Federigo Enriques

Enriques, Federigo

Memorie scelte di geometria, vol. III: 1911-1940

Zanichelli, Bologna, 1966. (pubblicate a cura dell'Accademia Nazionale dei Lincei)

FEDERIGO ENRIQUES

MEMORIE SCELTE DI GEOMETRIA

PUBBLICATE A CURA
DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Volume terzo
1911-1940

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA 1966

№ 168

"Monograf" - Bologna, via Collamarini 5 - VI-1966

PREFAZIONE

Con questo terzo volume delle Memorie scelte di geometria *si conchiude la raccolta dei più significativi scritti geometrici di* Federigo Enriques, *pubblicata per iniziativa ed a cura dell'Accademia Nazionale dei Lincei. Essa costituisce un degno tributo oltre che un monumento imperituro alla memoria del grande scienziato e filosofo, scomparso esattamente vent'anni or sono, il quale già si era posto ed in sé aveva brillantemente risolto il problema delle « due culture », come traspare dalla sua produzione vastissima e sapientemente eclettica che oggidì risulta anticipatrice in tanti campi, incluso quello matematico.*

Un primo progetto di riunire gli scritti dell'Enriques riguardanti la geometria, dispersi in vari atti accademici ed in numerose riviste, risale a Guido Castelnuovo il quale — verso la fine del 1947 — ebbe a discuterne a lungo col Professor L. Campedelli, con l'intento di valersi poi anche della collaborazione dei Professori Chisini, Conforto, Franchetta e Pompilj. Tale progetto incontrò all'inizio molte difficoltà e non venne quindi perseguito; esso offrì tuttavia lo spunto per l'iniziativa dell'Accademia Nazionale dei Lincei, presa l'8 gennaio 1955 dal Consiglio di Presidenza su proposta dei Soci U. Amaldi e O. Chisini ed affidata ad un Comitato presieduto dall'allora presidente della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Prof. F. Giordani, composto inoltre dai Soci U. Amaldi, E. Bompiani, O. Chisini, B. Segre, F. Severi e dal Prof. L. Campedelli.

Il piano della pubblicazione fu da questo Comitato definito nei più minuti particolari durante quattro riunioni iniziali, tenute il 12 febbraio, l'11 marzo, il 30 marzo ed il 27 aprile 1955, ed in una riunione finale ch'ebbe luogo il 2 ottobre 1965, nella quale — fra l'altro — vennero ricordati con cocente rammarico i membri Giordani, Amaldi e Severi, nel frattempo deceduti, mentre il Socio B. Segre, attuale presidente della

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali dell'Accademia, venne chiamato a presiedere il Comitato stesso.

L'organizzazione del lavoro è stata assiduamente seguita per circa un decennio dal Prof. Campedelli, ed alla revisione dei singoli scritti ebbero a provvedere quest'ultimo ed i Soci Chisini e Segre, coadiuvati da vari collaboratori (Barlotti, Marchionna-Tibiletti, Menichetti, Soldati ed altri). Alla realizzazione dell'iniziativa molto si adoprò anche la Casa Editrice Nicola Zanichelli, soprattutto attraverso il fattivo interessamento del suo Direttore Dott. E. della Monica, ora purtroppo anch'egli scomparso.

Il vol. I si apre con la commemorazione dell'Enriques tenuta da G. Castelnuovo, l'11 gennaio 1947, presso l'Accademia Nazionale dei Lincei; il presente vol. III termina con un elenco bibliografico delle pubblicazioni dell'Enriques, integrato a cura del Prof. Campedelli con l'ausilio del Dott. Menichetti, e con l'indice analitico generale e quello dei nomi (relativi anche ai precedenti due volumi), compilati dalla Prof. M. Mascalchi.

