = 0$ l'équation de la quadrique considérée, on voit que la surface

$$y_i = x_i\,, \qquad y_{2\delta+3} = \sqrt{f}$$

est une surface hyperelliptique de rang 1

$$(p_a = -1\,, \qquad p_g = P_4 = 1)\,.$$

Maintenant une question se pose: l'existence de quadriques tangentes qui passent par les 16 points doubles de la surface $\Phi_{4\delta}$, ne serait-elle une conséquence de ce que la surface possède 16 points doubles?

---

[30] Cfr. ENRIQUES, *Ricerche ...*, l. c. (§ V, 5).

S'il en est ainsi, les surfaces hyperelliptiques $\Phi_{4\delta}$ ($p_a = p_g = P_2 = 1$) seraient caractérisées tout simplement par la propriété d'avoir 16 points doubles, ainsi que celà arrive pour $\delta = 1$.

Nous croyons qu'on doit répondre par l'affirmative à la demande posée dessus. Cependant pour établir ce beau théorème, il faudrait pouvoir calculer en général le nombre des modules dont dépendent les différentes familles de surfaces de genres $p_a = p_g = P_2 = 1$, familles qui se distinguent d'après la valeur d'un entier ([31]).

Or c'est là une question délicate qui demeure en suspens.

Pourtant nous nous bornerons à remarquer que:

Toute surface d'ordre 8 *de* S_5, *ayant les sections hyperplanes de genre* 5, *et possédant* 16 *points doubles, est une surface hyperelliptique.*

C'est ce qui découle d'un compte de modules, qui se fait ici d'une façon immédiate. En effet les surfaces d'ordre 8 dont il est question, sont chacune intersection complète de trois quadriques, c'est-à-dire surfaces-base d'un réseau; un tel réseau dépend de 19 invariants (modules de la surface-base); 16 points doubles entraînent autant de conditions, ce qui réduit à 3 le nombre des modules.

52. *Surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre* ($\delta > 1$). Les surfaces hyperelliptiques régulières de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta > 1$ ont été l'objet de plusieurs Notes et d'un Mémoire de M. TRAYNARD ([32]), qui, en se plaçant dans les premiers cas $\delta = 2, 3, 4$, a étudié notamment les surfaces d'ordre 4 que l'on obtient par projection des surfaces $\Phi_{4\delta}$ considérées ci-dessus.

D'autres remarques concernant ces mêmes surfaces ont été faites par M. REMY ([33]), qui en particulier a rencontré toute une série dénombrable de surfaces hyperelliptiques de diviseur $\delta > 1$, se ramenant à des surfaces d'ordre 4 douées de 15 points doubles.

A notre point de vue la question de déterminer les surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre (de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta > 1$), peut être traitée de la façon suivante.

Il s'agit de déterminer les types projectivement distincts de surfaces du quatrième ordre, qui résultent d'une transformation birationnelle, en partant d'une surface donnée $\Phi_{4\delta}$.

Or le système linéaire transformant pourra être découpé sur $\Phi_{4\delta}$ par des variétés d'un certain ordre y, se comportant dans les 16 points

---

([31]) Cfr. ENRIQUES, *Ricerche* ..., l. c. (§ III, 6).

([32]) « Comptes rendus », 1904, I pag. 339, II pag. 718; 1905, I pag. 218, 931. « Annales de l'École normale », 1907, pag. 77.

([33]) « Comptes rendus », 1906, I p. 768, II p. 767. « Bulletin de la Soc. Math. de France », 1907, pag. 53.

doubles de la surface comme si ceux-ci étaient des points multiples d'ordre x_i ($i = 1, \dots 16$). La dimension d'un tel système est

$$2\delta y^2 + 1 - \sum_{i=1}^{16} x_i^2 ,$$

et son degré est

$$4\delta y^2 - 2 \sum x_i^2 ;$$

en égalant ce degré à 4, ou la dimension à 3, on tombe sur l'équation arithmétique

$$2\delta y^2 - \sum x_i^2 = 2 .$$

On peut avoir aussi d'autres surfaces du quatrième ordre transformées de $\Phi_{4\delta}$, qui ne sont pas obtenues par un système transformant multiple du système des sections hyperplanes de $\Phi_{4\delta}$, tel que le système que nous venons de considérer.

En tous cas, en rappelant le théorème du n. 27 concernant les surfaces de PICARD, il est aisé de reconnaître que, si les modules sont arbitraires, le système découpé sur la surface du quatrième ordre par les quadriques, sera représenté sur $\Phi_{4\delta}$ par un système découpé par des variétés ayant dans les points doubles une certaine multiplicité, et n'ayant d'ailleurs des courbes-base.

Ainsi donc on tombe sur la discussion arithmétique de l'équation

$$2\delta y^2 - \sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 2 .$$

La question de déterminer toutes les surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre de diviseur $\delta > 1$, dans le cas de modules arbitraires, se ramène à la discussion de cette équation de Pell généralisée. Il faut néanmoins tenir compte de certaines inégalités qui expriment l'irréductibilité du système transformant considéré, et qui, dans un cas particulier, ont été étudiées de près par M. REMY.

53. *Quelques remarques au sujet du problème qui a pour objet de reconnaître si une surface donnée est hyperelliptique.* Soit une famille de surfaces algébriques dépendant de trois modules; si ces surfaces sont hyperelliptiques de rang $r > 1$, elles seront des surfaces régulières de rang $r = 2$, birationnellement identiques à des surfaces de KUMMER généralisées, c'est-à-dire, à des $\Phi_{4\delta}$ pour une valeur convenable de δ.

Ainsi donc *la question de reconnaître si une surface donnée (dépendant de trois modules) est hyperelliptique de rang $r > 1$, se ramène à celle de*

reconnaître l'identité birationnelle de notre surface avec un type de surfaces, qui vient caractérisé à un point de vue invariant par l'existence d'un certain groupe de courbes (le groupe qui correspond à celui des points doubles et des courbes de contact des hyperplans singuliers de Φ_{45}).

Pourtant, après avoir reconnu que les genres de la surface donnée sont tous égaux à 1 ($p_a = p_g = P_2 = 1$), il s'agira d'exprimer que la surface renferme un certain groupe de courbes rationnelles (de degré -2).

Or d'après un théorème de M. SEVERI, qu'il a récemment complété, toutes les courbes appartenant à une surface régulière, peuvent être obtenus par addition et soustraction en partant d'un nombre fini de systèmes linéaires. Par ce procédé *la question posée se ramène à la discussion arithmétique d'un système d'équations quadratiques.*

Ces remarques suffisent à montrer quel est en général le caractère du problème qui a pour objet de reconnaître si une surface donnée est hyperelliptique de rang $r > 1$. On serait amené toujours à des discussions analogues, dans le cas de surfaces régulières correspondant à des Φ dont les modules satisfont à des relations particulières.

Lorsqu'il s'agit de surfaces irrégulières, la question devient beaucoup plus simple et, comme nous aurons lieu de le montrer, on arrive à définir les surfaces hyperelliptiques irregulières par les valeurs de certains caractères invariants.

VI. - Surfaces hyperelliptiques irrégulières de rang $r > 1$.

54. – D'après les nn. 31, 36 toute surface hyperelliptique irrégulière de rang $r > 1$, est une surface elliptique de genres

$$p_g = 0\,, \qquad p_a = -1$$

renfermant deux faisceaux de courbes elliptiques.

Le théorème fondamental que nous avons établi au n. 44, permet de déterminer toutes les familles birationnellement distinctes de surfaces hyperelliptiques irrégulières, et cette analyse, en laquelle nous avons été précedés par MM. BAGNERA et DE FRANCHIS, amène à trouver toutes les surfaces elliptiques renfermant deux faisceaux de courbes elliptiques.

De notre côté, et d'une façon indépendante de ces recherches, nous avons établi la classification des surfaces hyperelliptiques irrégulières en tâchant de démontrer directement la réciproque de la proposition du n. 36; il s'ensuit que les surfaces hyperelliptiques irrégulières correspondent aux valeurs

$$r = 2, 3, 4, 6$$

du rang r, et qu'elles peuvent être définies d'après les valeurs de leurs plurigenres.

On a ainsi le théorème fondamental suivant.

Toute surface de genre arithmétique $p_a = -1$ et dont le genre et les plurigenres géométriques ont les valeurs 0, 1, est une surface hyperelliptique. Le tableau des familles différentes correspondantes à ces hypothèses, se trouvera indiqué en détail au n. 57.

55. *Rappel de quelques notions concernant les surfaces elliptiques.* – Il faut rappeler d'abord quelques propriétés des surfaces elliptiques de genre $p_g = 0$ ([34]).

Il y a sur toute surface de cette famille un faisceau elliptique de courbes C de genre $\pi > 0$, et un faisceau rationnel de courbes elliptiques K; une courbe C et une courbe K se coupent en un certain nombre n de points, et ce nombre vient appelé le *déterminant* de la surface. Nous considérerons en particulier le cas $\pi = 1$, qui nous interesse ici.

Toute surface elliptique de genre $p_g = 0$ et de déterminant n, peut être représentée sur un cylindre elliptique, multiple suivant le nombre n,

$$\varphi(x, y) = 0;$$

il y aura sur φ une courbe de diramation formée par les courbes

$$z = a_1\,,\ z = a_2\,,\ \ldots,\ z = a_t\,,$$

à compter respectivement suivant les ordres

$$s_1\,,\ s_2\,,\ \ldots,\ s_t\,.$$

Si la surface elliptique doit renfermer un faisceau elliptique de courbes C de genre 1, on aura

$$\sum_{i=1}^{i=t} \frac{s_i - 1}{s_i} = 2\,,$$

et par suite l'on tombera nécessairement sur un des cas suivants:

a) $\qquad t = 4\,, \qquad s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2\,, \qquad n = 2\delta\,,$

(δ étant un entier *à priori* quelconque).

([34]) Cfr. ENRIQUES, « Rendiconti del circolo mat. di Palermo », 1905 [questo volume, XXXVI].

La surface ainsi définie dépend de *deux modules* c'est-à-dire du module de φ et du rapport anharmonique $(a_1\, a_2\, a_3\, a_4)$. Les valeurs de ses genres et de ses plurigenres sont données par la formule de ENRIQUES (l. c. § 8):

$$P_m = 1 + m(t-2) - \sum_{i=1}^{t} \varrho_i ,$$

où ϱ_i est un entier satisfaisant aux conditions

$$\frac{m}{s_i} \leqslant \varrho_i < \frac{m}{s_i} + 1 ,$$

et où l'on prend $P_m = 0$ lorsque le second membre de la formule résulte négatif. On obtient ainsi

$$p_a = -1 , \qquad P_{2i+1} = 0 , \qquad P_{2i} = 1 .$$

Réciproquement ces valeurs suffisent à caracteriser les surfaces elliptiques dont il s'agit. Il suffit même de savoir que

$$p_a = -1 , \qquad p_g = 0 , \qquad P_2 = P_4 = 1 .$$

En effet étant $p_a = -1$, $p_g = 0$, on a une surface elliptique dont les plurigenres peuvent être calculés d'après la formule citée d'ENRIQUES. Or si $P_2 = t - 3 = 1$, il suit $t = 4$; et si $P_4 = 1$, étant $s_i \geqslant 2$, il suit

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2 .$$

b) $\qquad t = 3 , \qquad s_1 = s_2 = s_3 = 3 , \qquad n = 3\delta .$

La surface ainsi définie dépend d'un module, c'est-à-dire du module de φ (les courbes C sont en ce cas équianharmoniques).

On a

$$p_a = -1 , \qquad P_{3i+1} = P_{3i+2} = 0 , \qquad P_{3i} = 1 .$$

Ces valeurs des invariants suffisent à caracteriser les surfaces dont il est question. Il suffit même que l'on ait

$$p_a = -1 , \qquad P_3 = 1 , \qquad P_8 = 0 ,$$

car d'après la formule habituelle on en déduit $t = s_1 = s_2 = s_3 = 3$.

c) $\qquad t = 3 , \qquad s_1 = 2 , \qquad s_2 = s_3 = 4 , \qquad n = 4\delta .$

La surface ainsi définie — renfermant un faisceau de courbes harmoniques C — dépend d'un module. On a

$$p_a = -1\,, \qquad P_{4i+1} = P_{4i+2} = P_{4i+3} = 0\,, \qquad P_{4i} = 1\,.$$

Ces valeurs des invariants suffisent à caracteriser les surfaces elliptiques dont il est question. Il suffit même que l'on ait

$$p_a = -1\,, \qquad P_6 = P_{10} = 0\,, \qquad P_4 = 1\,.$$

d) $\quad t = 3\,, \quad s_1 = 2\,, \quad s_2 = 3\,, \quad s_3 = 6\,, \quad n = 6\delta\,.$

La surface ainsi définie — renfermant comme dans le cas b) un faisceau de courbes équianharmoniques — dépend aussi d'un module. On a

$$p_a = -1\,, \qquad P_{6i+1} = P_{6i+2} = \ldots = P_{6i+5} = 0\,, \qquad P_{6i} = 1\,.$$

Ces valeurs des invariants caracterisent les surfaces elliptiques dont il s'agit. Il suffit même que l'on ait:

$$p_a = -1\,, \qquad P_2 = P_3 = P_{14} = 0\,, \qquad P_6 = 1\,.$$

Dans ce cas la discussion relative est peut-être moins simple et par suite nous l'exposons ici brièvement.

Étant $P_2 = 0$ et par suite $p_g = 0$, il s'agit d'une surface elliptique. La relation $P_2 = 0$ amène $t = 3$, tandis que la relation $P_6 = 1$ donne

$$\alpha) \qquad s_i \geqslant 3\,, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

ou

$$\beta) \qquad s_1 = 2\,, \quad s_2 \geqslant 3\,, \quad s_3 \geqslant 6\,.$$

Ceci posé, remarquons que $P_4 = 0$, car s'il était $P_4 > 0$, étant $P_6 = 1$, on aurait $P_2 = 1$. La relation $P_4 = 0$, jointe aux $\alpha)$ $\beta)$, donne respectivement.

$$\alpha') \quad s_1 = s_2 = s_3 = 3\,, \qquad \text{ou} \qquad \alpha'') \quad s_1 = s_2 = 3\,, \quad s_3 \geqslant 4\,,$$

$$\beta') \quad s_1 = 2\,, \quad s_2 = 3\,, \quad s_3 \geqslant 6\,.$$

Comme les valeurs $\alpha')$ $\alpha'')$ donnent $P_3 = 1$, la relation $P_3 = 0$ rend possible seulement l'hypothèse $\beta')$. Enfin la relation $P_{14} = 0$ nous montre qu'il doit être $s_3 = 6$.

56. *Construction d'une surface de Picard représentée sur une surface elliptique multiple renfermant deux faisceaux de courbes elliptiques.* – Soit $\Phi(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface elliptique d'ordre m — douée de singularités ordinaires — appartenant à un des types a) b) c) d) envisagés au n. préc., et soit $X(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface r-adjointe d'ordre $r(m-4)$ attachée à Φ, où r $(= 2, 3, 4, 6)$ est l'indice du premier plurigenre différent de zéro.

Envisageons la surface F représentée par les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \Phi(x, y, z) = 0 , \\ u^r = X(x, y, z) , \end{cases}$$

x, y, z, u étant les coordonnées d'un point d'un espace à quatre dimensions. Nous prouverons que les courbes coupées sur F par les hyperplans parallèles à la droite u, sont des courbes *irréductibles* se coupant deux à deux suivant des groupes *canoniques*.

Ce résultat étant établi, on aura à considérer une correspondance $(1, r)$ entre les surfaces irréductibles Φ, F; dans cette correspondance il n'y a pas de points de coïncidence, car la $X = 0$ ne coupe la $\Phi = 0$ hors de la ligne double de Φ, et par suite sur la surface le radical $\sqrt[r]{X(x, y, z)}$ ne présente aucun point de *diramation effective*. D'après une formule de M. SEVERI [35] on pourra pourtant calculer le genre numérique p_a de F; on trouve ainsi $p_a = -1$. Comme la F vient renfermer des courbes pluricanoniques d'ordre zéro — transformées des courbes pluricanoniques de Φ — elle sera ou bien une surface elliptique de genre $p_g = 0$, ou bien une surface ayant les genres $p_g = 1$, $p_a = -1$ et la courbe canonique d'ordre zéro. La première hypothèse s'écarte tout de suite en se rappelant que F renferme un système linéaire dont la série caractéristique est canonique; on en déduit que F est une surface hyperelliptique de rang 1, c'est-à-dire une surface de PICARD (ou de JACOBI).

D'après la définition du rang, r désignera le rang de la surface hyperelliptique Φ.

Il s'agit maintenant d'établir que les sections hyperplanes de F, sont irréductibles, et de déterminer leurs mutuelles intersections. Soit $z = z_0$ un hyperplan parallèle à la droite u et envisageons la courbe gauche Γ, qui est représentée par les équations:

$$(2) \qquad \begin{cases} \Phi(x, y, z_0) = 0 , \\ u^r = X(x, y, z_0) . \end{cases}$$

---

[35] « Rendiconti del R. Ist. Lombardo », (2), t. 36, 1903.

Considérons le faisceau $|\Gamma|$ coupé sur le cylindre $\Phi(x, y, z_0) = 0$ par le faisceau de surfaces

$$u^r = \lambda X(x, y, z_0) .$$

Pour $\lambda = 0$ on obtient la courbe $\Phi(x, y, z_0) = 0$, que nous désignerons par C, à compter r fois, et les génératrices à l'infini du cylindre, formant un groupe que nous désignerons par I, dont chacune doit être comptée $r(m-5)$ fois. Pour $\lambda = \infty$ on obtient le groupe H formé par les couples de génératrices qui coïncident avec les génératrices doubles du cylindre, dont chacune doit être comptée r fois. On en tire que les courbes

$$rC + r(m-5)I , \quad rH \tag{3}$$

appartiennent totalement au faisceau $|\Gamma|$. Comme ces courbes n'ont pas des parties communes, si le faisceau $|\Gamma|$ est réductible, en vertu d'une proposition connue de MM. NOETHER et ENRIQUES, toute courbe Γ sera composée par un certain nombre $h > 1$ de parties irréductibles Δ, formant une involution d'ordre h dans un faisceau $|\Delta|$; celui-ci sera linéaire puisque sur le cylindre on n'a pas des faisceaux irrationnels différents du faisceau des génératrices. Les courbes (3) donneront des éléments multiples de cette involution. Il s'ensuit que r est égal à un multiple hl de h ($r = hl$, $r > l$), et que les courbes $lC + l(m-5)I$, lH sont des courbes Δ.

Pourtant les groupes coupés par ces courbes sur une section plane C_1 du cylindre seront équivalents. Or la courbe $lC + l(m-5)I$ coupe sur une C_1 un groupe équivalent à la section sur C_1 d'une courbe d'ordre $l(m-4)$, et la courbe lH rencontre C_1 suivant les $2d$ couples coïncidant dans les d points doubles de C_1, à compter chacune l fois. On en tire aisément que le multiple d'ordre l du groupe coupé par une droite sur une section plane de notre surface Φ, est équivalent à un groupe l-canonique.

Cette conclusion est absurde, car le plurigenre P_l de Φ résulterait > 0, tandis qu'on a supposé que P_r soit le premier plurigenre non nul. Pourtant $h = 1$ et les courbes (2) sont irréductibles.

Il nous reste à montrer que les plans parallèles à la droite u coupent sur la courbe Γ des groupes canoniques. La courbe Γ étant l'intersection complète d'une surface d'ordre m, $\Phi(x, y, z_0) = 0$, et d'une surface d'ordre $r(m-4)$, $u^r = X(x, y, z_0)$, on pourra couper sur Γ la série canonique au moyen des surfaces — adjointes à Γ — d'ordre $(r+1)(m-4)$ ayant la multiplicité $s_1 + s_2 - 2$ en tout point s_1-ple pour $\Phi = 0$ et s_2-ple pour $u^r = X$ (NOETHER).

Pour plus de clarté nous développerons le raisonnement dans le cas de $r = 2$.

Comme dans le sommet O_∞ du cylindre on a $s_1 = m$, $s_2 = 2m - 10$, les surfaces d'ordre $3(m-4)$ adjointes à Γ, auront en O_∞ un point mul-

tiple d'ordre $3(m-4)$ et par suite elles seront des cylindres ayant le sommet O_∞. A tout point double de la courbe $\Phi(x, y, z_0) = 0$ correspond un point P quadruple par rapport à Γ: deux branches de Γ étant tracées sur une nappe du cylindre et deux branches sur l'autre. On en tire que les cylindres adjoints à Γ doivent passer doublement par tout point P, c'est-à-dire qu'ils doivent être des cylindres biadjoints au cylindre Φ.

Il est maintenant nécessaire de bien fixer le comportement de ces cylindres en O_∞: La courbe Γ passe par ce point avec la multiplicité $2m(m-5)$ et y possède m tangentes distinctes, qui sont les génératrices à l'infini du cylindre Φ. On voit aisément qu'en correspondance de chacune de ces tangentes, Γ possède un point $2(m-5)$-ple et $m-5$ points doubles successifs, qui tombent en des points doubles de la surface $u^r = X$. On en tire que les cylindres adjoints à Γ passent simplement par chacun de ces points, c'est-à-dire qu'en correspondance de chacune des m tangentes ils ont avec Γ la multiplicité d'intersection $2(m-5)(3m-11)$.

Or les conditions définissant un cylindre adjoint à Γ, sont satisfaites en prenant le cylindre formé par $X = 0$, par le plan à l'infini compté $m-5$ fois et par un plan passant par O_∞; on en conclût que ce plan coupe sur Γ un groupe canonique.

Lorsque r prend une quelconque des valeurs restant (3, 4, 6) on voit analoguement qu'une surface d'ordre $(r+1)(m-4)$ adjointe à Γ, est formée par le cylindre $X = 0$, augmenté du plan à l'infini compté $m-5$ fois et d'un plan arbitraire passant par O_∞; et l'on arrive en conséquence à la même conclusion que ci-dessus.

En nous résumant et en rappelant que les surfaces hyperelliptiques de rang 1 sont caracterisées par les valeurs $p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$ des invariants (n. 16), on peut énoncer le théorème suivant:

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface irrégulière Φ soit hyperelliptique, peuvent être exprimées en disant que la surface a le genre numérique $p_a = -1$ et que ses plurigenres P_i $(i = 1, 2, \ldots)$ prennent les valeurs 0, 1.

En désignant par r le rang de Φ, on a $r = 1, 2, 3, 4, 6$, et ces différents cas sont caractérisés par les valeurs suivantes des genres et des plurigenres:

$$p_a = -1 \begin{cases} r = 1, & p_g = P_4 = 1 \\ r = 2, & p_g = 0, \quad P_2 = P_4 = 1 \\ r = 3, & P_8 = 0, \quad P_3 = 1 \\ r = 4, & P_6 = P_{10} = 0, \quad P_4 = 1 \\ r = 6, & P_2 = P_3 = P_{14} = 0, \quad P_6 = 1 \ (36). \end{cases}$$

(36) Nous avons déjà publié ce résultat dans les Atti della R. Acc. dei Lincei (séance du 5 janvier 1908) [questo volume, XLIII].

57. *Détermination de la valeur du diviseur δ appartenant aux surfaces hyperelliptiques irrégulières. Types des substitutions linéaires sur u, v qui correspondent à ces surfaces.* – En nous appuyant sur le théorème établi au n. préc. nous pouvons déterminer aisément toutes les classes distinctes de surfaces hyperelliptiques irrégulières, ce qui revient à calculer les valeurs qu'on peut donner à leur diviseur δ. On retrouvera ainsi sous une autre forme, les résultats d'une classification établie directement par MM. BAGNERA et DE FRANCHIS (37).

Désignons par δ le diviseur de la surface hyperelliptique F de rang 1, représentée, d'après le n. préc. sur la surface r-ple Φ, de rang r. Aux deux faisceaux de courbes elliptiques de Φ, correspondent sur F deux faisceaux de courbes elliptiques, c'est-à-dire qu'il y a deux intégrales *elliptiques* u, v attachées à F.

Les groupes de r points de F correspondant aux points de Φ, ne peuvent pas être ramenés en eux-mêmes par une transformation de 2^{me} espèce de la surface, car autrement on pourrait construire une autre surface F' de rang 1 représentée sur la surface r'-ple Φ (r' étant un diviseur de r), et cela de façon qu'il n'y ait pas sur Φ des points de diramation, de sorte que le plurigenre $P_{r'}$ de Φ aurait la valeur $P_{r'} = 1$, tandis que P_r est le premier plurigenre non nul.

On en tire que l'involution I_r image de Φ, est engendrée sur F par un groupe G_r de transformations birationnelles de F en elle-même (n. 44), et que le diviseur de Φ est égal au diviseur δ de F.

Les transformations de G_r seront représentées par des substitutions de la forme

$$(4) \qquad u' = u + k\,, \qquad v' = \mu v\,, \qquad (\mu = -1\,,\ e^{2\pi i/3}\,,\ e^{-2\pi i/3}\,,\ i)\,,$$

$u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, étant les faisceaux élliptiques de F qui correspondent respectivement au faisceau elliptique et au faisceau rationnel de Φ. Il s'ensuit que G_r est un groupe cyclique (et l'on retrouve ainsi que $r = 2, 3, 4, 6$).

Quant à la constante k, elle devra être déterminée de façon que rk, et non $r'k$ ($r' < r$), soit une période de l'intégrale elliptique u; autrement G_r renfermerait une transformation non identique

$$u' = u\,, \qquad v' = \mu v\,,$$

et il y aurait la courbe de coïncidence $v(\mu - 1) = 0$, c'est-à-dire que I_r serait représentée par une réglée.

---

(37) « Atti della R. Acc. dei Lincei », 21 Avril 1907, n. 5.

Ceci posé examinons les différents cas correspondants aux valeurs de r.

Premier cas: $r = 2$. – Le groupe G_r est engendré par la substitution

$$S) \qquad u' = u + \frac{\theta}{2}, \qquad v' = -v,$$

θ étant une période de l'intégrale elliptique u. On a par suite sur F la transformation birationnelle

$$T) \qquad u' = u, \qquad v' = -v,$$

qui possède une courbe de coïncidence ($v = 0$). Pourtant sur toute courbe $u = \text{const.}$, la T donne une série linéaire g_2^1 douée de 4 coïncidences. Comme la courbe de coïncidence de la T est composée par un certain nombre y de courbes $v = \text{const.}$ — parmi lesquelles la $v = 0$ — en désignant par x le nombre des intersections de deux courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, nous aurons nécessairement

$$xy = 4,$$

et par suite

$$x = 1, \quad y = 4; \qquad x = 2, \quad y = 2; \qquad x = 4, \quad y = 1.$$

a) $x = 1$, $y = 4$. La surface F est alors la surface de JACOBI qui correspond à une courbe de genre deux décomposée en deux courbes elliptiques, et par conséquent on a le tableau des périodes

u	1	0	g	0
v	0	1	0	g'.

Effectivement dans ce cas la substitution

$$u' = u + \frac{1}{2}, \qquad v' = -v,$$

engendre sur F une involution représentée par une surface elliptique ayant $r = 2$, $\delta = 1$.

b) $x = y = 2$. On a sur F deux faisceaux dont les courbes se coupent en deux points. Démontrons que la F a le diviseur 2. Soit en effet

u	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
v	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4

le tableau des périodes normales des intégrales u, v, les indices 1, 3 et 2, 4 étant associés.

L'involution J_2 engendrée sur F en coupant deux à deux les courbes des deux faisceaux, sera représentée par une substitution de 2me espèce de la forme

$$u' = u + \frac{\omega_1}{2}, \qquad v' = v + \frac{\theta_1}{2},$$

car le premier couple $(\omega_1\theta_1)$ des périodes normales peut être choisi arbitrairement. Comme J_2 est identique à une surface de diviseur 1 — la surface des couples de points de deux courbes elliptiques — on pourra conclure que le tableau

$$\begin{array}{cccc} \frac{\omega_1}{2} & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \frac{\theta_1}{2} & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{array}$$

doit se rapporter à une surface de diviseur 1, et par suite que

$$\frac{\omega_1}{2}\theta_3 - \omega_3\frac{\theta_1}{2} + \omega_2\theta_4 - \omega_4\theta_2 = 0.$$

Cette relation montre que notre surface F a le diviseur $\delta = 2$.

De la forme des périodes de la surface de JACOBI représentant J_2, on tire que les périodes normales de u, v, sur la surface F, au moyen d'une substitution linéaire sur u, v, peuvent se réduire à la forme

$$\begin{array}{c|cccc} u & \frac{1}{2} & 0 & g & \frac{1}{2} \\ v & 0 & 1 & \frac{1}{2} & g'. \end{array}$$

On voit que la substitution

$$u' = u + \frac{1}{4}, \qquad v' = -v,$$

engendre sur F une involution représentée par une surface elliptique Φ de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 2$.

c) $x = 4$, $y = 1$. Sur la surface F qui se rapporte à ce cas, considérons l'involution J_4 qu'on obtient en coupant deux à deux les courbes des deux faisceaux $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$; cette involution peut aussi être engendrée par un groupe Γ_4 de transformations de 2^{me} espèce qui ramènent en elle-même la courbe de coïncidence de la trasformation T et par suite la transformation T elle-même.

En multipliant T par les transformations de Γ_4 on engendre un groupe Γ_8 formé pas des transformations permutables involutoires.

En substituant à T la transformation S, dépourvue de coïncidences, nous obtiendrons un groupe Δ_8 en isomorphisme oloédrique avec Γ_8. Sur la courbe $v = 0$ qui reste invariant vis-à-vis des transformations de Δ_8, ce groupe donne lieu à un groupe Δ_8' engendrant une involution elliptique γ_8^1. Comme Δ_8' est isomorphe à Δ_8, Δ_8' renfermera 7 transformations involutoires de 2^{me} espèce sur $v = 0$, tandis que sur une courbe elliptique on ne trouve que 3 de telles transformations. On en conclut que le cas c) est impossible (38).

Deuxième cas: $r = 3$. Le groupe G_3 est donné par

$$S) \qquad u' = u + \frac{\theta}{3}, \qquad v' = \varepsilon v, \qquad (\varepsilon = e^{2\pi i/3}),$$

θ étant une période de l'intégrale elliptique u. On a la transformation

$$T) \qquad u' = u, \qquad v' = \varepsilon v,$$

possédant une courbe de coïncidence, dont fait partie la $v = 0$. Sur toute courbe $u = \text{const.}$, T donne une série g_3^1, douée de 3 points triples. En désignant par y le nombre des courbes $v = \text{const.}$ qui forment la courbe de coïncidence de T, et par x le nombre des points communs à $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, on a par suite

$$xy = 3,$$

d'où

$$x = 1, \quad y = 3; \qquad x = 3, \quad y = 1.$$

(38) On peut construire aisément des surfaces pour lesquelles $x = 4$, $y = 1$ et qui renferment des groupes du type Γ_8; telle est p. ex. la surface de JACOBI correspondant au tableau

$$\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & g' \end{array}\right.$$

. Mais sur cette surface on n'a pas des transformations involutoires sans coïncidences du type

$$u' = u + \text{const.}, \qquad v' = -v.$$

d) $x = 1$, $y = 3$. Le faisceau $v = \text{const.}$ sera équianharmonique et l'on aura le tableau

$$\begin{array}{c|cccc} u & 1 & 0 & g & 0 \\ v & 0 & 1 & 0 & \varepsilon . \end{array}$$

Effectivement dans ce cas la substitution

$$u' = u + \frac{1}{3}, \qquad v' = \varepsilon v ,$$

engendre sur F une involution I_3 identique à une surface elliptique pour laquelle $r = 3$, $\delta = 1$.

e) $x = 3$, $y = 1$. Comme dans le cas b), on voit que le tableau des périodes relatives à F, se réduit au diviseur 1 en ajoutant la troisième partie d'une période, et l'on en tire que F a le diviseur 3. On voit aussi comme en b) que le tableau correspondant à F peut être mis sous la forme

$$\begin{array}{c|cccc} u & \frac{1}{3} & 0 & g & \frac{1}{3} \\ v & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1-\varepsilon}{3} , \end{array}$$

et par suite que F possède la transformation

$$u' = u + \frac{1}{9}, \qquad v' = \varepsilon v ,$$

qui engendre une involution représentée par une surface elliptique ayant $r = \delta = 3$.

Troisième cas: $r = 4$. Le groupe G_4 est donné par

$$S) \qquad u' = u + \frac{\theta}{4}, \qquad v' = iv ;$$

la transformation

$$T) \qquad u' = u , \qquad v' = iv$$

donne sur toute courbe $u = \text{const.}$ une g_4^1 douée de 2 points 4-ples et de

2 points doubles. Les deux points 4-ples peuvent varier en $y \geqslant 1$ courbes $v = \text{const.}$; on a la condition

$$xy = 2,$$

et par suite

$$x = 1, \quad y = 2; \qquad x = 2, \quad y = 1.$$

f) $x = 1$, $y = 2$. On a le tableau

u	1	0	g	0
v	0	1	0	i.

La substitution

$$u' = u + \frac{1}{4}, \qquad v' = iv,$$

donne sur F une involution représentée par une surface elliptique ayant $r = 4$, $\delta = 1$.

g) $x = 2, y = 1$. On tombe sur une surface du type b) correspondant au tableau:

u	$\frac{1}{2}$	0	g	$\frac{1}{2}$
v	0	1	$\frac{1}{2}$	g'.

Comme le faisceau $v = \text{const.}$ doit être harmonique, on peut poser $g' = (i + 1)/2$, et alors on voit que la substitution

$$u' = u + \frac{1}{8}, \qquad v' = iv,$$

donne sur F une involution représentée par une surface elliptique ayant $r = 4$, $\delta = 2$.

Quatrième cas: $r = 6$. En suivant la marche habituelle on trouve sur les courbes $u = \text{const.}$ une g_6^1 douée d'un point 6-ple, de deux points 3-ples et de trois points doubles. Le point 6-ple décrit la courbe $v = 0$, qui, par conséquent, vient couper toute courbe $u = \text{const.}$ en un seul point. Comme le faisceau $v = \text{const.}$ doit être équianharmonique, on aura le

tableau

$$\begin{array}{c|cccc} u & 1 & 0 & g & 0 \\ v & 0 & 1 & 0 & \varepsilon, \end{array}$$

et la substitution $u' = u + \frac{1}{6}$, $v' = -\varepsilon v$ engendrera sur F une involution représentée par une surface elliptique pour laquelle $r = 6$, $\delta = 1$.

En résumant, on peut former le tableau suivant qui donne *les valeurs du rang r, du diviseur δ et du déterminant n $(= r\delta)$ ainsi que les périodes et les substitutions linéaires sur u, v, qui correspondent aux surfaces hyperelliptiques irrégulières de rang $r > 1$.*

r	δ	n	Périodes	Substitutions sur u, v
2	1	2	$\begin{cases} 1 & 0 & g & 0 \\ 0 & 1 & 0 & g' \end{cases}$	$u' = u + \frac{1}{2}$, $v' = -v$
2	2	4	$\begin{cases} \frac{1}{2} & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & g' \end{cases}$	$u' = u + \frac{1}{4}$, $v' = -v$
3	1	3	$\begin{cases} 1 & 0 & g & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \varepsilon \end{cases}$	$u' = u + \frac{1}{3}$, $v' = \varepsilon v$
3	3	9	$\begin{cases} \frac{1}{3} & 0 & g & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & (1-\varepsilon)/3 \end{cases}$	$u' = u + \frac{1}{9}$, $v' = \varepsilon v$
4	1	4	$\begin{cases} 1 & 0 & g & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \end{cases}$	$u' = u + \frac{1}{4}$, $v' = iv$
4	2	8	$\begin{cases} \frac{1}{2} & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & (1+i)/2 \end{cases}$	$u' = u + \frac{1}{8}$, $v' = iv$
6	1	6	$\begin{cases} 1 & 0 & g & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \varepsilon \end{cases}$	$u' = u + \frac{1}{6}$, $v' = -\varepsilon v$

VII. - Surfaces hyperelliptiques admettant une représentation paramétrique propre par des fonctions Θ irréductibles.

58. *Quelques remarques au sujet des surfaces admettant une représentation paramétrique par des fonctions hyperelliptiques irréductibles.* – Nous avons reconnu d'abord que les surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$ se réduisent, pour des valeurs arbitraires des modules, aux surfaces régulières de rang 2 (surface de KUMMER et ses généralisations pour $\delta > 1$).

Pour des valeurs particulières des modules, il se présente d'autres

surfaces hyperelliptiques correspondant à des surfaces de JACOBI (ou de PICARD) qui admettent des transformations birationnelles en elles-mêmes outre que les transformations ordinaires de 1re et de 2me espèce.

Le problème général de déterminer toutes les familles birationnellement distinctes de surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$, peut être traité en procédant de la façon suivante:

On déterminera d'abord toutes les surfaces de rang 1 admettant des transformations birationnelles en elles-mêmes; à tout groupe fini de transformations correspond une involution qui en est engendrée; celles parmi ces involutions qui ne sont pas rationnelles ou représentées par des réglées, nous amènent à des surfaces hyperelliptiques dont le rang est égal à l'ordre du groupe.

Or il y a lieu à distinguer deux cas:

1) celui où il s'agit d'involutions appartenant à une surface de JACOBI associée à une courbe de genre 2 *irréductible*;

2) le cas où il s'agit d'involutions sur une surface de JACOBI associée à une courbe *réductible*.

Étant donnée une surface hyperelliptique de rang r, correspondante à une involution du type (1), on dira que la *représentation paramétrique* de la surface est obtenue *par des fonctions hyperelliptiques de rang r irréductibles*. En ce cas il est impossible de remplacer les fonctions hyperelliptiques de u, v, qui fournissent notre représentation, par des fonctions elliptiques $p_1(au + bv)$, $p_2(cu + dv)$, lorsque, bien entendu, on construit la surface de rang 1, F, correspondante à Φ, au moyen des *périodes primitives* des fonctions qui donnent la représentation de Φ (voir le n. 12).

Lorsqu'on envisage la périodicité par rapport à un tableau non primitif, la représentation de Φ peut devenir réductible. Il y a lieu d'éclaircir cette remarque par un exemple. Considérons les deux tableaux

$$\alpha) \begin{Vmatrix} 1 & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & g' \end{Vmatrix} \qquad \beta) \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2g & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2g'. \end{Vmatrix}$$

D'après la remarque du n. 12, la surface de JACOBI F correspondant à α) représente une involution sur la surface de JACOBI F' correspondant à β); et tandis que F est associée à une courbe de genre 2 irréductible, F' est associée à une courbe réductible. Pourtant une surface hyperelliptique Φ qui admet une représentation irréductible (de rang r) par rapport à α), admet aussi une représentation réductible (de rang $4r$) par rapport à β).