L'opera riproduce in tutto 74 Note e Memorie, disposte in ordine cronologico; e precisamente 24 (uscite dal 1893 al 1898) nel vol. I, 24 (uscite dal 1899 al 1910) nel vol. II, e 26 (uscite dal 1911 al 1940) nel vol. III. Il ricchissimo contenuto non dà tuttavia che una pallida idea della personalità e dell'eccelsa operosità e versatilità dell'Autore; e ciò non solamente in quanto nei tre volumi non rientrano com'è ovvio i molti ben noti Trattati geometrici dell'Enriques, vari dei quali in collaborazione con qualche discepolo (fra cui spicca l'opera monumentale col Chisini), né alcuno dei suoi numerosissimi scritti di interesse prevalentemente filosofico o storico o pedagogico, ma anche perché dai suddetti volumi non risultano appieno le singolari stimolanti direttive a cui quello spirito magno si ispirava nella ricerca scientifica ed i benefici influssi che la sua lunga appassionata opera di Maestro ebbe in Italia e all'estero. Le suddette Note e Memorie offrono comunque un'interessantissima anche se soltanto parziale documentazione della sua attività, relativa specialmente all'evolversi del suo pensiero matematico, nonché alle difficoltà incontrate ed alle tappe da lui via via raggiunte nel porre le basi allo splendido edificio della geometria sopra una superficie o varietà algebrica.

Fra le gemme da lui così raccolte a profusione, vanno particolarmente ricordate quelle riguardanti i fondamenti della geometria, specie la proiettiva ed il giuoco psicologico dell'intuizione, come pure i primi decisivi e sostanziali progressi — inizialmente arrecati assieme al Ca-

stelnuovo — nell'estensione della teoria dal caso relativamente semplice delle curve a quello delle superficie e varietà superiori, culminanti con la scoperta per queste ultime dell'inaspettato fenomeno dell'unirazionalità. Ma la parte più originale e profonda — anche se non in tutto compiuta — dell'opera sua è quella dedicata alla risoluzione dell'insidioso ed intricato problema della classificazione delle superficie algebriche dal punto di vista birazionale.

È questo un problema fondamentale che sorge e si impone fin dagli inizi della teoria in modo del tutto spontaneo, ma che risulta di difficoltà e complessità assai notevoli. Attorno ad esso egli ebbe a cimentarsi a lungo con sforzi tenaci, pervenendo a risultati acutissimi coi mezzi non sempre adeguati di cui allora poteva disporre, ma soprattutto con penetranti idee originali e sempre fervida fantasia creatrice. Egli era ben conscio di talune mende e lacune che restavano nella propria trattazione; ma poteva ciò nonostante inoltrarsi e procedere in essa con spedita sicurezza, usufruendo di una prodigiosa intuizione geometrica ed ispirandosi inoltre ad una concezione non eccessivamente vincolante del rigore matematico, secondo cui il vero poteva venir acquisito mediante successive approssimazioni ed all'errore andava riconosciuto — anche su basi storiche — un significato dinamico, foriero alle volte di solide induzioni successive.

Il superiore distacco con cui volutamente talora sorvolava su quelli ch'egli chiamava « dubbi critici », se da un lato gli agevolò la raccolta di un'ampia messe di risultati importanti, fece sì d'altro canto che la sua mirabile indagine relativa alla classificazione delle superficie algebriche, su cui scrisse anche un volume apparso postumo nel 1949, non ebbe dapprima in campo internazionale tutta la risonanza che le sarebbe spettata. Ampi e qualificati consensi sono però ad essa venuti recentissimamente, dopo che gli stessi risultati furono ritrovati da I. R. Sciafarevich e dalla propria Scuola con completo rigore e generalità, e con l'esplicito riconoscimento del valore determinante delle idee dell'Enriques. Ed è da ritenersi che anche la pubblicazione delle Memorie, *che si chiude come si è detto con questo volume, abbia contribuito e sempre meglio contribuirà ad una piena rivalutazione della sua geniale opera geometrica.*

BENIAMINO SEGRE

XLIX.

PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE

« Encyclopédie des Sciences Math. », III (1911),
pp. 1-147

INTRODUCTION

1. - Considérations générales sur les recherches mathématiques concernant les principes de la géométrie.

Toutes les études critiques qui ont été faites jusqu'ici des principes de la géométrie sont intimement liées au développement systématique de la géométrie envisagée comme une science déductive.

Dans les fondements de la géométrie, tels qu'ils sont exposés dans EUCLIDE (¹), on distingue trois sortes de propositions:

1) Les *définitions* (ὅροι) qui, à vrai dire, nous apparaissent aujourd'hui comme de simples *descriptions*, mais qui, souvent, renferment de plus en elles des propositions fondamentales: il suffit de citer, à cet égard, la quatrième définition du livre 5 qui contient implicitement le *postulat d'Archimède* [§ 13].

2) Les *axiomes* (κοιναὶ ἔννοιαι) et les *postulats* (αἰτήματα).