Dans la suite nous nous rapporterons au cas (1), *en supposant aussi pour simplicité*, $\delta = 1$.

En se rappelant le résultat établi tout à l'heure pour les surfaces hyperelliptique irrégulières, on voit que les types ayant $\delta = 1$ amènent à des représentations réductibles.

Suivant notre programme il s'agira de classifier les surfaces de JACOBI (associées à des courbes irréductibles) qui admettent des transformations non ordinaires en elles-mêmes. Et on pourra laisser de côté les transformations cycliques de la forme:

$$u' = u + k\,, \qquad v' = \mu v\,,$$

parce que celles-ci amènent à des surfaces hyperelliptiques irrégulières où à des involutions sur de telles surfaces, et, lorsque $\delta = 1$, elles correspondent à des cas de réductibilité de la représentation paramétrique.

En d'autres termes *nous aurons à étudier les groupes appartenant à une surface de Jacobi attachée à une courbe de genre 2 irréductible et ne renfermant pas des transformations sans points unis* [39].

REMARQUE. – Les involutions régulières engendrées sur une surface de rang 1 par des groupes renfermant des transformations singulières sans points unis, restent pourtant exclues de notre étude. Elles amènent à des surfaces régulières de genre $p_g = 0$ et de bigenre $P_2 = 1$, qui ont été objet des recherches de MM. BAGNERA et DE FRANCHIS [40].

59. *Transformations d'une surface de Jacobi en elle-même: transformations de* HERMITE *et de* M. HUMBERT. – Soit F une surface de JACOBI correspondante au tableau de périodes normales

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g'. \end{matrix}$$

L'analyse des cas où il y a des transformations birationnelles non ordinaires de F en elle-même, nous ramène à considérer les relations fondamentales (A), (B), (C), (D), du n. 45, savoir

$$\text{(A)} \quad g^2a_3 + gh(a_2 + b_3) + h^2b_2 + g(a_0 - d_3) + h(b_0 - d_2) - d_0 = 0$$

$$\text{(B)} \quad gha_3 + gg'a_2 + h^2b_3 + hg'b_2 + ga_1 + h(b_1 - d_3) - g'd_2 - d_1 = 0$$

$$\text{(C)} \quad gha_3 + gg'b_3 + h^2a_2 + hg'b_2 - gc_3 + h(a_0 - c_2) + g'b_0 - c_0 = 0$$

$$\text{(D)} \quad h^2a_3 + hg'(a_2 + b_3) + g'^2b_2 + h(a_1 - c_3) + g'(b_1 - c_2) - c_1 = 0\,.$$

---

[39] Que « toute transformation cyclique sans points unis se ramène à la forme $u' = u + k$, $v' = \mu v$ » c'est une conséquence immédiate du théorème de M. HAMBURGER sur les substitutions linéaires homogènes; il suffit de se rapporter au cas où l'équation caractéristique a la racine 1.

[40] « Rendiconti dei Lincei », 21 avril 1907, n. 6; « Comptes rendus », 4 novembre 1907.

Nous avons dit que ces relations se réduisent à des identités pour des valeurs arbitraires de g, h, g', et on tombe alors sur les transformations ordinaires de F.

Si les relations (A), (B), (C), (D) ne sont pas des identités, on dira que les périodes g, h, g' sont liées par des *relations entières*, qui doivent se réduire au plus à *trois* distinctes.

Une relation entière peut se présenter quelque fois sous la forme particulière

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0 .$$

On démontre que si les (A), (B), (C), (D) ne sont pas identiques, les périodes sont liées au moins par une telle relation singulière (41).

Au moyen des 16 entiers caractéristiques, M. HUMBERT a composé deux autres entiers l, k, qu'il a appelés les *indices* de la transformation, et qui jouent un rôle fondamental dans la théorie. Rappelons ici la définition de ces nombres.

Des relations (A), (B), (C), (D) on tire aisément la relation

$$[(ac)_{03} + (ac)_{12}]g + [(bc)_{12} - (ad)_{03} - (ad)_{12}]h + [(db)_{03} + (db)_{12}]g' + \\ + [(ab)_{03} + (ab)_{12}](h^2 - gg') + [(cd)_{03} + (cd)_{12}] = 0 ,$$

où l'on a posé

$$(ac)_{03} = a_0c_3 - a_3c_0 , \qquad (ac)_{12} = a_1c_2 - a_2c_1 , \quad \text{etc.}$$

Eh bien, si les coefficients (entiers) de cette relation ont un facteur commun — se réduisant à zéro lorsque la relation devient identique — ce facteur s'appelle *l'indice* k de la transformation.

Après avoir divisé par ce facteur (s'il est différent de zéro), la relation se présente sous la forme

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0 ,$$

A, B, C, D, E étant des entiers premiers entre eux.

Le second indice l est défini par

$$l = (ad)_{03} + (ad)_{12} ,$$

(41) HUMBERT, « Journal de Math. », 1900, pag. 330.

et entre les deux indices de la transformation birationnelle, on a la relation

$$1 = l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2 .$$

En particulier, lorsque $k = 0$, on tombe sur les *transformations de Hermite* (d'ordre 1), caractérisées par les relations

$$(1)\quad \begin{cases} (ac)_{03} + (ac)_{12} = (bd)_{03} + (bd)_{12} = (ab)_{03} + (ab)_{12} = (cd)_{03} + (cd)_{12} = 0 , \\ (bc)_{03} + (bc)_{12} = (ad)_{03} + (ad)_{12} = 1 . \end{cases}$$

La classe des transformations de HERMITE comprend les transformations ordinaires de 1re et de 2de espèce: mais pour des valeurs particulières des modules on a aussi des *transformations singulières de Hermite.*

Les transformations correspondantes à $k \neq 0$ sont toujours singulières et nous les appelerons *transformations de Humbert* (42).

60. Revenons au cas général d'une transformation d'indices l, k arbitraires. Nous allons former une combinaison de l, k ayant une signification géométrique remarquable.

Le système Σ représenté par

$$\Theta(u + \varrho, v + \sigma) = 0 ,$$

où Θ est une fonction thêta de 1r ordre et ϱ, σ sont des paramètres (n. 28), est changé par la transformation birationnelle envisagée, en un système Σ analogue, de degré 2 et de genre 2. L'équation des courbes de ce dernier système s'obtiendra en transformant la fonction Θ au moyen de la substitution linéaire

$$u' = \lambda u + \mu v + \alpha ,$$
$$v' = \lambda' u + \mu' v + \beta ,$$

qui répresente notre correspondance birationnelle. On obtient ainsi l'équation

$$\varphi(u + \varrho, v + \sigma) = 0 ,$$

où φ est une fonction intermédiaire d'indices l, k (n. 28) (43).

---

(42) M. HUMBERT réserve seulement à ces transformations la dénomination de « singulières ».

(43) HUMBERT, « Journal de Mathem. », 1900, pag. 311.

En appliquant une formule donnée par M. HUMBERT (J. d. M., 1900, p. 313) on trouve que les fonctions Θ, φ ont $2l + Bk$ zéros communs, et par suite on peut énoncer la proposition suivante:

Une transformation birationnelle d'indices l, k, attachée à la relation singulière

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0 ,$$

change le système Σ formé par les courbes de niveau zéro des fonctions Θ du 1^r^ ordre, en un système analogue formé par les courbes de niveau zéro des fonctions intermédiaires d'indices l, k; et ces dernières courbes coupent une des premières en $2l + Bk$ points.

En particulier si $k = 0$, et par suite $l = 1$, les courbes transformées coupent les courbes primitives en 2 points. Il s'ensuit qu'elles appartiennent au système Σ donné (n. 24).

On arrive à la même conclusion en se rappelant que *les transformations de Hermite sont caractérisées par la condition de changer une fonction thêta en une fonction analogue.*

61. *Sur la représentation paramétrique d'une surface hyperelliptique par des fonctions Θ.* – Envisageons sur la surface de JACOBI F une involution (régulière) I_r engendrée par les transformations birationnelles d'un groupe G_r, et soit Φ une surface hyperelliptique image de I_r:

Supposons d'abord que les r transformations de G_r soient des transformations de HERMITE, ou brièvement que G_r soit un *groupe de Hermite.*

Alors, en tenant compte du fait que les transformations de G_r changent en lui-même un système Σ fixé, on construit aisément un système linéaire irréductible $|D|$, appartenant totalement au multiple d'ordre l de Σ, de telle façon que toute courbe D soit changée en elle-même par G_r, c'est-à-dire que $|D|$ appartient à l'involution I_r. Si, comme on peut le supposer sans restriction, le système linéaire $|\Gamma|$ de Φ correspondant à $|D|$, est *simple*, on peut transformer birationnellement la surface Φ, de telle sorte que $|\Gamma|$ résulte le système des sections planes (ou hyperplanes) de la surface transformée, que nous désignerons encore par Φ.

Comme par un choix convenable des intégrales u, v, les courbes du système Σ viennent d'être représentées en égalant à zéro les fonctions Θ du 1^r^ ordre, le système $|D|$ viendra représenté par une équation de la forme

$$\lambda_0\Theta_0(u, v) + \lambda_1\Theta_1(u, v) + \ldots + \lambda_d\Theta_d(u, v) = 0 , \tag{2}$$

les Θ_i étant des fonctions thêta d'ordre l.

En désignant par $(x_0, x_1, \ldots, x_d)$ les coordonnées homogènes d'un point variable sur Φ, on pourra donc poser

$$\varrho x_i = \Theta_i(u, v), \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, d). \tag{3}$$

Pour des valeurs données des variables x les équations précédentes admettront seulement un nombre *fini* de solutions incongrues (u, v), car deux courbes D arbitraires se coupent en un nombre fini de points.

On remarquera que quelqu'une des solutions susdites pourra ne varier pas avec les x, lorsque le système $|D|$ ait des points-base.

Faisons maintenant le raisonnement réciproque. Soit Φ une surface hyperelliptique de rang r représentée par les formules (3), les Θ_i étant des fonctions d'ordre l telles que les équations (3) aient un nombre fini de solutions pour des valeurs arbitraires des coordonnées x d'un point de Φ. Au système linéaire $|\Gamma|$ coupé sur Φ par les plans (ou hyperplans), répond sur F le système linéaire $|D|$, représenté par (2). Comme le système $|D|$ appartient à l'involution I_r dont les groupes répondent aux points de Φ, toute courbe D sera changée en elle-même par les transformations du groupe G_r engendrant I_r: Il s'ensuit qu'une, T, de ces transformations change une courbe C de Σ en une courbe C_0 telle que les courbes lC, lC_0 appartiennent au même système continu. On en tire que C_0 coupe en deux points C et par suite (n. 24) que T change en lui-même le système Σ. On arrive pourtant à la conclusion que G_r est un groupe de HERMITE. Donc:

Toute surface hyperelliptique de rang r, répondant à une involution engendrée par un groupe de Hermite G_r, se laisse représenter au moyen des fonctions Θ, par des formules du type

$$\varrho x_i = \Theta_i(u, v), \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots);$$

ces équations admettant seulement un nombre fini *de solutions incongrues (u, v), pour des valeurs arbitraires des coordonnées x d'un point variable sur la surface. Réciproquement, toute surface hyperelliptique admettant une telle représentation, répond à un groupe de Hermite.*

Nous exprimerons brièvement ces propriétés en disant que *les surfaces répondant à des groupes de Hermite sont caractérisées par la condition d'admettre une* REPRÉSENTATION PROPRE *par des fonctions thêta.*

Si, au contraire, la surface Φ répond à un groupe G_r de HUMBERT (formé par des transformations de HUMBERT), aux sections planes de Φ répondront sur F des courbes D n'appartenant pas totalement à un système $l\Sigma$; mais on pourra toujours ajouter aux courbes du système linéaire $|D|$ une courbe fixe H, de telle sorte que les courbes $H + D$

appartiennent totalement à un système $l\Sigma$. Le système réductible $H + |D|$ sera représenté par une équation du type (2) et par suite la Φ admettra une représentation du type (3); mais *dans le cas actuel les équations* (3) *posséderont un nombre infini de solution fixes, répondant aux points de la courbe fixe* H, *et un nombre fini de solutions variables avec les* x.

On dira par conséquent que *toute surface hyperelliptique répondant à un groupe de Humbert admet une* REPRÉSENTATION IMPROPRE *par des fonctions* Θ.

Comme toute courbe tracée sur F peut être représentée d'une façon complète en égalant à zéro une fonction intermédiaire, dans le cas actuel le système $|D|$ pourra toujours être représenté par une équations du type

$$\lambda_0\varphi_0(u, v) + \lambda_1\varphi_1(u, v) + \ldots + \lambda_d\varphi_d(u, v) = 0 ,$$

les φ étant des fonctions intermédiaires n'ayant deux à deux qu'un nombre fini de zéros communs. Donc:

Toute surface hyperelliptique répondant à un groupe de Humbert admet une représentation propre par des fonctions intermédiaires.

62. *Quelques propriétés des transformations d'une surface de Jacobi en elle-même.* – Considérons une surface de JACOBI admettant une transformation birationnelle en elle-même

$$(T) \qquad \begin{cases} u' = \lambda u + \mu v + \alpha , \\ v' = \lambda' u + \mu' v + \beta . \end{cases}$$

En multipliant cette transformation T par les transformation de 2de espèce, on obtient la série continue ∞^2 de transformations analogues

$$(1) \qquad \begin{cases} u' = \lambda u + \mu v + h , \\ v' = \lambda' u + \mu' v + k , \end{cases}$$

(où h, k sont des paramètres).

En transformant T par la transformation de 2de espèce

$$(S) \qquad \begin{cases} u' = u + \gamma \\ v' = v + \delta \end{cases}$$

on obtient la transformation $S^{-1}TS$

$$\begin{aligned} u' &= \lambda u + \mu v + \alpha - (\lambda - 1)\gamma - \mu\delta , \\ v' &= \lambda' u + \mu' v + \beta - \lambda'\gamma - (\mu' - 1)\delta , \end{aligned}$$

transformation qui appartient à la même série ∞^2 (1) et peut être identifiée avec une transformation arbitraire de cette série, si le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & \mu \\ \lambda' & \mu' - 1 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Cette condition analytique se traduit en ce qu'il y a un nombre fini et > 0 de solutions des congruences:

$$(\lambda - 1)u + \mu v \equiv -\alpha ,$$
$$\lambda' u + (\mu' - 1)v \equiv -\beta ,$$

c'est-à-dire que T possède un nombre fini > 0 de points unis.

Ainsi donc:

Toute transformation T de F, ayant un nombre fini de points unis, vient transformée par les transformations de 2^{de} espèce en des transformations semblables formant une série ∞^2; cette même série peut être obtenue en multipliant T par les transformations de 2^{de} espèce.

REMARQUE. – Dans la série ∞^2 considérée, il y aura une transformation, semblable à T, qui aura le point uni $u = v = 0$, de sorte que la substitution sur u, v se réduit homogène.

Si T est une transformation périodique d'ordre n, toutes les transformations semblables auront la même période; parmi celles-ci il y en a une qui laisse invariant le point $u = v = 0$, et qui peut se réduire à la forme suivante

$$u' = \varepsilon^r u , \qquad v' = \varepsilon^s v , \qquad (\varepsilon = e^{(2\pi i)/n}),$$

(u, v étant des intégrales convenables non normales).

Une autre remarque qui se rattache à ce qui précède est la suivante.

Etant donnée sur F une transformation birationnelle T possédant des points unis, il y aura des transformations ordinaires qui ramènent T en elle-même; ce seront les transformations de 1^{re} et de 2^{de} espèce qui font correspondre à un point uni de T un point uni de la même transformation.

Cette propriété peut être reconnue aisément au point de vue géométrique. Soient A, B deux points unis distincts ou coïncidants de T, et soit S la transformation de 1^{re} ou de 2^{de} espèce portant A en B. La transformée de S par T sera une transformation de la même espèce que S, faisant correspondre B à A, et par suite ne différera pas de S; il s'ensuit que S, T sont échangeables, et par conséquent que S transforme T en elle-même.

63. *Transformations hermitiennes.* – Les propriétés que nous venons d'étudier se rapportent de même aux différentes sortes de transformations singulières qui peuvent appartenir à une surface de JACOBI. Tâchons maintenant de caractériser au point de vue géométrique les transformations hermitiennes.

Soit T une telle transformation de la surface F. Après avoir multiplié T par une transformation de 2^{de} espèce convenable, on peut supposer toujours qu'elle possède un point uni P. Fixons un système Σ de courbes C appartenant à F et envisageons la variété H formée par les ∞^1 courbes C issues par P.

Comme T transforme en lui-même le système Σ, on aura entre les éléments (courbes) de la variété H une transformation birationnelle, et par suite l'on aura une transformation analogue entre les points de la courbe de genre deux attachée a F (n. 22). Ainsi donc:

Toute transformation hermitienne d'une surface de Jacobi correspond à une transformation birationnelle de la courbe de genre 2 associée à la surface.

Réciproquement à toute transformation de cette courbe correspond une série, en général ∞^2, de transformations hermitiennes de la surface de Jacobi.

64. *Aperçu sur les surfaces hyperelliptiques de diviseur $\delta > 1$.* En ce qui précède nous nous sommes rapportés aux surfaces hyperelliptiques de diviseur $\delta = 1$ et par suite à la surface de JACOBI.

Il y a lieu d'étendre les considérations établies, aux surfaces de diviseur $\delta > 1$.

Etant donné sur F une transformation birationnelle

$$u' = \lambda u + \mu v + \alpha ,$$
$$v' = \lambda' u + \mu' v + \beta ,$$

on exprime tout d'abord λ, μ, λ', μ' au moyen des périodes par des relations qu'on obtient des relations (1) du n. 45 en changeant a_1, b_1, c_1, d_1 respectivement en

$$\frac{a_1}{\delta} , \quad \frac{b_1}{\delta} , \quad \frac{c_1}{\delta} , \quad \frac{d_1}{\delta} .$$

On arrivera ainsi aux relations entières analogues aux relations (A), (B), (C), (D).

Les transformations birationnelles existant sur F se partageront en deux familles: *transformations de Hermite*, qui changent entre elles les fonctions Θ_δ (n. 29) et *transformations de Humbert* qui changent une fonction Θ_δ en une fonction intermédiaire φ_δ.

Les considérations relatives à la représentation d'une surface hyperelliptique de rang r au moyen des fonctions thêta ou intermédiaires, s'étendent sans aucune difficulté aux surfaces de rang r et diviseur $\delta > 1$. On a une représentation *propre* par des fonctions Θ_δ seulement pour les surfaces répondant à des groupes de HERMITE; tandis que pour les surfaces répondant aux groupes de HUMBERT, on a une représentation propre par des fonctions φ_δ.

Ceci posé, on peut reconnaître que toute surface hyperelliptique admettant une représentation propre par des fonctions Θ_δ irréductibles correspond à une courbe de genre 2 possédant des transformations en elle-même.

En somme la détermination de ces surfaces hyperelliptiques, se ramène à celle des involutions I_δ appartenant à une surface de JACOBI et invariantes par rapport à un groupe de transformations de celle-ci.

Le rang étant > 2 on trouverait que δ ne peut recevoir qu'un nombre fini de valeurs.

Mais nous laisserons de côté cette discussion pour nous borner au cas $\delta = 1$; la remarque qui précède montre d'ailleurs comment cette analyse serait à compléter, et que les types qui se présentent pour $\delta > 1$ se rattachent étroitement à ceux que nous nous proposons de classifier, où $\delta = 1$.

65. *La classification des surfaces hyperelliptiques admettant une représentation propre par des Θ irréductibles, ramenée à l'analyse des courbes de genre 2 qui possèdent un groupe de transformations en elles-mêmes.* – Nous nous proposons de classifier les surfaces hyperelliptiques (régulières) de rang $r > 1$ et de diviseur $\delta = 1$, admettant une représentation propre par des fonctions Θ irréductibles.

En laissant de côté le cas $r = 2$ (ch. V), ces surfaces correspondent à des surfaces de JACOBI singulières admettant un groupe G_r de transformations en elles-mêmes, transformations possédant chacune un nombre fini de points unis, et correspondantes à des transformations analogues de la courbe de genre 2 associée à la surface.

Il s'agit donc de classifier les groupes G_r satisfaisant aux conditions établies.

Remarquons d'abord que parmi les transformations de G_r il peut y avoir une seule transformation ordinaire (de première espèce), parce que le produit de deux transformations de 1re espèce donnerait une transformation de 2de espèce, et le groupe G_r n'en renferme pas (étant $\delta = 1$).

Il s'ensuit que si le groupe G_r renferme des transformations à période pair $2p, 2q, \ldots$, les puissances d'ordre $p, q, \ldots$ de celles-ci, donneront lieu à une même transformation de 1re espèce. En effet chacune de ces puis-

sances est une transformation périodique d'ordre 2 douée de points unis en nombre fini, et par conséquent elle est une transformation ordinaire de 1re espèce.

On voit aussi que si G_r renferme une transformation de 1re espèce π, celle-ci est échangeable avec les autres transformations du groupe, car les transformées de π en G sont des transformations périodiques d'ordre 2.

Enfin si à côté de π il y a en G_r une transformation T à période impair p, la transformation $T\pi$ sera à période $2p$, et sa puissance d'ordre p sera π.

Ces remarques faites, considérons la courbe f de genre 2, qui est associée à F.

Nous allons démontrer que f admet un groupe de transformations isomorphe à G_r.

Il faut distinguer deux cas:

a) Il peut arriver que les transformations de G_r aient sur F un même point uni O.

En ce cas considérons parmi les courbes de genre 2 d'un système Σ appartenant à F, celles qui passent par O. On aura une série ∞^1 de courbes qui correspondent élément par élément à f; et cette série sera invariant par rapport à G_r. Il s'ensuit que le groupe G_r de F correspond à un groupe isomorphe engendré sur f par les transformations homologues à celles de G_r.

b) Supposons au contraire que les transformations de G_r n'aient pas sur F un point uni commun.

Toute transformation de G_r appartient à une série ∞^2 de transformations périodiques du même ordre, que l'on obtient en multipliant la transformation donnée par les ∞^2 transformations de 2de espèce.

Dans la série ∞^2 des transformations périodiques nommées dessus, il y en a une admettant un point uni O arbitrairement choisi sur F. De cette façon aux r transformations de G_r on peut faire correspondre r transformations périodiques du même ordre, admettant un même point uni O. Ces transformations engendreront un groupe G_r' isomorphe à G_r.

C'est là une conséquence du fait que deux transformations quelconques de G_r ne donnent jamais pour produit une transformation de 2de espèce.

Pourtant on en déduit le résultat suivant:

Toute surface hyperelliptique (régulière) de rang $r > 1$ et de diviseur 1, *admettant une représentation propre par des $\Theta(u, v)$ irréductibles, correspond à une courbe de genre* 2 *possédant un groupe de r transformations en elle-même, et ce groupe est isomorphe à celui formé par les substitutions linéaires sur u, v, qui laissent invariant les Θ.*

Réciproquement, si l'on se donne une courbe de genre 2 admettant

un groupe G'_r de transformations en elle-même, la surface de JACOBI correspondante admettra un ou plusieurs groupes G_r isomorphes à G'_r; chacun de ceux-ci donne lieu à une involution, et, en écartant les cas où l'on tombe sur des involutions rationnelles ou représentées par des réglées, on aura autant de types de surfaces hyperelliptiques satisfaisant aux conditions demandées.

66. *Courbes de genre* 2 *admettant des transformations en elles-mêmes.* – D'après le n. 65 nous sommes ramenés à l'analyse des courbes de genre 2 admettant des transformations birationnelles singulières en elles-mêmes.

Cette analyse a été l'objet d'une étude de M. BOLZA ([44]), dont il nous conviendra de rappeler les résultats.

Soit une courbe de genre 2

$$f = y^2 - \varphi(x) = 0;$$

φ est un polynome d'ordre 5 ou 6, qui peut être remplacé par une forme homogène d'ordre 6 en posant $x = \xi/\eta$; l'équation $\varphi = 0$ représente les 6 points de diramation de f.

Il s'agit de classifier les équations $\varphi = 0$ qui admettent un groupe de transformations linéaires en elles-mêmes. Or d'après le théorème de M. JORDAN concernant la classification des groupes linéaires, un groupe qui laisse invariant $\varphi = 0$ pourra être:

a) un groupe cyclique d'ordre 2, 3, 4, 5, 6;

b) un groupe diédrique d'ordre 4, 6, 12;

c) un groupe tetraédrique d'ordre 12, ou un groupe octaédrique (exaédrique), d'ordre 24.

Désignons par 1, 2, 3, 4, 5, 6 les points de diramation de f, racines de $\varphi = 0$.

Il pourra arriver que $\varphi = 0$ admette une transformation linéaire en elle-même qui soit périodique d'ordre 2, de façon que sur les 6 points 1, 2, 3, 4, 5, 6 il se produise une substitution de la forme:

1) $$(1\ 2)\ \ (3\ 4)\ \ (5\ 6)$$

ou bien de la forme

2) $$(1\ 1)\ \ (2\ 2)\ \ (3\ 4)\ \ (5\ 6)\,.$$

([44]) *On binary sextics with linear transformations into themselves* (« American Journal of Math. », t. X, 1888).

En ce dernier cas il y aura aussi les transformations linéaires

3) $$\begin{cases} (1\ 2)\ \ (3\ 6)\ \ (4\ 5) \\ (1\ 2)\ \ (3\ 5)\ \ (4\ 6) \end{cases}$$

qui engendrent un groupe diédrique 3) d'ordre 4, auquel appartient la substitution 2).

Si $\varphi = 0$ admet un groupe cyclique d'ordre 3 engendré par

4) $$(1\ 2\ 3)\quad (4\ 5\ 6),$$

il y aura aussi les transformations d'ordre 2

5) $$\begin{cases} (1\ 4)\ \ (2\ 6)\ \ (3\ 5) \\ (1\ 6)\ \ (2\ 5)\ \ (3\ 4) \\ (1\ 5)\ \ (2\ 4)\ \ (3\ 6), \end{cases}$$

engendrant un groupe diédrique 5) d'ordre 6, qui renferme 4).

Si $\varphi = 0$ admet un groupe cyclique d'ordre 4 engendré par

6) $$(1\ 1)\quad (2\ 2)\quad (3\ 4\ 5\ 6),$$

il y a un groupe octaédrique 7) de 24 substitutions linéaires qui ramènent $\varphi = 0$ en elle-même.

Dans ce groupe sont renfermées 6 substitutions d'ordre 4 analogues à 6) et leurs 3 carrées d'ordre 2 et du type 2), 8 substitutions d'ordre 3, et 6 substitutions d'ordre 2 et du type 1). Il y a:

8) un sous-groupe tetraédrique d'ordre 12 renfermant les 8 substitutions d'ordre 3 et les 3 substitutions d'ordre 2 et du type 2);

9) un sous-groupe de celui-ci, diédrique d'ordre 4, renfermant les 3 involutions nommées;

enfin des sous-groupes diédriques d'ordre 4, 6 appartenant aux types 3), 5), et leurs sous-groupes cycliques.

Si $\varphi = 0$ admet une transformation d'ordre 5 telle que

10) $$(1\ 1)\quad (2\ 3\ 4\ 5\ 6),$$

il n'y a que le groupe cyclique d'ordre 5 engendré par cette transformation.

Enfin si $\varphi = 0$ admet une transformation d'ordre 6, telle que

11) $$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6),$$

outre le groupe cyclique engendré par celle-ci, il y aura 6 substitutions d'ordre 2 telles que

$$12) \qquad \begin{cases} (1\ 4)\ \ (2\ 3)\ \ (5\ 6); \ldots \\ (1\ 1)\ \ (4\ 4)\ \ (2\ 6)\ \ (3\ 5); \ldots, \end{cases}$$

qui engendrent un groupe diédrique d'ordre 12.

Dans ce groupe sont renfermés des sous-groupes diédriques d'ordre 4, 6, semblables aux types 3), 5), et un sous-groupe diédrique d'ordre 6 renfermant les substitutions

$$13) \qquad \begin{cases} (1\ 3\ 5)\ \ (2\ 4\ 6) \\ (1\ 1)\ \ (4\ 4)\ \ (2\ 6)\ \ (3\ 5); \ldots. \end{cases}$$

En résumant il y a 13 types différents de groupes de substitutions linéaires qui laissent invariant une forme φ d'ordre 6, mais cette forme ne donne lieu qu'à 6 types différents.

Nous allons écrire, d'après M. Bolza, les formes normales de φ correspondantes à ces types, en distinguant en chaque cas les groupes de transformations qui laissent invariant la courbe

$$f = y^2 - \varphi(x) = 0,$$

et en indiquant à côté de chaque type le tableau des périodes normales appartenant à la courbe f.

On aura donc les types suivants:

I) $$\varphi = \xi^6 + \alpha\xi^4\eta^2 + \beta\xi^2\eta^4 + \eta^6,$$

ou

$$\varphi = x^6 + \alpha x^4 + \beta x^2 + 1.$$

La courbe f admet:

a) un groupe d'ordre 4 engendré par les transformations

$$x' = -x,\ y' = y; \quad x' = -x,\ y' = -y; \quad x' = x,\ y' = -y;$$

b) un sous-groupe d'ordre 2 de celui-ci, outre que $(x' = x,\ y' = -y)$, par exemple:

$$(x' = -x, \qquad y' = y).$$

Ces groupes correspondent au groupe 1) sur les racines de $\varphi = 0$.
Le tableau normal des périodes de f est

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{matrix},$$

où

$$h = \tfrac{1}{2}.$$

II) $$\varphi = \xi(\xi^5 + \eta^5),$$

ou

$$\varphi = x(x^5 + 1).$$

La courbe f admet
a) un groupe cyclique d'ordre 10

$$x' = \varepsilon x, \quad y' = e^{(\pi i)/5} y; \qquad \varepsilon = e^{(2\pi i)/5}.$$

b) un sous-groupe d'ordre 5 de celui-ci.
Ces groupes correspondent également à un groupe 10) opérant sur les racines de $\varphi = 0$.
Périodes normales de f:

$$g = 1 - \varepsilon^4, \qquad h = -\varepsilon^2 - \varepsilon^4, \qquad g' = \varepsilon.$$

III) $$\varphi = \xi\eta(\xi^4 + \alpha\xi^2\eta^2 + \eta^4),$$

ou

$$\varphi = x(x^4 + \alpha x^2 + 1).$$

Périodes normales de f:

$$g = g', \qquad h = \tfrac{1}{2}.$$

La courbe f admet
a) un groupe d'ordre 8 qui est en isomorphisme diédrique avec le groupe diédrique engendré par les trois involutions qui laissent invariant $\varphi = 0$ opérant sur les racines de $\varphi = 0$ comme le groupe 3);
b) un sous-groupe de a) cyclique d'ordre 4

$$(x' = -x, \qquad y' = \pm iy),$$

qui correspond au groupe 2) sur les racines de $\varphi = 0$.

IV) $$\varphi = \xi^6 + \alpha\xi^3\eta^3 + \eta^6 ,$$

ou

$$\varphi = x^6 + \alpha x^3 + 1;$$

$$12gg' + 1 = 0 , \qquad h = \tfrac{1}{2} .$$

La courbe f admet

a) un groupe d'ordre 12 en isomorphisme diédrique avec le groupe diédrique d'ordre 6 qui laisse invariant $\varphi = 0$ (type 5);

b) un sous-groupe de a) cyclique d'ordre 6, correspondant au groupe cyclique d'ordre 3 de $\varphi = 0$ (type 4):

$$(x' = \varepsilon x , \quad y' = -y , \qquad \varepsilon = e^{(2\pi i)/3});$$

c) un sous-groupe de b) d'ordre 3.

V) $$\varphi = \xi^6 + \eta^6 ,$$

ou, en changeant η en $i\eta$, $\varphi = \xi^6 - \eta^6$, d'où l'on tire

$$\varphi = x^6 - 1 .$$

On a les périodes

$$g = g' = \frac{i}{2\sqrt{3}} , \qquad h = \frac{1}{2} .$$

La courbe f admet:

a) un groupe d'ordre 24 en isomorphisme diédrique avec le groupe diédrique d'ordre 12 qui laisse invariant $\varphi = 0$ (type 12);

b) un sous-groupe de a) d'ordre 12, qui correspond au groupe cyclique d'ordre 6 opérant sur les racines de $\varphi = 0$ (type 11);

c) deux sous-groupes cycliques de b), d'ordre 6, engendrés par

$$x' = -\varepsilon x , \qquad y' = \pm y , \qquad (\varepsilon = e^{(2\pi i)/3});$$

d) un sous-groupe d'ordre 12 de a), qui est en isomorphisme diédrique avec le groupe diédrique, d'ordre 6, opérant sur les racines de

$\varphi = 0$, comme 13)

$$\left(\begin{array}{llllll} x' = \varepsilon x, & y' = \pm y; & x' = \varepsilon^2 x, & y' = \pm y; & x' = x, & y' = \pm y \\ x' = \dfrac{1}{x}, & y' = \dfrac{\pm iy}{x^3}; & x' = \dfrac{\varepsilon}{x}, & y' = \dfrac{\pm iy}{x^3}; & x' = \dfrac{\varepsilon^2}{x}, & y' = \dfrac{\pm iy}{x^3} \end{array}\right).$$

La courbe f admet aussi d'autres groupes renfermés en a) et appartenant aux types I), III), IV).

VI) $\varphi = \xi\eta(\xi^4 + \eta^4)$ ou bien $\varphi = \xi\eta(\xi^4 - \eta^4)$,

ou respectivement

$$\varphi = x^5 + x, \qquad \varphi = x^5 - x;$$

$$g = g' = \frac{-1 + i\sqrt{5}}{2}, \qquad h = \frac{1}{2}.$$

La courbe f admet:

a) un groupe d'ordre 48 en isomorphisme diédrique avec le groupe octaédrique de 24 substitutions linéaires, qui laissent invariant $\varphi = 0$ (type 7), et les sous-groupes suivants;

b) groupe d'ordre 24 en isomorphisme diédrique avec un groupe tetraédrique de 12 substitutions linéaires (type 8);

c) groupe cyclique d'ordre 8 correspondant à un groupe 6) sur les racines de $\varphi = 0$:

$$(x' = ix, \quad y' = \sqrt{i}y, \qquad \sqrt{i} = e^{\pi i/2}),$$

d) groupe d'ordre 8 en isomorphisme diédrique avec le groupe diédrique d'ordre 4 opérant sur les racines de $\varphi = 0$ comme 9).

En outre il y a en a) des sous-groupes des types I), III), IV).

67. *Comment on passe des groupes de la courbe de genre 2, à ceux de la surface de Jacobi associée.* – Etant donnée une courbe f appartenant à l'un des types I), ..., VI), à chaque groupe de transformations de f on peut faire correspondre au moins un groupe de transformations de la surface de JACOBI F associée à f, et cela de la façon suivante: remplaçons tout couple de f par le point homologue F; à toute transformation de f, considérée comme opérant sur les couples de la courbe, répondra ainsi une transformation de F; pourtant on aura sur F un groupe de transformations isomorphe à celui de f, et qui laisse invariant le point homologue à la g_2^1 de f.

Réciproquement, si l'on a un groupe de transformations de F, qui laissent invariant un même point uni O de la surface, on peut toujours considérer une courbe f associée à F de façon qu'au point O corresponde la g_2^1 de f; cette courbe f admet un groupe de transformations isomorphe au groupe de F (n. 65), et celui-ci prendra naissance du groupe de f, par la construction précédente.

Cependant il peut arriver qu'à un groupe de f (appartenant à un des types que nous avons analysé) correspondent plusieurs groupes de F, isomorphes entre eux, mais birationnellement distincts; dans ce cas il y aura des groupes de F n'admettant pas des points unis communs à toutes leurs transformations. Ce cas ne saurait donc se présenter lorsqu'il s'agit de groupes cycliques, car toute transformation cyclique T de la surface F, associée à une courbe f irréductible, a des points unis (n. 58), qui sont unis aussi pour les puissances de T.

D'après ces remarques, nous aurons lieu d'analyser les types différents de groupes de F, qui peuvent correspondre à un même groupe de f, lorsqu'il s'agit d'un groupe qui n'est pas cyclique.

Mais parmi les groupes de F il y en a qui donnent lieu à des involutions représentées par des surfaces réglées; ce sont là des cas de surfaces hyperelliptiques que nous devons écarter d'après le n. 4.

Nous commençons par l'examen de ces cas.

68. *Cas à écarter.* – En premier lieu considérons le cas I, b).

On obtient sur F une transformation périodique d'ordre 2, qui admet une courbe de points unis; en effet ce sont des points unis pour cette transformation les ∞^1 points de F qui représentent les couples de l'involution elliptique engendrée sur f par la transformation

$$x' = -x\,, \qquad y' = y\,.$$

Ainsi les cas I, b) nous amène à une involution qui ne correspond pas à une surface hyperelliptique proprement dite (n. 4).

Or les groupes I, a); III, a); IV, a); V, a), b), c); VI, a), renferment tous un sous-groupe d'ordre 2 du type I, b); pourtant les involutions correspondantes à ces groupes possèdent un nombre infini de coïncidences, et amènent à des surfaces qu'on peut transformer en des réglées (n. 35). On en conclut que les cas I); III, a); IV, a); V, a), b), c); VI, a) sont à écarter.

Nous venons d'écarter une première série de cas qui nous amènent à des surfaces hyperelliptiques dégénérescentes. Pour ce qui concerne les autres types, on reconnait d'abord aisément qu'ils correspondent à des

involutions ayant un nombre fini de coïncidences, et par suite régulières (n. 37).

Mais on verra que les cas cycliques II) et VI, c) donnent lieu à des involutions rationnelles et pour cette raison doivent être écartés ainsi que les précédents.

A cet effet il faut calculer la valeur du genre $p_a = p_g$ appartenant à chacune des involutions que nous venons de construire sur F.

Ce calcul peut être fait de deux manières différentes: on peut calculer le p_a, ou bien le p_g; nous savons que les deux valeurs sont égales.

Pour calculer le p_a on peut procéder de la manière suivante.

Soit Φ une surface représentant une involution donnée sur F. Considérons un faisceau de courbes appartenant à Φ et le faisceau homologue sur F; en considérant dans chaque faisceau les courbes douées d'un point double, on pourra évaluer les invariants de ZEUTHEN-SEGRE de Φ, F; celui de Φ se trouvera exprimé par celui de F, et d'après la formule connue on en tirera la valeur du genre numérique p_a de Φ [45].

Ce calcul présente une seule difficulté remarquable: c'est qu'aux points de coïncidence de l'involution donnée sur F, correspondent des points singuliers et il s'agit de reconnaître combien de fois les courbes du faisceau considéré sur Φ, qui passent par ces points, doivent être comptées parmi celles qui ont un point double (il est sous entendu que le faisceau dont on parle n'a pas comme points-base ces points singuliers).

La difficulté que nous venons de signaler se ramène d'ailleurs à la question suivante: étant donné sur F un système linéaire de courbes appartenant à l'involution, reconnaître quelles singularités acquièrent les courbes du système lorsque on leur impose de passer par des points de coïncidence.

Nous aurons lieu de traiter en détail cette question qui se rattache à la construction effective des surfaces hyperelliptiques que nous venons de classifier. Nous verrons alors que les types III, b); IV, b); V, d); VI, b), d) nous amènent à des surfaces de genre $p_a = 1$.

Ce même procédé de construction nous a fait découvrir que les surfaces correspondantes aux types II) et VI, c) sont rationnelles. Mais sans répéter ici cette construction qui nous amène en somme à un résultat négatif, nous verrons que ce résultat peut être établi plus simplement aussitôt que l'on ait reconnu que $p_a = p_g = 0$.

A cet effet on peut s'appuyer sur une simple remarque de MM. BAGNERA et DE FRANCHIS, remarque qui permet d'évaluer le p_g des surfaces Φ.

---

[45] Ce procédé fournit en général la relation entre les genres numériques de deux surfaces en correspondance [1n], c'est-à-dire la formule de M. SEVERI que nous employerons dans les ch. suivants.

Cette remarque consiste en ce que s'il y a une integrale double de première espèce attachée à Φ, cette intégrale devra se réduire à $\iint du\,dv$ lorsqu'on exprime les coordonnées des points de Φ par des fonctions rationnelles des points de F, et par conséquent par des fonctions hyperelliptiques de u, v. Il s'ensuit que si l'involution (cyclique) représentée par Φ est engendrée par la transformation

$$u' = \alpha u + \beta v$$
$$v' = \gamma u + \delta v ,$$

le déterminant Jacobien de cette transformation sera

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 .$$

Ceci posé, il suffit de reconnaître la forme des substitutions linéaires sur u, v engendrant les involutions des différents types considérés sur F.

Envisageons d'abord le cas II, b).

La courbe

$$y^2 = x(x^5 + 1)$$

possède deux intégrales de première espèce

$$u = \int \frac{x\,dx}{y} , \qquad v = \int \frac{dx}{y} .$$

Par la substitution

$$x' = \varepsilon x , \qquad y' = \varepsilon^2 y , \qquad (\varepsilon = e^{(2\pi i)/5}),$$

qui transforme la courbe en elle-même, les intégrales u, v viennent changées en

$$u' = \varepsilon^4 u , \qquad v' = \varepsilon^3 v .$$

La même substitution subissent les sommes donnant lieu aux intégrales attachées à la surface de JACOBI F, qui correspond à la courbe. Comme le déterminant de cette substitution est $\varepsilon^2 \neq 1$, on en conclut que la surface Φ correspondante à l'involution du type II, b) a le genre $p_g = 0$.

Par conséquent il en est de même de la surface correspondante au type II, a), qui représente une involution appartenant à la surface II, b).

Envisageons maintenant le cas VI, c).

La courbe

$$y^2 = x(x^4 + 1)$$

possède les deux intégrales de première espèce

$$u = \int \frac{x\,dx}{y}, \qquad v = \int \frac{dx}{y},$$

et par la substitution

$$x' = ix, \qquad y' = \sqrt{i}\,y,$$

il vient

$$u' = \frac{-1}{\sqrt{i}}\,u, \qquad v' = \sqrt{i}\,v,$$

de sorte que le déterminant de la substitution est -1. On en déduit que l'involution cyclique d'ordre 8 correspondante au type VI, c), a $p_g = 0$.

Le procédé que nous avons rapidement exquissé nous amène à la conclusion que les involutions correspondantes aux cas II) et VI, c) ont le genre

$$p_a = p_g = 0\,.$$

Nous allons prouver en outre que leur bigenre n'est pas $P_2 = 1$, de sorte que, d'après le n. 31, on pourra conclure que ces involutions sont rationnelles.

Posons-nous d'abord dans le cas II, b), et en supposant $P_2 = 1$, construisons une surface Φ image de l'involution, qui ne possède pas des courbes exceptionnelles.

Étant $P_2 = 1$, il y aura sur Φ deux systèmes linéaires $|C|$, $|C'|$, sans points-base, adjoint l'un à l'autre, auxquels correspondent sur F deux systèmes linéaires renfermés dans le même système complet; on a donc

$$|5C| = |5C'|,$$

et par suite

$$P_5 = 1\,.$$

Cette conclusion est absurde attendu que la surface Φ, ayant $p_g = 0$ et étant dépourvue de courbes pluricanoniques d'ordre > 0, on doit avoir (n. 31)

$$P_5 = 0\,.$$

Maintenant on peut affirmer aussi que la surface correspondant au cas II, a) est rationnelle. En effet cette surface vient représentée par une involution de couples de points appartenant à la surface qui correspond au cas II, b); et, d'après M. CASTELNUOVO, toute involution sur une surface rationnelle est rationnelle.

Considérons enfin le cas VI, c).

La surface Φ vient représentée par une involution de couples de points, I_2, appartenant à la surface régulière Φ' qui correspond au cas III, b); et il est aisé de remarquer qu'il y a sur Φ' des coïncidences correspondant à la g_2^1 de f. D'après le n. 38 on conclut donc que cette involution I_2 est rationnelle, puisqu'elle ne saurait avoir $P_2 = 1$.

En résumant les résultats obtenus nous dirons que les cas I); II); III, a); IV, a); V, a), b), c); VI, a), c) *correspondent à des surfaces hyperelliptiques dégénérescentes, qui sont écartées de notre étude.*

69. *Genres des surfaces hyperelliptiques correspondantes aux types qui ne sont pas dégénérescentes.* – En calculant la valeur du déterminant des substitutions linéaires périodiques d'ordre 3, 4 qui forment les groupes III, b); IV, b); V, d); VI, b), d), on reconnaît que ces types nous amènent à des surfaces de genre $p_g = 1$. Ainsi donc nous pouvons énoncer dès à présent la conclusion suivante qui sera établie à posteriori dans la suite:

Les cas III, b); IV, b); V, d); VI, b), d), *correspondent à des surfaces hyperelliptiques de genres*

$$p_a = p_g = 1 . \qquad (P_2 = 1).$$

Parmi ces cas nous avons déjà remarqué que les groupes cycliques (tels que III), IV)) correspondent chacun à un type bien déterminé d'involution sur la surface de JACOBI F, involution possédant un point uni pour toutes les transformations du groupe.

Il reste à classifier les types qu'on peut appeler *bi-diédriques* et *bi-tetraédriques*, c'est-à-dire les types correspondants à des groupes bi-diédriques d'ordre 8 (VI, d) et 12 (V, d) et les types correspondants à des groupes bi-tetraédriques (VI, b).

70. *Analyse des groupes bi-diédriques et bi-tetraédriques, d'ordre* 8, 24, *appartenant à une surface de Jacobi.* – Considérons une surface F correspondant au cas VI). On aura sur F plusieurs types de groupes G_8 et G_{24} isomorphes au groupe bi-diédrique d) et au groupe bi-tetraédrique b) de f. Tâchons de construire ces types.

Un groupe G_8 se trouvant en isomorphisme diédrique avec un G_4 engendré par deux involutions échangeables (Vierergruppe), on pourra

l'engendrer par deux transformations cycliques d'ordre 4, U_1, U_2, qui ne seront pas échangeables, mais dont l'une transformera l'autre en son inverse; U_1^2, U_2^2 donneront lieu à la même transformation K, qui sera une transformation ordinaire de 1re espèce de la surface F. On peut supposer que dans la correspondance point par couple entre la surface F et la courbe f, K réponde à la g_2^1 de f.

Ceci posé, rappelons-nous que la transformation K possède 16 coïncidences (n. 46). En ayant égard aux propriétés des points unis de la transformation périodique d'ordre 4 qui résulte définie sur f, on déduit aisément, au moyen de considérations qu'on trouvera développées en détail au n. 84, qu'une transformation hermitienne donnant pour carré K, laisse invariant quatre coïncidences de K et distribue les autres coïncidences en six cycles de 2d ordre.

Soient P, Q, R, S les points unis de la transformation U_1. Comme U_2 doit transformer U_1 en son inverse, U_2 changera en lui-même le groupe P, Q, R, S.

Il y aura donc à distinguer quatre hypothèses:

1) La transformation U_2 laisse invariant P. Alors toutes les transformation du groupe G_8 engendré par U_1, U_2, ont en commun le point uni P et par suite elles laissent invariant la variété ∞^1 — birationnellement identique à f (n. 21) — formée par les courbes C passant par P et appartenant à un système Σ quelconque. Le groupe G_8 vient correspondre ainsi, au moyen de la correspondance point par couple entre F, f, au groupe bi-diédrique d).

Dans ce cas on voit de plus (n. 92) que U_2 laisse aussi invariant les autres points unis Q, R, S de U_1.

2) Les couples (P, Q) (R, S) donnent deux cycles de 2d ordre de la transformation U_2. Un groupe G_8 de ce type existe effectivement.

En effet pour le construire il suffit de considérer les substitutions U_1, U_2 génératrices du type 1) et de poser

$$U_1' \equiv U_1 , \qquad U_2' \equiv U_2 A ,$$

A étant la transformation de 2de espèce qui fait correspondre Q à P.

Nous désignerons par G_8' le groupe engendré par U_1', U_2' en réservant le symbole G_8 pour le type 1).

3) Les couples (P, R) (Q, S) donnent deux cycles de U_2. On obtient le groupe G_8'' correspondant à ce cas, en prenant pour substitutions génératrices

$$U_1'' \equiv U_1 , \qquad U_2'' \equiv U_2 B ,$$

B étant la transformation de 2de espèce qui amène P en R.

4) Les couples (P, S) (Q, R) donnent deux cycles de U_2. On obtient le groupe G_8''' correspondant, en posant

$$U_1''' \equiv U_1 , \qquad U_2''' \equiv U_2 C ,$$

où C est la transformation de 2de espèce qui fait correspondre S à P.

On a ainsi à priori sur la surface F 4 types de groupes bi-diédriques formés par des transformations hermitiennes.

Une analyse plus approfondie, que nous renvoyons à un autre chapitre de ce mémoire, nous montrera que les quatre points unis P, Q, R, S, de la transformation U_1, se distribuent en deux couples (P, Q) (R, S), de sorte que les points d'un couple jouissent des mêmes propriétés et ils se comportent de la même façon par rapport aux points de l'autre couple.

On verra ainsi que les types G_8'', G_8''' ne sont pas distincts. On aura donc en définitive *trois types de surfaces hyperelliptiques birationnellement distinctes correspondantes à des groupes bi-diédriques d'ordre* 8 *de la surface* F (cas VI)).

Il est aisé maintenant de construire sur F les différents types de groupes G_{24} isomorphes au groupe bi-tetraédrique VI, b) de f.

On partira de la remarque que tout groupe G_{24} renferme un sous-groupe invariant bi-diédrique G_8.

Or donnons-nous sur F un groupe bi-diédrique appartenant à l'un des types que nous venons de définir, et tâchons de construire un groupe bi-tetraédrique qui le renferme comme sous-groupe invariant.

On aura les cas suivants:

1) Le groupe bi-diédrique donné est le G_8 du type 1), dont toutes les substitutions laissent invariant les points P, Q, R, S.

Dans ce cas le G_{24} cherché échangera entr'eux les points P, Q, R, S suivant un groupe de substitutions G_r, qui se trouve en isomorphisme mériédrique avec G_{24}. Comme au G_8 correspond en cet isomorphisme la transformation identique, on aura $r = 3$, et par conséquent le groupe $G_r = G_3$ sur (P, Q, R, S) sera cyclique d'ordre 3, et laissera invariant un point parmi les quatre: p. ex. le point P.

Il s'ensuit que le groupe G_{24} a sur F un point uni que l'on peut supposer correspondant à la g_2^1 de f; on a ainsi un premier type bien défini de groupe bi-tetraédrique.

2) Le groupe bi-diédrique donné est le groupe $G_8^{(j)}$ du type j) où $j = 2, 3, 4$.

Les trois substitutions

$$U_1^{(j)}, \qquad U_2^{(j)}, \qquad U_1^{(j)} U_2^{(j)} ,$$

(d'ordre quatre) existant en $G_8^{(j)}$ possèdent trois groupes de 4 points unis, qui n'ont pas des points communs.

Sur le groupe des quatre coïncidences restantes de la transformation K, les substitutions de $G_8^{(j)}$ produisent un groupe diédrique G_4.

Les mêmes quatre points devront être échangés entr'eux par le groupe bitetraédrique cherché — que nous désignerons par $G_{24}^{(j)}$ — suivant les substitutions d'un groupe tetraédrique G_{12}, qui renferme G_4 comme sous-groupe invariant.

Or ce groupe G_{12} résulte ainsi bien déterminé, et l'on en déduit que le groupe $G_{24}^{(j)}$ résulte aussi bien déterminé.

On en conclut qu'il y a tant de surfaces hyperelliptiques birationnellement distinctes correspondantes à des groupes bi-tetraédriques, que de surfaces distinctes correspondantes aux groupes bi-diédriques, c'est-à-dire qu'il y aura sur F (cas IV) *trois types différents de groupes bi-tetraédriques d'ordre* 24, *amenant à des surfaces hyperelliptiques birationnellement distinctes.*

71. *Groupes bi-diédriques d'ordre* 12. – La courbe f, appartenant au type V), admet un groupe de transformations en elle-même V, d), c'est-à-dire un groupe G_{12} bi-diédrique d'ordre 12.

Combien de groupes isomorphes à G_{12} peut-il y avoir sur la surface de JACOBI F associée à f?

Il est aisé de répondre à cette question en remarquant que G_{12} admet un sous-groupe invariant G_6 cyclique d'ordre 6; en effet dans le groupe diédrique d'ordre 6 qui est en isomorphisme émi-édrique avec G_{12}, il y a un sous-groupe invariant d'ordre 3, et à celui-ci correspond en G_{12} un G_6 du type IV, b).

Ceci posé remarquons encore que le G_6 du type IV, b) donne lieu à un groupe de transformations de F ayant *un seul* point uni qui correspond à la g_2^1 de f; il s'ensuit qu'un groupe d'ordre 12 de F renfermant un tel sous-groupe invariant, a un point uni (invariant par rapport à toutes les transformations du groupe). En rappelant ce que nous avons dit au n. 67 on en conclut que:

Sur une surface F associée à la courbe f (cas V) *il y a un seul type de groupe bi-diédrique d'ordre* 12, *en considérant comme identiques deux groupes amenant à des surfaces hyperelliptiques en correspondance birationnelle entre elles.*

72. *Résumé et programme de l'étude qui suit.* – En résumant les résultats obtenus nous énoncerons le théorème suivant:

Les surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$ et de diviseur $\delta = 1$, admettant une représentation propre par des fonctions Θ irréductibles, sont des surfaces régulières de genres $p_a = p_g = P_2 = \ldots = 1$. Elles se partagent

en 11 *familles birationnellement distinctes, correspondantes à des groupes de transformations d'une courbe de genre* 2 *en elle-même. Ces familles sont indiquées par le tableau suivant*:

surfaces dépendantes de trois modules:

I) $r = 2$ (*surface Kummer*);

surfaces dépendantes d'un module:

II) $r = 3$ (*groupe cyclique d'ordre* 3);

III) $r = 4$ (*groupe cyclique d'ordre* 4);

IV) $r = 6$ (*groupe cyclique d'ordre* 6);

surfaces n'ayant pas de modules:

V, VI, VII) $r = 8$ (*groupes bi-diédriques d'ordre* 8);

VIII) $r = 12$ (*groupe bi-diédrique d'ordre* 12);

IX, X, XI) $r = 24$ (*groupes bi-tetraédriques d'ordre* 24).

Les nombres I-XI (qui n'ont rien à faire avec ceux employés avant dans la classification des courbes de genre 2 admettant des transformations en elles-mêmes), nous servirons dans la suite pour désigner les différents types de surfaces hyperelliptiques que nous nous proposons d'étudier en détail.

Pour chaque type nous allons construire une surface projectivement définie (dépendant suivant les cas de modules arbitraires), à laquelle toute surface hyperelliptique du type donné peut être ramenée par une transformation birationnelle.

Les surfaces modèles que nous allons construire pour $r > 2$, seront des surfaces d'ordre $2r$ appartenant à des espaces S_{r+1} de dimension > 3, et seront caractérisées par certaines configurations de points singuliers et de hyperplans ayant un certain contact suivant des courbes rationnelles.

Il sera aisé d'ailleurs de projeter de telles surfaces dans l'espace ordinaire, et même d'en abaisser l'ordre (jusqu'à 4). Cependant les surfaces d'ordre plus élevé d'un hyperespace, auxquelles nous nous rapportons, sont en général les plus simples de leur classe à ce point de vue, que leur configuration caractéristique jouit de la plus grande symétrie possible.

VIII. - Surfaces hyperelliptiques régulières de range 3 (type II).

73. *Transformations hermitiennes périodiques d'ordre trois.* – Soit F une surface de JACOBI admettant une, et par conséquent ∞^2, transformations hermitiennes périodiques d'ordre 3, correspondant à une transformation τ d'ordre 3 de la courbe associée f.

Rappelons-nous que la transformation singulière τ jouit des propriétés suivantes:

a) Le groupe formé par un point ξ de f et par les points ξ', ξ'' correspondants à ξ au moyen de τ et de τ^2, donne, au varier de ξ, une série linéaire g_3^1 de la courbe f.

b) La transformation τ admet *quatre* points de coïncidence qui se distribuent en deux couples de la g_2^1 appartenant à f.

La transformation τ peut être envisagée aussi comme une transformation birationnelle entre les couples de points de f: on a ainsi sur la surface de JACOBI F une transformation de HERMITE T, qui correspond à τ. Pour déterminer le nombre des points de coïncidence de T, il faut chercher les couples de points de f, qui sont invariant par rapport à la transformation τ.

Soient

$$A_1, \quad A_2, \quad B_1, \quad B_2$$

les quatre points de coïncidence de τ; A_1, A_2 et B_1, B_2 étant respectivement conjugués par rapport à la g_2^1.

Désignons d'une façon générale par $2P$ le couple donné par deux points coïncidant avec P, et par $P + Q$ le couple donné par les points P, Q. On a alors les couples $2A_1$, $2A_2$, $2B_1$, $2B_2$, $A_1 + A_2$, $B_1 + B_2$, $A_1 + B_1$, $A_2 + B_2$, $A_1 + B_2$, $A_2 + B_1$, invariant par rapport à τ; et on ne peut pas avoir d'autres couples jouissant de la même propriété, car tout couple $P + Q$ qui est ramené en lui-même par τ, doit être formé par deux points de coïncidence de la transformation:

$$\tau^2 \equiv \tau^{-1}.$$

Il semble au premier abord qu'on aura sur F, 10 points de coïncidence de la transformation T. Mais il ne faut pas oublier que si la surface F n'a pas de courbes exceptionnelles (n. 17), la correspondance entre les points de F et les couples de f, n'est pas biunivoque sans exception, car tout couple de la g_2^1 vient représenté par un même point de F (n. 14, c); ainsi donc les deux couples

$$A_1 + A_2, \qquad B_1 + B_2$$

appartenant à la g_2^1 correspondent à un même point de coïncidence de T sur F. Pourtant *on a sur F neuf points de coïncidence de la transformation T.*

Envisageons maintenant le système complet Σ, déterminé par les courbes C de F répondant aux couples de f qui renferment un même point. La T change en lui-même le système Σ et fait correspondre les

courbes de celui-ci, conçues comme les éléments d'une variété hyperelliptique, suivant une transformation hermitienne d'ordre 3.

En vertu de la dualité entre les points de F et les courbes du système (n. 23), on peut affirmer tout de suite que *T change en elles-mêmes neuf courbes du système Σ.*

Entre ces courbes et les neuf points de coïncidence, il y a des relations remarquables, que nous allons établir.

Soit O un des points de coïncidence, et H le système ∞^1 formé des courbes C issues par O.

La transformation T change en lui-même le système H, et elle donne naissance à une transformation singulière d'ordre 3 entre les courbes du système H, conçu comme une variété ∞^1 d'éléments, birationnellement identique à la courbe f (n. 22). On a donc *quatre* éléments de H qui demeurent invariant par rapport à la transformation T, c'est-à-dire que des neuf courbes C unies, quatre passent par le point O.

Les quatre éléments unis, en vertu de la propriété b) rappelée ci-dessus, se distribuent en deux couples de la série g_2^1 appartenant à la variété H.

Comme les couples de cette série sont donnés par les couples de courbes C se touchant en O, on en conclut que les courbes unies issues par O se distribuent en deux couples a, b, et c, d de courbes tangentes.

En considérant d'une façon analogue la transformation d'ordre 3 déterminée par T sur une des courbes unies, on trouve sur cette courbe quatre points de coïncidence distribués en deux couples de la g_2^1 relative à la courbe envisagée.

Mais il y en a davantage. Deux courbes unies se coupent certainement en deux points de coïncidence, car ces points doivent être unis par rapport à la transformation

$$T^2 \equiv T^{-1}.$$

Or ces points peuvent être distincts ou coïncidents.

On a p. ex. le premier cas relativement aux courbes a, c et le second relativement aux courbes a, b.

Analoguement par deux points de coïncidence il peut passer deux courbes unies, distinctes ou coïncidentes. Le second cas se présente seulement lorsque les points unis envisagés sont conjugués par rapport à la g_2^1 de la courbe unie.

Dans la suite nous dirons que *deux points de coïncidence sont conjugués* lorsqu'ils appartiennent à une seule courbe unie; et nous dirons aussi que *deux courbes unies sont conjuguées* lorsqu'elles se touchent.

En résumant, la configuration formée par les courbes et les points

unis de la transformation T, jouit des propriétés suivantes:

Par un point passent quatre courbes, distribuées en deux couples de courbes conjuguées.

Deux points appartiennent à une ou à deux courbes, suivant qu'ils sont ou qu'ils ne sont pas conjugués.

Une courbe renferme quatre points, distribués en deux couples de points conjugués.

Deux courbes se coupent en un ou en deux points, suivant qu'elles sont ou qu'elles ne sont pas conjuguées.

Ces propriétés peuvent s'exprimer d'une façon élégante et complète au moyen de l'algorithme suivant, qui a une très grande analogie avec l'algorithme adopté par M. HUMBERT pour la cfg. des points et des plans singuliers d'une surface de KUMMER (n. 46).

Envisageons les deux séries de nombres

$$1,\ 2,\ 3 \quad \text{et} \quad 1',\ 2',\ 3',$$

et désignons par

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma \quad \text{et} \quad \alpha',\ \beta',\ \gamma',$$

deux permutations quelconque de ces séries. On peut représenter les neuf courbes et les neuf points unis de la transformation T de F, respectivement par les symboles

$$11',\ 12',\ 13',\ 21',\ 22',\ 23',\ 31',\ 32',\ 33',$$

$$(11'),\ (12'),\ (13'),\ (21'),\ (22'),\ (23'),\ (31'),\ (32'),\ (33');$$

et cela de façon que

1) *Les points appartenant à la courbe $\alpha\alpha'$, soient*

$$(\alpha\beta'),\ (\alpha\gamma'),\ (\alpha'\beta),\ (\alpha'\gamma).$$

2) *Les courbes passant par le point $(\alpha\alpha')$ soient*

$$\alpha\beta',\ \alpha\gamma',\ \alpha'\beta,\ \alpha'\gamma.$$

3) *Deux points ou deux courbes soient conjugués lorsque les symboles relatifs ont un caractère commun*

$$\text{(p. ex. } \alpha\beta',\ \alpha\gamma' \quad \text{et} \quad (\alpha\beta'),\ (\alpha\gamma')).$$

On voit que les points conjugués au point $(\alpha\alpha')$ ont les symboles

$$(\alpha\beta'),\quad (\alpha\gamma'),\quad (\alpha'\beta),\quad (\alpha'\gamma),$$

et par suite ils appartiennent à la courbe $\alpha\alpha'$. Analoguement les courbes conjuguées à une courbe donnée $\alpha\alpha'$ passent par le point $(\alpha\alpha')$.

On exprimera ce rapport en disant que *le point* $(\alpha\alpha')$ *et la courbe* $\alpha\alpha'$ *sont conjugués*. Nous verrons dans la suite comment on peut rattacher l'algorithme que nous avons défini, aux propriétés des fonctions Θ appartenant à la surface de JACOBI F.

74. *Propriétés infinitésimales d'un point uni de la transformation* T. – Il nous sera utile de connaître ce qui se passe dans le domaine d'un point de coïncidence O de la transformation T.

On établit aisément que la transformation T détermine une homographie périodique d'ordre 3 entre les points appartenant au domaine du point uni O, et que les coïncidences de cette homographie tombent dans les points de contact des couples de courbes unies passant par O.

En effet la transformation T ne peut pas changer entre elles deux courbes arbitraires C de Σ se touchant en O, car dans l'hypothèse contraire ces courbes résulteraient invariantes par rapport à la transformation

$$T^2 \equiv T^{-1},$$

et par suite elles seraient des courbes unies de la transformation T.

Il s'ensuit que T change tout couple de courbes C se touchant en O, en un couple analogue, mais distinct du premier.

Il faudra donc que T change un point arbitraire appartenant au domaine de O, en un *autre* point du méme domaine. Ce point à son tour ne pourra pas être changé en le premier, car autrement T^2 donnerait lieu à une homographie identique dans le domaine de O.

On en conclut que T détermine dans le domaine de O une homographie de 3^{me} ordre, dont les coïncidences tombent évidemment dans les points communs aux couples de courbes unies.

75. *L'involution* I_3 *engendrée par la transformation* T. – En associant à tout point P de F les points P', P'' correspondants à P par rapport aux transformations T, T^2, on obtient une involution I_3, possédant neuf groupes de coïncidences, dont chacun est formé de trois points coïncidents.

Nous nous proposons d'étudier la surface régulière Φ qui représente (sans exception) les groupes de I_3.

Disons C', C'' les courbes de F transformées d'une courbe C de Σ, par rapport à T, T^2, et observons que la courbe réductible

$$D = C + C' + C''$$

appartient à l'involution I_3, c'est-à-dire que les points conjugués de tout point de D, appartiennent aussi à cette courbe.

La correspondance (1, 3) entre les points de Φ et les points de F, transforme la courbe C de F en une courbe Γ de Φ birationnellement identique a C: eh bien cette courbe Γ est aussi la transformée des courbes C', C'', c'est-à-dire qu'elle *représente* la série des groupes de I_3 appartenant à la courbe D. La courbe Γ a deux points doubles, car il existe sur C deux couples de points conjugués par rapport à I_3, qui sont donnés par les quatre intersections des courbes C', C'' avec C.

Lorsque C décrit le système Σ, la courbe Γ décrit un système continu; et comme la surface Φ ne possède pas d'intégrales simples de première espèce, d'après M. HUMBERT ce système continu doit être renfermé en un système linéaire $|\Gamma|$ de courbes du même ordre.

Faisons maintenant les remarques suivantes:

1) Le système $|\Gamma|$ n'a pas de points-base. En effet la correspondance [1, 3] entre Φ, F n'ayant pas des points fondamentaux sur la surface Φ — c'est-à-dire des points de Φ auxquels correspondent des courbes de F — au système Σ dépourvu de points-base, correspond sur Φ un système jouissant de la même propriété.

2) Le *genre* du système $|\Gamma|$ est

$$\pi = 4 .$$

En effet le genre d'une courbe arbitraire du système linéaire, est égal au genre d'une courbe Γ répondant à une courbe C, augmenté du nombre des points doubles de Γ.

3) Le *degré* de $|\Gamma|$ (c'est-à-dire le nombre des intersections de deux Γ) est

$$n = 6 .$$

En effet les 18 points communs à deux courbes D, se partagent en six groupes de l'involution I_3.

4) La dimension de $|\Gamma|$ est

$$r \geqslant 3 ,$$

car ce système linéaire doit renfermer un système continu ∞^2, non linéaire, de courbes douées de deux points doubles.

5) Le système $|\Gamma|$ est un système *simple*, c'est-à-dire que les courbes Γ passant par un point quelconque de la surface Φ, ne vont passer en conséquence par d'autres points mobiles avec celui-ci.

Étant donnés sur Φ deux points quelconque M, N, il suffira de prouver qu'il y a des courbes Γ passant par M et non par N.

Soient

$$P\,P'\,P'', \qquad Q\,Q'\,Q''$$

les deux groupes de I_3 répondant aux points M, N de Φ. Comme les courbes C passant par P n'ont d'autres points communs, on pourra fixer une de ces courbes, qui ne passe par aucun des points Q, Q', Q''. Alors les courbes C', C'' transformées de C, viennent passer respectivement par les points P', P'', mais non par Q, Q', Q''. On a ainsi sur Φ une courbe Γ, image de la courbe

$$D = C + C' + C''$$

qui passe par M et non par N.

Comme il est bien connu, en vertu des propriétés 4) et 5) on pourra transformer birationnellement la surface Φ en une surface de l'espace à r dimensions, de telle façon qu'aux courbes du système $|\Gamma|$ répondent les sections hyperplanes de la surface transformée, qui résultera d'ordre 6, 6 étant le degré de $|\Gamma|$.

Dans la suite (aucune ambiguité n'étant pas possible) nous désignerons encore par Φ, ou par Φ_6, la surface d'ordre 6 de l'espace S_r, et par Γ ses sections hyperplanes, qui seront des courbes de genre 4.

76. *La surface* Φ_6. – Remarquons d'abord que la dimension r, de l'éspace renfermant la surface Φ_6, ne peut pas être plus grande que 4, car les sections hyperplanes de la surface, étant des courbes d'ordre 6 et de genre 4, ne peuvent pas appartenir à un espace de dimension > 3. On aura donc

$$r = 3 \qquad \text{ou} \qquad r = 4\,.$$

La première valeur de r sera écartée, lorsque nous aurons démontré que « la surface Φ ne peut pas renfermer des lignes multiples »; car une section hyperplane *arbitraire* de Φ résultera alors une courbe d'ordre 6 et de genre 4, dépourvue de points multiples, et par suite elle ne pourra pas appartenir à un plan. Pour établir le fait énoncé, observons que,

si P est un point de la surface de JACOBI F, distinct des neuf points de coïncidence, on peut toujours construire deux courbes D passant par le groupe $PP'P''$ déterminé par P, et se coupant, hors de ce groupe, en 5 groupes distincts de l'involution I_3. Il suffit en effet de choisir deux courbes arbitraires C, C_0 de Σ passant par P, et de considérer les courbes C', C''; C_0', C_0'' qui leur correspondent au moyen de T et de T^2. On a ainsi deux courbes D

$$C + C' + C'', \qquad C_0 + C_0 + C_0''$$

satisfaisant à la condition enoncée.

Designons par M le point de Φ image du groupe $PP'P''$.

Les courbes D envisagées ont pour images deux sections hyperplanes de Φ, issues par le point M et se coupant *hors* de M en *cinq* points: on en conclut que M est un point simple de Φ, c'est-à-dire qu'à tout point P de F, ne tombant pas en un point uni de la transformation T, correspond un point simple M de la surface Φ; et par suite que cette surface n'a que neuf points multiples (au plus).

Il s'agit maintenant d'examiner la nature des points de Φ qui correspondent aux points de coïncidence.

Soit O le point de Φ correspondant au point de coïncidence (11'), ayant adopté pour les points et pour les courbes unis de la transformation T l'algorithme introduit au n. 73.

Lorsque la courbe C variable dans le système Σ, vient coïncider avec la courbe 12' issue par (11'), les courbes C', C'' transformées de C par rapport à T et à T^2, viennent aussi coïncider avec 12', de sorte que la courbe 12' comptée trois fois, donnera une courbe totale du système linéaire $|D|$.

Il s'ensuit qu'en comptant trois fois la courbe de Φ correspondante à la courbe 12', on obtient une section hyperplane de Φ; pourtant à 12' correspondra sur Φ une conique, et il y aura un hyperplan ayant un contact d'ordre 2 avec la surface Φ en tout point de cette conique.

On a ainsi sur Φ quatre coniques passant par le point O, et correspondant aux quatre courbes unies, issues par (11').

Nous désignerons ces coniques avec les mêmes symboles qui appartiennent aux courbes unies correspondantes.

Un hyperplan arbitraire passant par O coupe la conique 12', hors de O, en *un* point: donc la courbe D correspondante à la section hyperplane envisagée, doit couper la courbe 12' en *trois* points différents de (11'); c'est-à-dire que le point (11') doit absorber 3 parmi les $2 \cdot 3$ intersections des courbes D et 12'.

La même conclusion peut être rapportée aux courbes 13', 1'2, 1'3.

Il s'ensuit que la courbe D a en $(11')$ un point multiple d'ordre

$$s = 2 \qquad \text{ou} \qquad s = 3;$$

dans le premier cas les deux branches de la courbe D touchent les couples de courbes conjuguées $12'$, $13'$, et $1'2$, $1'3$, tandis que dans le second cas on n'a pas des contacts de ces courbes avec D.

On voit tout de suite que le cas $s = 3$ est réellement possible. En effet les courbes C', C'' transformées d'une courbe C passant par (11), mais ne touchant aucune des courbes unies, passent aussi par $(11')$ de sorte que la courbe particulière

$$D = C + C' + C''$$

vient passer par $(11')$ avec trois branches non tangentes entre elles. Les points de ces branches infiniment prochains à $(11')$ donnent un groupe de I_3, c'est-à-dire un cycle de l'homographie périodique d'ordre 3 qui résulte définie dans le domaine de $(11')$ (n. 74).

Remarquons encore que la courbe Γ de genre deux répondant à la courbe $C + C' + C''$, n'a qu'un point double distinct du point O; en effet la courbe C renferme deux couples de points conjugués par rapport à I_3, dont l'un est formé par deux points coïncidents avec $(11')$, et l'autre par les intersections ultérieures de la courbe C avec C', C''.

Comme une courbe gauche Γ d'ordre 6 et de genre 2, ayant un point double, ne peut pas posséder un autre point multiple d'ordre > 2, on en conclut que Γ a en O un point double, et par suite que O ne peut pas être un point multiple d'ordre > 2 pour la surface. Cette conclusion conduit tout naturellement aux propriétés suivantes:

1) Une courbe *arbitraire* D passant par $(11')$, c'est-à-dire une courbe répondant à une section hyperplane Γ, issue arbitrairement par O, a en $(11')$ un point multiple d'ordre 2 dont les deux branches touchent respectivement les couples de courbes tangentes

$$1\,2', \quad 1\,3' \qquad \text{et} \qquad 1'2, \quad 1'3\,.$$

En effet si pour une D arbitraire l'on avait $s = 3$, deux courbes D auraient communs, hors de $(11')$, seulement

$$18 - 3 \cdot 3 = 9$$

points, et par suite deux sections hyperplanes arbitraires Γ passant par O,

se couperaient, hors de O, en $9/3 = 3$ points, c'est-à-dire que O serait un point triple de la surface Φ.

2) Au système linéaire des sections de Φ avec les hyperplanes passant par O, répond sur F un système linéaire H de courbes D ayant en $(11')$ un point-base double avec deux points-base simples infiniment voisins, qui sont les points de contact des couples de courbes $12'$, $13'$ et $1'2$, $1'3$.

On ne peut pas avoir d'autre points-base *successifs*, car le point O étant double pour la surface Φ, le point $(11')$ doit absorber seulement $3 \cdot 2$ intersections de deux courbes D, répondant à deux sections hyperplanes issues par O.

3) Un hyperplan arbitraire passant par O coupe Φ suivant une courbe Γ ayant en O un point double *nodale* (intersection de deux branches ou cycles non tangentes) car sur la courbe D correspondante à Γ, on a *deux* groupes distincts de I_3 formés par des points infiniment voisins à $(11')$. On obtient ces groupes en comptant trois fois les points-base simples, c'est-à-dire les points unis de l'homographie d'ordre 3 qui résulte définie dans le domaine de $(11')$.

Cette propriété nous montre que le point O ne peut pas être un point double uniplanaire de la surface Φ (c'est-à-dire un point où le cône tangent se réduit à un plan double), car en cette hypothèse une section hyperplane arbitraire issue par O, aurait en O un point double avec une seule tangente.

Nous démontrerons que *le point O est un point double biplanaire*, c'est-à-dire un point où le cône se réduit à deux plans. Il suffira de prouver qu'il y a un système linéaire ∞^1 d'hyperplans issus par O, donnant des sections qui ont en O un point double avec une seule tangente.

En effet, de la propriété 2) on tire que les courbes D ayant en $(11')$ un point triple, forment un système linéaire ∞^2, car en imposant à une courbe D du système linéaire ∞^3 H la condition de toucher en $(11')$ une droite différente des deux tangentes fixes, on obtient une courbe ayant en $(11')$ un point triple.

Comme sur une telle courbe il y a un seul groupe de I_3 formé par des points infinement voisins à $(11')$, à cette courbe répondra une courbe Γ passant par O avec un seule branche; et par suite le point double O, étant origine d'un seul cycle, résultera un point de rebroussement de Γ. On a ainsi un système linéaire de ∞^2 hyperplans coupant Φ suivant des courbes douées d'un point de rebroussement en O, et d'une même tangente o en celui-ci. Il s'ensuit que le cône tangent à Φ en O se réduit à deux plans se coupant dans la droite o. En outre il est aisé de voir que le point O est un *point biplanaire ordinaire*, c'est-à-dire que le point de rebroussement d'une des courbes sections hyperplanes par o, est de pre-

mière espèce ([46]), ou, en d'autres termes, que la droite o a un contact de second ordre avec la surface Φ.

En effet considérons deux courbes D arbitraires ayant un point triple en $(11')$; comme ces courbes se coupent, hors de $(11')$, en 9 points, deux courbes Γ arbitraires passant par la droite o se coupent, hors de O, en $9/3 = 3$ points.