Entre ces deux sortes de propositions fondamentales existent des différences qu'au 5ième siècle de notre ère PROCLUS (²) envisage en les réduisant aux trois points de vue suivants:

a) Les postulats jouent par rapport aux axiomes le même rôle que les problèmes de construction par rapport aux théorèmes.

Par les postulats on affirme la possibilité d'effectuer certaines constructions premières, les autres constructions se ramenant toujours à celles-là. Par les axiomes on admet que certaines figures, dont on a

(¹) Voir en particulier l'édition critique d'EUCLIDE, *Elementa*, livre 1; Opera, éd. J. L. HEIBERG, 1, Leipzig, 1883, p. 2-11.
(²) PROCLI, *Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii*, éd. G. FRIEDLEIN, Leipzig, 1873, p. 178.

obtenu la construction par postulat ou démonstration, jouissent de propriétés que d'ailleurs on ne démontre pas.

b) Les axiomes expriment des propriétés relatives à des grandeurs mathématiques quelconques, de telle sorte que leur application embrasse un domaine plus étendu que celui de la seule géométrie.

Les postulats traduisent uniquement des propriétés géométriques.

c) Un axiome a une valeur propre (*καθ' ἑαυτά*). La vérité qu'il exprime dépend seulement des concepts figurant dans son énoncé. *C'est, au sens de E. KANT, un *jugement analytique*.*

Au contraire, la proposition que formule un postulat n'est pas seulement une conséquence logique des définitions. *Au sens de E. KANT, elle constitue un *jugement synthétique* et ajoute quelque chose aux notions qui la concernent.*

Dans les recherches actuelles sur les principes de la géométrie on n'attache plus aucune importance à la distinction entre axiomes et postulats qu'établit le point de vue *c*). *On trouve dans les axiomes de EUCLIDE, aussi bien que dans ses postulats, des jugements synthétiques. C'est pourquoi on ne fait plus généralement usage que du seul mot de *postulat* (3) pour désigner ces deux sortes de propositions (4).*

3) Les *propositions non exprimées*, qui sont obtenues immédiatement par intuition, comme par exemple celles qui se rapportent à l'ordre de succession des points sur une ligne, à l'illimité de la droite, etc.

Au demeurant, pour porter un jugement équitable sur les fondements de la géométrie tels qu'EUCLIDE les a conçus (5) au 3ième siècle avant notre ère, il ne faut pas oublier qu'il y a incertitude (6) au sujet des interpolations faites avant Théon d'Alexandrie dans le texte des Eléments (7).

Quoi qu'il en soit, les principes de la géométrie euclidienne actuelle, *qui datent au moins du quatrième siècle de notre ère (8)*, ont donné

(3) Cf. G. VAILATI, Verhandl. des 3-ten internat. Math.-Kongresses Heidelberg 1904, publ. par A. KRAZER, Leipzig, 1905, p. 575; H. G. ZEUTHEN, id., p. 540.

(4) Dans cet article nous entendrons par *postulats* les propositions qui expriment des relations que l'on admet avoir lieu entre les notions fondamentales sur lesquelles repose toute la géométrie.

(5) *Voir par ex. P. TANNERY, « Bull. sc. math. » (2), 8 (1884), p. 162-75; J. L. HEIBERG dans EUCLIDE, Opera 5, Leipzig, 1888, *Prolegomena critica*, p. LXXXVIII à p. XCIII (Note de G. ENESTRÖM).*

(6) *D'après quelques historiens [voir en particulier P. TANNERY, « Bull. sc. math. » (2), 8 (1884), p. 167-8, 173-4] plus d'un des principes qui figurent dans les textes actuels n'existait pas dans l'œuvre originale.*

(7) *On sait cependant qu'APOLLONIUS s'est occupé de la démonstration du premier des axiomes d'EUCLIDE [PROCLI *Diadochi* (1), p. 183] (Note de G. ENESTRÖM).*

(8) *Presque tous les manuscrits des *Elementa* que l'on possède aujourd'hui contiennent la rédaction due à THÉON d'Alexandrie.*

lieu à de longues discussions depuis l'antiquité jusqu'à nos jours (9). C'est surtout sur le *cinquième postulat* (le postulat des parallèles) que se sont portés les plus grands efforts critiques (10).