Pour achever l'analyse du point double O, il faut encore remarquer que, en disant E_1 le point de F infiniment voisin à $(11')$ et commun aux courbes unies $12'$, $13'$, la correspondance T vient déterminer dans le domaine de E_1 une homographie identique, de sorte que E_1 résulte une *coïncidence parfaite* de la transformation T. En effet une des branches d'une courbe D ayant en $(11')$ un point double, contient trois points unis *successifs* de la transformation T: deux de ces points — c'est-à-dire $(11')$ et E_1 — restent fixes au varier de D; tandis que le troisième décrit le domaine de E_1: On peut répéter les mêmes remarques pour le point E_2 infiniment voisin à $(11')$ et commun aux courbes $1'2$, $1'3$.

De toute ce qui précède on tire «qu'aux points de Φ infiniment voisins à O sur les deux plans tangents à la surface, répondent respectivement les points de F appartenant aux domaines de E_1 et de E_2, tandis qu'aux points de Φ infiniment voisins au point simple O_1 successif à O suivant la direction o, répondent des ternes de points appartenant au domaine de $(11')$».

Les propriétés de la correspondance $[1, 3]$ entre Φ et F résultent ainsi définies d'une façon complète.

Comme sur F les courbes unies $12'$, $13'$ passent par E_1, tandis qu'elles n'ont pas d'autres points communs successifs à E_1, il s'ensuit que les coniques $12'$, $13'$ issues par O, touchent un même plan tangent suivant deux directions distinctes entre elles et de la direction o.

Analoguement les coniques $1'2$, $1'3$ touchent l'autre plan tangent.

Désignons les neuf points doubles et les neuf coniques de Φ par les mêmes symboles qui représentent les points et les courbes correspondants de la surface F et appelons conjugués deux éléments de la cfg. considérée sur Φ, lorsqu'ils sont les images de deux éléments conjugués de la cfg. de F (n. 73); on pourra énoncer le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique de rang 3 *et du type* II, *peut être transformée birationnellement en une surface* Φ_6, *d'ordre* 6, *appartenant à l'espace à quatre dimensions. Les sections hyperplanes de cette surface sont des courbes canoniques de genre* 4. *Il y a neuf points doubles biplanaires ordinaires et*

([46]) Voir p. ex. APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques* (Paris, Gauthier, Villars, 1895), n. 88.

neuf coniques, qui forment une configuration jouissant des propriétés suivantes:

Par un point passent quatre coniques.

Deux points appartiennent à une ou deux coniques.

Dans le premier cas les 2 points s'appellent *conjugués.*

Une conique renferme quatre points.

Deux coniques se coupent suivant un ou deux points.

Dans le premier cas les 2 coniques s'appellent *conjuguées.*

On peut représenter respectivement les neuf points et les neuf coniques avec les symboles $(\alpha\alpha')$, ... *et* $\alpha\alpha'$, ... *(où* $\alpha, \alpha', \ldots = 1, 2, 3; 1', 2', 3'$*), de façon que:*

1) *Les points appartenant à la conique* $\alpha\alpha'$, *soient*

$$(\alpha\beta'), \quad (\alpha\gamma'), \quad (\alpha'\beta), \quad (\alpha'\gamma).$$

2) *Les coniques passant par* $(\alpha\alpha')$ *soient*

$$\alpha\beta', \quad \alpha\gamma', \quad \alpha'\beta, \quad \alpha'\gamma.$$

3) *Les points conjugués à* $(\alpha\alpha')$ *soient*

$$(\alpha\beta'), \quad (\alpha\gamma'), \quad (\alpha'\beta), \quad (\alpha'\gamma).$$

4) *Les coniques conjuguées à* $\alpha\alpha'$ *soient*

$$\alpha\beta', \quad \alpha\gamma', \quad \alpha'\beta, \quad \alpha'\gamma.$$

Les coniques $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$ *passant par* $(\alpha\alpha')$, *touchent un même plan tangent à* Φ *en* $(\alpha\alpha')$, *tandis que les coniques* $\alpha'\beta$, $\alpha'\gamma$ *touchent l'autre plan tangent en* $(\alpha\alpha')$.

Toute conique $\alpha\alpha'$ *de la cfg. appartient à un hyperplan ayant un contact d'ordre 2 avec* Φ *suivant la conique* $\alpha\alpha'$.

Remarquons enfin que *les 4 points doubles de* Φ *appartenant à une même conique, ont sur celle-ci un rapport anharmonique qui ne dépend pas de la conique considérée et qui est l'invariant de la courbe de genre 2 associée à* Φ (courbe représentée sur la conique triple ayant 4 points de diramation dans les points indiqués).

77. *Les genres de la surface* Φ_6. – En nous rapportant à la surface Φ_6 qui fournit le modèle des surfaces hyperelliptiques du type II, il est aisé de reconnaître à postériori que *ces surfaces ont les genres*

$$p_a = p_g = 1.$$

Remarquons d'abord que la surface Φ_6 est l'intersection d'une variété quadrique et d'une variété cubique de S_4; c'est là une conséquence de ce que toute section hyperplane de genre 4 de Φ_6 est l'intersection de deux surfaces d'ordre 2, 3 [47]. Or la surface intersection de deux variétés d'ordre 2, 3 en S_4 a en général les genres $p_a = p_g = 1$ [48]; mais comme notre surface Φ_6 n'a pas des points singuliers abaissant le genre numérique, on en conclut que le genre numérique de Φ_6 sera aussi

$$p_a = 1 .$$

Il s'ensuit que

$$p_g = 1 ;$$

ce qui d'ailleurs se reconnaît aussi directement en montrant que le système linéaire $|\Gamma|$ est adjoint à lui même.

78. *La surface hyperelliptique Φ_6 caractérisée par la configuration de ses points et hyperplans singuliers.* – Nous venons de reconnaître que toute surface hyperelliptique du type II peut être ramenée par une transformation birationnelle à une surface Φ_6 d'ordre 6 et de genres 1 en S_4, qui possède 9 points biplanaires et 9 hyperplans ayant un contact d'ordre 2 suivant des coniques; ces points et hyperplans singuliers forment une configuration que nous avons définie au n. 76.

Donnons-nous maintenant une surface Φ_6 d'ordre 6 et de genres $p_a = p_g = 1$, en S_4, et supposons que cette surface possède une configuration de 9 points et de 9 hyperplans singuliers satisfaisant aux conditions établies; il s'agit de reconnaître si Φ_6 est une surface hyperelliptique de rang 3.

A cet effet nous procéderons par la même méthode que nous avons employé au n. 49.

Nous tâcherons de construire une surface hyperelliptique de rang 1, F, qui soit représentée sur la surface Φ_6 comptée trois fois; on obtiendra une telle surface F en opérant sur les points de Φ_6 par l'extraction d'une racine cubique portant sur une fonction rationnelle de ces points.

Soient $f_1(x_1, \ldots, x_5) = 0$, $f_2(x_1, \ldots, x_5) = 0$, les équations homogènes (d'ordre 2, 3) qui représentent la surface Φ_6 dans l'espace $S_4(x)$.

Considérons une forme cubique $\varphi(x_1, \ldots, x_5)$ et construisons en S_5 la surface F qui est représentée par les équations suivantes:

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \ldots, y_5 = x_5, \quad y_6 = \sqrt[3]{\varphi} , \\ f_1 = 0, \qquad f_2 = 0 . \end{cases}$$

[47] Cfr. ENRIQUES, *Ricerche ...*, (l. c. V, 5).
[48] L. c. III, 6.

Nous voulons démontrer que, par un choix convenable de φ, la surface F qui se trouve représentée sur la Φ_6 comptée 3 fois, aura les genres

$$p_a = -1\,, \qquad p_g = P_4 = 1\,,$$

et sera donc une surface hyperelliptique de rang 1 (et même en ce cas une surface de JACOBI).

Faisons d'abord les remarques générales suivantes.

Si l'on prend φ d'une façon arbitraire, on obtient une surface F qui est représentée sur Φ_6 comptée 3 fois et l'on a sur cette dernière surface une courbe de diramation découpée par

$$\varphi = 0\,.$$

Cependant:

1) Si de cette courbe fait partie une composante comptée 3 fois, celle-ci n'est pas lieu de points de diramation, mais seulement de points critiques apparents de la surface triple. Pourtant il faudra retrancher de la section de $\varphi = 0$ toute composante qui soit comptée $3s$ fois; et on pourra compter comme simple toute composante qui figure $3s + 1$ ou $3s + 2$ fois dans la même courbe.

2) Si $\varphi = 0$ passe par un point double (biplanaire) O de Φ_6, on aura que le domaine de Φ_6, sur chaque nappe de la surface, pourra constituer ou non une courbe de diramation infiniment petite; c'est le premier cas qui a lieu si toute branche linéaire de courbe appartenant à cette nappe a $t = 3s + 1$ ou $3s + 2$ intersections avec $\varphi = 0$; au contraire on tombe dans le deuxième cas si $t = 3s$.

3) La surface F ne saurait être réductible s'il y a sur Φ_6 des points de diramation.

Ceci posé on peut choisir trois hyperplans tangents à Φ_6 suivant des coniques, de façon que ces coniques se coupent deux à deux en trois couples de points doubles appartenant à un même triangle, et qu'elles renferment dans leur ensemble tous les 9 points doubles de Φ_6. Il suffit de considérer trois hyperplans qui dans notre symbolisme sont représentés par

$$\alpha\alpha'\,, \quad \alpha\beta'\,, \quad \alpha\gamma'\,.$$

On peut supposer que les équations de ces hyperplans soient respectivement

$$x_1 = 0\,, \qquad x_2 = 0\,, \qquad x_3 = 0\,.$$

Posons

$$\varphi = x_1 x_2 x_3 ,$$

et considérons la surface F qui est représentée par

$$y_1 = x_1, \ldots, y_5 = x_5 , \qquad y_6 = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} , \quad (f_1 = f_2 = 0).$$

On voit d'abord que, n'existant pas des courbes de diramation propres sur Φ_6, aux sections hyperplanes de Φ_6 correspondent sur F des courbes se coupant en des groupes canoniques, et par conséquent les genres géométriques de F sont égaux à 1:

$$p_g = P_2 = \ldots = 1 , \qquad p^{(1)} = 1 .$$

En outre les courbes de diramation infiniment petites de Φ_6 donnent lieu sur F, ou sur une transformée de celle-ci, à des courbes exceptionnelles qui se partagent en 9 couples de courbes se coupant en un point; pourtant chaque couple se ramène à un point simple sur une surface de la classe convenablement choisie.

Il s'agit de prouver que le genre numérique de F est

$$p_a = -1 .$$

A cet effet il faut montrer que les domaines des points doubles (biplanaires) de Φ_6, comptent tous comme des courbes de diramation infiniment petites de la surface triple.

Il y a deux sortes de points doubles de Φ_6; des points tels que $(\alpha\beta')$, $(\alpha\alpha')$, $(\alpha\gamma')$ appartenant à deux parmi les hyperplans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; et des points appartenant à un seul parmi ces hyperplans.

Considérons d'abord le point $(\alpha\beta')$.

Les hyperplans associés $\alpha\alpha'$ et $\alpha\beta'$ qui renferment ce point, ont commun le plan tangent à une nappe de la surface. Or une section hyperplane de celle-ci aura en $(\alpha\beta')$ un point double; et la tangente à une des deux branches étant une droite double pour $\varphi = 0$, cette branche aura 4 intersections avec $\varphi = 0$, tandis que l'autre branche en aura 2. Il s'ensuit que le domaine du point double sur chacune des deux nappes de la surface, compte comme une courbe de diramation infiniment petite.

Il en est de même pour un point, tel que $(\alpha'\beta)$, appartenant à un seul hyperplan parmi ceux qui composent φ. En effet en ce cas le plan tangent à une des deux nappes appartient simplement à φ; ainsi donc en con-

sidérant une section hyperplane par le point double, on trouve qu'une branche a 2 intersections, et l'autre *une* intersection avec φ.

Ceci posé on peut évaluer l'invariant de ZEUTHEN-SEGRE I de F.

Considérons un faisceau de sections hyperplanes C de Φ_6; à celles-ci correspondent sur F des courbes K de genre $\pi = 10$, ayant $n = 18$ points-base.

En désignant par δ le nombre des courbes K douées d'un point double, on aura

$$I = \delta - n - 4\pi = \delta - 58;$$

et d'ailleurs, puisque le genre linéaire de F est $p^{(1)} = 1$,

$$I = 12p_a - p^{(1)} + 9 = 12p_a + 8;$$

pourtant

$$\delta = 66 + 12p_a .$$

Il s'agit d'évaluer δ.

On aura

$$\delta = 3\delta' + 9h ,$$

en désignant par δ' le nombre des courbes C qui ont un point double hors des points biplanaires de la surface, et en supposant qu'en un point simple de F (ou d'une transformée) correspondant à un point biplanaire de Φ_6, il y ait un point multiple pour une courbe K, équivalent à h points doubles.

Mais en calculant l'invariant de ZEUTHEN-SEGRE de Φ_6 on trouve

$$I' = \Delta - 6 - 4\cdot 4 = 20 ,$$

où

$$\Delta = 42$$

désigne le nombre des C qui sont douées d'un point double. En ce nombre Δ figurent les 9 points biplanaires de la surface, chacun à compter 3 fois d'après l'abaissement qu'il produit sur la classe de la surface; ainsi donc

$$\Delta = 42 = \delta' + 3\cdot 9 ,$$

$$\delta' = 15 .$$

Il s'ensuit

$$3\cdot 15 + 9h = 66 + 12p_a\,, \qquad 9h = 12p_a + 21\,,$$

d'où $(-1 \leqslant p_a \leqslant 1)$

$$h = 1\,, \qquad p_a = -1;$$

par conséquent le genre numérique de F est

$$p_a = -1\,. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En conclusion on pourra énoncer le théorème suivant:

La surface hyperelliptique Φ_6 d'ordre 6 et de genres $p_a = p_g = 1$, est caractérisée, parmi les surfaces du même ordre et du même genre de S_4, par la configuration de ses 9 points doubles et de ses 9 hyperplans singuliers.

Étant données les équations algébriques de la surface, la méthode précédente nous apprend aussi à *représenter les coordonnées de ses points par des fonctions hyperelliptiques* de deux paramètres u, v; ces paramètres s'introduisent en construisant les deux intégrales simples de première espèce attachées à la surface F définie ci-dessus.

Dans la suite nous aurons lieu d'étudier en détail cette représentation paramétrique.

REMARQUE. – Il y a lieu de remarquer que l'énoncé du théorème précedent renferme des conditions surabondantes.

En effet la condition de posséder 9 points biplanaires entraîne 18 équations auxquelles on doit satisfaire par les 19 modules appartenant à une surface d'ordre 6 et de genre 1 (intersection d'une variété cubique et d'une quadrique) en S_4. Cette remarque nous fait comprendre que: *la surface hyperelliptique Φ_6, dépendant d'un module, résulte déjà caractérisée par la condition de posséder 9 points doubles biplanaires.*

79. *La configuration caractéristique de Φ_6 rattachée à une configuration connue: équations algébriques de Φ_6*: – Pour étudier de plus près la configuration caractéristique de Φ_6, il convient de la rattacher à une configuration connue, considérée par MM. SEGRE [49] et CASTELNUOVO [50], c'est-à-dire à la configuration qui est formée par les 9 *points doubles d'un faisceau de variétés cubiques et par les 9 plans appartenant à ces variétés.*

---

[49] C. SEGRE, *Sulle varietà cubiche dello spazio a 4 dimensioni ...*, « Memorie Accad. Torino » s. II, t. 39 (1888).

[50] G. CASTELNUOVO, *Sulle congruenze del 3° ordine dello spazio a 4 dimensioni*, II, « Memoria Atti Istituto Veneto », t. VI, s. 6 (1888).

D'après MM. SEGRE et CASTELNUOVO, il y a en S_4 ∞^{24} groupes de 9 points G_9, qui sont doubles pour une variété cubique; il y a toujours un faisceau de variétés analogues possédant les mêmes points doubles de G_9 et renfermant 9 plans; G_9 ne renferme pas des modules.

Nous allons montrer que: *Toute variété cubique passant doublement par les 9 points d'un G_9, renferme deux surfaces hyperelliptiques Φ_6 ayant comme points biplanaires les points du même G_9.*

Toute Φ_6 ainsi définie dépend d'un module qui est simplement lié au paramètre dont dépendent les variétés du faisceau considéré; pourtant toute surface hyperelliptique Φ_6 du type II peut être obtenue par la construction indiquée, c'est-à-dire que:

Les points biplanaires d'une surface hyperelliptique Φ_6, sont les points doubles de ∞^1 variétés cubiques formant un faisceau.

Considérons les 9 points d'un G_9. D'après M. CASTELNUOVO (l. c. 15, pag. 24) on pourra les représenter très simplement en ajoutant aux coordonnées $x_1, \ldots, x_5$ des points de S_4, la coordonnée auxiliaire x_6, où

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 .$$

On a un faisceau de variétés cubiques

$$x_1 x_2 x_3 + \lambda x_4 x_5 x_6 = 0 , \tag{1}$$

qui ont les 9 points doubles

(1 0 0 −1 0 0)	(1 0 0 0 −1 0)	(1 0 0 0 0 −1)
(0 1 0 −1 0 0)	(0 1 0 0 −1 0)	(0 1 0 0 0 −1)
(0 0 1 −1 0 0)	(0 0 1 0 −1 0)	(0 0 1 0 0 −1)

que nous désignerons respectivement par 1) 2) 3) 4) 5) 6) 7) 8) 9).

Les 9 points, formant un groupe G_9, se trouvent quatre à quatre sur 9 plans tels que

$$x_1 = x_4 = 0 , \qquad x_1 = x_5 = 0 , \ldots .$$

et ces plans appartiennent aux mêmes variétés cubiques de notre faisceau.

Entre les 9 points doubles et les 9 plans-base des (1), il y a les mêmes relations qui passent entre les points doubles d'une surface Φ_6 et les plans de ses coniques.

Or parmi les variétés du faisceau (1) il y en a *une* douée de 10 *points* doubles, le dixième point tombant en $P = (1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1)$.

Considérons ce point P, covariant du groupe G_9, et formons la quadrique polaire de P par rapport à la variété

$$x_1 x_2 x_3 + \lambda' x_4 x_5 x_6 = 0$$

on trouvera

$$x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 + \lambda'(x_5 x_6 + x_6 x_4 + x_4 x_5) = 0 . \tag{2}$$

Cette quadrique coupe le plan

$$x_1 = x_4 = 0$$

suivant la conique

$$x_2 x_3 + \lambda' x_5 x_6 = 0$$

qui renferme les quatre points 5) 6) 8) 9).

Il est aisé d'évaluer le rapport anharmonique que ces quatre points forment sur la conique; il suffit de les projeter par le point 8) suivant les droites

$$x_3 = 0 , \quad x_5 = 0 , \quad x_3 + x_5 = 0 , \quad x_3 - \lambda' x_5 = 0 .$$

En prenant les points dans l'ordre 5) 6) 9) 8), on obtient le rapport anharmonique $-\lambda'$.

Cette valeur ne dépend pas des indices des x; par conséquent la quadrique (2) coupe les 9 plans-base du faisceau (1) suivant des coniques qui renferment quatre des points 1) ... 9), ayant sur la conique respective le même rapport anharmonique.

On obtient ainsi une configuration de 9 points et de 9 coniques satisfaisant aux mêmes conditions que la configuration caracteristique d'une surface hyperelliptique Φ_6.

Nous allons reconnaître qu'il y a toujours dans le faisceau (1) une variété coupant la quadrique (2) suivant une surface Φ_6 qui renferme les 9 coniques et qui a 9 points biplanaires en 1) ... 9).

A cet effet, étant donnée la quadrique (2), tâchons de déterminer une variété (1) de façon qu'un des points 1) ... 9), p. ex. le point 1), soit un point biplanaire pour la surface intersection de (1), (2).

Remarquons que le cône tangent à (1) en (1, 0, 0, −1, 0, 0) est

$$x_2 x_3 - \lambda x_5 x_6 = 0; \tag{3}$$

d'autre côté l'hyperplan tangent à (2) est

$$x_2 + x_3 - \lambda'(x_5 + x_6) = 0 . \tag{4}$$

Il faut exprimer que l'hyperplan (4) est tangent à la quadrique (3). En éliminant x_2 entre (3), (4), on obtient la quadrique

$$x_3^2 - \lambda' x_3 x_5 - \lambda' x_3 x_6 + \lambda x_5 x_6 = 0;$$

et en annulant le discriminant de cette quadrique, on trouve la condition de contact de (1), (2) sous la forme suivante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -\lambda' & -\lambda' \\ -\lambda' & 0 & \lambda \\ -\lambda' & \lambda & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Cette équation peut être divisée par λ ($\lambda = 0$ correspond à une variété (1) réductible à trois hyperplans), et l'on obtient

$$\lambda = \lambda'^2 .$$

Cette condition ne depend pas du point 1) que nous avons choisi parmi les 9 points de notre G_9. Par conséquent elle exprime que les variétés (1), (2), correspondantes aux paramètres λ'^2, λ' se coupent suivant une surface Φ_6 qui a 9 points biplanaires dans les points de G_9.

Ainsi donc Φ_6 sera notre surface hyperelliptique du type II, et on obtiendra même la surface la plus générale de cette famille dépendant d'un module arbitraire. Par suite *la surface hyperelliptique Φ_6 pourra être représentée très simplement par les équations suivantes*

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1 x_2 x_3 + \lambda x_4 x_5 x_6 = 0 \\ x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 \pm \sqrt{\lambda}(x_5 x_6 + x_6 x_4 + x_4 x_5) = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 . \end{cases}$$

80. *Homographies qui ramènent en elle-même la surface Φ_6.* – La surface Φ_6 admet un groupe remarquable de transformations homographiques en elle-même. Nous nous proposons d'étudier ce groupe et en particulier d'établir quelques propriétés qui nous seront utiles dans la suite, pour l'analyse du type IV.

Rappelons-nous que sur la surface de JACOBI F, les transformations de 1re et de 2de espèce qui ramènent en lui-même le groupe des coïncidences d'une transformation quelconque T, ramènent aussi en elle-même cette transformation (n. 62).

En particulier, dans notre cas, les transformations de 1re et de 2de espèce qui changent en lui-même le groupe des 9 points unis de la transformation cyclique de 3me ordre T, changent aussi en elle-même l'involution I_3 engendrée par T, et par suite elles donnent naissance à des transformations birationnelles entre les points de la surface Φ_6 image de I_3.

On aura ainsi sur F exactement neuf transformations de 1re espèce et neuf transformations de 2de espèce, parmi ces dernières étant comprise la transformation identique.

Comme les 18 transformations indiquées laissent invariant le système Σ des courbes C, elles laisseront invariant aussi le système linéaire $|D|$ renfermant les courbes $C + C' + C''$; par conséquent les transformations homologues qu'on obtient entre les points de Φ laissent invariant le système $|\Gamma|$, c'est-à-dire qu'elles sont des homographies de l'espace S_4.

En ayant égard aux propriétés des 18 transformations de 1re et de 2de espèce qui changent en elle-même l'involution I_3, on arrive tout de suite au théorème suivant:

La surface Φ est transformée en elle-même par les homographies d'un groupe G_{18} d'ordre 18, *renfermant* 9 *involutions, et* 8 *transformations cycliques d'ordre* 3 *qui, avec l'identité, forment un sous-groupe G_9.*

Le produit de deux homographies involutoires est une homographie de G_9, tandis que le produit d'une involution par une homographie de G_9, est encore une involution.

Le groupe des neuf points doubles et le groupe des neuf coniques appartenant à Φ sont ramenés évidemment en eux-mêmes par toute homographie du groupe G_{18}.

Nous voulons préciser quelles sont les permutations produites par ces homographies entre les points doubles et les coniques. Nous considérerons en particulier les permutations produites par une homographie involutoire du groupe G_{18}, car cela nous sera utile pour l'examen du type IV.

Il suffit de voir comment sont permutés les points et les courbes de coïncidences de la transformation T existant sur F, par une des 9 transformations de 1re espèce qui changent T en elle-même.

Soit K la transformation de 1re espèce envisagée. Elle est définie par la condition qu'un des 16 points unis de K coïncide avec un des 9 points unis de T.

Désignons ce point uni commun, par le symbole $(\alpha\,\alpha')$; et observons que les courbes $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$ étant tangentes en $(\alpha\alpha')$, sont correspondantes par rapport à K. De même K transforme la courbe $\alpha'\beta$ en $\alpha'\gamma$.

Il s'ensuit qu'au point $(\beta\beta')$ commun aux courbes $\alpha\beta'$, $\alpha'\beta$ hors de $(\alpha\alpha')$, correspond le point $(\gamma\gamma')$ commun aux courbes $\alpha\gamma'$, $\alpha'\gamma$, hors de $(\alpha\alpha')$; au point $(\alpha\beta')$ conjugué de $(\alpha\alpha')$ par rapport à la g_2^1 de la courbe $\alpha\gamma'$, correspond le point $(\alpha\gamma')$ conjugué de $(\alpha\alpha')$ par rapport à la g_2^1 de $\alpha\beta'$; au

point $(\beta\gamma')$ commun aux courbes $\alpha\gamma'$, $\alpha'\beta$, correspond le point $(\gamma\beta')$ commun aux courbes $\alpha\beta'$, $\alpha'\gamma$; etc. On trouve ainsi que K transforme les points

$$(\alpha\alpha'), \quad (\beta\beta'), \quad (\alpha\beta'), \quad (\alpha'\beta), \quad (\beta\gamma')$$

en les points

$$(\alpha\alpha'), \quad (\gamma\gamma'), \quad (\alpha\gamma'), \quad (\alpha'\gamma), \quad (\beta'\gamma);$$

et les courbes

$$\alpha\alpha', \quad \beta\beta', \quad \alpha\beta', \quad \alpha'\beta, \quad \beta\gamma'$$

en les courbes

$$\alpha\alpha', \quad \gamma\gamma', \quad \alpha\gamma', \quad \alpha'\gamma, \quad \beta'\gamma .$$

Donc:

Chacun des points doubles de Φ est uni par rapport à une involution de G_{18}. Cette involution fait correspondre deux à deux les autres points doubles. Elle laisse invariant la conique de Φ qui est conjuguée au point uni et fait correspondre deux à deux les 8 *coniques restant.*

Dans la suite il nous faudra aussi connaître le nombre des points de coïncidence d'une des involutions qui transforment en elle-même la surface Φ. Cela revient à chercher le nombre des groupes de l'involution I_3 de F, qui sont invariant par rapport à la transformation de 1re espèce K.

Nous avons déjà établi qu'entre les neuf groupes de I_3 formés par des points coïncidants, il y en a *un* qui reste invariant par rapport à K: c'est le groupe formé par le point uni $(\alpha\alpha')$ compté trois fois.

Cherchons maintenant s'il peut exister des groupes invariants formés par trois points distincts.

Comme K est une transformation cyclique de 2d ordre, entre les trois points d'un groupe invariant, on trouvera nécessairement une coïncidence de K, et par suite les deux points restants seront aussi unis par rapport à K, car la transformation T, étant permutable avec K, doit ramener en lui-même le groupe des 16 points unis de K.

Les 15 points unis distincts du point $(\alpha\alpha')$ — qui ne sont pas unis par rapport à T — se distribuent ainsi en cinq groupes invariants de I_3.

On en conclut que sur la surface Φ l'homographie ω, *image* de la transformation K, laisse invariants six points de Φ: le point double $(\alpha\alpha')$ et cinq points *simples* de la surface.

Mais un examen plus approfondi nous montre qu'au point de vue des transformations birationnelles, le point double $(\alpha\alpha')$ est équivalent à trois coïncidences, c'est-à-dire que sur une surface dépourvue de points multiples et de courbes exceptionnelles, qui soit birationnellement iden-

tique a Φ, *la transformation correspondante à* ω *possède huit coïncidences distinctes.*

A cet effet il s'agit de prouver qu'entre les points de Φ infiniment voisins au point $(\alpha\alpha')$, il y en a trois qui sont unis par rapport à ω.

Remarquons d'abord que la droite d commune aux plans tangents à Φ en $(\alpha\alpha')$ doit être unie, et par suite que le point successif à $(\alpha\alpha')$ suivant la direction de cette droite, est aussi uni.

Comme l'homographie ω change la conique $\alpha\beta'$ en la conique $\alpha\gamma'$ qui touche le même plan tangent π, elle changera en lui-même ce plan tangent, et entre les droites tangentes issues par le point $(\alpha\alpha')$ sur le plan π, elle engendrera une involution non identique, un couple de cette involution étant donné par les droites distinctes r, s tangentes aux coniques $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$. Les deux droites unies de cette involution sont: la droite d et la droite d' conjuguée harmonique à d par rapport à r, s.

On trouve analoguement que l'homographie ω a une autre droite unie d'', sur l'autre plan tangent à Φ en $(\alpha\alpha')$.

On a ainsi en correspondance aux droites d, d', d'', trois points simples, successifs à $(\alpha\alpha')$, qui sont unis par rapport à ω, C. Q. F. D.

81. *Représentation analytique de la transformation* T. – Nous voulons achever ce Ch. en étudiant de plus près la représentation paramétrique de la surface Φ.

Commençons par représenter analytiquement la transformation T d'ordre 3, qui donne naissance à cette surface.

Rapportons-nous donc à la surface de JACOBI F, que T transforme en elle-même, et tâchons d'écrire la substitution linéaire produite par T sur les intégrales normales u, v.

Ainsi que nous l'avons rappelé au n. 66, les périodes normales de u, v sont [51]:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & g' \end{matrix} \qquad \left(gg' = -\frac{1}{12}\right).$$

Soit

$$u' = \lambda u + \mu v$$
$$v' = \lambda' u + \mu' v$$

la substitution linéaire représentant T; il s'agit de calculer les constantes λ, μ, λ', μ'.

---

[51] BOLZA, « American Journal », 1888.

Ces constantes s'expriment au moyen des périodes g, h, g' par les relations (1) du n. 45, et les quatre équations fondamentales (A), (B), (C), (D) auxquelles conduit l'élimination de λ, μ, λ', μ' entre ces relations, doivent actuellement se réduire aux relations singulières (de HUMBERT)

$$h = \frac{1}{2}, \qquad g\,g' = -\frac{1}{12}$$

c'est-à-dire à

$$2h - 1 = 0, \qquad 12g\,g' + 1 = 0.$$

En exprimant que les équations (A), (B), (C), (D) deviennent des identités pour $h = 1/2$, $g\,g' = -1/12$, on obtient entre les 16 entiers a_i, b_i, c_i, d_i les relations

$$a_1 = b_0 = a_3 = b_2 = c_3 = d_2 = c_1 = d_0 = 0,$$
$$3(c_0 + d_1) = -(a_2 + b_3) = 2(a_0 - d_3) = 2(b_1 - c_2).$$

Ces relations, comparées aux (1) du n. 59, (caractérisant les transformations de HERMITE d'ordre 1), permettent de calculer les valeurs des entiers a_i, b_i, c_i, d_i. On trouve ainsi:

$$\begin{array}{llll} a_0 = 1 & a_1 = 0 & a_2 = -3 & a_3 = 0 \\ b_0 = 0 & b_1 = 1 & b_2 = 0 & b_3 = -3 \\ c_0 = 1 & c_1 = 0 & c_2 = -2 & c_3 = 0 \\ d_0 = 0 & d_1 = 1 & d_2 = 0 & d_3 = -2, \end{array}$$

ou bien:

$$\begin{array}{llll} a_0 = -2 & a_1 = 0 & a_2 = 3 & a_3 = 0 \\ b_0 = 0 & b_1 = -2 & b_2 = 0 & b_3 = 3 \\ c_0 = -1 & c_1 = 0 & c_2 = 1 & c_3 = 0 \\ d_0 = 0 & d_1 = -1 & d_2 = 0 & d_3 = 1. \end{array}$$

On en tire

$$\begin{aligned} \lambda &= a_0 + a_3 g + a_2 h = -\tfrac{1}{2} \\ \mu &= b_0 + b_3 g + b_2 h = -3g \\ \lambda' &= a_1 + a_3 h + a_2 g' = -3g' \\ \mu' &= b_1 + b_3 h + b_2 g' = -\tfrac{1}{2}, \end{aligned}$$

ou bien

$$\lambda = -\tfrac{1}{2}, \qquad \mu = 3g, \qquad \lambda' = 3g', \qquad \mu' = -\tfrac{1}{2},$$

et par suite on a les substitutions linéaires périodiques d'ordre 3

$$\begin{cases} u' = -\tfrac{1}{2}u - 3gv \\ v' = -3g'u - \tfrac{1}{2}v, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u' = -\tfrac{1}{2}u + 3gv \\ v' = 3g'u - \tfrac{1}{2}v, \end{cases}$$

qui sont l'une inverse de l'autre, ou l'une le carré de l'autre.

On remarquera que le déterminant $\frac{1}{4} - 9gg'$ de ces substitutions, est égal à l'unité. On pourra désigner par T la première parmi les substitutions que nous avons écrites; alors T^2 désignera la seconde.

Nous avons déjà démontré que la substitution T a neuf points de coïncidence (n. 73); nous pouvons maintenant retrouver ce résultat en calculant aussi les valeurs des intégrales u, v aux points de coïncidence.

Soit (u, v) un point uni de T: on aura

$$u \equiv -\tfrac{1}{2}u - 3gv$$

$$v \equiv -3g'u - \tfrac{1}{2}v,$$

les congruences ayant lieu par rapport aux périodes. On en tire

$$\tfrac{1}{2}u + gv = \tfrac{1}{3}\vartheta_1,$$

$$g'u + \tfrac{1}{2}v = \tfrac{1}{3}\vartheta_2,$$

ϑ_1, ϑ_2 étant un couple de périodes simultanées de u, v. De là on déduit

$$u = \tfrac{1}{2}\vartheta_1 - g\vartheta_2$$

$$v = \tfrac{1}{2}\vartheta_2 - g'\vartheta_1,$$

qui donnent seulement neuf couples incongrus par rapport aux périodes, c'est-à-dire les couples

$$(0\ 0), \quad (0\ \tfrac{1}{3}), \quad (0\ \tfrac{2}{3}), \quad (\tfrac{1}{3}\ 0), \quad (\tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{3}), \quad (\tfrac{1}{3}\ \tfrac{2}{3}), \quad (\tfrac{2}{3}\ 0), \quad (\tfrac{2}{3}\ \tfrac{1}{3}), \quad (\tfrac{2}{3}\ \tfrac{2}{3}).$$

On obtient le premier couple pour $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$, le second pour $\vartheta_1 = g$, $\vartheta_2 = \frac{1}{2}$, le troisième pour $\vartheta_1 = 2g$, $\vartheta_2 = 1$, etc.

82. *Équations des courbes C de Σ qui sont invariant par rapport à T.* – Considérons la fonction thêta normale à caractéristique nulle, d'ordre 1, définie par les conditions fonctionnelles

$$(2)\qquad \begin{cases} \vartheta(u+1, v) & = \vartheta(u, v+1) = \vartheta(u, v) \\ \vartheta(u+g, v+h) & = e^{-\pi i(2u+g)}\vartheta(u, v) \\ \vartheta(u+h, v+g') & = e^{-\pi i(2v+g')}\vartheta(u, v), \end{cases}$$

où les périodes appartiennent au tableau de BOLZA (n. 81). Comme il est bien connu, ces conditions déterminent *une seule fonction*, à un facteur constant près (n. 28).

La substitution hermitienne T change toute courbe C en une courbe C, c'est-à-dire toute fonction thêta du premier ordre en une fonction analogue: il s'agit de trouver, en particulier, la fonction thêta correspondante à la D normale envisagée.

On voit tout de suite que la fonction

$$\varphi(u, v) = \vartheta(-\tfrac{1}{2}u - 3gv, -3g'u - \tfrac{1}{2}v)\, e^{3\pi i(3gv^2+uv+3g'u^2)},$$

satisfait elle-même aux conditions fonctionnelles (2). On aura par conséquent

$$\varphi(u, v) = c\,\vartheta(u, v),$$

où c est un facteur constant à calculer.

Il est aisé de prouver que $c = 1$. En effet étant $\vartheta(0, 0) \neq 0$ ([52]), il vient

$$\varphi(0, 0) = \vartheta(0, 0) = c\,\vartheta(0, 0),$$

d'où l'on tire $\vartheta = 1$.

On a donc la relation

$$\vartheta(u', v')\, e^{3\pi i(3gv^2+uv+3g'u^2)} = \vartheta(u, v),$$

où l'on a posé

$$u' = -\tfrac{1}{2}u - 3gv$$
$$v' = -3g'u - \tfrac{1}{2}v.$$

([52]) Voir p. ex. HUMBERT, « Journal de Math. », 1893, pag. 40.

En changeant u en $u-\alpha$, v en $v-\alpha'$, on obtient

$$\vartheta(u'-\beta,\ v'-\beta')\,e^{3\pi i[3g(v-\alpha')^2+(u-\alpha)(v-\alpha')+3g'(u-\alpha)^2]}=\vartheta(u-\alpha,\ v-\alpha')\ (^{53}),$$

$(\beta\,\beta')$ étant le point de F qui correspond à $(\alpha\,\alpha')$ par rapport à T.

Cette relation montre que *la transformation T change la courbe*

$$\vartheta(u-\alpha,\ v-\alpha')=0,$$

qui est une courbe quelconque C de Σ, dans la courbe

$$\vartheta(u-\beta,\ v-\beta')=0,$$

$(\beta\,\beta')$ étant le point homologue de $(\alpha\,\alpha')$.

Il s'ensuit que, si $(\alpha\alpha')$ est un point uni de T, l'équation

$$\vartheta(u-\alpha,\ v-\alpha')=0$$

vient représenter une courbe C invariant par rapport à T.

On peut donc énoncer que:

Etant donnée une surface de Jacobi correspondante au tableau

$$\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & g' \end{array}\right. \qquad \left(g\,g'=-\frac{1}{12}\right)$$

il y a une transformation hermitienne périodique d'ordre 3

$$(\mathrm{T}) \qquad \left\{\begin{array}{l} u'=-\frac{1}{2}u-3\,g\,v \\ v'=-3\,g'u-\frac{1}{2}v \end{array}\right.$$

qui ramène la surface en elle-même; cette transformation possède neuf coïncidences en les points

$$u=\frac{\alpha}{3},\qquad v=\frac{\alpha'}{3},\qquad (\alpha,\alpha'=0,1,2),$$

---

(53) Voir HERMITE, « Comptes rendus », 1855, t. 40, pag. 366.

et laisse invariant neuf courbes C ayant les équations

$$\vartheta\left(u-\frac{\alpha}{3},\ v-\frac{\alpha'}{3}\right)=0,$$

où ϑ est la fonction thêta normale du 1^r^ ordre à caractéristique nulle.

En poursuivant l'analyse on arrive aussi à démontrer que *la courbe*

$$\vartheta\left(u-\frac{\alpha}{3},\ v-\frac{\alpha'}{3}\right),$$

contient les quatre points unis

$$\frac{\alpha}{3}\frac{\beta'}{3},\qquad \frac{\alpha}{3}\frac{\gamma'}{3},\qquad \frac{\alpha'}{3}\frac{\beta}{3},\qquad \frac{\alpha'}{3}\frac{\gamma}{3},$$

où $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ sont deux permutations des nombres 0, 1, 2.

On retrouve ainsi le symbolisme introduit par une voie différente au n. 73.

83. *Représentation paramétrique de la surface Φ_6.* – La correspondance [1, 3] entre la surface Φ_6 de l'espace à quatre dimensions et la surface de JACOBI F, transforme le système linéaire découpé sur Φ par les hyperplans, dans le système linéaire

$$|D|=|C+C'+C''|,$$

C', C'' étant les courbes de Σ correspondantes à une C donnée par rapport à T, T^2 (n. 75). Si

$$\vartheta(u-\alpha,\ v-\alpha')=0$$

est l'équation de C, l'équation de $C+C'+C''$ résulte (n. préc.):

$$\vartheta(u-\alpha,\ v-\alpha')\vartheta(u-\beta,\ v-\beta')\vartheta(u-\gamma,\ v-\gamma')=0,$$

où l'on a posé:

$$\begin{cases}\beta=-\frac{1}{2}\alpha-3g\alpha'\\ \beta'=-3g'\alpha-\frac{1}{2}\alpha'\end{cases}\qquad\begin{cases}\gamma=-\frac{1}{2}\alpha+3g\alpha'\\ \gamma'=3g'\alpha-\frac{1}{2}\alpha'.\end{cases}$$

Soient C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 cinq positions de la courbe C telles que les cinq courbes D:

$$C_i + C_i' + C_i'', \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4),$$

représentées par les équations

$$\Theta_i(u, v) = \vartheta(u - \alpha_i, v - \alpha_i')\,\vartheta(u - \beta_i, v - \beta_i')\,\vartheta(u - \gamma_i, v - \gamma_i') = 0\,,$$
$$(i = 0, 1, \ldots, 4),$$

résultent linéairement indépendantes. Comme toute courbe du système $|D|$ est linéairement dépendante des cinq courbes fixées, l'équation d'une courbe D quelconque aura la forme

$$\lambda_0\,\Theta_0(u, v) + \lambda_1\,\Theta_1(u, v) + \ldots + \lambda_4\,\Theta_4(u, v) = 0\,.$$

Dans l'espace S_4 de Φ_6 prenons comme hyperplans d'équations

$$x_0 = 0\,, \quad x_1 = 0\,, \quad \ldots\,, \quad x_4 = 0$$

les cinq hyperplans qui renferment les courbes Γ répondant aux courbes $C_i + C_i' + C_i''$.

On obtient alors les formules

$$\varrho x_i = \Theta_i(u, v) \qquad (i = 0, 1, \ldots 4),$$

qui donnent la représentation de la surface Φ_6 au moyen des paramètres u, v.

IX. Surfaces hyperellitiques régulières de rang 4 (tipe III).

84. *Transformations hermitiennes périodiques d'ordre quatre.* – Soit τ une transformation singulière, cyclique d'ordre 4, appartenant à la courbe de genre deux f. La surface de JACOBI F attachée à f, possède une transformation hermitienne T (correspondante à τ) appartenant à une série continue ∞^2 de transformations semblables.

Des propriétés de τ on déduit tout de suite les propriétés de T. Cherchons en particulier le nombre des points de coïncidence de la transformation T. On doit chercher combien y a-t-il de couples de points de f, qui soient changés en eux-mêmes par τ. Remarquons que τ laisse invariant deux points M, N de f, qui sont aussi unis par rapport à la g_2^1 de f,

et que les quatre points unis restant de la g_2^1, se distribuent en deux couples de points homologues $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ par rapport à la τ; on obtient ainsi les couples unis

$$2M, \quad 2N, \quad M + N, \quad A_1 + A_2, \quad B_1 + B_2 .$$

Pourtant sur la surface F il y a quatre points de coïncidence de la trans. formation T, car la F, étant toujours supposée dépourvue de courbes exceptionnelles, les couples $2M$, $2N$ sont représentés par un même point de F (n. 5).

Comme la transformation τ^2 coïncide avec la correspondance déterminée par la g_2^1 entre les points de f, la transformation T^2 de F sera une transformation K de la 1re espèce.

Cette transformation K possède 16 points unis, dont quatre tombent en les points unis de T; les 12 qui restent correspondent aux couples de points de f:

$$A_1 + M, \; A_2 + M; \quad A_1 + N, \; A_2 + N; \quad B_1 + M, \; B_2 + M,$$
$$B_1 + N, \; B_2 + N; \quad A_1 + B_1, \; A_2 + B_2; \quad A_1 + B_2, \; A_2 + B_1 .$$

On a ainsi 6 couples de points de F qui forment de cycles d'ordre 2 par rapport à T.

Envisageons maintenant le système Σ qui contient totalement les courbes C de F correspondantes aux séries des couples de f qui renferment un point fixé; tâchons de déterminer les courbes de Σ qui sont invariantes par rapport à T et les liens entre ces courbes et les points unis de la même transformation. Il nous sera ici très utile le symbolisme introduit par M. HUMBERT (n. 46). Désignons donc par $(\alpha\alpha')$ et respectivément par $\alpha\alpha'$ — où $\alpha = 1, 2, 3, 4$; $\alpha' = 1', 2', 3', 4'$ — les points et les courbes invariants par rapport à la transformation de la 1re espèce K. Soit $(11')$ un des 4 points unis qui sont aussi invariants par rapport à T, et H le système de courbes C issues par $(11')$.

La transformation T établit entre les éléments (courbes) de la variété H, une correspondance singulière cyclique d'ordre 4, parfaitement analogue à la transformation τ donnée sur la courbe f.

Rappelons-nous que les couples de courbes C issues par $(11')$ et conjuguées par rapport à K, forment la g_2^1 appartenant à la variété de genre deux H qui a pour éléments ces ∞^1 C; il s'ensuit que parmi les six courbes

$$12', \quad 13', \quad 14', \quad 1'2, \quad 1'3, \quad 1'4$$

passant par le point envisagé et unies par rapport à K, deux seront aussi unies par rapport à T et les quatre restant se partegeront en deux cycles de 2^d ordre par rapport à cette dernière transformation.

Soient $12'$, $1'2$ les courbes unies, et

$$13',\ 1'3;\qquad 14',\ 1'4$$

les deux cycles d'ordre 2. Il s'ensuit que les points $(22')$, $(33')$, $(44')$, où se coupent ces couples de courbes hors du point $(11')$, sont des points unis par rapport à T. On considérera alors la correspondance établie par T entre les courbes C passant par $(22')$, et on trouvera deux nouveaux cycles de 2^d ordre de la transformation T. Ce raisonnement pouvant être répété pour les autres points unis, on arrivera à la conclusion qui est exprimée par le tableau suivant:

Points

unis	cycles de 2^d ordre
$(11')$, $(22')$, $(33')$, $(44')$	$(12')$, $(1'2)$; $(13')$, $(2'4)$; $(14')$, $(2'3)$; $(23')$, $(1'4)$; $(24')$, $(1'3)$; $(34')$, $(3'4)$:

Courbes C

unies	cycles de 2^d ordre
$12'$, $1'2$, $34'$, $3'4$	$13'$, $1'3$; $14'$, $1'4$; $23'$ $2'3$; $24'$, $2'4$; $11'$, $22'$; $33'$, $44'$.

On voit de suite que les cycles de 2^d ordre formés par les points ou par les courbes de notre tableau ne jouent pas un rôle symétrique.

On a en effet quatre cycles de points, c'est-à-dire les cycles

(1) $\qquad (13')$, $(2'4)$; $(14')$, $(2'3)$; $(23')$, $(1'4)$; $(24')$, $(1'3)$,

qui appartiennent à des courbes unies, tandis que les cycles restant

(2) $\qquad (12')$, $(1'2)$; $(34')$, $(3'4)$,

n'appartiennent à aucune courbe unie. Analoguement on a quatre cycles de courbes

(3) $\qquad 13'$, $1'3$; $14'$, $1'4$; $23'$, $2'3$; $24'$, $2'4$,

qui passent par des points unis, tandis que les cycles

(4) $$11', 22'; 33', 44'$$

ne jouissent pas de cette propriété.

Les cycles (1), (3) seront nommés *cycles de rang* 1, et les cycles (2), (4) *cycles de rang* 2.

85. *L'involution I_4 engendrée par la transformation T et la surface Φ_8, d'ordre* 8, *qui en donne l'image projective.* – Considérons l'involution engendrée sur la surface de JACOBI F par la transformation T; c'est-à-dire l'involution dont un groupe quelconque est formé en associant à un point P de F les points P', P'', P''' correspondants à P par rapport à T, T^2, T^3.

En suivant la même marche qu'aux n. 75 on établit tout de suite:

1) Que l'involution I_4 possédant un nombre fini de points de coïncidence (c'est-à-dire quatre points 4-ples et douze points doubles, donnant six groupes de I_4), toute surface Φ qui représente birationnellement les groupes de I_4, est régulière.

2) Que dans la correspondance [1, 4] entre les surfaces Φ, F, au système linéaire $|D|$ appartenant à l'involution I_4 et renfermant totalement la courbe $C + C' + C'' + C'''$ (où C', C'', C''' sont les transformées de C par rapport à T, T^2, T^3) correspond sur Φ un système linéaire simple $\infty^2 |\Gamma|$, dépourvu de points-base, ayant le genre 5 et le degré 8.

La variété ∞^2 des groupes de I_4 pourra donc être représentée par une surface Φ_8 de l'espace S_r de façon que le système linéaire complet $|\Gamma|$ soit decoupé sur Φ_8 par les hyperplans de S_r.

Comme sur une surface régulière, telle que Φ_8, tout système linéaire complet a la série caractéristique complète, la dimension r du système $|\Gamma|$, c'est-à-dire de l'espace renfermant Φ_8, sera égale à 5 ou à 4 suivant que cette série caractéristique sera la série canonique ou bien une série non-speciale; le premier cas aura lieu si le genre de la surface $p_g = 1$, le second si $p_g = 0$.

On verra dans la suite que $p_g = 1$ et par conséquent $r = 5$.

86. *Relations entre la surface Φ_8 et la surface de Kummer attachée à la même courbe de genre* 2. *Genre de la surface Φ_8.* – Pour calculer la valeur du genre de Φ_8, remarquons d'abord que:

On peut établir une correspondance birationnelle entre les points de la surface Φ_8 et les couples d'une certaine involution I_2 appartenant à la surface de Kummer φ qui est attachée à la courbe de genre deux f.

En effet les points P, P', P'', P''' d'un groupe de I_4 se distribuent en deux couples P, P'' et P', P''' de points homologues par rapport à la transformation de 1re espèce $K \equiv T^2$, de sorte qu'à tout groupe de I_4 répondent deux groupes de l'involution I_2 engendrée par K, et réciproquement à tout groupe de I_2 répond un seul groupe de I_4. Comme les surfaces Φ, ψ dont on parle ci-dessus, sont birationnellement identiques aux variétés I_4, I_2 on aura entre les points de ces surfaces une correspondance faisant répondre à un point de Φ, deux points de ψ, et à un point de ψ, un seul point de Φ. C. Q. F. D.

On dira que la correspondance involutoire qu'on a entre deux points de ψ correspondant à un même point de Φ, est l'image de la correspondance T qu'on a établi sur la surface F.

On démontre de plus que *l'involution d'ordre* 2 *que nous avons définie sur la surface de Kummer* ψ, *est engendrée par une homographie involutoire qui transforme en elle-même la surface* ψ, *et laisse invariant quatre points doubles de celle-ci.*

Pour établir cette proposition, il faut remarquer d'abord que dans la correspondance [1, 2] entre les points de la surface de Kummer ψ et de la surface de Jacobi F, aux sections planes de ψ répondent les courbes d'un système linéaire $|G|$ renfermant totalement la courbe $C + C''$ ainsi que la $C' + C'''$.

Comme la transformation T change la courbe $C + C''$ en $C' + C'''$, la correspondance involutoire, ω, image de T, changera la section plane de ψ répondant à $C + C''$, dans la section répondant à $C' + C'''$, et par suite elle changera en lui-même le système (complet) des sections planes de ψ. On en conclut que ω est une homographie (involutoire).

Les points de ψ qui sont unis par rapport à ω répondent aux groupes de l'involution I_2, engendrée par K, qui demeurent invariant par rapport à T. En se rappelant que $K \equiv T^2$, on voit tout de suite que les seuls groupes de K qui restent invariant par rapport à T, sont formés par les points unis (11'), (22'), (33'), (44'), dont chacun doît être compté deux fois.

Comme à ces groupes de points coïncidant répondent quatre des 16 points doubles de la surface ψ on arrive ainsi à la conclusion énoncée.

Ceci posé, remarquons que l'homographie ω (par laquelle vient définie I_2 sur ψ) ne saurait être une homologie, car autrement on aurait sur ψ une courbe de points de coïncidences; pourtant ω sera une homographie harmonique à deux axes, et ces axes seront deux côtés opposés du quadrilatère gauche formé par les quatre points unis nommés ci-dessus.

Or d'après le lemme que nous avons établi au n. 38 on pourra calculer le genre ($p_a = p_g$) de Φ en déterminant s'il y a, ou s'il n'y a pas,

des points de coïncidence de l'involution I_2 sur ψ; on aura

$$p_a = p_g = 1 ,$$

dans la première hypothèse, tandis que la seconde hypothèse amenerait à

$$p_a = p_g = 0 .$$

On dirait au premier abord qu'il existe sur ψ quatre coïncidences de I_2 tombant dans les quatre points doubles qui se trouvent sur les deux axes de ω.

Mais il ne faut pas oublier qu'au point de vue des transformations birationnelles, un point double conique doît être considéré comme une courbe rationnelle (de degré — 2), de sorte que les points de cette courbe qu'on aurait sur une transformée convenable de la surface, répondent aux points appartenant au domaine du point double, ou, si l'on veut, aux génératrices du cône tangent.

On aura donc à chercher le nombre des génératrices des quatre cônes tangents, qui restent invariant par rapport à ω. Soit M un point double uni et n l'axe de l'homographie ω qui ne renferme pas M; on voit que les deux droites tangentes en M à la surface ψ et appuyées à l'axe n, sont les seules génératrices du cône tangent, qui restent invariantes par rapport à ω. L'involution I_2 engendrée par ω sur ψ possède donc $4 \cdot 2 = 8$ coïncidences, et par suite *la surface* Φ_8 *a le genre* $p_a = p_g = 1$.

On en déduit que *la surface normale* Φ_8, *d'ordre* 8, *appartient à un espace à cinq dimensions* (n. 92).

87. REMARQUE. – Dans le raisonnement qui précède, le lemme du n. 38 nous conduit à la conclusion que le genre de Φ est > 0, et par conséquent $= 1$, aussitôt que l'on a reconnu qu'il y a $x > 0$ points de coïncidence de I_2. Il est intéressant de remarquer qu'on peut calculer directement le genre numérique p_a $(= p_g)$ de Φ en fonction du nombre x, d'après le procédé suivant.

Considérons en général une surface ψ de genre numérique P_a, renfermant une involution I_2; soit x le nombre des points de coïncidence de I_2 (nombre qu'on suppose fini, $\geqslant 0$) et soit p_a le genre numérique de cette involution, ou d'une surface Φ qui en fournit une image.

Remarquons d'abord que les coïncidences de I_2 sont nécessairement *parfaites*, c'est-à-dire que dans le domaine de tout point uni on a une homographie identique.

Supposons en effet que dans le domaine du point uni U on ait une involution possédant deux coïncidences, et désignons par $|A|$ un système

linéaire quelconque tracé sur ψ et par $|A'|$ le système transformé de $|A|$ par rapport à I_2. Soit $|B|$ le système linéaire *appartenant à l'involution* I_2, et renfermant les courbes réductibles $A + A'$. Une courbe B quelconque que l'on oblige à passer par U, passera nécessairement par ce point avec deux branches tangentes à deux directions distinctes; et celles-ci seront conjuguées par rapport à l'involution qui résulte définie dans le domaine de U. On en déduit que l'involution d'ordre 2 appartenant à la courbe considérée B, n'aura pas des coïncidences, car à un point qui se meut sur B s'approchant à U sur l'une des deux branches de la courbe, correspond en I_2 un point qui se meut sur l'autre branche. Or on a sur B une involution γ_2^1 (formée par les couples de I_2) dont on pourra désigner le genre par ϱ; en désignant par ϱ' le genre (effectif) de B on a la formule bien connue de M. ZEUTHEN

$$4(\varrho - 1) = 2(\varrho' - 1) \qquad \text{d'où} \qquad \varrho' = 2\varrho - 1 .$$

Comme la B que nous avons considéré possède un point double en U, le genre effectif d'une B arbitraire ne passant pas par U sera $\varrho' + 1 = 2\varrho$. Mais c'est là une conclusion absurde, car cette B renferme aussi une involution sans coïncidences, formée par les couples de I_2, et en appliquant à celle-ci la formule de ZEUTHEN, on trouve que le genre de la courbe est un nombre impair.

Ceci posé considérons la correspondance [1 2] entre les surfaces Φ, ψ (Φ étant une image de I_2). On déduit aisément de ce qui précède, qu'aux points unis de I_2 répondent sur Φ des courbes rationnelles de degré -2. On a alors tous les éléments pour écrire la relation, que M. SEVERI a établi, entre les genres arithmétiques de deux surfaces en correspondance algébrique; cette relation est

$$x + 4P_a = 8p_a + 4 .$$

Dans le cas particulier qui nous interesse ici, on a $P_a = 1$; la formule précédente nous donne alors

$$p_a = 1 , \qquad x = 8 ,$$

ou bien

$$p_a = 0 , \qquad x = 0 ,$$

(le cas $x < 0$, qui répondrait à une involution I_2 douée d'une infinité de coïncidences, est ici écarté à priori).

Par cette remarque se trouve établi le théorème suivant qui renferme celui que nous avons établi au n. 38.

Soit I_2 une involution d'ordre 2, appartenant à une surface de genre numérique 1, et possédant un nombre fini x ($\geqslant 0$) de coïncidences; le genre numérique de I_2 est

$$p_a = 0 \qquad ou \qquad p_a = 1 ,$$

et on a respectivement

$$x = 0 \qquad ou \qquad x = 8 .$$

En nous rapportant à la I_2 donnée sur une surface de KUMMER (I_2 qui est représentée par la surface hyperelliptique Φ_8) nous avons trouvé effectivement

$$x = 8;$$

ainsi la déduction $p_a = 1$ se trouve confirmée.

88. *Configuration des points doubles et des courbes rationnelles appartenant à la surface Φ_8.* – Considérons sur la surface de JACOBI F les 10 groupes de l'involution I_4, qui renferment des points multiples, c'est-à-dire les 4 groupes formés par des points quadruples et les six groupes formés par les cycles de 2^{d} ordre, dont chacun soit compté deux fois (n. 84). A ces groupes répondent 10 points singuliers de la surface Φ_8, formant une configuration remarquable que nous nous proposons d'étudier.

De même que sur F les relations essentielles entre les points unis de la transformations T, se rapportent aussi aux courbes C unies, sur la surface Φ, la cfg. des points singuliers résultera étroitement liée à la cfg. formée par les courbes répondant aux courbes unies.

On voit tout d'abord que cette dernière cfg. contient: quatre coniques, répondant aux courbes unies 12′, 1′2, 34′, 3′4; quatre courbes de quatrième ordre (que nous dirons de *rang* 1) répondant aux cycles de rang 1; et deux courbes de 4^{me} ordre (que nous dirons de *rang* 2) répondant aux cycles de rang 2. On démontre aisément que les six courbes de 4^{me} ordre sont rationnelles.

Ainsi p. ex. la courbe répondant au cycle 13′, 1′3, est rationnelle car ses points sont en correspondance birationnelle avec les groupes de la série g_2^1, déterminée sur la courbe 13′ (ou 1′3) par la transformation $T^2 \equiv K$.

On peut aussi ajouter qu'il existe 4 hyperplans qui touchent Φ le long des quatres coniques avec un contact de 3^{me} orde, et six hyperplans touchant Φ le long des six quartiques avec un contant de 1^{r} ordre.

En effet toute conique comptée 4 fois, doit donner une courbe du système *complet* $|\Gamma|$ coupé sur Φ par les hyperplans, car une des courbes unies $12'$, $1'2$, $34'$, $3'4$ comptée 4 fois donne sur F une courbe D; et analoguement pour les quartiques.

Après ces remarques relatives à la cfg. des courbes rationnelles, passons à examiner la nature des 10 points singuliers.

Démontrons d'abord que ces points ne sauraient être multiples d'un ordre > 2.

On a plus généralement que: *une surface régulière normale des genres* $p_a = p_g = P_2 = 1$, *dépourvue de courbes exceptionnelles, ne peut pas posséder des points multiples d'ordre* > 2.

Rappelons que toute surface normale de genres 1, dépourvue de courbes exceptionnelles, jouit des propriétés suivantes:

a) elle appartient à un espace S_r dont la dimension r est égale au genre r des sections hyperplanes (canoniques) de la surface;

b) elle est d'ordre $2r - 2$;

c) elle ne possède pas des courbes multiples ou des points multiples n'abaissant pas le genre des sections hyperplanes.

Si la surface renferme un point multiple O, en la projetant de O on obtiendra une nouvelle surface de S_{r-1} qui ne contient pas des courbes exceptionnelles [54] de sorte que cette projection devra satisfaire aux propriétés a) et b); il s'ensuit que le point multiple O ne saurait pas être d'ordre > 2.

REMARQUE. – *On voit de plus que les points doubles de la surface de genres* 1, *abaissent le genre des sections hyperplanes d'une seule unité.*

Ceci posé revenons à notre surface Φ_8 de l'espace S_5.

Appelons P le point de Φ répondant au point uni $(11')$ de F. Des 10 courbes rationnelles appartenant à Φ, il y en a quatre qui passent par P: c'est-à-dire les coniques homologues aux courbes unies $12'$, $1'2$, et les quartiques de rang 1 répondant aux cycles de rang 1, $13'$, $1'3$ et $14'$, $1'4$ (voir le tableau du n. 84).

Comme une section hyperplane arbitraire issue par P coupe chaque conique hors de P en *un seul point*, sur la surface F une courbe D issue arbitrairement par $(11')$ coupera les courbes $12'$, $1'2$, hors de $(11')$, *en quatre points*, de sorte qu'elle aura quatre intersections avec ces courbes, réunies en $(11')$. On en conclut que le point $(11')$ est un point de multiplicité $s \geqslant 2$ pour la courbe D envisagée. Mais dans l'hypothèse $s > 2$ deux courbes D arbitraires issues par $(11')$ auraient t intersections réu-

---

[54] En effet le genre des sections hyperplanes étant $\pi' \leqslant r - 1$, on en déduit $\pi' = r - 1$ ($p_g > 0$); cette égalité ne saurait subsister s'il y avait sur la surface des courbes exceptionnelles parce qu'en ce cas on aurait $\pi' > r - 1$.

nies en (11′), où

$$t \geqslant s^2 \geqslant 9 ,$$

et par suite deux sections hyperplanes de Φ, issues par P auraient $t/4 > 2$ intersections réunies en P, et ce point résulterait de multiplicité > 2. En vertu de la proposition établie ci-dessus, on en déduit que $s = 2$.

En tenant compte de ce que la D envisagée a quatre intersections réunies en (11′), avec les courbes 12′, 1′2, on reconnait que les deux branches de D passant par (11′), doivent avoir respectivement un contact de 2^d ordre avec les courbes susdites. On peut exprimer cette propriété en disant que les courbes D issues par P forment un système linéaire ayant le point-base double P et deux points base simples successifs sur chacune des courbes 12′, 1′2. Ce système linéaire, que nous désignerons par $|D_1|$, est formé par les courbes D de F répondant aux sections hyperplanes de Φ, qui passent par P.

Supposons maintenant qu'un point M de F, se mouvant sur la courbe 13′, s'approche à (11′), et considérons les ∞^3 courbes de $|D_1|$ qui passent par M, courbes que nous nommerons D_2. Comme le système $|D_1|$ appartient à l'involution I_4, ces courbes que nous avons obligées à passer par M, passeront en conséquence par les points M', M'', M''' homologues à M en T, T^2, T^3. En se rappelant que $T^2 \equiv K$, on déduit que le point M'' se meut sur 13′, tandis que les points M', M''' se meuvent sur 1′3. De là on tire qu'à la limite, lorsque M coïncide avec (11′), les courbes D_1 envisagées viennent avoir au moins deux nouvelles intersections réunies en (11′) avec les courbes 13′, 1′3, de sorte qu'elles ont avec ces courbes au moins quatre intersections, tombant en (11′). Comme les D_1 ont aussi *quatre* intersections en (11′) avec les courbes 12′, 1′2, il s'ensuit que le point (11′) est quadruple pour les ∞^2 courbes D_2.

On pourrait douter que les D_2 aient en (11′) un point multiple d'ordre > 4; mais on se passe de ce doute en observant que la courbe $C + C' + C'' + C'''$ composée d'une C passant par (11′) et de ses transformées par rapport à T, T^2, T^3, est une particulière D_2 qui possède en (11′) un point quadruple. On voit de plus que les D_2 n'ont pas des tangentes fixes en (11′), car la courbe $C + C' + C'' + C'''$ envisagée, a ses tangentes variables au varier de C.

Aux courbes D_2 répondent sur Φ les sections hyperplanes d'un système linéaire ∞^3 contenu dans le système ∞^4 des sections hyperplanes qui passent par P, c'est-à-dire les sections produites par des hyperplans renfermant une certaine droite p par P.

Comme le genre de ces sections doit être égal à la dimension 3 du système complet auquel elles appartiennent, on arrive à la conclusion

que la surface possède un point double P_1 infiniment prochain à P, suivant la direction p. Si l'on ajoute qu'une section hyperplane arbitraire par P, passe par ce point avec deux branches non tangentes entre elles — répondant aux branches d'une courbe D_1 en (11′) — on en déduit que le point P est biplanaire et que p est la droite commune aux deux plans tangents.

La circonstance que les courbes D_2, répondant aux sections hyperplanes par p, ont les quatres tangentes variables, nous montre aisément qu'il ne peut pas exister un troisième point double P_2, successif à P_1:

On peut aussi établir tout de suite le comportement en P des quatre courbes rationnelles passant par ce point. Il suffit à cet effet de rappeler les propriétés des courbes D_1, D_2 au point (11′).

Ainsi p. ex. de ce que les D_1, D_2 ont quatre intersections en (11′) avec les 12′, 1′2, on déduit que les coniques répondant à 12′, 1′2 passent par P d'une façon telle que chacune d'elles touche un des deux plans tangents et non la droite p; etc.

Passons maintenant à étudier la nature du point Q de Φ qui répond au cycle de rang 1: (13′), (2′4). Une courbe D issue d'une façon arbitraire par le point (13′) doit passer en conséquence par (2′4); il s'agit d'établir les propriétés de cette D dans le domaine de (13′) et de (2′4). A ce but remarquons que par Q passent les coniques répondant aux courbes 12′, 3′4, et qu'une section hyperplane par Q coupe ces coniques, hors de Q, en un seul point. Il s'ensuit qu'une D par (13′), (2′4) doit avoir deux intersections avec les courbes 12′, 3′4 en chacun des points (13′), (2′4), et par suite que la D doit avoir un point double en (13′) et un autre point double en (2′4).

Soit $|D_1|$ le système linéaire ∞^4 formé par les courbes D répondant aux sections hyperplanes par Q. On voit aisément que les D_1 ont en (13′), (2′4) les deux couples de tangentes variables, car en transformant au moyen de T, T^2, T^3 une courbe C issue par (13′), on obtient une particulière D_1 ayant les tangentes variables. En poursuivant l'analyse on établit que le point Q est un point double conique.

Ce résultat découle des remarques suivantes:

1) Une section hyperplane arbitraire passant par Q, possède un point double origine de deux branches *non tangentes* correspondantes aux branches de la courbe homologue D_1 par (13′), (2′4).

2) Les points de Φ appartenant au domaine de Q, forment une variété algébrique irréductible, car ils correspondent biunivoquement aux couples de l'involution formée par les tangentes des courbes D_1 en (13′), (2′4).

On conduit d'une façon parfaitement analogue la discussion relative au point R de Φ, correspondant à un cycle de rang 2, tel que (12′), (1′2).

On arrive de même à la conclusion que R est un point double conique.

Pour compléter la recherche des relations qui passent entre les 10 courbes rationnelles et les points doubles de Φ, il suffira de remarquer que toute relation entre les courbes et les points unis sur F, se transporte sans aucune difficulté aux éléments singuliers de Φ.

En résumant on arrive à la conclusion suivante:

Toute surface hyperelliptique de rang 4 *et du type III, peut être transformée birationnellement en une surface* Φ_8 *de genres* 1 *appartenant à l'espace à cinq dimensions, et possédant des sections hyperplanes d'ordre* 8 *et de genre* 5.

La Φ_8 *jouit des propriétés suivantes: Elle possède* 10 *points doubles et* 10 *courbes rationnelles remarquables.* Des 10 points doubles quatre sont biplanaires et les six restants sont coniques. Dans le domaine de 1^r ordre de tout point biplanaire on a un autre point double.

Les points doubles coniques se partagent en deux classes jouissant de propriétés différentes: 4 points coniques de rang 1 et 2 de rang 2. Des 10 courbes rationnelles quatre sont des coniques et six des quartiques. Le long de toute conique il y a un hyperplan ayant avec Φ_8 un contact d'ordre 3, et le long d'une quartique un hyperplan ayant un contact simple. Les quartiques se partagent en deux classes: 4 de rang 1 et 2 de rang 2.

Les 10 points doubles et les 10 courbes satisfont aux relations qui suivent:

Par un point biplanaire passent 2 coniques et 2 quartiques de rang 1.

Par un point conique de rang 1 passent 2 coniques, 2 quartiques de rang 1 et les 2 quartiques de rang 2.

Par un point conique de rang 2 passent les 4 quartiques de rang 1 et 1 de rang 2.

Une conique renferme 2 points biplanaires et 2 points coniques de rang 1.

Une quartique de rang 1 renferme 2 points biplanaires, 2 points coniques de rang 1 et les 2 de rang 2.

Une quartique de rang 2 renferme les 4 points coniques de rang 1 et passe doublement par 1 point conique de rang 2.

89. *La surface* Φ_8 *caractérisée par la configuration de ses points et de ses hyperplans singuliers.* – Soit une surface Φ_8, d'ordre 8 à sections canoniques en S_5 ($p_a = p_g = P_2 = 1$), possédant 10 points doubles et 10 hyperplans tangents suivant des courbes rationnelles, de façon que ces points et ces courbes forment une cfg. jouissant des propriétés établies au n. précédent. On peut démontrer que Φ_8 est une surface hyperelliptique du

type III, de façon que *la configuration que nous avons définie joue un rôle caractéristique par rapport à cette surface.*

A cet effet nous procéderons par une méthode analogue à celle que nous avons développée aux nn. 49, 78.

Nous tâcherons de construire une surface birationnellement identique à la surface de KUMMER, qui soit représentée sur la Φ_8 comptée deux fois.

Faisons d'abord les remarques suivantes.

Ainsi que nous l'avons expliqué au n. 86, la surface Φ_8 correspond à une involution I_2 d'ordre 2 appartenant à une surface de KUMMER. Transformons celle-ci en faisant correspondre aux quadriques de S_3 les hyperplans de S_9; on aura ainsi une surface ψ_{16} de S_9 possédant 16 points doubles et 16 S_8 tangents suivant des courbes rationnelles d'ordre 4.

La surface ψ_{16} transformée de la surface de KUMMER renferme une involution I_2 qui est engendrée par une homographie de S_9. Cette homographie possède un S_3 de points unis ne rencontrant pas ψ_{16}; et de cet espace S_3 la surface vient projetée en notre Φ_8.

Ceci posé nous allons montrer comment on peut construire réciproquement ψ_{16} étant donnée Φ_8.

A cet effet remarquons que parmi les 4 hyperplans tangents à Φ_8 suivant les quartiques de rang 1, on peut choisir deux hyperplans ayant communs 4 points coniques, et renfermant dans leur ensemble les 4 points biplanaires.

Supposons que de tels hyperplans soient représentés par

$$x_1 = 0\,, \qquad x_2 = 0\,.$$

Construisons la surface de S_6

$$(1) \qquad y_1 = x_1\,,\ \ldots,\ y_6 = x_6\,, \qquad y_7 = \sqrt{x_1 x_2}\,,$$

($x_1, \ldots, x_6$ satisfaisant aux équations de Φ_8). Comme la quadrique de diramation $x_1 x_2 = 0$ est tangente à la surface double, Φ_8, il n'y aura pas sur celle-ci des courbes de diramation proprement dites; par conséquent la surface (1) que nous venons de construire est d'ordre 16, et ses sections hyperplanes sont de genre 9 et se coupent deux à deux en des groupes canoniques: il s'ensuit que cette surface a tous les genres géométriques égaux à 1 ($p_g = P_2 = \ldots = 1$). Or il y aura une surface normale d'ordre 16 (que nous désignerons par ψ) dont la surface (1), de S_6, est une projection.

Nous voulons prouver: d'abord que le genre numérique de ψ [ou de (1)] est $p_a = 1$ et par conséquent que ψ appartient à un S_9; ensuite que ψ est identique à la surface ψ_{16} que nous avons obtenue en transformant une surface de KUMMER.

A cet effet faisons les remarques suivantes:

1) Un point biplanaire de Φ_8 appartient à un des deux hyperplans de diramation $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, de sorte que le domaine de ce point sur chaque nappe de la surface donne lieu à une courbe de diramation infiniment petite.

2) Les points coniques communs à $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, sont doubles pour la quadrique de diramation $x_1 x_2 = 0$; on voit donc qu'il n'y a pas des points de diramation dans le domaine de ces points coniques.

3) Il en est de même pour les deux points coniques de Φ_8 qui n'appartiennent pas à la quadrique $x_1 x_2 = 0$.

Ceci posé on voit d'abord qu'aux 16 points coniques de Φ_8 correspondent autant de couples de points coniques de ψ, ce qui fait 12 points doubles coniques de cette surface.

A chaque point biplanaire (de diramation) de Φ_8 répondra un point de ψ, et nous supposerons qu'il s'agisse d'un point singulier abaissant la classe de la surface d'un certain nombre h ($\geqslant 0$).

Or en répétant le raisonnement que nous avons développé aux nn. 49, 78, tâchons d'évaluer l'invariant de ZEUTHEN-SEGRE de la surface ψ. Ce calcule nous amène à l'équation

$$4 + 4h = 12 p_a ,$$

p_a désignant le genre numérique de ψ.

Cette équation doit être résolue en nombres entiers, et on doit avoir

$$h \geqslant 0 , \qquad p_a \leqslant 1 ;$$

pourtant on aura

$$h = 2 , \qquad p_a = 1 .$$

Il s'ensuit qu'aux 4 points biplanaires de Φ correspondent 4 points doubles coniques de ψ.

Nous venons de prouver que *la surface ψ est une surface de genre $p_a = 1$ possédant* 16 *points doubles coniques*. Il est aisé de reconnaître qu'elle possède aussi 16 S_8 tangents suivant des quartiques C_4.

Ces courbes C prennent naissance de la façon suivante:

1) Chaque quartique de Φ_8 donne lieu à deux C_4 (ce qui fait 12 C_4). En effet on peut reconnaître qu'une telle quartique ne renferme pas des points de diramation.

2) Chaque conique de Φ_8 donne lieu à une courbe irréductible d'ordre 4, parce qu'il y a sur la conique deux points de diramation. On a ainsi 4 C_4 à ajouter aux 12 déjà trouvées.

Ceci posé on voit que *la surface ψ de S_9 est une transformée de la surface de Kummer*; le système transformant est le système linéaire auquel appartiennent les 16 quartiques de ψ comptées deux fois.

X. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 6 (type IV).

90. *L'involution I_6 engendrée par une transformation hermitienne cyclique d'ordre* 6. – Sur la surface de JACOBI F considérons la transformation hermitienne T périodique d'ordre 3, envisagée au n. 73, et désignons par K la transformation ordinaire de 1re espèce qui laisse invariant un des 9 points unis de T. On remarquera tout d'abord que les transformations T, K sont échangeables, car T doit transformer K en elle-même (voir le n. 62).

La transformation hermitienne singulière

$$S \equiv TK \equiv KT$$

résulte par conséquent périodique d'ordre 6, car on a

$$S^6 \equiv T^6K^6 \equiv 1 .$$

Nous nous proposons d'étudier dans ce chapitre les surfaces représentant l'involution I_6, engendrée sur F par la transformation S.

En parcourant la marche suivie dans les cas précédénts, on aura d'abord à chercher les points et les courbes C qui restent invariants par rapport à la transformation S ou à une de ses puissances, les C étant courbes d'un système Σ.

A ce but il faut chercher:

a) La permutation produite par K entre les points et les courbes C invariants par rapport à T.

b) La permutation produite par T entre les points et les courbes C invariants par rapport à K.