Jusqu'à la fin du 18ième siècle on a, en général, accepté sans conteste les principes de la géométrie euclidienne (11). *Depuis le commencement du 19ième siècle on a, peu à peu, substitué à cette façon de voir plusieurs conceptions critiques; ces conceptions sont d'ailleurs bien différentes les unes des autres.*

Les progrès de la critique moderne portent d'une part sur *l'objet* de la géométrie, d'autre part sur la *forme logique* du développement de cette science.

2. - Objet de la géométrie.

En ce qui concerne l'objet de la géométrie, on est amené à distinguer:

1) *l'espace intuitif habituel*, c'est-à-dire la représentation de l'espace telle que notre esprit le conçoit;

2) *l'espace physique* dont les propriétés nous sont données par l'expérience;

3) les *espaces abstraits*, c'est-à-dire les conceptions plus générales que nous pouvons déduire de l'espace intuitif ordinaire par abstraction ou généralisation.

C'est la géométrie non-euclidienne, établie entre 1815 et 1830 par C. F. Gauss, J. Bolyai, N. I. Lobačevskij, qui conduisit à cette idée nouvelle et remarquable que l'espace physique pourrait être différent de l'image que nous en fournit notre intuition habituelle.

Toutefois à cette époque, en dehors de la géométrie euclidienne, une seule géométrie semblait possible: elle ne devait différer de celle de Euclide que par son indépendance du postulat des parallèles. C'est en lui donnant ce sens précis qu'on parlait alors d'une *géométrie absolue.*

B. Riemann (12) élargit ce point de vue dans sa célèbre Thèse sur *les hypothèses qui servent de base à la géométrie*, soutenue à Göttingue le 10 juin 1854, mais qui n'a été publiée qu'après sa mort, par R. Dedekind.

---

(9) *Au sujet des interpolations les plus anciennes concernant la partie des *Elementa* dont il s'agit ici, voir aussi T. L. Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements* 1, Cambridge, 1908, p. 50-1, 61-8 (Notes 8 et 9 de G. Eneström).*

(10) Voir en particulier n° 14.

(11) Au 19ième siècle encore, plusieurs géomètres, parmi lesquels il faut citer en particulier A. Cayley, sont d'ailleurs restés fidèles à ce point de vue dogmatique.

(12) *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* [Habilitationsschrift, Göttingue, 1854; « Abh. Ges. Gött. » 13 (1866-7), éd. 1868, math., p. 133; *Werke*, (2e éd.), publ. par H. Weber, Leipzig, 1892, p. 272; trad. L. Laugel, Paris 1898, p. 280].

Dans cette thèse, B. RIEMANN abandonne aussi l'hypothèse de l'illimité de la ligne droite et développe, comme l'avait d'ailleurs déjà fait avant lui H. GRASSMANN, l'idée d'une géométrie à plus de trois dimensions (13).

C'est dans le même ordre d'idées que, dans ses mémoires, puis dans ses cours professés à l'Université de Göttingue, F. KLEIN (14) a puissamment contribué à généraliser le concept même de la géométrie.

Peu de temps après la publication des recherches de B. RIEMANN H. VON HELMHOLTZ formula, sous l'influence des doctrines empiriques de la philosophie anglaise *et aussi sous celle de ses propres recherches sur l'optique physiologique et l'acoustique,* une critique de la conception kantienne de l'espace dont la portée a été considérable. *D'apres H. VON HELMHOLTZ, les propositions fondamentales de la géométrie correspondent à des relations physiques dont l'expérience seule peut nous fournir la connaissance.* De là sont sorties des recherches entièrement nouvelles relatives aux fondements de la géométrie (15).

La diffusion extraordinaire des théories non-euclidiennes et le développement de ces théories effectué de diverses façons par G. BATTAGLINI, G. J. HOÜEL, C. FLYE S[te] MARIE, P. MANSION, J. DE TILLY et, à d'autres égards, par E. BELTRAMI, W. K. CLIFFORD, F. KLEIN, S. LIE, H. POINCARÉ et D. HILBERT, pour ne citer que quelques noms, ont rendu familière la conception de la possibilité de plusieurs géométries; ils ont aussi amené une discussion plus approfondie de la valeur relative des différents postulats au point de vue expérimental.

On ne peut d'ailleurs suivre le développement récent de ces théories qu'en s'imposant de la géométrie une conception abstraite qui permette de considérer, à côté de l'espace physique, des espaces supérieurs, déduits par abstraction de la représentation intuitive habituelle de cet espace physique.