La première recherche a été déjà effectuée au n. 80. En désignant par $(\alpha\alpha')$ le point uni de T, qui est aussi uni par rapport à K, on a trouvé que K transforme les points

$$(\alpha\alpha'), \quad (\beta\beta'), \quad (\alpha\beta'), \quad (\alpha'\beta), \quad (\beta\gamma'),$$

en les points

$$(\alpha\alpha'), \quad (\gamma\gamma'), \quad (\alpha\gamma'), \quad (\alpha'\gamma), \quad (\beta'\gamma),$$

et les courbes

$$\alpha\alpha', \quad \beta\beta', \quad \alpha\beta', \quad \alpha'\beta, \quad \beta\gamma',$$

en les courbes

$$\alpha\alpha', \quad \gamma\gamma', \quad \alpha\gamma', \quad \alpha'\gamma, \quad \beta'\gamma.$$

Passons donc maintenant à la recherche b). Désignons les courbes et les points unis de K au moyen des symboles de M. HUMBERT, en combinant les deux séries de caractères

$$a, \quad b, \quad c, \quad d \qquad \text{et} \qquad a', \quad b', \quad c', \quad d'.$$

Soit $(aa') = (\alpha\alpha')$ le point uni de K, qui est aussi uni par rapport à T. Entre les éléments de la variété ∞^1 formée par les C qui passent par (aa'), il y a une transformation singulière périodique d'ordre 3 définie par S; pourtant les six courbes unies de K:

$$ab', \quad ac', \quad ad', \quad a'b, \quad a'c, \quad a'd$$

qui passent par (aa'), se partageront en deux cycles de la transformation T:

$$ab', \quad ac', \quad ad' \qquad \text{et} \qquad a'b, \quad a'c, \quad a'd.$$

Ceci posé, on voit tout de suite que la T fait correspondre au point (bb') le point (cc') et à ce dernier le point (dd'), car (bb') peut être envisagé comme le point commun aux courbes ab', $a'b$, hors de (aa'); le point (cc') comme le point commun aux courbes ac', $a'c$ correspondantes aux courbes précédentes, et enfin le point (dd') comme l'intersection, hors de (aa'), des deux courbes ad', $a'd$.

En poursuivant l'analyse par des considérations analogues, on arrive à la conclusion que les ternes de points

$$(aa') \quad (aa') \quad (aa') - (bb') \, (cc') \, (dd') - (ab') \, (ac') \, (ad'),$$

$$(bc') \quad (cd') \quad (db') - (cb') \, (dc') \, (bd') - (ca') \, (da') \, (ba'),$$

et les ternes de courbes ayant les mêmes symboles, forment des cycles de la transformation T.

En résumant, on voit que *l'involution I_6 engendrée sur F par la transformation hermitienne S, cyclique d'ordre* 6, *possède* 10 *groupes renfermant des points multiples: c'est-à-dire un groupe formé par un point* 6*-ple, quatre*

groupes dont chacun est formé par deux points 3-ples, cinq groupes dont chacun est formé par trois points doubles.

En considérant l'involution I_6 engendrée par S entre les courbes C d'un système Σ, on a d'une façon parfaitement analogue 10 *groupes renfermant des courbes comptées plusieurs fois. Les algorithmes introduits ci-dessus donnent d'une façon complète les relations entre ces groupes de points et de courbes.*

91. *La surface Φ_{12} d'ordre* 12 *modèle projectif des surfaces hyperelliptiques du type IV.* – Pour construire un modèle projectif des surfaces birationnellement identiques à l'involution I_6, on procédera en suivant la marche plusieurs fois indiquée. On considérera d'abord le système linéaire $|D|$ appartenant à I_6 et renfermant la courbe $D = C + C' + \ldots + C^{(5)}$ composée avec C et ses transformées par rapport à S, S^2, ..., S^5; à ce système répond sur une surface hyperelliptique Φ de la classe envisagée, un système linéaire simple $|\Gamma|$, dépourvu de points-base, de sorte qu'on pourra supposer que $|\Gamma|$ soit le système des sections hyperplanes de Φ.

La surface Φ_{12} ainsi obtenue a l'ordre 12 et ses sections hyperplanes ont le genre 7.

Il s'agit maintenant de trouver la valeur du genre arithmétique p_a de Φ_{12}.

A cet effet il suffit de développer des considérations étroitement analogues à celles qu'on a exposées en calculant le genre p_a du type précédent.

Soit Φ_6 une surface de l'espace S_4 (type II) image projective de l'involution I_3 engendrée sur F par la transformation T; on aura sur Φ_6 une involution I_2 de 2$^{\text{d}}$ ordre, dont les groupes correspondent birationnellement aux points de la surface Φ_{13}.

En effet un groupe

$$P, \quad P', \quad P'', \quad P''', \quad P^{IV}, \quad P^{V}$$

de I_6, obtenu du point P au moyen des opérations

$$S, \quad S^2 = T^2, \quad S^3 = K, \quad S^4 = T, \quad S^5 = KT^2$$

donne deux groupes

$$P, \quad P^{IV}, \quad P'' \qquad \text{et} \qquad P''', \quad P', \quad P^{V}$$

de l'involution I_3.

Comme le second de ces groupes s'obtient du premier au moyen de la transformation K — qui change en elle-même T et par suite I_3 — l'involution I_2 dont on parle ci-dessus sera engendrée sur Φ_6 par une des 9 homographies involutoires qui changent en elle-même cette surface (n. 80).

En se rappelant que l'involution I_2 possède 8 coïncidences (n. 80) on en conclut (nn. 38, 87) que la *surface Φ_{12} a le genre* $p_a = 1$ $(= p_g = P_2)$; et par suite *qu'elle appartient à l'espace S_7 et que ses sections hyperplanes sont des courbes canoniques.* Les 10 groupes de I_6 renfermant des points multiples sont représentés par 10 points singuliers de la surface Φ_{12}, et les 10 groupes de I_6 renfermant des courbes multiples, par 10 courbes rationnelles de la même surface.

Ces courbes sont rationnelles parce que l'involution I_6 établit sur chacune des courbes unies de S, T, K, une série linéaire (d'ordre 6, 3, 2 respectivement). On trouve aisément l'ordre des 10 courbes appartenant à Φ_{12}. Ainsi p. e. on voit qu'à la courbe $aa' = \alpha\alpha'$ répond une conique, car en comptant six fois la aa' on obtient une courbe D; à la courbe $\beta\beta' + \gamma\gamma'$ répond une quartique, car la courbe $3(\beta\beta' + \gamma\gamma')$ est une D; etc.

On a donc sur Φ_{12} une conique, 4 quartiques et 5 courbes de sixième ordre. Les 10 points singuliers de Φ_{12} ne peuvent pas avoir une multiplicité plus grande que 2 (n. 88): on voit aisément par des considérations désormais connues, que les 4 groupes de I_6 renfermant des points 3-ples sont représentés par 4 points biplanaires ordinaires de Φ_{12}, et que les 5 groupes de I_6 renfermant des points doubles sont représentés par 5 points doubles coniques.

Arrêtons-nous sur le point P de Φ_{12} qui répond au groupe de I_6 renfermant le point 6-ple $(\alpha\alpha') = (aa')$, car l'analyse de la singularité que la surface Φ_{12} possède en P, se présente moins simple.

A priori une courbe D satisfaisant à la condition de passer par le point $(\alpha\alpha')$, pourra avoir une branche tangente à une direction arbitraire d issue par $(\alpha\alpha')$, ou bien une branche tangente à une des courbes $\alpha\beta'$, $\beta\alpha'$. Dans le premier cas la D doit posséder deux autres branches tangentes aux directions d', d'' correspondant à d par rapport à T, T^2, et par suite la D viendra avoir en $(\alpha\alpha')$ un point de multiplicité $\geqslant 3$.

L'involution d'ordre 6 appartenant à D aura autant de points doubles qu'il y a de branches passant par $(\alpha\alpha')$: comme, d'après la formule de ZEUTHEN, une involution possède nécessairement un nombre pair de points doubles, le nombre des branches par $(\alpha\alpha')$ devra être pair, et par suite égal à six (car il doit résulter un multiple de 3). Mais alors, en désignant par x le genre de l'involution donnée sur D, on obtient

$$6 + 12(x - 1) = 2(22 - 1),$$

car le genre d'une D arbitraire étant égal à 37, une D douée d'un point 6-ple aura le genre $37 - 15 = 22$. La relation précédente donne $x = 4$, ce qui est absurde, parce qu'une section hyperplane de Φ_{12}, issue arbitrairement par P, doit avoir le genre $7 - 1 = 6$.

Il faut donc conclure qu'une D passant de la façon la plus générale par le point $(\alpha\alpha')$, a une branche tangente à la courbe $\alpha\beta'$ (ou à $\alpha'\beta$). Mais si la D possédait en $(\alpha\alpha')$ une seule branche, l'involution définie sur D aurait seulement un point 6-ple équivalent à 5 points doubles, contrairement à la formule de ZEUTHEN. On doit donc supposer que D passe par $(\alpha\alpha')$ avec une branche tangente à $\alpha\beta'$ et avec un'autre branche tangente à $\alpha'\beta$.

Il s'ensuit que le point P ne peut pas être simple, et par suite qu'il est double (n. 88). Deux courbes D correspondant à deux sections hyperplanes de Φ_{12} issues par P, auront donc en $(\alpha\alpha')$ la multiplicité d'intersection $6 \cdot 2 = 12$. On en tire que leurs branches ont deux à deux un contact d'ordre 4, c'est-à-dire qu'aux sections de Φ_{12} passant par P répondent sur F les courbes d'un système linéaire $|D_1|$ ayant en $(\alpha\alpha')$ un point-base double et quatre points-base simples sur chacune des branches de ce point double.

Si l'on considère les courbes D_1 passant par un point de F s'approchant à $(\alpha\alpha')$ suivant une direction différente des directions des tangentes fixes, en faisant toujours jouer la formule de ZEUTHEN, on trouve un système linéaire $\infty^5 |D_2|$ de courbes ayant en $(\alpha\alpha')$ un point 4-ple avec deux points doubles infiniment voisins suivant les directions de $\alpha\beta', \alpha'\beta$.

Le genre de l'involution appartenant à une D_2 résulte égal à 5: donc aux courbes D_2 répondent sur Φ_{12} des sections hyperplanes de genre 5, passant par une certaine droite p issue par P. Il s'ensuit que Φ_{12} possède un point double P_1 infiniment voisin de P suivant la direction p. Le point P resultera donc biplanaire, car une section hyperplane arbitraire issue par P possède deux branches non tangentes, correspondant aux deux branches d'une courbe D_1.

Les courbes D_2 passant par un point de F infiniment voisin à $(\alpha\alpha')$ suivant une direction arbitraire, forment un système linéaire $|D_3|$, ∞^4, de courbes ayant en $(\alpha\alpha')$ un point 6-ple, les six tangentes en ce point étant variables. Comme le genre de l'involution donnée sur une D_3 est égal à 4, on aura sur Φ_{12} en correspondance aux courbes D_3 de F, des sections de genre 4 découpées par des hyperplans qui passent par un certain plan π renfermant p. La surface Φ_{12} possédera donc un autre point double P_2 infiniment voisin à P_1.

Ainsi l'analyse du point singulier P est achevée. Nous l'avons exposée avec quelque détail, car cela nous dispensera de développer dans la suite les considérations conduisant à des résultats analogues.

En tenant compte des relations entre les courbes et les points unis de la cfg. appartenant à F, on arrive au théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique régulière de rang 6, *et du type IV, peut être transformée en une surface* Φ_{12}, *de genres* 1, *de l'espace* S_7, *ayant des sections hyperplanes d'ordre* 12 *et de genre* 7. *La* Φ_{12} *jouit des propriétés suivantes*:

Elle possède 10 *points doubles* et 10 *courbes rationnelles* remarquables. Parmi les 10 points doubles il y a un point biplanaire singulier possédant deux points doubles successifs, 4 points biplanaires ordinaires, et 5 points coniques. Parmi les 10 courbes il y a une conique, 4 quartiques, 5 courbes d'ordre 6. Le long de la conique, des quartiques, des sextiques, on a respectivement des hyperplans ayant de contact d'ordre 5, 2, 1 avec la surface Φ_{12}.

Par rapport aux propriétés de la cfg., on a 2 points biplanaires ordinaires de rang 1; 2 points biplanaires ordinaires de rang 2; 2 points coniques de rang 1 et 3 points coniques de rang 2; 2 quartiques de rang 1 et 2 de rang 2; 2 sextiques de rang 1 et 3 de rang 2.

Entre les éléments de la cfg. on a les relations suivantes:

Par le point biplanaire singulier passent les 2 quartiques et les 2 sextiques de rang 1.

Par un point biplanaire de rang 1 passent la conique, une quartique de rang 1 et les 2 quartiques de rang 2.

Par un point biplanaire de rang 2 passent les 2 quartiques de rang 1 et 1 quartique de rang 2. Cette dernière possède un point double en le point biplanaire.

Par un point conique de rang 1 passe la conique, 1 sextique de rang 1 et les 3 sextiques de rang 2. La sextique de rang 1 passe doublement par le point envisagé.

Par un point conique de rang 2 passent les 2 sextiques de rang 1 et 2 sextiques de rang 2. Ces dernières passent doublement par le point conique.

La conique renferme les 2 points biplanaires et les 2 points coniques de rang 1.

Une quartique de rang 1 renferme le point singulier, un point biplanaire de rang 1, et les 2 points biplanaires de rang 2.

Une quartique de rang 2 renferme les 2 points biplanaires de rang 1 et 1 point biplanaire de rang 2.

Une sextique de rang 1 renferme le point singulier, un point conique de rang 1 et les 3 points coniques de rang 2.

Une sextique de rang 2 renferme les 2 points doubles de rang 1 et 2 points doubles de rang 2.

Remarquons enfin que:

La surface hyperelliptique Φ_{12} est caractérisée par la configuration de ses points et de ses hyperplans singuliers formant la configuration que nous avons définie.

Pour le prouver il suffit de montrer qu'étant donnée Φ_{12}, on peut construire une surface représentée sur celle-ci comptée deux fois et birationnellement identique à la surface Φ_6 (type II).

Le procédé que nous avons employé déjà en des cas analogues (nn. 49, 78, 89) ne presente ici aucune nouveauté. Pourtant nous pourrons nous dispenser de répéter une analyse qui réussirait un peu longue à suivre dans les détails.

Il suffira d'indiquer qu'on obtiendra une surface du type II (transformée de Φ_6), en posant

$$y_1 = x_1, \dots, y_8 = x_8, \qquad y_9 = \sqrt{x_1 x_2},$$

où $(x_1, \dots, x_8)$ est un point mobile sur Φ_{12} et où l'on suppose que

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0$$

représentent les hyperplans de S_7 tangents à Φ_{12} suivant les sextiques de rang 1.

XI. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 8 (types V, VI, VII).

92. *Surfaces de Jacobi possédant des groupes bidiédriques d'ordre* 8. – D'après l'analyse développée au n. 70, une surface de JACOBI F attachée à la courbe f de genre deux

$$y^2 = x(x^4 - 1)$$

possède à priori quatre groupes bidiédriques distincts de transformations hermitiennes: les groupes que nous avons désignés par G_8, G_8', G_8'', G_8'''. Chacun de ces groupes est en isomorphisme oloédrique avec le groupe bidiédrique Γ_8 formé par les transformations birationnelles

$$(x' = -x, \quad y' = \pm iy), \qquad \left(x' = \frac{1}{x}, \quad y' = \pm \frac{iy}{x^3}\right),$$

$$\left(x' = -\frac{1}{x}, \quad y' = \pm \frac{y}{x^3}\right), \qquad (x' = x, \quad y' = \pm y),$$

qui changent en elle-même la courbe f.

On peut prendre comme substitutions génératrices du groupes Γ_8 les $x' = -x$, $y' = iy$; $x' = 1/x$, $y' = iy/x^3$, dont l'une change l'autre en son inverse. En les appelant u_1, u_2, le groupe contiendra les substitutions suivantes:

$$u_1,\ u_2,\ u_1u_2,\ u_1^3,\ u_2^3,\ u_1u_2^3,\ u_1^2 \equiv u_2^2,\ u_1^4 \equiv u_2^4 \equiv 1\,.$$

Nous désignerons toujours dans la suite par U_1, U_2; U_1', U_2'; U_1'', U_2''; U_1''', U_2''', les transformations de G_8, G_8', G_8'', G_8''' qui répondent respectivement aux transformations u_1, u_2 de Γ_8.

Étudions tout d'abord les propriétés du groupe G_8 par rapport aux points de F qui restent invariant vis-à-vis des transformations du groupe.

Rappelons-nous que G_8 est le transformé du groupe Γ_8 au moyen d'une correspondance point par couple établie entre la surface F et la courbe f, de sorte que toutes les transformations de G_8 ont en commun le point uni qui représente tout couple de la série g_2^1.

En désignant par

$$A_1,\ A_2;\quad B_1,\ B_2;\quad C_1,\ C_2$$

les trois couples de points unis des transformations u_1, u_2, u_1u_2 — qui donnent les six coïncidences de la g_2^1 — on voit (n. 84) que u_1 laisse invariant les couples

$$2A_1,\quad 2A_2,\quad A_1 + A_2,\quad B_1 + B_2,\quad C_1 + C_2;$$

u_2 les couples:

$$2B_1,\quad 2B_2,\quad A_1 + A_2,\quad B_1 + B_2,\quad C_1 + C_2;$$

et u_1u_2 les couples:

$$2C_1,\quad 2C_2,\quad A_1 + A_2,\quad B_1 + B_2,\quad C_1 + C_2\,.$$

Les transformations U_1, U_2 de la surface F ont donc les mêmes points unis, c'est-à-dire les 4 points répondant aux couples:

$$A_1 + A_2,\ B_1 + B_2,\ C_1 + C_2,\ 2A_1 \equiv 2B_1 \equiv 2C_1 \equiv 2A_2 \equiv 2B_2 \equiv 2C_2\,.$$

Il s'ensuit que les quatres transformations U_1U_2, U_1^3, U_2^3, $U_1U_2^3$ ont aussi ces mêmes coïncidences.

Envisageons maintenant la transformation de 1re espèce

$$K \equiv U_1^2 \equiv U_2^2,$$

et le système Σ qui renferme totalement toute courbe C répondant aux couples de f qui ont un point fixe. En désignant par les symboles de HUMBERT les points et les courbes C qui restent invariant par rapport à K, on a ce tableau se rapportant à U_1 (n. 84).

Points

unis	cycles de 2^d ordre
$(11')$, $(22')$, $(33')$, $(44')$	$(12')(1'2) - (13')(2'4) - (14')(2'3) - (23')(1'4) - (24')(1'3) - (34')(3'4)$.

Courbes C

unies	cycles de 2^d ordre
$12' - 1'2 - 34' - 3'4$	$13'$, $1'3 - 14'$, $1'4 - 23'$, $2'3 - 24'$, $2'4 - 11'$, $22' - 33'$, $44'$.

Soit $(11')$ le point uni qui représente la g_2^1: par ce point doivent passer deux courbes unies de U_2 donnant un cycle de 2^d ordre de la transformation U_1; soient $13'$, $1'3$ ces courbes unies, de sorte que $12'$, $1'2$ et $14'$, $1'4$ donneront deux cycles de 2^d ordre de la transformation U_2.

En raisonnant comme au n. 84 on arrive au tableau

Points

unis	cycles de 2^d ordre
$(11')$, $(22')$, $(33')$, $(44')$	$(13')(1'3) - (12')(3'4) - (14')(3'2) - (32')(1'4) - (34')(1'2) - (24')(2'4)$.

Courbes C

unies	cycles de 2^d ordre
$13' - 1'3 - 24' - 2'4$	$12'$, $1'2 - 14'$, $1'4 - 32'$, $3'2 - 34'$, $3'4 - 11'$, $33' - 22'$, $44' -$

se rapportant à U_2.

Comme toute substitution de G_8 s'obtient par multiplication de U_1, U_2, on en déduit sans difficulté que l'involution I_8 engendrée entre les points de F par les transformations du groupe bidiédrique G_8, possède 7 groupes doués de points multiples, c'est-à-dire les groupes formés par les points

$$(11'), \quad (22'), \quad (33'), \quad (44'),$$

comptés 8 fois, et par les quaternes

$$(12')(1'2)(3'4)(34') - (13')(1'3)(24')(2'4) - (14')(1'4)(23')(2'3),$$

comptés 2 fois; tandis que l'involution J_8 engendrée par G_8 entre les courbes C, possède 7 groupes doués d'éléments multiples, c'est-à-dire les groupes formés par les couples

$$12', 1'2 - 34', 3'4 - 13', 1'3 - 24', 2'4 - 14', 1'4 - 23', 2'3,$$

comptés 4 fois, et la quaterne

$$11', \quad 22', \quad 33', \quad 44',$$

comptés 2 fois.

93. – Étudions maintenant le groupe G_8'. On sait (n. 70) qu'en désignant par A la transformation de 2de espèce (périodique d'ordre 2) qui amène $(11')$ en $(22')$, le groupe G_8' est engendré par les substitutions

$$U_1' \equiv U_1, \qquad U_2' \equiv U_2 A.$$

Il s'agit de voir comment se distribuent par rapport à U_1', U_2' les points et les courbes unies de la transformation de 1re espèce

$$K \equiv U_1'^2 \equiv U_2'^2.$$

La transformation U_1' étant identique à U_1 on n'a ici qu'à imaginer reproduit le 1^r tableau du n. préc. Le tableau relatif à U_2' se déduit aisément du 2^d tableau, lorsqu'on connait les permutations produites entre les points et les courbes unies de K par la transformation A.

Or, comme A change en elle-même la transformation K ne laissant pas invariant aucun point ni aucune courbe C, les courbes $12'$, $1'2$ passant par les points $(11')$, $(22')$, doivent se changer entre elles au moyen de A.

En se rappelant que A est permutable avec U_1' (n. 62) on voit de plus qu'elle change (33′) en (44′) et par suite que les courbes 34′, 3′4 doivent aussi se changer entre elles.

Comme la courbe 12′ renferme les cycles

$$(13'),\ (2'4) - (14'),\ (2'3),$$

et la 1′2 les cycles

$$(1'3),\ (24') - (1'4),\ (23'),$$

appartenant à U_1', aucun de ces cycles ne pourra pas être ramené en lui-même par A.

D'autre côté la $U_1'A$ doit avoir 4 points unis entre les 16 coïncidences de K, c'est-à-dire que U_1' et A doivent avoir deux cycles de 2^d ordre communs, donc les deux cycles restant

$$(12'),\ (1'2) - (34'),\ (3'4)$$

doivent appartenir aussi à la transformation A.

On en tire que A change la courbe 13′ renfermant les points (11′), (12′), (3′4), en la courbe 24′ renfermant les points (22′), (1′2), (34′); la courbe 1′3 renfermant les points (11′), (1′2), (3′4), en la courbe 2′4 renfermant les points (22′), (12′), (3′4); la courbe 14′ renfermant les points (11′), (12′), (34′), en la courbe 23′ renfermant (22′), (1′2), (3′4), et la courbe 1′4 renfermant (11′), (1′2), (3′4), en la courbe 2′3 renfermant (22′), (12′), (34′).

Il s'ensuit enfin que A change entre elles les courbes 11′, 22′ et 33′, 44′ qui se coupent respectivement en les points (12′), (1′2) et (34′), (3′4).

On complète aisément l'analyse pour ce qui concerne les points unis de K.

Ainsi au point (13′) appartenant aux courbes 11′, 12′, 3′4 répond le point (24′) appartenant aux courbes 22′, 1′2, 34′; etc.

En résumant on peut dire que les 16 coïncidences de K se distribuent en 8 cycles de A:

$$(11'),\ (22') - (33'),\ (44') - (12'),\ (1'2) - (34'),\ (3'4) -$$
$$(13'),\ (24') - (1'3),\ (2'4) - (14'),\ (23') - (1'4),\ (2'3),$$

et les 16 courbes unies, en 8 cycles ayant les mêmes symboles.

On arrive ainsi à construire le tableau se rapportant à U_2', que nous omettrons de reproduire, car il se déduit tout de suite des tableaux relatifs à U_2 et A.

La conclusion est la suivante:

L'involution I_8' engendrée sur F par le groupe G_8' possède 6 groupes formés des couples

$$(11'),\ (22') - (33'),\ (44') - (13'),\ (2'4) - $$
$$- (1'3),\ (24') - (14'),\ (2'3) - (1'4),\ (23')$$

comptés quatres fois, et un groupe formé de la quaterne

$$(12'),\quad (1'2),\quad (34'),\quad (3'4)$$

comptée deux fois; tandis que l'involution J_8' engendrée entre les C de Σ par G_8', possède 4 groupes formés des courbes

$$12',\quad 1'2,\quad 34',\quad 3'4$$

comptées huit fois, et trois groupes formés des quaternes

$$11',\ 22',\ 33',\ 44' - 13',\ 1'3,\ 24',\ 2'4 - 14',\ 1'4,\ 23',\ 2'3$$

comptées deux fois.

REMARQUE. – On voit que les groupes G_8, G_8' sont liés par cette relation: qu'on passe des propriétés de l'un aux propriétés de l'autre en remplaçant les points de F avec les courbes C de Σ. On peut donc dire brièvement que *les deux groupes* G_8, G_8' *se correspondent au moyen de la dualité que nous avons signalée entre* les points de F et les courbes C d'un système Σ (n. 23).

94. – Passons à étudier le groupe G_8''. En disant B la transformation de 2de espèce faisant passer de (11') à (33'), les transformations génératrices de G_8'' sont

$$U_1'' \equiv U_1\,, \qquad U_2'' \equiv U_2 B\,.$$

On doit ici établir les permutations produites entre les points et les courbes C unies de la transformation

$$K \equiv U_1''^2 \equiv U_2''^2\,,$$

par la transformation B.

Pour celà on n'a qu'à répéter les considérations analogues à celles qu'on a exposées dans le n. préc.

Comme B change en elles-mêmes les transformations K, U_2, on aura les cycles

$$(11'),\ (33') - (22'),\ (44') - 13',\ 1'3 - 24',\ 2'4,$$

appartenant à B.

Mais comme $13'$ renferme les cycles

$$(12'),\ (3'4) - (14'),\ (23')$$

et $1'3$ les cycles

$$(1'2),\ (34') - (1'4),\ (2'3)$$

de la transformation U_2, ces cycles ne pourront pas être invariants par rapport à B, et par suite les cycles restants

$$(13'),\ (1'3) - (24'),\ (2'4)$$

devront appartenir à B; etc.

On voit ainsi que le 16 coïncidences de K se distribuent en 8 cycles:

$$(11'),\ (33') - (22'),\ (44') - (13'),\ (1'3) - (24'),\ (2'4) -$$
$$(12'),\ (34') - (14'),\ (32') - (1'4),\ (3'2) - (1'2),\ (3'4)$$

de B, et que les 16 courbes se distribuent en 8 cycles ayant les mêmes symboles.

On en déduit aisément le tableau relatif à la transformation U_2'' et comme on possède déjà le tableau relatif à U_1'', il s'ensuit enfin que:

L'involution I_8'' engendrée par G_8'' entre les points de F possède 6 groupes formés par les couples

$$(11'),\ (33') - (22'),\ (44') - (13'),\ (2'4) -$$
$$(1'3),\ (24') - (12'),\ (1'2) - (34'),\ (3'4)$$

comptés quatre fois, et un groupe formé par la quaterne

$$(14'),\ (1'4),\ (23'),\ (2'3)$$

comptée deux fois; tandis que l'involution J_8'' engendrée par G_8'' entre les courbes C possède 6 groupes formés par les couples

$$12',\ 3'4 - 1'2,\ 34' - 13',\ 1'3 - 24',\ 2'4 - 11',\ 22' - 33',\ 44'$$

comptés quatre fois, et un groupe formé par la quaterne

$$14', \quad 1'4, \quad 23', \quad 2'3,$$

comptée deux fois.

REMARQUE. – L'analyse développée nous montre qu'au *moyen de la dualité établie entre les points de F et les courbes C de Σ, au groupe* G_8'' *répond un groupe doué des mêmes propriétés.* On peut dire que G_8'' *est corrélatif à lui-même.*

95. – Nous allons enfin achever l'étude des groupes bidiédriques, en remarquant que *les groupes* G_8'' et G_8''' *conduisent au même type de surface hyperelliptique* (VII).

C'est ce qu'on peut établir tout naturellement en répétant par G_8''' l'analyse développée par les autres groupes: mais on peut aussi arriver à la même conclusion par des considérations *à priori.*

Les quatre points unis

$$(11'), \quad (22'), \quad (33'), \quad (44')$$

communs aux transformations U_1, U_2, se distribuent en deux couples

$$(11'), (22') - (33'), (44')$$

jouissant des mêmes propriétés par rapport à chacune des transformations U_1, U_2.

En effet par rapport à U_1 chacun de ces couples peut se définir comme le couple des points *unis* communs à deux courbes unies, tandis qu'*aucun* des couples envisagés ne jouit de la même propriété par rapport à U_2.

Il s'ensuit que les transformations de 2de espèce déterminées par les couples

$$(11'), \quad (33') \qquad \text{et} \qquad (11'), \quad (44')$$

se comportent de la même façon par rapport à U_1, U_2, et par suite que les groupes G_8'', G_8''' ne sont pas essentiellement distincts.

96. – En résumant on conclut que *sur la surface F il y a trois groupes bidiédriques birationnellement distincts qui se trouvent en isomorphisme oloédrique entre eux; ce sont les groupes* G_8, G_8', G_8''. *Le premier est caractérisé par la condition de laisser invariant un point de F, le second (corrélatif à* G_8*) par la condition de laisser invariante une courbe C, le troisième*

(*correlatif à lui-même*) *par la condition de ne laisser invariant aucun point ni aucune courbe C.*

Les trois types de surfaces hyperelliptiques correspondant aux groupes G_8, G_8', G_8'' seront désignés respectivement par V, VI, VII.

97. *Genre des surfaces hyperelliptiques V, VI, VII.* – La méthode suivie pour calculer le genre $p_a = p_g$ des surfaces hyperelliptiques répondant à des groupes cycliques G_4, G_6, s'étend aisément aux surfaces relatives à G_8, G_8', G_8''.

Examinons tout d'abord une surface hyperelliptique Φ image de l'involution I_8 engendrée sur F par G_8, et démontrons qu'on peut poser une correspondance birationnelle entre les points de Φ et les groupes d'une certaine involution d'ordre 2 existant sur la surface ψ, d'ordre 8, qui répond au groupe cyclique G_4 engendré par U_1.

Soient P, P', P'', P''', P^{IV}, P^{V}, P^{VI}, P^{VII} les points d'un groupe de I_8: ces points s'obtiennent de P au moyen des transformations

$$(1) \qquad 1, \quad U_1, \quad U_2, \quad U_1U_2, \quad U_1^3, \quad U_2^3, \quad U_1U_2^3, \quad U_1^2,$$

et par suite ils se distribuent en les quaternes

$$P, \quad P', \quad P^{IV}, \quad P^{VII} \qquad \text{et} \qquad P^{V}, \quad P''', \quad P'', \quad P^{VI},$$

engendrées par le groupe

$$1, \quad U_1, \quad U_1^2, \quad U_1^3,$$

c'est-à-dire qu'ils donnent deux groupes de l'involution I_4 engendrée par U_1: On passe de la première quaterne à la seconde au moyen de la transformation U_2^3.

Il s'ensuit que tout groupe de I_8 vient être représenté par un couple de points de la surface ψ image de I_4. On voit aisément que la transformation involutoire qu'on trouve ainsi entre les points de ψ, comme image de la transformation U_2^3, est une homographie. En effet en disant C, C', C'', C''', ... C^{VII} les courbes de Σ, obtenues de C au moyen des transformations (1), les courbes réductibles

$$C + C' + C^{IV} + C^{VII} \qquad \text{et} \qquad C^{V} + C''' + C'' + C^{VI},$$

correspondantes entre elles par rapport à U_2^3, sont homologues à deux sections hyperplanes de ψ dans la correspondance [1, 4] qu'on a entre

ψ et F. On en tire que la transformation involutoire appartenant à ψ change toute section hyperplane en une section hyperplane, et par suite qu'elle est une homographie.

Les tableaux relatifs aux transformations U_1, U_2 permettent très aisément de trouver les permutations produites par cette homographie entre les éléments de la configuration caractéristique de la surface ψ.

On arrive ainsi au résultat suivant:

Toute surface hyperelliptique du type V répondant au groupe bi-diédrique G_8, est birationnellement identique à une involution I_2, d'ordre 2, appartenant à une surface hyperelliptique ψ_8 d'ordre 8, du type III.

L'homographie ω engendrant I_2 laisse invariant les 4 points biplanaires et les 4 quartiques de rang 1 appartenant à ψ_8, change par couples les 4 points coniques de rang 1 et les 4 coniques de la surface, change entre eux les 2 points coniques et les 2 quartiques de rang 2.

L'involution I_2 possède sur ψ *huit coïncidences* distinctes au point de vue des transformations birationnelles. En effet comme il n'y a pas des coniques invariant par rapport à l'homographie ω, et comme les deux coniques issues par un point biplanaire P de ψ ne touchent pas le même plan tangent, l'homographie I_2 changera entre eux les plans tangents en P, et par suite on n'aura pas sur ces plans d'autre droite unie que leur intersection p. Le point double conique P_1 infiniment voisin à P, suivant la direction p, reste invariant par rapport à I_2, et dans le domaine de P_1 on aura une involution douée de 2 coïncidences. On trouve ainsi *deux* coïncidences dans le domaine (d'ordre 2) de tout point biplanaire, et par suite, en total huit coïncidences.

D'une façon semblable on arrive aux résultats analogues se rapportant aux groupes G_8', G_8'':

Toute surface hyperelliptique du type VI répondant au groupe bi-diédrique G_8' peut se transformer birationnellement en une involution I_2 engendrée par une homographie ω' qui change en elle-même une surface ψ_8 du type III.

L'homographie ω' change par couples les 4 points biplanaires et les 4 quartiques de rang 1 appartenant à ψ_8, laisse invariant les 4 points coniques de la surface, et change entre eux les 2 points coniques et les 2 quartiques de rang 2.

L'involution I_2 possède sur ψ huit coïncidences: en chacun des 4 points doubles de rang 1 tombent 2 coïncidences, c'est-à-dire les points unis de l'involution engendrée par I_2 dans le domaine du point double.

Toute surface hyperelliptique du type VII (répondant au groupe G_8'') est identique à une involution I_2 engendrée par une homographie ω'', qui change en elle-même la surface ψ_8 envisagée ci-dessus.

L'homographie ω'':

fait correspondre par couples les 4 points biplanaires,

laisse invariant 2 points coniques de rang 1, *changeant entre eux les deux restant,*

laisse invariant les 2 points coniques de rang 2.

fait correspondre par couples les 4 coniques,

laisse invariant 2 quartiques de rang 1, *changeant entre elles les deux restant,*

laisse invariant les 2 quartiques de rang 2.

On a encore huit coïncidences de I_2, tombant à couples en chacun des 4 points doubles coniques.

Il s'ensuit que *le genre* p_a $(= p_g)$ *de toute surface répondant à un groupe bi-diédrique est égal à* 1 (n. 86).

98. *Les modèles projectifs des surfaces hyperelliptiques V, VI, VII.* – Pour obtenir un modèle projectif simple de la classe des surfaces répondant à un des groupes bi-diédriques, on n'a qu'à suivre le procédé développé plusieurs fois.

On commence à considérer le système linéaire

$$|D| = |C + C' + \ldots + C^{\text{VII}}|$$

qui appartient à l'involution engendrée sur F par le groupe envisagé, C', C'', ..., C^{VII} étant les courbes correspondant à une C au moyen des transformations du groupe.

La correspondance [8, 1] entre la surface de JACOBI F et une surface image de l'involution, transforme le système $|D|$ en un système linéaire simple $|\Gamma|$, ayant le degré 16, le genre 9 et la dimension 9 ([55]), de sorte que l'on peut prendre comme modèle de la surface image de l'involution, une surface Φ_{16} d'ordre 16 de l'espace S_9.

Les points singuliers de Φ correspondent aux groupes de l'involution doués d'éléments multiples: l'analyse de la singularité en chacun de ces points vient être facilitée, car on sait *à priori* qu'il s'agit de points doubles (n. 88). A la configuration des points doubles vient liée la cfg. des courbes rationnelles répondant aux courbes C qui admettent des transformations du groupe.

Nous omettrons l'étude de ces points et de ces courbes, car à présent le lecteur est en mesure de développer cet étude par lui même; et nous nous bornerons à énoncer les résultats suivants:

Toute surface hyperelliptique du type V peut être transformée biration-

([55]) Le calcul de la dimension se fait tout de suite car on connait le genre de la surface renfermant $|\Gamma|$.

nellement en une surface Φ_{16}, *d'ordre* 16, *appartenant à l'espace* S_9. *Cette surface possède* 7 *points doubles et* 7 *courbes rationnelles remarquables. Parmi les points doubles* 4 *sont des points uniplanaires ordinaires, et les restants sont des points coniques; parmi les courbes rationnelles* 6 *sont des quartiques et une est une courbe d'ordre* 8. *La configuration de ces points et de ces courbes jouit des propriétés suivantes:*

Par tout point uniplanaire passent simplement 3 quartiques, dont chacune renferme aussi un des 3 points doubles infiniment voisins au point uniplanaire.

Par toute point conique passent 4 quartiques et la courbe d'huitième ordre: les premières y passent simplement, la seconde doublement.

Toute quartique renferme deux points uniplanaires et deux points coniques, tandis que la courbe d'huitième ordre renferme (doublement) les 3 points coniques.

Le modèle projectif des surfaces hyperelliptiques du type VI, est une surface Φ'_{16}, *d'ordre* 16, *de l'espace* S_9, *qui renferme* 7 *points doubles et* 7 *courbes rationnelles. Parmi les points doubles,* 6 *sont des points biplanaires dont chacun possède un point double infiniment voisin, et le restant est un point double conique; parmi les courbes,* 4 *sont des coniques et* 3 *des courbes d'ordre* 8. *La configuration relative est caracterisée par les propriétés suivantes:*

Par un point biplanaire passent (simplement) deux coniques et deux courbes d'8^{me} ordre.

Par le point conique passent doublement les 3 courbes d'8^{me} ordre.

Une conique renferme 3 points biplanaires, tandis qu'une courbe d'8^{me} ordre renferme (simplement) 4 points biplanaires et (doublement) le point conique.

Toute surface hyperelliptique de rang 8 *et du type VII peut être transformée en une surface* Φ''_{16} *d'ordre* 16, *appartenant à l'éspace* S_9 *et renfermant* 7 *points doubles et* 7 *courbes rationnelles.*

Parmi les points doubles, 6 *sont des points biplanaires (possédant un point double dans leurs domaines de* 1^{r} *ordre) et le restant est un point conique.*

Parmi les courbes rationnelles, 6 *sont des quartiques et la courbe restant est d'ordre* 8.

La configuration appartenant à Φ''_{16} *est caractérisée par les propriétés suivantes:*

Par tout point biplanaire passent (simplement) 3 quartiques et la courbe d'ordre 8.

Par le point conique passent (simplement) les 6 quartiques.

Toute quartique renferme 3 points biplanaires et le point conique.

La courbe d'ordre 8 renferme les 6 points biplanaires.

En chacun des cas V, VI, VII, il y a des hyperplans tangents à notre surface-modèle (Φ, Φ', ou Φ''). Et précisément il y a un hyperplan ayant un *contact d'ordre* $16/m - 1$ *le long de toute courbe rationnelle d'ordre* m $(= 2, 4, 8)$.

99. *Les surfaces* Φ_{16}, Φ'_{16}, Φ''_{16}, *caractérisées par leurs configurations de points et de hyperplans singuliers.* – En nous rapportant d'abord au cas V, nous allons prouver que:

La configuration de points et d'espaces singuliers que nous venons de définir, joue un rôle caractéristique par rapport à la surface hyperelliptique Φ_{16}.

Pour le prouver nous procédons par la même méthode que nous avons expliquée en des cas analogues.

Nous supposons donnée la surface Φ_{16}. Parmi ses 6 quartiques on peut en choisir deux qui n'aient pas commun un point uniplanaire de la surface (ce choix peut être fait de trois façon différentes, correspondantes aux trois partages des quatre points uniplanaires en deux couples). On peut supposer que les hyperplans renfermant ces deux quartiques soient

$$x_1 = 0\,, \qquad x_2 = 0\,.$$

Etant $(x_1, \ldots x_{10})$ un point mobile de S_9, posons

$$y_1 = x_1, \ldots y_{10} = x_{10}\,, \qquad y_{11} = \sqrt{x_1 x_2}\,.$$

Ces équations représentent une surface décrite par le point (y), surface qui est birationnellement identique à la surface Φ_8 que nous avons choisie comme modèle du type III.

Ici encore nous nous épargnerons de développer la démonstration dans ses détails. Il suffira de remarquer que la surface double que nous avons définie par les équations précédentes n'a pas de points de diramation dans le domaine d'un point conique de Φ_{16}, tandis qu'il y a diramation en tout point infiniment voisin à un point uniplanaire, sauf en deux points de ce domaine. On en déduit qu'aux 3 points coniques de Φ_{16} correspondent 6 points coniques, aux 4 points uniplanaires correspondent 4 points biplanaires etc. de la surface normale d'ordre 32 en S_{14}, qui a pour projection la surface (y).

D'une façon analogue on aura que:

La configuration de points et d'espaces singuliers que nous venons de définir joue un rôle caractéristique par rapport à la surface hyperelliptique Φ'_{16}.

Etant donnée une telle Φ'_{16} considérons deux hyperplans tangents à Φ'_{16} suivant des quartiques qui se coupent en deux points biplanaires

et en le point conique; soient

$$x_1 = 0\,, \qquad x_2 = 0$$

les équations de ces hyperplans. Posons

$$y_1 = x_1\,, \ldots, y_{10} = x_{10}\,, \qquad y_{11} = \sqrt{x_1 x_2}\,.$$

La surface ainsi définie résultera birationnellement identique à la surface Φ_8 que nous avons choisie comme modèle du type III.

De même que dans les cas précédents *la configuration de points et d'espaces que nous venons de définir, joue un rôle caractéristique par rapport à la surface hyperelliptique* Φ''_{16}.

En effet étant donnée une Φ''_{16} possédant une telle configuration, on obtiendra une surface hyperelliptique du type III (identique à notre Φ_8), en posant

$$y_1 = x_1\,, \ldots, y_{10} = x_{10}\,, \qquad y_{11} = \sqrt{x_1 x_2}\,,$$

où l'on suppose que

$$x_1 = 0\,, \qquad x_2 = 0\,,$$

soient deux parmi les trois hyperplans tangents à Φ''_{16} suivant des courbes d'ordre 8.

XII. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 12 (type VII).

100. *Surfaces de Jacobi possédant des groupes* G_{12}. – Envisageons la surface de Jacobi F attachée à la courbe f de genre deux

$$y^2 = x^6 - 1\,,$$

qui admet le groupe des 12 transformations birationnelles

$$(x' = \varepsilon x,\ y' = \pm y)\,, \quad \left(x' = \frac{1}{x},\ y' = \pm\frac{iy}{x^3}\right), \quad \left(x' = \frac{\varepsilon}{x},\ y' = \frac{\pm\varepsilon}{x^3}\right),$$

$$\left(x' = \frac{\varepsilon^2}{x},\ y' = \pm\frac{iy}{x^3}\right), \quad (x' = \varepsilon^2 x,\ y' = \pm y)\,, \quad (x' = x,\ y' = \pm y)\,,$$

où:

$$\varepsilon = e^{2\pi i/3};$$

et soit G_{12} le groupe de F répondant au groupe de f au moyen de la correspondance point par couple existant entre la courbe et la surface.

En représentant respectivement par T, U les transformations hermitiennes de F correspondant aux transformations

$$(x' = \varepsilon x,\ y' = y), \qquad \left(x' = \frac{1}{x},\quad y' = \frac{iy}{x^3}\right),$$

le groupe G_{12} renfermera les substitutions T, U, K, TK, UK, UT, UTK, T^2, T^2K, UT^2, UT^2K, 1, où l'on a posé

$$K \equiv U^2 .$$

On remarquera que U change T en T^2, et que parmi les 11 transformations non identiques de G_{12} une, K, est cyclique de 2^d ordre; deux T, T^2, sont cycliques d'ordre 3; six, U, UK, UT, UTK, UT^2, UT^2K, d'ordre 4; et les deux restant, TK, T^2K, d'ordre 6.

Nous désignons encore par Σ le système complet renfermant totalement les courbes C de F qui répondent aux séries des couples ayant un point fixe.

Il s'agit tout d'abord de chercher les points et les courbes C qui restent invariants par rapport aux transformations du groupe et d'établir les relations entre ces éléments invariants.

Ainsi que nous l'avons remarqué, les transformations du groupe G_{12} de F auront un même point uni, qui correspond à la série g_2^1, invariante par rapport aux transformations de f.

Pour désigner les points et les courbes invariants de la transformation K, nous adopterons le symbolisme de M. HUMBERT, en construisant les symboles au moyen des deux séries de nombres

$$a,\ b,\ c,\ d \qquad \text{et} \qquad a',\ b'\ c',\ d';$$

tandis que les éléments invariants de T seront désignés par le symbolisme introduit au Chapitre VIII, en combinant les deux séries

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma \qquad \text{et} \qquad \alpha',\ \beta',\ \gamma'.$$

On pourra toujours supposer qu'au point uni commun répondent les

symboles

$$(aa') \qquad \text{et} \qquad (\alpha\alpha'),$$

de sorte que les six courbes invariantes de K qui passent par (aa') seront

$$ab', \quad ac', \quad ad', \quad a'b, \quad a'c, \quad a'd,$$

tandis que les quatre courbes invariantes de T par le même point seront

$$\alpha\beta', \quad \alpha\gamma', \quad \alpha'\beta, \quad \alpha'\gamma.$$

Cherchons quelles sont les permutations produites par U entre les points et les courbes invariantes de T; et les permutations produites par T, U entre les éléments invariants de K.

Comme U change entre eux les deux points unis de T appartenant au domaine de $(\alpha\alpha')$, le couple des courbes $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$ sera changé en le couple $\alpha'\beta$, $\alpha'\gamma$: soit par exemple $\alpha'\beta$ la transformée de $\alpha\beta'$, et $\alpha'\gamma$ la transformée de $\alpha\gamma'$. En tenant compte du fait que la transformation de 1re espèce $K \equiv U^2$ change entre elles les $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$ et les $\alpha'\beta$, $\alpha'\gamma$, on déduit que

$$\alpha\beta', \quad \alpha'\beta, \quad \alpha\gamma', \quad \alpha'\gamma$$

est un cycle de 4me ordre par rapport à U.

Il s'ensuit que le point $(\beta\beta')$ commun aux courbes $\alpha'\beta$, $\alpha\beta'$ hors de $(\alpha\alpha')$, vient changé en le point $(\beta\gamma')$ commun aux courbes homologues $\alpha\gamma'$, $\alpha'\beta$ et analoguement que $(\beta\gamma')$ vient changé en $(\gamma\gamma')$ et ce point en $(\beta'\gamma)$; de sorte que l'on a le cycle d'ordre 4

$$(\beta\beta') \quad (\beta\gamma') \quad (\gamma\gamma') \quad (\beta'\gamma).$$

La U change le point $(\alpha\gamma')$ conjugué de $(\alpha\alpha')$ par rapport à la g_2^1 de la courbe $\alpha\beta'$, en le point $(\alpha'\gamma)$ conjugué de $(\alpha\alpha')$ sur la courbe homologue $\alpha'\beta$; et analoguement $(\alpha'\gamma)$ en $(\alpha\beta')$, et $(\alpha\beta')$ en $(\alpha'\beta)$, de sorte qu'on a le cycle

$$(\alpha\gamma') \quad (\alpha'\gamma) \quad (\alpha\beta') \quad (\alpha'\beta).$$

Comme ces 4 points appartiennent à la courbe $\alpha\alpha'$, on en tire que cette courbe est unie par rapport à U. On déduit de plus que les 4 courbes restant forment le cycle

$$\beta\beta', \quad \beta\gamma', \quad \gamma\gamma', \quad \beta'\gamma,$$

car à la courbe $\beta\beta'$ renfermant les points $(\beta\alpha')$ $(\beta\gamma')$ $(\beta'\alpha)$ $(\beta'\gamma)$, répond la courbe $\beta'\gamma$ renfermant les points correspondants, etc.

En résumant on a par rapport à U le tableau suivant:

Points

unis	cycles de 4me ordre
$(\alpha\alpha')$	$(\alpha\beta')(\alpha'\beta)(\alpha\gamma')(\alpha'\gamma) - (\beta\beta')(\beta\gamma')(\gamma\gamma')(\beta'\gamma)$.

Courbes

unies	cycles de 4me ordre
$\alpha\alpha'$	$\alpha\beta'$, $\alpha'\beta$, $\alpha\gamma'$, $\alpha'\gamma - \beta\beta'$, $\beta\gamma'$, $\gamma\gamma'$, $\beta'\gamma$.

Le tableau qui sert à indiquer les permutations produites par T entre les éléments invariants de K, se construit aisément en supposant que les ternes

$$ab', \quad ac', \quad ad' \qquad \text{et} \qquad a'b, \quad a'c, \quad a'd$$

donnent deux cycles de T. On n'a ici qu'à rappeler le résultat obtenu au n. 90:

Points

unis	cycles de 3me ordre
$(aa') = (\alpha\alpha')$	$(bb')(cc')(dd') - (ab')(ac')(ad') - (bc')(cd')(db') - (cb')(dc')(bd') - (ca')(da')(ba')$.

Courbes

unies	cycles de 3me ordre
$aa' = \alpha\alpha'$	bb', cc', $dd' - ab'$, ac', $ad' - bc'$, cd', $db' - cb'$, dc', $bd' - ca'$, da', ba'.

On reconnait aisément que parmi les 6 courbes invariant par rapport à K, qui passent par (aa'), les ab', $a'b$ sont aussi unies par rapport à U, et que les

$$ac', \quad ad' - a'c, \quad a'd$$

forment deux cycles de 2^d ordre; ceci posé on aura par rapport à U le tableau suivant:

Points

unis	cycles de 2^d ordre
(aa'), (bb'), (ab'), $(a'b)$	$(ac')(ad') - (a'c)(ad) - (b'c)(b'd) - (bc')(bd') - (c'd)(cd') - (cc')(dd')$.

Courbes

unies	cycles de 2^{d} ordre
$aa', bb', ab', a'b$	$ac', ad'-a'c, a'd-b'c, b'd-bc', bd'-c'd, cd'-cc', dd'.$

En appliquant les opérations du groupe G_{12} à tout point et à toute courbe appartenant aux configurations relatives à T et à K, on conclut que:

L'involution I_{12} engendrée sur F par G_{12} possède:

1) Un groupe formé du point 12-ple $(\alpha\alpha') = (aa')$;
2) Trois groupes formés des ternes

$$(bb')(cc')(dd') - (ab')(ac')(ad')$$
$$(a'b)(a'c)(a'd)$$

comptés 4 fois;
3) Deux groupes formés des quaternes

$$(\beta\beta')(\gamma\gamma')(\beta\gamma')(\beta'\gamma) -$$
$$-(\alpha\beta')(\alpha'\beta)(\alpha\gamma')(\alpha'\gamma)$$

comptés 3 fois;
4) Un groupe formé par les 6 points doubles:

$$(bc')(cd')(b'd)(bd')(b'c)(dc').$$

L'involution J_{12} engendrée par G_{12} entre les courbes de Σ possède:

1) Un groupe formé par la courbe $\alpha\alpha' = aa'$ comptée 12 fois;
2) Trois groupes formés d'éléments 4-ples

$$bb', cc', dd'-ab', ac', ad'-$$
$$-a'b, a'c, a'd;$$

3) Deux groupes formés d'éléments 3-ples:

$$\beta\beta', \gamma\gamma', \beta\gamma', \beta'\gamma -$$
$$-\alpha\beta', \alpha'\beta, \alpha\gamma', \alpha'\gamma;$$

4) Un groupe formé d'éléments doubles:

$$bc', cd', b'd, bd', b'c, dc'.$$

101. *Le genre de la surface hyperelliptique du type VIII.* – Remarquons que les transformés d'un point de F, au moyen des transformations du groupe G_{12}, se partagent en deux groupes homologues par rapport à U, groupes qui sont engendrés par la transformation TK, d'ordre 6; on en déduit que toute surface hyperelliptique Φ, image de l'involution I_{12}, pourra être transformée birationnellement en une involution I_2, d'ordre 2, appartenant à une surface ψ_{12} du type IV. On peut établir, comme avant, que la I_2 vient engendrée sur ψ par une homographie involutoire, etc., de sorte que l'on obtient le résultat suivant:

Toute surface hyperelliptique répondant au groupe G_{12}, c'est-à-dire toute surface hyperelliptique du type VIII, est birationnellement identique à une involution I_2 engendrée sur une surface ψ_{12} d'ordre 12, *du type IV, par une homographie involutoire.*

Cette homographie:

Laisse invariant le point biplanaire singulier, les deux points coniques de rang 1 et un point conique de rang 2 appartenant à la surface;

change entre eux les deux points biplanaires de rang 1, les deux points biplanaires de rang 2 et les deux points coniques restant de rang 2.

Laisse invariante la conique, les deux sextiques de rang 1 et une sextique de rang 2 appartenant à la surface;

change entre elles les deux quartiques de rang 1, les deux quartiques de rang 2 et le deux sextiques restant de rang 2.

L'involution I_2 possède sur ψ huit coïncidences distinctes au point de vue des transformations birationnelles: deux coincidences tombent dans le domaine du *dernier* point double conique infiniment voisin au point biplanaire singulier, et deux coïncidences dans le domaine de tout point double conique invariant.

Il s'ensuit (n. 87) que «le genre $p_a = p_g$ de toute surface hyperelliptique VIII est égal à 1».

102. *Le modèle projectif des surfaces hyperelliptiques du type VIII.* – La surface Φ_{24} dont les sections hyperplanes répondent aux courbes du système linéaire

$$|D| = |C + C' + \ldots + C^{(\varkappa)}|$$

tracé sur F, est d'ordre 24.

Comme la Φ_{24} a le genre $p = 1$ et ses sections hyperplanes sont des courbes de genre 13, la dimension de l'espace renfermant Φ_{24} résulte égale à 13.

Aux 7 groupes de I_{12} doués d'éléments multiples répondent 7 points doubles de Φ, et aux 7 groupes singuliers de I_{12} répondent 7 courbes rationnelles.

L'étude des points doubles et de la configuration formée par ces points et par les courbes rationnelles se fait en suivant la marche plusieurs fois indiquée.

On arrive ainsi au théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique du type VIII peut être transformée en une surface Φ_{24}, d'ordre 24, appartenant à l'espace S_{13}. Cette surface renferme 7 points doubles et 7 courbes rationnelles remarquables; c'est-à-dire:

Un point uniplanaire singulier, possédant trois points doubles successifs (dans les domaines de 1^r, 2^d, 3^{me} ordre); trois points biplanaires

singuliers, dont chacun possède un point double infiniment voisin; deux points biplanaires ordinaires et un point conique; une courbe d'ordre 2, trois courbes d'ordre 6, deux d'ordre 8 et une d'ordre 12.

Par rapport aux propriétés de la configuration appartenant à Φ_{24}, on a deux points biplanaires singuliers de rang 1 et un de rang 2; un point biplanaire ordinaire de rang 1 et un de rang 2; deux sextiques de rang 1 et une de rang 2; une courbe d'ordre 8 et rang 1, une de rang 2.

Par le point uniplanaire passent simplement les deux sextiques de rang 1 et la courbe d'ordre 8 et rang 1 avec un point de rebroussement.

Par un point biplanaire singulier de rang 1 passent la conique, une sextique de rang 1, la sextique de rang 2, et la courbe d'ordre 12.

Par le point biplanaire singulier de rang 2 passent les deux sextiques de rang 1 et la courbe d'ordre 12.

Par le point biplanaire ordinaire de rang 2 passent la conique et les deux courbes d'ordre 8. La courbe d'ordre 8 et de rang 2, y passe doublement.

Par le point biplanaire ordinaire de rang 2 passent les deux courbes d'ordre 8. La courbe d'ordre 8 et de rang 1 y passe doublement.

Par le point conique passent les trois sextiques et la courbe d'ordre 12. La sextique de rang 2 et la courbe d'ordre 12 y passent doublement.

La conique renferme les deux points biplanaires singuliers de rang 1 et le point biplanaire ordinaire de rang 1.

Une sextique de rang 1 renferme le point uniplanaire, un point biplanaire singulier de rang 1, le point biplanaire singulier de rang 2 et le point conique.

La sextique de rang 2 renferme les deux points biplanaires singuliers de rang 1 et le point conique.

La courbe d'ordre 8 et de rang 1 renferme le point uniplanaire et les deux points biplanaires ordinaires.

La courbe d'ordre 8 et de rang 2 renferme les deux points biplanaires ordinaires.

La courbe d'ordre 12 renferme les trois points biplanaires singuliers et le point conique.

Ajoutons que:

La configuration des points et des hyperplans singuliers qui touchent Φ_{24} suivant ses courbes rationnelles, joue un rôle caractéristique par rapport à cette surface hyperelliptique.

Pour le prouver on se donnera une surface possédant une telle con-

figuration de points et de hyperplans singuliers, et on tâchera de construire une surface ψ représentée sur la Φ_{24} comptée deux fois, qui appartienne au type IV.

On devra obtenir sur ψ une involution I_2, qui agira d'une façon connue sur les éléments de la configuration caractéristique de ψ (n. 101).

En s'aidant par cette connaissance on trouvera qu'on peut obtenir une surface ψ transformée de la Φ_{12} du type IV, en procédant de la façon suivante.

Soient

$$x_1 = 0\,, \qquad x_2 = 0$$

les hyperplans tangents à Φ_{24} suivant les deux sextiques de rang 1, et posons

$$y_1 = x_1\,, \ldots, y_{14} = x_{14}\,, \qquad y_{15} = \sqrt{x_1 x_2}\,.$$

La surface définie par ces formules résultera birationnellement identique à la Φ_{12} (type IV).

C'est ce qu'on montrerait par une analyse détaillée dont nous croyons de pouvoir nous passer, attendu qu'elle ne présenterait aucune nouveauté.

XIII. Surfaces hyperelliptiques régulières de rang 24 (types IX, X, XI).

103. *Surfaces de Jacobi possédant des groupes bi-tétraédriques.* – On a ici à considérer la surface de JACOBI F attachée à la courbe f de genre deux

$$y^2 = x(x^4 - 1)\,,$$

qui admet le groupe bi-tétraédrique:

$$(x' = -x,\ y' = \pm iy),\ \left(x' = \frac{1}{x},\ y' = \pm\frac{iy}{x^3}\right),\ \left(x' = -\frac{1}{x},\ y' = \pm\frac{y}{x^3}\right),$$

$$(x' = x,\ y' = \pm y),\ \left(x' = \frac{i-x}{i+x},\ y' = \pm\frac{2y\sqrt{2i}}{(i+x)^3}\right),\ \left(x' = \frac{x+i}{x-i},\ y' = \pm\frac{2y\sqrt{2i}}{(x-i)^3}\right),$$

$$\left(x' = \frac{x-i}{x+i},\ y' = \pm\frac{2y\sqrt{-2i}}{(x+i)^3}\right),\ \left(x' = \frac{i+x}{i-x},\ y' = \pm\frac{2y\sqrt{-2i}}{(i-x)^3}\right),$$

$$\left(x' = i\frac{1+x}{1-x},\ y' = \pm\frac{2y\sqrt{-2i}}{(1-x)^3}\right),\ \left(x' = i\frac{x+1}{x-1},\ y' = \pm\frac{2y\sqrt{2i}}{(x-1)^3}\right),$$

$$\left(x' = i\frac{1-x}{1+x},\ y' = \pm\frac{2y\sqrt{2i}}{(1+x)^3}\right),\ \left(x' = i\frac{x-1}{x+1},\ y' = \pm\frac{2y\sqrt{-2i}}{(x+1)^3}\right).$$

Ce groupe est engendré par les 3 substitutions:

$$(1) \qquad (x' = -x,\ y' = iy),\ \left(x' = \frac{1}{x},\ y' = \frac{iy}{x^3}\right),\ \left(x' = \frac{i-x}{i+x},\ y' = \frac{2y\sqrt{2i}}{(i+x)^3}\right),$$

dont les deux premières sont cycliques d'ordre 4 et la troisième d'ordre 3 ou 6, suivant que l'on prend

$$\sqrt{2i} = -(i+1) \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{2i} = i+1\,.$$

Nous désignerons par G_{24} le groupe de F qui répond au groupe envisagé de f au moyen de la correspondance point par couple entre la courbe et la surface. On peut prendre comme substitutions génératrices de G_{24} les transformations hermitiennes U_1, U_2, S_1 correspondant aux transformations (1), où l'on a pris $\sqrt{2i} = -(i+1)$.

Le groupe G_{24} renferme le sous-groupe bi-diédrique G_8 engendré par U_1, U_2: hors des substitutions de ce sous-groupe on a en G_{24} 8 transformations cycliques d'ordre 3: S_1, S_2, S_3, S_4, S_1^2, S_2^2, S_3^2, S_4^2, et 8 cycliques d'ordre 6 qu'on obtient de ces dernières en les multipliant par la transformation de 1re espèce:

$$K \equiv U_1^2 \equiv U_2^2\,.$$

Les transformations de G_{24} ont un point uni commun répondant aux couples de la g_2^1.

En désignant les éléments unis de K (points et courbes C du système Σ) par les symboles obtenus en combinant les nombres des deux séries

$$1,\ 2,\ 3,\ 4 \qquad \text{et} \qquad 1',\ 2',\ 3',\ 4',$$

et les éléments unis de S_i par les symboles obtenus en combinant les caractères des deux séries

$$a_i,\ b_i,\ c_i \qquad \text{et} \qquad a_i',\ b_i',\ c_i',$$

on peut toujours supposer qu'au point uni commun appartiennent les symboles:

$$(11'),\ (a_1a_1'),\ (a_2a_2'),\ (a_3a_3'),\ (a_4a_4')\,.$$

Il y a sur F 48 points qui restent invariant par rapport à des transformations de G_{24}: c'est-à-dire le point uni commun, les 32 points unis

appartenant ultérieurement aux transformations $S_1\ S_2\ S_3\ S_4$ et les 15 points unis appartenant ultérieurement à K. Les permutations produites par U_1, U_2 entre les points et les courbes unies de K sont données par les tableaux au n. 92: il s'agit donc d'établir quelles sont les permutations produites par S_1, entre les éléments unis de K, et par U_1, U_2 entre les éléments unis de $S_1\ S_2\ S_3\ S_4$.

En faisant usage de considérations analogues à celles qu'on a exposées plusieurs fois dans l'analyse des types précédents, on arrive aisément aux tableaux cherchés que nous omettrons de transcrire ici.

La conclusion à laquelle on est amené par l'examen de ces tableaux est la suivante:

L'involution I_{24} engendrée par G_{24} entre les points de F renferme 7 groupes doués d'éléments multiples, c'est-à-dire:

1) Un groupe formé par le point uni commun compté 24 fois.

2) Un groupe formé par les 12 points doubles:

$$(12')\ (1'2)\ (13')\ (1'3)\ (14')\ (1'4)\ (23')\ (2'3)\ (34')\ (3'4)\ (24')\ (2'4)\ .$$

3) Un groupe formé par les 8 points 3-ples:

$$(a_1b_1')\ (a_1c_1')\ (a_2b_2')\ (a_2c_2')\ (a_3b_3')\ (a_3c_3')\ (a_4b_4')\ (a_4c_4')\ .$$

4) Un groupe formé par les 8 points 3-ples:

$$(a_1'b_1)\ (a_1'c_1)\ (a_2'b_2)\ (a_2'c_2)\ (a_3'b_3)\ (a_3'c_3)\ (a_4'b_4)\ (a_4'c_4)\ .$$

5) Un groupe formé par les 8 points 3-ples:

$$(b_1b_1')\ (c_1c_1')\ (b_2b_2')\ (c_2c_2')\ (b_3b_3')\ (c_3c_3')\ (b_4b_4')\ (c_4c_4')\ .$$

6) Un groupe formé par les 8 points 3-ples:

$$(b_1c_1')\ (b_1'c_1)\ (b_2c_2')\ (b_2'c_2)\ (b_3c_3')\ (b_3'c_3)\ (b_4c_4')\ (b_4'c_4)\ .$$

7) Un groupe formé par les 3 points 8-ples:

$$(22')\quad (33')\quad (44')\ .$$

L'involution J_{24} engendrée par G_{24} entre les courbes C du système Σ, possède 7 groupes doués d'éléments multiples, c'est-à-dire:

1) Un groupe formé par les 4 courbes 6-ples:

$$11' \equiv a_1a_1',\quad 22' \equiv a_2a_2',\quad 33' \equiv a_3a_3',\quad 44' \equiv a_4a_4'\ .$$

2) Un groupe formé par les 6 courbes 4-ples:

$$12', \quad 1'2, \quad 13', \quad 1'3, \quad 14', \quad 1'4.$$

3) Un groupe formé par les 6 courbes 4-ples:

$$23', \quad 2'3, \quad 24', \quad 2'4, \quad 34', \quad 3'4.$$

4) Un groupe formé par les 8 courbes 3-ples:

$$a_1b_1', \quad a_1c_1', \quad a_2b_2', \quad a_2c_2', \quad a_3b_3', \quad a_3c_3', \quad a_4b_4', \quad a_4c_4'.$$

5) Un groupe formé par les 8 courbes 3-ples:

$$a_1'b_1, \quad a_1'c_1, \quad a_2'b_2, \quad a_2'c_2, \quad a_3'b_3, \quad a_3'c_3, \quad a_4'b_4, \quad a_4'c_4.$$

6) Un groupe formé par les 8 courbes 3-ples:

$$b_1b_1', \quad c_1c_1', \quad b_2b_2', \quad c_2c_2', \quad b_3b_3', \quad c_3c_3', \quad b_4b_4', \quad c_4c_4'.$$

7) Un groupe formé par les 8 courbes 3-ples:

$$b_1c_1', \quad b_1'c_1, \quad b_2c_2', \quad b_2'c_2, \quad b_3c_3', \quad b_3'c_3, \quad b_4c_4', \quad b_4'c_4.$$

Disons quelques mots du groupe G_{24}' qui renferme le sous-groupe bi-diédrique invariant G_8', engendré par les substitutions

$$U_1' \equiv U_1, \qquad U_2' \equiv U_2A,$$

A étant une convenable transformation de 2de espèce (n. 70).

Comme G_8' répond à G_8 au moyen de la dualité entre les points de F et les courbes C du système Σ, le groupe G_{24}' sera correlatif à G_{24}, et l'on pourra par conséquent obtenir les propriétés de la configuration relative à G_{24}' en changeant entre elles dans le dernier énoncé, les involutions I_{24} et J_{24} et les symboles entre ( ) en symboles sans ( ), et réciproquement.

Considérons maintenant le groupe G_{24}, correlatif à lui-même, qui renferme le sous-groupe invariant G_8'' (n. 70) engendré par

$$U_1'' \equiv U_1, \qquad U_2'' \equiv U_2B.$$

Comme

$$K'' \equiv U_1''^2 \equiv U_1^2 \equiv K,$$

on trouve tout de suite les permutations produites par U_1'', U_2'' entre les éléments unis de K''. Pour construire les tableaux restant, on commencera à remarquer que le groupe G_{24}'' étant oloédriquement isomorphe à G_{24}, on doit trouver en G_{42}'' une substitution S_1'', répondant à S_1 et changeant U_1'' en U_2'', etc.

En ce cas la conclusion relative à la configuration des éléments unis est la suivante:

L'involution I_{24}'' engendrée par G_{24}'' entre les points de F renferme 7 groupes doués d'éléments multiples, c'est-à-dire:

Un groupe formé par les 4 éléments 6-ples:

$$(14')\ (1'4)\ (23')\ (2'3) \equiv (a_1a_1')\ (a_2a_2')\ (a_3a_3')\ (a_4a_4').$$

Deux groupes formés par 6 éléments 4-ples

$$(11')\ (33')\ (12')\ (1'2)\ (13')\ (2'4) - (22')\ (44')\ (1'3)\ (24')\ (34')\ (3'4).$$

Quatre groupes formés par 8 éléments 3-ples:

$$(a_1b_1')\ (a_2b_2')\ (a_3b_3')\ (a_4b_4')\ (a_1c_1')\ (a_2c_2')\ (a_3c_3')\ (a_4c_4'),$$

$$(a_1'b_1)\ (a_2'b_2)\ (a_3'b_3)\ (a_4'b_4)\ (a_1'c_1)\ (a_2'c_2)\ (a_3'c_3)\ (a_4'c_4),$$

$$(b_1b_1')\ (b_2b_2')\ (b_3b_3')\ (b_4b_4')\ (c_1c_1')\ (c_2c_2')\ (c_3c_3')\ (c_4c_4'),$$

$$(b_1c_1')\ (b_2c_2')\ (b_3c_3')\ (b_4c_4')\ (b_1'c_1)\ (b_2'c_2)\ (b_3'c_3)\ (b_4'c_4).$$

L'involution J_{24}'' engendrée par G_{24}'' entre les courbes C du système Σ, renferme 7 groupes doués d'éléments multiples, c'est-à-dire:

Un groupe formé par les 4 éléments 6-ples:

$$14',\ 1'4,\ 23',\ 2'3 \equiv a_1a_1',\ a_2a_2',\ a_3a_3',\ a_4a_4'.$$

Deux groupes formés par 6 éléments 4-ples:

$$11',\ 22',\ 12',\ 3'4,\ 13',\ 1'3 - 33',\ 44',\ 1'2,\ 34',\ 24',\ 2'4.$$

Quatre groupes formés par 8 éléments triples. Ces groupes ont les mêmes symboles des 4 groupes correspondants de I_{24}''.

Dans la suite nous désignerons respectivement par IX, X, XI les classes de surfaces hyperelliptiques correspondant aux groupes G_{24}, G_{24}', G_{24}''.

104. *Modèles projectifs des surfaces hyperelliptiques IX, X, XI.* – Toute surface hyperelliptique Φ, image de l'involution I_{24}, peut aussi représenter une involution I_3 appartenant à une surface ψ, d'ordre 16, du type V. En effet les points d'un groupe de I_{24} se partagent en trois groupes engendrés par les transformations du sous-groupe bidiédrique G_8 renfermé en G_{24}. On passe d'un des trois groupes aux deux restants au moyen des transformations S_1, S_1^2, de sorte que tout groupe de I_{24} vient être représenté par un groupe de trois points de ψ, formant un cycle de l'homographie ω, périodique d'ordre 3, image de S_1.

On voit très aisément quelles sont les permutations produites entre les points doubles et les courbes rationnelles de ψ par l'homographie ω, car il suffit de chercher les permutations produites par S_1 entre les groupes singuliers des involutions I_8 et J_8 engendrées sur F et sur le système Σ, par le sous-groupe G_8.

On remarquera que la transformation S_1 laisse invariants quatre groupes de I_8 renfermant 8 points distincts: c'est-à-dire les groupes qui appartiennent aussi à I_{24}, lorsque on compte trois fois chacun de leurs points; de sorte que la ω laissera aussi invariants quatre points simples de ψ. On arrive ainsi au théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique Φ répondant au groupe bi-tétraedrique G_{24} peut représenter une involution I_3 appartenant à une surface ψ_{16} du type V: cette involution étant engendrée par une homographie ω périodique d'ordre 3, qui change en elle-même ψ. L'homographie ω change en lui-même un point uniplanaire de ψ et distribue les trois uniplanaires restants, ainsi que les trois points coniques de ψ, en deux cycles; elle laisse invariante la courbe d'huitième ordre et distribue en deux cycles les six quartiques tracées sur ψ. Hors des points doubles il y a encore sur ψ quatre points unis de ω.

Au point de vue des transformations birationnelles on a sur ψ six coïncidences, car dans le domaine du point uniplanaire invariant P, il existe deux points unis simples, qui sont les coïncidences de la correspondance projective (dont un cycle est formé par les trois points doubles infiniment voisins à P) existant dans le domaine de P.

En connaissant le nombre des coïncidences de I_3 on pourrait calculer le genre p_a de la surface image de I_3, et l'on trouverait $p_a = 1$.

Cette conclusion s'accorde avec la propriété, dont jouit un modèle convenable de la surface Φ, de ne posséder que des points doubles abaissant d'une unité le genre des sections hyperplanes qui les renferment. On peut établir ce résultat directement de la façon suivante.

Soit, comme d'habitude,

$$|D| = |C + C' + \ldots + C^{(23)}|$$

le système linéaire de F qui renferme toute courbe C et ses transformées par rapport aux transformations de G_{24}. Désignons encore par Φ ou par Φ_{48} la surface d'ordre 48, dont les sections hyperplanes répondent aux courbes D. L'espace renfermant Φ aura la dimension $r = 25$; cette valeur étant la seule possible lorsque le genre p_a de Φ est égal à 1. En vertu de la correspondance [1, 3] entre les surfaces Φ et ψ, aux sections hyperplanes Γ de Φ répondent sur ψ les courbes d'un système linéaire $|\Delta|$ renfermant les courbes réductibles formées de toute section hyperplane de ψ et de ses transformées par rapport à ω, ω^2.

Les points singuliers de Φ répondent:

1) Au point uniplanaire invariant P.

2) Au cycle formé par les trois points uniplanaires restants.

3) Au cycle formé par les trois points coniques.

4) A chacun des 4 points unis simples de la surface ψ.

On voit aisément qu'au cycle 2) répond un point uniplanaire *ordinaire* de Φ, car le domaine de ce point vient correspondre *biunivoquement* au domaine d'un quelconque des trois points uniplanaires ordinaires qui lui sont homologues. Et d'une façon analogue on conclut qu'au cycle 3) répond un point double conique de Φ.

Comme la ω établit entre les points appartenant au domaine d'un point uni simple Q, une homographie cyclique d'ordre trois ayant deux points unis, au point Q répondra sur Φ un point biplanaire ordinaire: les deux domaines de ce point répondant aux deux points unis susdits, et le domaine du point simple infiniment voisin suivant la direction de la droite commune aux deux plans tangents, répondant aux cycles de ω infiniment voisins à Q.

Il s'agit enfin d'étudier le point P' de Φ qui répond au point uniplanaire P de ψ.

On voit par des considérations désormais habituelles qu'aux sections hyperplanes issues par P' répondent sur ψ des courbes Δ ayant en P un point triple dont les trois branches renferment les trois points doubles de ψ infiniment voisins à P. On en tire tout de suite que les sections hyperplanes susdites ont en P' un point de rebroussement (ordinaire) de sorte que le point P' est un point uniplanaire (non tacnodale). On peut ainsi poursuivre l'analyse du point singulier P'; mais ce qu'on a établi suffit pour affirmer que « la surface n'a que des points doubles abaissant d'une seule unité le genre des sections hyperplanes issues arbitrairement par un de ces points ».

Par la même marche plusieurs fois indiquée, on arrive à compléter l'étude de la configuration des points doubles et des courbes rationnelles existant sur Φ; de sorte que l'on peut énoncer le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique de rang 24 *correspondant à un groupe* G_{24}

(*type IX*) *peut être transformée birationnellement en une surface* Φ_{48}, *d'ordre* 48, *appartenant à l'espace* S_{23}. *Cette surface renferme* 7 *points doubles et* 7 *courbes rationnelles remarquables*; *c'est-à-dire*:

Un point uniplanaire singulier, un point uniplanaire ordinaire, quatre points biplanaires ordinaires et un point conique; une courbe d'huitième ordre, deux courbes de 12^{me} ordre, quatre de 16^{me} ordre.

La surface Φ_{48} renferme de plus trois points doubles infiniment voisins à chacun des deux points uniplanaires: ces points doubles appartenant au domaine de 1^{r} ordre ou aux domaines successifs de 1^{r}, 2^{d}, 3^{me} ordre, suivant qu'il s'agit du point uniplanaire ordinaire ou du point singulier.

Par rapport aux propriétés de la configuration existant sur Φ_{48}, on a deux points biplanaires de rang 1 et deux de rang 2; une courbe de 12^{me} ordre et rang 1, une courbe de 12^{me} ordre et rang 2, deux courbes de 16^{me} ordre et rang 1 et deux courbes de 16^{me} ordre et rang 2.

Par le point uniplanaire singulier passent la courbe de 12^{me} ordre et rang 1, et les deux courbes de 16^{me} ordre et rang 2. Chacune de ces courbes passe par le point en question avec un rebroussement.

Par le point uniplanaire ordinaire passent les deux courbes de 12^{me} ordre: la courbe de rang 1 y passe simplement et la courbe de rang 2 doublement.

Par un point biplanaire de rang 1 passent simplement la courbe d'huitième ordre, une courbe de 16^{me} ordre et rang 1, et les deux courbes de 16^{me} ordre et rang 2.

Par un point biplanaire de rang 2 passent simplement les deux courbes de 16^{me} ordre et rang 1, doublement une courbe de 16^{me} ordre et rang 2.

Par le point conique passent doublement la courbe d'8^{me} ordre et les deux courbes de 12^{me} ordre.

La courbe d'ordre 8 renferme le point conique (point nodal) et les deux points biplanaires de rang 1 (points simples).

La courbe d'ordre 12 et rang 1 renferme le point uniplanaire singulier (point de rebroussement), le point conique (point nodal), le point uniplanaire ordinaire (point simple).

La courbe d'ordre 12 et rang 2 renferme le point conique (nodal) et le point uniplanaire ordinaire (simple).

Une courbe d'ordre 16 et rang 1 renferme le point uniplanaire singulier (rebroussement), un point biplanaire de rang 1 et deux points biplanaires de rang 2 (simples).

Une courbe d'ordre et rang 2 renferme un point biplanaire de rang 2 (nodal) et les deux points biplanaires de rang 1 (simples).

105. – Pour les surfaces répondant aux groupes G'_{24}, G''_{24} on a des résultats analogues, que nous nous bornerons à énoncer:

Toute surface hyperelliptique répondant à G'_{24} *est birationnelement iden-*

tique à une involution I_3 engendrée par une homographie ω' de troisième ordre, qui change en elle-même une surface ψ', d'ordre 16, *du type VI. La ω' change en lui-même le point conique de ψ' et distribue en deux cycles les six points biplanaires; change en elle-même une des quatres coniques de ψ' et distribue en deux cycles les* 3 *coniques restant et les trois courbes d'ordre* 8. *Hors du point conique invariant il y a encore sur ψ' quatre points unis simples.*

On a ainsi sur ψ' six coïncidences de I_3, dont deux tombent dans le domaine du point conique invariant.

Pourtant:

Toute surface hyperelliptique de rang 24 *correspondant à G'_{24}* (type X) *peut être ramenée à une surface Φ'_{48} d'ordre* 48, *appartenant à S_{25} et renfermant* 7 *points doubles biplanaires et* 7 *courbes rationnelles.*

Parmi les points doubles il y en a un qui possède un point double infiniment voisin dans chacun des domaines de 1^r et de 2^d ordre, deux possèdent un point double dans leurs domaines de 1^r ordre et les 4 restants sont des points biplanaires ordinaires. Parmi les courbes rationnelles une est d'ordre 2, une d'ordre 6, quatre d'ordre 16 et une d'ordre 24.

Par rapport aux propriétés de la configuration, on a un point biplanaire de rang 1 (c'est le premier point biplanaire singulier dont on a parlé ci-dessus), un point biplanaire singulier de rang 2 et un point de rang 3; deux points biplanaires ordinaires de rang 1 et deux de rang 2. Les courbes d'ordre 12 se distribuent en deux classes: deux de rang 1 et deux de rang 2.

Par le point singulier de rang 1 passent simplement les deux courbes d'ordre 16 et rang 1 et doublement (avec un *oscnode*) la courbe d'ordre 24.

Par le point singulier de rang 2 passent simplement la conique et la courbe d'ordre 6 et doublement (avec un *tacnode*) la courbe d'ordre 24.

Par le point singulier de rang 3 passent doublement la courbe d'ordre 6 (avec un *node*) et la courbe d'ordre 24 (avec un *tacnode*).

Par un point ordinaire de rang 1 passent simplement la conique, une courbe d'ordre 16 et rang 1 et les deux courbes d'ordre 16 et rang 2.

Par le point ordinaire de rang 2 passent simplement les deux courbes d'ordre 16 et rang 1 et doublement (avec un node) une courbe d'ordre 16 et rang 2.

La conique renferme le point singulier de rang 2 et les 2 points ordinaires de rang 1.

La courbe d'ordre 6 renferme les trois points singuliers de rang 2 et 3.

Une courbe d'ordre 16 et rang 1 renferme le point singulier de rang 1, un point ordinaire de rang 1 et les 2 points ordinaires de rang 2.

Une courbe d'ordre 16 et rang 2 renferme les 2 points ordinaires de rang 1 et un point ordinaire de rang 2.

La courbe d'ordre 24 renferme les 3 points singuliers.

106. *Toute surface hyperelliptique répondant à G''_{24} correspond aussi à une involution I_3 appartenant à une surface ψ''_8 du type VII; cette involution étant engendrée par une homographie cyclique ω'' d'ordre 3. La ω''*

distribue en deux cycles les 6 points biplanaires de ψ'';
ramène en lui-même le point conique de la surface.

distribue en deux cycles les 6 quartiques de ψ'';
ramène en elle-même la courbe d'ordre 8 de la surface.

Il y a sur ψ'', hors du point conique invariant, quatre points unis simples.

Il s'ensuit encore que I_3 possède six coïncidences, dont deux tombent dans le domaine du point conique, et par suite que le genre p_a de toute surface répondant à G''_{24} est égal à 1.

Après cela on a que:

Toute surface hyperelliptique répondant à G''_{24} (type XI) peut être transformée en une surface Φ''_{48}, d'ordre 48, appartenant à l'espace S_{25} et renfermant 7 points doubles biplanaires et 7 courbes rationnelles remarquables. On a précisément:

Un point biplanaire singulier possédant deux points doubles successifs, deux points biplanaires singuliers, dont chacun possède un point double successif, et quatre points biplanaires ordinaires.

Parmi les 7 courbes une est d'ordre 8, deux d'ordre 12, quatre d'ordre 16.

Par rapport aux propriétés de la configuration, le premier point biplanaire singulier, dont on parle ci-dessus, est de rang 1, et les deux points singuliers restant sont de rang 2. On a ensuite deux points biplanaires ordinaires de rang 1 et deux de rang 2, deux courbes d'ordre 16 et rang 1 et deux de rang 2.

Par le point singulier de rang 1 passent simplement les 2 courbes d'ordre 12 et les 2 courbes d'ordre 16 et rang 1.

Par un point singulier de rang 2 passent simplement une courbe d'ordre 8 et une d'ordre 12 et doublement la courbe restant d'ordre 12.

Par un point ordinaire de rang 1 passent simplement la courbe d'ordre 8, une courbe d'ordre 16 et rang 1 et les 2 courbes d'ordre 16 et rang 2.

La courbe d'ordre 8 renferme les points singuliers de rang 2 et les points ordinaires de rang 1.

Une courbe d'ordre 12 renferme les 3 points singuliers.

Une courbe d'ordre 16 et rang 1 renferme le point singulier de rang 1, un point ordinaire de rang 1 et les 2 points ordinaires de rang 2.

Par un point ordinaire de rang 2 passent simplement les 2 courbes d'ordre 16 et rang 1 et doublement une courbe d'ordre 16 et rang 2.

Une courbe d'ordre 16 et rang 2 renferme les 2 points ordinaires de rang 1 et un point ordinaire de rang 2.

107. *Les surfaces hyperelliptiques* Φ_{48}, Φ'_{48}, Φ''_{48} *caractérisées par la configuration de leurs points et de leurs hyperplans singuliers.* – Nous venons de construire trois surfaces-modèles représentant les types IX, X, XI; ce sont les surfaces Φ_{48}, Φ'_{48}, Φ''_{48}.

Chacune de celles-ci possède une configuration de points doubles et de hyperplans tangents suivant des courbes rationnelles; plus précisement toute courbe rationnelle C d'ordre m ($= 2, 6, 8, 12, 16, 24$) appartient à un hyperplan qui a un contact d'ordre $48/m - 1$ le long de C.

Or il y a lieu de reconnaître que « si une surface d'ordre 48, à sections hyperplanes de genre 25 en S_{25}, possède des points et des hyperplans singuliers formant une configuration qui jouit des propriétés correspondant à celles de Φ_{48}, Φ'_{48}, Φ''_{48}, cette surface est hyperelliptique et appartient respectivement aux types IX, X, XI ».

C'est ce que l'on exprime en disant que:

La configuration des points et des hyperplans singuliers joue un rôle caractéristique par rapport aux surfaces hyperelliptiques Φ_{48}, Φ'_{48}, Φ''_{48}.

Rapportons nous d'abord à une surface Φ_{48}. Il s'agit de montrer que la configuration des points et des hyperplans singuliers permet de représenter paramétriquement les coordonnées des points de la surface par des fonctions hyperelliptiques Θ. Et cette question se ramène à la question analogue concernant une surface du type V, que l'on construit par le procédé suivant.

Soient

$$x_1 = 0\,, \qquad x_2 = 0\,,$$

les deux hyperplans tangents suivant des courbes C_{16} d'ordre 16 et de rang 1. Posons

$$y_1 = x_1, \ldots, y_{26} = x_{26}\,, \qquad y_{27} = \sqrt[3]{x_1 x_2^2}\,.$$

Par ces formules on définit une surface qui possède 3 points coniques correspondant au points conique de Φ_{48}, 3 points uniplanaires correspondant au point uniplanaire ordinaire de Φ_{48}, et un quatrième point (ordinaire) correspondant au point uniplanaire singulier de Φ_{48}; tout point biplanaire de rang 1, 2 de Φ_{48} résulte un point de diramation sur chaque nappe de Φ_{48} qui le contient, et correspond à un point simple de

la surface qui est représentée sur la Φ_{48} comptée trois fois. Une analyse approfondie montre que cette surface est birationnellement identique à la Φ_{16} du type V.

On procédéra par la même méthode par rapport à une surface Φ'_{48}.

Analoguement à ce que nous avons fait pour le type IX, nous choisirons les deux hyperplans tangents suivant les courbes C_{16} de rang 1. Ces hyperplans étant représentés par

$$x_1 = 0\,, \qquad x_2 = 0\,,$$

nous poserons

$$y_1 = x_1\,, \ldots, y_{26} = x_{26}\,, \qquad y_{27} = \sqrt[3]{x_1 x_2^2}\,.$$

Nous obtiendrons ainsi une surface renfermant 6 points biplanaires singuliers correspondant à ceux de rang 2, 3 de Φ'_{48} et un point conique correspondant au point singulier de rang 1 (qui est un point de diramation sur chaque nappe de Φ'_{48}). Cette surface résulte birationnellement identique à la Φ'_{16} (type VI).

Soit enfin une surface possédant la même configuration que la Φ''_{48} du type XI.

Choisissons de même les hyperplans

$$x_1 = 0\,, \qquad x_2 = 0\,,$$

tangents suivant des courbes C_{16} de rang 1.

En posant

$$y_1 = x_1\,, \quad \ldots, \quad y_{26} = x_{26}\,, \quad y_{27} = \sqrt[3]{x_1 x_2^2}\,,$$

on obtient une surface birationnellement identique à la Φ''_{16} (type VII).

XIV. Quelques remarques concernant les surfaces hyperelliptiques régulières II, ..., XI.

108. *Transformation des surfaces-modèles* II, ..., XI *en des surfaces du quatrième ordre.* – Nous avons choisi comme modèles des surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$, II, ..., XI des surfaces d'ordre $2r$, Φ_{2r}, appartenant à des hyperespaces.

Or toute Φ_{2r} peut être projetée successivement par ses points doubles, ou par quelques unes de ses courbes rationnelles remarquables. Par ce procédé on peut toujours transformer une surface hyperelliptique Φ_{2r} en une surface d'ordre 4 de l'espace ordinaire.

Pour ce qui concerne les surfaces II, ..., VIII, il suffit de les projeter successivement par des points doubles. Dans le cas IX considérons p. ex. l'espace S_{15} qui renferme une courbe C_{16} de rang 2, et projetons de S_{16} la Φ_{48} en une surface Φ_{14} de S_8; Φ_{14} possède 4 points doubles infiniment voisins, un point uniplanaire ordinaire (auquel sont voisins trois points doubles), un point biplanaire et un point conique, de sorte que elle pourra être projetée en une surface d'ordre 4 de S_3 en prenant successivement comme centres de projection 5 points doubles.

D'une façon analogue ou réussit à projeter en une surface d'ordre 4 les autres surfaces Φ'_{48}, Φ''_{48}.

109. *Représentation sur un plan double.* – Les surfaces du quatrième ordre auxquelles on est amené de plusieurs façons différentes par des projections successives de nos Φ_{2r}, possèdent des points doubles; en prenant un de ces points comme centre de projection on ramenera la surface à un plan double ayant une courbe de diramation d'ordre 6.

Par les remarques qui précedent se trouve établi le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique de rang $r > 1$ admettant une représentation paramétrique propre par des Θ irréductibles relatives à un tableau de périodes primitives

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g', \end{matrix}$$

peut être transformée en une surface du quatrième ordre, ou, si l'on aime mieux, en une surface du sixième ordre

$$z^2 = f(x, y) .$$

La surface du quatrième ordre aura en général des points doubles et des surfaces tangentes suivant des courbes rationnelles; ces points et ces courbes formerons une configuration caractéristique qui dépend non seulement du type auquel appartient la surface hyperelliptique donnée, mais aussi des liens en partie arbitraires qui rattachent cette configuration à celle de la surface typique correspondante, Φ_{2r}.

De même les courbes $f = 0$, d'ordre 6, correspondant à des surfaces hyperelliptique $z^2 = f(xy)$ auront des points doubles et des courbes pluritangentes jouant un rôle caractéristique.

110. *Surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre de rang* 3 (type II). – Considérons la surface hyperelliptique Φ_6 (type II).

En la projetant par le point double (11′) on aura une surface du qua-

trième ordre qui renfermera quatre droites 1′2, 12′, 13′, 1′3, contenant chacune trois points doubles biplanaires, et formant un quadrilatère gauche, dont les sommets sont les points doubles (22′) (2′3) (33′) (3′2).

Ainsi donc on obtient *une surface du quatrième ordre possédant* 8 *points biplanaires qui sont situés trois par trois sur* 4 *droites.* Il y a en outre 5 coniques appartenant à la surface et renfermant chacune 4 points biplanaires etc.

Il est aisé d'écrire l'équation de cette surface du quatrième ordre.

En supposant que Φ soit représentée par les équations (5) du n. 79, et que le centre de projection tombe en le point (1, 0, 0, — 1, 0, 0), posons

$$y_1 = x_1 + \varepsilon\,, \qquad y_2 = x_2\,, \qquad y_3 = x_3\,,$$
$$y_4 = x_4 - \varepsilon\,, \qquad y_5 = x_5\,, \qquad y_6 = x_6\,.$$

Supposons que la projection soit faite sur l'hyperplan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0;$$

il faudra poser

$$\varepsilon = -(x_1 + x_2 + x_3)\,.$$

On aura

$$y_1y_2y_3 + \lambda y_4y_5y_6 - \varepsilon(y_2y_3 - \lambda y_5y_6) = 0\,,$$
$$y_1y_2 + \ldots + \sqrt{\lambda}y_4y_5 + \ldots - \varepsilon(y_4\sqrt{\lambda} - y_1) = 0\,.$$

Eliminons ε, remplaçons y_3, y_6 par $-y_1 - y_2$, $-y_4 - y_5$, et enfin posons

$$x = y_1\,, \qquad y = y_2\,, \qquad z = y_4\,, \qquad 1 = y_5;$$

on aura *l'équation de la surface du quatrième ordre sous la forme suivante*:

$$[y(x+y) - \lambda(z+1)][xy - (x+y)^2 + \sqrt{\lambda}z - \sqrt{\lambda}(z+1)^2] -$$
$$- (\sqrt{\lambda}\,z - x)\,[xy(x+y) + \lambda z(z+1)] = 0\,.$$

111. *Quelques exemples de surfaces hyperelliptiques* $z^2 = f(xy)$. — Reprenons la surface hyperelliptique du quatrième ordre du type II considérée ci-dessus et projetons-la sur un plan double en prenant comme centre de projection le point (22′).

Sur le plan double on trouvera une courbe de diramation d'ordre 6 possédant 7 points doubles (13′) (2′3) (1′3) (23′) (33′) (12′) (1′2), parmi

lesquels il y a deux couples de points infiniment voisins (13′) (2′3), (1′3) (23′); il y aura deux droites renfermant chacune trois points doubles et se coupant en le point double (33′) etc.

Nous ne développerons pas l'étude de ce plan double qui en somme n'est pas très élégant à cause du défaut de symétrie de sa configuration caractéristique. Il suffira de remarquer que la projection du modèle que nous avons construit en un hyperespace, conduit en ce cas, aussi bien que dans les cas successifs, à déterminer les plans doubles correspondant au type hyperelliptique donné.

Parmi les autres types de surfaces hyperelliptiques, il y en a un qui amène à un plan double extrémement simple et très élégant. Nous nous arrêterons sur cet exemple.

Considérons la surface Φ_{16} de S_9 (type V). Elle possède 4 points doubles uniplanaires ordinaires (dont chacun a 3 points doubles infiniment voisins) et 3 points coniques; en projetant de ceux 7 points doubles la surface vient représentée sur un plan double. La courbe de diramation de celui-ci sera une courbe C_6, d'ordre 6, possédant 12 points doubles qui se réunissent en 6 couples de points infiniment voisins, c'est-à-dire en 6 tacnodes correspondants aux quartiques de Φ. Les 6 tacnodes se trouveront trois à trois sur une droite représentant le domaine d'un point uniplanaire de Φ.

En conclusion la surface Φ vient représentée sur un plan double dont la courbe de diramation C_6 passe doublement par les 6 sommets d'un quadrilatère complet, et a en ces points des tacnodes.

Il est aisé de caractériser une telle C_6.

D'abord son genre (numérique) étant -2, la courbe se décompose en trois parties, et on peut reconnaître que ces parties sont des coniques.

Or il s'agit de construire trois coniques se touchant deux à deux deux fois, de façon que les points de contact tombent en les sommets d'un quadrilatère complet. Ces conditions suffisent à déterminer un triplet de coniques, bien défini au point de vue projectif.

Par une transformation homographique du plan on peut ramener le quadrilatère à un carré; alors, parmi les trois coniques, deux deviendront des hyperboles équilatères égales ayant les mêmes asymptotes, et la troisième devient un cercle passant par les quatre sommets du carré, qui sont aussi les sommets de nos hyperboles.

Ainsi donc la courbe C_6 se réduit à

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2 - 1)(y^2 - x^2 - 1) = 0;$$

le cercle imaginaire

$$x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

qui touche en deux points chaque conique faisant partie de C_6, représente sur le plan double la courbe d'ordre 8 de Φ (courbe qui passe doublement par les 3 points coniques de cette surface).

En conclusion on a le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique du type V (premier cas bi-diédrique) peut être transformée birationnellement en la surface

$$z^2 = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2 - 1)(y^2 - x^2 - 1) .$$

SOMMAIRE

Première partie (tome XXXII).

I. *Introduction*

1. . . . . page 317
2. Premiers caractères des surfaces hyperelliptiques: le diviseur » 318
3. Le rang . . . . . » 320
4. Surfaces rationnelles et réglées elliptiques . . . . . » 320
5. La surface de Jacobi . . . . . » 320
6. Transformées rationnelles d'une surface hyperelliptique . . » 321

II. *Les surfaces hyperelliptiques de rang* 1.

7. . . . . » 324
8. Transformations de la surface de Jacobi en elle-même . . » 324
9. Transformations de seconde espèce cycliques . . . . . » 326
10. . . . . » 328
11. Construction des surfaces de Picard de diviseur δ . . . . » 329
12. . . . . » 333
13. Les surfaces de Picard considérées comme des surfaces qui admettent un groupe de transformations en elles-mêmes . » 334
14. Sur les conditions pour qu'une surface soit hyperelliptique de rang 1. Théorème de M. Picard . . . . . » 335
15. Rappel de notions appartenant à la théorie des surfaces algébriques . . . . . » 337
16. Les surfaces de Picard caractérisées par leurs nombres invariants. . . . . » 339
17. Courbes appartenant à une surface de Picard: courbes rationnelles . . . . . » 339
18. Courbes elliptiques. . . . . » 340
19. . . . . » 341

20. Courbes de genre deux . . . . . page 341
21. Systèmes Σ appartenant à une surface de Jacobi . . . . » 342
22. . . . . » 343
23. Remarque concernant une certaine dualité . . . . . » 344
24. Autres remarques concernant les courbes de genre deux sur une surface de Jacobi . . . . . » 345
25. Systèmes Σ_δ appartenant à une surface de Picard F_δ . . » 346
26. Courbes de genre quelconque appartenant à une surface de Jacobi de modules généraux . . . . . » 346
27. Courbes de genre quelconque appartenant à une surface de Picard de modules généraux . . . . . » 347
28. Rapprochement entre les résultats qui précèdent et la théorie des séries θ. Représentation des courbes tracées sur une surface de Jacobi . . . . . » 349
29. Représentation des courbes tracées sur une surface F_δ . . » 353
30. Surfaces de Picard d'ordre minimum dépourvues de courbes exceptionnelles . . . . . » 356

III. *Classification des involutions appartenant à une surface de Jacobi*

31. Invariants des involutions appartenant à une surface de Jacobi . . . . . » 358
32. Les involutions classifiées d'après leurs transformations en elles-mêmes . . . . . » 361
33. . . . . » 362
34. Les involutions classifiées d'après leurs coïncidences . . . » 363
35. . . . . » 364
36. . . . . » 365
37. . . . . » 365
38. Involutions appartenant à une surface régulière de genres 1 » 366

IV. *Théorème fondamental au sujet des surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$*

39. . . . . » 368
40. . . . . » 369
41. . . . . » 370
42. . . . . » 373
43. . . . . » 374
44. Théorème fondamental . . . . . » 374

V. *Surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$ dépendant de trois modules arbitraires*

45. Surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$ dépendant de trois modules arbitraires . . . . . » 375
46. Surface de Kummer . . . . . » 378
47. Cas de dégénérescence . . . . . » 381

48. La surface hyperelliptique ($r = 2$, $\delta = 1$) représentée sur un plan double . . . . . page 382
49. La surface du quatrième ordre hyperelliptique caractérisée par ses 16 points doubles . . . . . » 382
50. Surfaces hyperelliptiques de diviseur $\delta > 1$. . . . . » 387
51. La surface hyperelliptique d'ordre 4δ en $S_{2\delta+1}$ caractérisée par ses points et ses hyperplans singuliers . . . . . » 388
52. Surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre ($\delta > 1$) . . . » 390
53. Quelques remarques au sujet du problème qui a pour objet de reconnaître si une surface donnée est hyperelliptique . » 391

VI. *Surfaces hyperelliptiques irrégulières de rang $r > 1$*

54. . . . . » 392
55. Rappel de quelques notions concernant les surfaces elliptiques » 393
56. Construction d'une surface de Picard représentée sur une surface elliptique multiple renfermant deux faisceaux de courbes elliptiques . . . . . » 396
57. Détermination de la valeur du diviseur δ . . . . . » 399

VII. *Surfaces hyperelliptiques admettant une représentation propre par des fonctions Θ irréductibles.*

58. Quelques remarques au sujet des surfaces admettant une représentation paramétrique par des fonctions hyperelliptiques irréductibles . . . . . » 405
59. Transformations d'une surface de Jacobi en elle-même: transformations de Hermite et transformations de Humbert » 407
60. . . . . » 409
61. Sur la représentation paramétrique d'une surface hyperelliptique par des fonctions Θ. . . . . » 410
62. Quelques propriétés des transformations d'une surface de Jacobi en elle-même . . . . . » 412
63. Transformations hermitiennes . . . . . » 414
64. Aperçu sur les surfaces hyperelliptiques de diviseur $\delta > 1$. » 414
65. La classification des surfaces hyperelliptiques admettant une représentation propre par des Θ irréductibles, ramenée à l'analyse des courbes de genre deux qui possèdent un groupe de transformations en elles-mêmes . . . . . » 415
66. Courbes de genre 2 admettant des transformations en elles-mêmes . . . . . » 417
67. Comment on passe des groupes de la courbe de genre 2 à ceux de la surface de Jacobi associée . . . . . » 422
68. Cas à écarter . . . . . » 423
69. Genres des surfaces hyperelliptiques correspondantes aux types qui ne sont pas de dégénérescence . . . . . » 427

70. Analyse des groupes bi-diédriques et bi-tétraèdriques, d'ordre 8, 24, appartenant à une surface de Jacobi . . . page 427
71. Groupes bi-diédriques d'ordre 12 . . . . . » 430
72. Résumé et programme de l'étude qui suit . . . . . » 430

Deuxième partie (tome XXXIII).

VIII. *Surfaces hyperelliptiques régulières de rang* 3 (*type II*)

73. Transformations hermitiennes périodiques d'ordre 3 sur une surface de Jacobi . . . . . » 431
74. Propriétés infinitesimales d'un point uni de la transformation T . . . . . » 435
75. L'involution I_3 engendrée par la transformation T . . . . » 435
76. La surface Φ_6 . . . . . » 437
77. Les genres de la surface Φ_6 . . . . . » 442
78. La surface hyperelliptique Φ_6 caractérisée par la configuration de ses points et hyperplans singuliers . . . . . » 443
79. La configuration caractéristique de Φ_6 rattachée à une configuration connue: équations algébriques de Φ_6 . . . . . » 447
80. Homographies qui ramènent en elle-même la surface Φ_6 . » 450
81. Représentation analytique de la transformation T . . . . » 453
82. Equations des courbes C de Σ qui sont invariants par rapport à T . . . . . » 456
83. Représentation paramétrique de la surface Φ_6 . . . . . » 458

IX. *Surfaces hyperelliptiques regulières de rang* 4 (*type III*)

84. Transformations hermitiennes périodiques d'ordre 4 . . . . » 459
85. L'involution I_4 engendrée par la transformation T et la surface Φ_8 qui en donne l'image projective . . . . . » 462
86. Relations entre la surface Φ_8 et la surface de Kummer attachée à la même courbe de genre deux . . . . . » 462
87. Remarque . . . . . » 464
88. Configuration des points doubles et des courbes rationnelles appartenant à la surface Φ . . . . . » 466
89. La surface Φ_8 caractérisée par la configuration de ses points et de ses hyperplans singuliers . . . . . » 470

X. *Surfaces hyperelliptiques de rang* 6 (*type IV*)

90. L'involution I_6 engendrée par une transformation hermitienne cyclique d'ordre 6 . . . . . » 473
91. La surface Φ_{12} d'ordre 12 modèle projectif des surfaces hyperelliptiques du type IV . . . . . » 475

XI. *Surfaces hyperelliptiques régulières de rang* 8 (*types V, VI, VII*)

92. Surfaces de Jacobi possédant des groupes bi-diédriques d'ordre 8 . . . . . page 479
93. . . . . » 482
94. . . . . » 484
95. . . . . » 486
96. . . . . » 486
97. Genres des surfaces hyperelliptiques V, VI, VII . . . . . » 487
98. Les modèles projectifs des surfaces hyperelliptiques V, VI, VII » 489
99. Les surfaces Φ_{16}, Φ'_{16}, Φ''_{16} caractérisées par leurs configurations de points et de hyperplans singuliers . . . . . » 491

XII. *Surfaces hyperelliptiques régulières de rang* 12 (*type VIII*)

100. Surfaces de Jacobi possédant des groupes G_{12} . . . . . » 492
101. Le genre de la surface hyperelliptique du type VIII . . » 496
102. Le modèle projectif des surfaces hyperelliptiques du type VIII . . . . . » 497

XIII. *Surfaces hyperelliptiques régulières de rang* 24 (*types IX, X, XI*)

103. Surfaces de Jacobi possédant des groupes bi-tétraédriques » 499
104. Modèles projectifs des surfaces hyperelliptiques IX, X, XI » 504
105. . . . . » 506
106. . . . . » 508
107. Les surfaces hyperelliptiques Φ_{48}, Φ'_{48}, Φ''_{48} caractérisées par la configuration de leurs points et de leurs hyperplans singuliers . . . . . » 509

XIV. *Quelques remarques concernant les surfaces hyperelliptiques régulières II, ..., XI*

108. Transformation des surfaces II, ..., XI en des surfaces du quatrième ordre . . . . . » 510
109. Représentation sur un plan double . . . . . » 511
110. Surface hyperelliptique du quatrième ordre de rang 3 . . » 511
111. Quelques exemples de surfaces hyperelliptiques $z^2 = f(xy)$ » 512

XLVIII.

SULLE TRASFORMAZIONI RAZIONALI DELLE SUPERFICIE DI GENERE UNO

« Rend. dell'Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », vol. XIV (1910), pp. 71-75.

1. – Scopo di questa Nota è di stabilire un teorema fondamentale per lo studio delle trasformazioni razionali $[n, 1]$ fra superficie regolari coi generi uguali ad uno ($p_a = P_2 = 1$); teorema analogo a quello dimostrato da ENRIQUES-SEVERI [1] per le superficie iperellittiche:

Se fra due superficie regolari F, F′ *coi generi uno* ($p_a = P_2 = 1$) *intercede una corrispondenza razionale* [n, 1], *non univocamente invertibile, i gruppi di* n *punti corrispondenti ai punti di* F′ *sopra* F *costituiscono una involuzione* I_n *generata da un gruppo di* n *trasformazioni cicliche.*

Così, designando con

$$f(x\,y\,z) = 0\,, \qquad f'(X\,Y\,Z) = 0$$

le equazioni di F, F' e con

$$(1) \qquad \begin{cases} X = \varphi_1(x\,y\,z) \\ Y = \varphi_2(x\,y\,z) \\ Z = \varphi_3(x\,y\,z) \end{cases}$$

le formule che pongono la trasformazione razionale fra le due superficie, ad ogni punto (xyz) corrispondono n punti $(X_1Y_1Z_1) \ldots (X_nY_nZ_n)$ che dipendono razionalmente l'uno dall'altro.

---

[1] *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques*, « Acta Math. », t. 32, 33 [questo volume, XLVII].

Lo stesso teorema si può anche enunciare come segue:

Se ad una superficie F *regolare coi generi uno* ($p_a = P_2 = 1$) *appartiene un'involuzione* I_n *(regolare) di genere uno,*

a) *la* I_n *è un'involuzione ciclica,*

b) *oppure è composta coi gruppi di un'involuzione ciclica* I'_r ($n = rs$); *in questo caso la* I'_r *può essere rappresentata sopra una superficie* F' *(regolare coi generi uno), sulla quale si ha, come immagine di* I_n, *una nuova involuzione* I_s *ecc.*

2. – Dimostriamo il teorema fondamentale, sopra enunciato, riferendoci per semplicità di discorso all'ultima forma di esso. Supponiamo dunque che sopra F si abbia un'involuzione I_n di genere uno, la quale non sia composta, e facciamo vedere che I_n è un'involuzione ciclica. Potremo supporre $n > 2$.

Premettiamo l'osservazione che I_n non può avere che un *numero finito di punti di coincidenza*; infatti dall'ipotesi opposta si trae che la superficie (di genere uno) F', immagine di F, deve contenere una curva di diramazione, alla quale corrisponde su F una curva canonica [2] (di coincidenza), d'ordine $\geqslant 0$; ma questa conseguenza importerebbe che il bigenere di F fosse

$$P_2 \geqslant 2 \ [3] .$$

Ciò posto consideriamo su F un sistema lineare completo $|C|$, privo di punti base; quest'ipotesi è da intendersi nel senso della Geometria sopra le superficie, o — in senso proiettivo — riferendosi ad una superficie F (di un conveniente spazio) priva di singolarità e di curve eccezionali.

Il sistema $|C|$ avrà un certo genere π, la dimensione π e il grado $2\pi - 2$. L'involuzione I_n pone su F una corrispondenza simmetrica $[n-1, n-1]$, che fa corrispondere alle curve C di $|C|$ una serie ∞^π di curve K, (*congiunte* alle C) possedenti ciascuna un'involuzione irrazionale γ^1_{n-1} i cui gruppi corrispondono ai punti di C. Supponiamo che le curve K sieno *irriducibili*. Il genere ϱ di una K generica si valuta colla formula di ZEUTHEN, tenuto conto del fatto che le C generiche posseggono $\delta \geqslant 0$ punti di diramazione:

$$\varrho \geqslant (\pi - 1)(n - 1) + 1 .$$

---

[2] Cfr. ENRIQUES, *Ricerche di Geometria ...*, « Memorie Accad. di Torino », 1893, cap. VI [queste *Memorie*, vol. I, V].

[3] Cfr. ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere uno*, « Memorie della Società italiana delle Scienze », 1896 [queste *Memorie*, vol. I, XVI].

Ora una K generica (congiunta a una C in I_n) avrà un certo numero h ($\geqslant 0$) di punti doppi variabili e un certo numero di punti fissi, multipli secondo certi numeri

$$i_1\, i_2\, \ldots\, i_t\,.$$

La serie delle curve K, data su F, sarà contenuta in una serie completa di curve aventi lo stesso ordine, h punti doppi e t punti multipli secondo $i_1\, i_2\, \ldots\, i_t$; questa serie completa (non lineare) determina sopra una K una serie lineare caratteristica (segnata dalle curve vicine) la quale [4] è la serie canonica *completa* di K: $g^{\varrho-1}_{2\varrho-2}$.

Si conclude che l'anzidetta serie completa ha la dimensione

$$\varrho > \pi\,.$$

Si può quindi considerare, entro la serie completa suddetta, una curva variabile $\overline{K}$, che non sia congiunta ad una C nell'involuzione I_n, e che abbia come limite una K. Ora quando un punto si muove su $\overline{K}$, non è possibile che $n-2$ coniugati di esso (rispetto ad I_n) si muovano sulla stessa curva; altrimenti la $\overline{K}$ sarebbe congiunta ad una curva $\overline{C}$ avente per limite C, mentre il sistema completo $|C|$, sulla superficie regolare F, non è contenuto in una serie continua di curve più ampia di $|C|$. Da ciò si deduce che alla curva $\overline{K}$ viene congiunta rispetto ad I_n, non una curva spezzata

$$(n-2)\overline{K} + \overline{C}\,,$$

(come avviene per $\overline{K} = K$), ma una curva generalmente irriducibile L.

Quando $\overline{K}$ variando tende al limite K, la L varia e si riduce alla curva spezzata:

$$(n-2)K + C\,.$$

Ma questa riduzione porta che C *debba contenere dei punti di coincidenza dell'involuzione* I_n [5], mentre C è la curva generica d'un sistema senza punti base su F e l'involuzione I_n possiede soltanto un numero finito di coincidenze.

Tale assurdo prova che *non si può ammettere l'ipotesi che le curve* K

---

[4] Cfr. ENRIQUES, *Sulla proprietà caratteristica ...*, « Atti dell'Accad. di Bologna », 1904 [questo volume, XXXV].

[5] Cfr. ENRIQUES-SEVERI, Memoria citata, pag. 335, [questo volume, pag. 372].

sieno irriducibili. Resta quindi da scegliere fra due supposizioni:

a) o la K generica si compone di $n-1$ curve;

b) o la K si compone di $r < n-1$ curve.

Nella 2ª ipotesi si può ripetere per una di queste componenti, K_1, il ragionamento svolto prima per la K, e si arriva ugualmente ad un assurdo.

Dalla 1ª ipotesi si conclude che l'involuzione I_n (non composta) è generata da una trasformazione ciclica d'ordine n della F in se stessa.

c. d. d.

INDICE

XXV. Sur les problèmes qui se rapportent a la résolution des équations algébriques renfermant plusieurs inconnues. « Math. Ann. », Bd. LI (1899), pp. 134-153 . . . . . pag. 1

XXVI. Una proprietà delle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica regolare. « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XIII (1899), pp. 95-98 » 23

XXVII. Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali. « Math. Ann. », Bd. LII (1899), pp. 449-456 » 27

XXVIII. Università di Bologna - Programma del corso di geometria superiore. - Anno accademico 1897-98. « Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche », a. II (1899), pp. 76-78 . . . . . » 37

XXIX. Sur une classe de surfaces algébriques, par Guido Castelnuovo et Federigo Enriques. « Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », to. CXXXI (1900), pp. 739-742 » 41

XXX. Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi, di Guido Castelnuovo e Federigo Enriques. « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », to. XIV (1900), pp. 290-302 . » 45

XXXI. Sur les surfaces algébriques admettant des intégrales de différentielles totales de première espèce. « Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse », 2e s., to. III (1901), pp. 77-84 . . . . . » 57

XXXII. Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche. « Atti Acc. Torino », vol. XXXVII (1901), pp. 19-40 . . . . . » 65

XXXIII. Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche, di Guido Castelnuovo e Federigo Enriques. « Annali di Matematica pura e applicata », s. 3a, to. VI (1901), pp. 165-225 . . . . . » 85

XXXIV. Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria. « Rivista filosofica », a. 3°, vol. IV (1901), pp. 171-195 . pag. 145

XXXV. Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari. « Rend. dell'Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », vol. IX (1905), pp. 5-13 . . . . . » 163

XXXVI. Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero. « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », to. XX (1905), pp. 1-33 . . . . . » 169

XXXVII. Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in se stesse. « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », to. XX (1905), pp. 61-72 » 205

XXXVIII. Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions, par Guido Castelnuovo et Federigo Enriques. « Annales de l'École Normale supérieure », 3e s., to. XXXII (1906), pp. 339-366 . . . . . » 217

XXXIX. Sopra le superficie algebriche di bigenere uno. « Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta " dei XL ") ». s. 3a, to. XIV (1906), pp. 327-352. . . . . » 241

XL. Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali. « Rend. Acc. Lincei », s. 5a, vol. XV (2° sem., 1906), pp. 665-669 . . . . . » 273

XLI. Intorno alle superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)}=1$. « Rend. dell'Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », vol. XI (1907), pp. 11-15. . . . . » 279

XLII. Intorno alle superficie iperellittiche, di Federigo Enriques e Francesco Severi. « Rend. Acc. Lincei », s. 5a, vol. XVI (1° sem., 1907), pp. 443-453 . . . . . » 283

XLIII. Intorno alle superficie iperellittiche irregolari, di Federigo Enriques e Francesco Severi. « Rend. Acc. Lincei », s. 5a, vol. XVII (1° sem., 1908), pp. 4-9 . . . . . » 295

XLIV. Un'osservazione relativa alle superficie di bigenere uno. « Rend. dell'Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », vol. XII (1908), pp. 40-45 . . . . . » 303

XLV. Sui moduli delle superficie algebriche. « Rend. Acc. Lincei », s. 5a, vol. XVII (1° sem., 1908), pp. 690-694. . . . . » 307

XLVI. Le superficie di genere uno. « Rend. dell'Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », vol. XIII (1909), pp. 25-28 . . » 313

XLVII. Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques, par Federigo Enriques et Francesco Severi. « Acta Mathematica », tomes XXXII et XXXIII (1909, 1910), couronné par l'Académie des Sciences de Paris (1907), pp. 283-392, 321-403 . . . . . pag. 317

XLVIII. Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno. « Rend. dell'Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », vol. XIV (1910), pp. 71-75 . . . . . » 519

67324