Ainsi nous apparaît, comme une construction de l'esprit tirée de l'espace intuitif habituel en faisant abstraction des notions mètriques, l'espace de la géométrie projective conçu d'après le système de K. G. CHR. VON STAUDT. Tels aussi les espaces non-archimédiens (16) de G. VERONESE et de D. HILBERT (17).

---

(13) Cf. n[os]. 14, 22, 34.

(14) Voir déjà, en particulier, son mémoire de 1872 intitulé *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* », seconde partie [Math. Ann., 6 (1873), p. 112-45].

(15) Voir a ce sujet n[os] 39 à 42 (« groupes de mouvement »).

(16) *Suivant P. MANSION [« Ann. Soc. scient. Bruxelles », 29^1 (1904-5), p. 200] ces constructions abstraites n'appartiennent pas à la géométrie (Note de G. LORIA).*

(17) F. KLEIN insiste beaucoup, dans son enseignement, sur ce caractère des espaces supérieurs. Voir surtout, à ce sujet [n[os] 46 à 52] ce qui concerne la Géométrie non-archimédienne.

Des constructions abstraites comme ces dernières sont sans doute surtout intéressantes au point de vue psychologique *et au point de vue logique.* Elles servent avant tout en effet, à établir la valeur respective des divers concepts géométriques ([18]) et à jeter la lumière sur leur genèse ([19]).

Enfin ces constructions abstraites permettent d'envisager plus largement les différentes géométries en regard d'une géométrie à développement purement formel que nous examinerons plus loin. On arrive ainsi à considérer une géométrie quelconque comme un système d'hypothèses que l'on étudie, indépendamment de tout objet physique ou psychologique, en suivant, parmi les conséquences de ce système d'hypothèses celles qui semblent pouvoir présenter quelque intérêt mathématique.

C'est à ce point de vue que se sont placés, surtout dans leurs derniéres recherches, D. HILBERT et ceux qui se rattachent à son école ([20]).

Une des conséquences de cette liberté de costruction accordée aux géomètres a été de modifier le caractère des jugements que l'on portait sur la valeur physique des postulats.

F. KLEIN ([21]) et H. POINCARÉ ([22]) ont fait remarquer que les postulats géométriques renferment quelque chose d'arbitraire relativement aux données insuffisamment déterminées par l'expérience et l'intuition. Il en résulte qu'en géométrie, comme dans toute autre science physique, on peut faire un choix entre plusieurs représentations possibles de la même réalité. *Ce choix répond, en général, d'après E. MACH, au besoin de faire « économie de pensée ».*

*Allant plus loin, H. POINCARÉ déclare que les postulats de la géométrie ne sauraient exprimer des relations physiques, mais qu'ils constituent seulement des *conventions* d'après lesquelles on interprète les faits constatés expérimentalement. On en revient ainsi à la thèse kantienne qui nie toute réalité à l'espace.*

*F. ENRIQUES ([23]) critique ce point de vue nominaliste. Une analyse détaillée du sens que l'on peut donner au mot « espace » l'amène à conclure que le nominalisme de H. POINCARÉ, aussi bien que celui de E. KANT, sous-entend une *conception transcendante par rapport à la réalité phénoménale.* Les propriétés géométriques ne sauraient correspondre à

([18]) Cf. n° 19.

([19]) Cf. F. ENRIQUES, « Rivista filosofica » (Pavia), 4 (1901), p. 171 [queste *Memorie*, vol. II, XXXIV].

([20]) Cf. n^{os} 46 à 52.

([21]) *Voir par ex. Math. Ann. 37 (1890), p. 571-2.*

([22]) *Voir par ex. Bull. Soc. math. France 15 (1886-7), p. 204; *La science et l'hypothèse*, Paris s. d. [1903], p. 66.*

([23]) **Problemi della scienza*, Bologne, 1906, p. 261 (chap. 4); (2^e éd.), Bologne, 1910; dans la trad. J. DUBOIS, *Les problèmes de la science et la logique*, Paris, 1908, le chapitre 4 n'est pas traduit; trad. allemande par K. GRELLING, « *Probleme der Wissenschaft* », 2, Leipzig, 1910.*

des relations entre les corps et l'espace conçu en dehors de ceux-ci, mais bien à des relations entre les corps eux-mêmes.

Dès lors, et conformément aux vues de B. RIEMANN et de H. VON HELMHOLTZ, la géométrie doit être considérée comme une branche de la physique.*

3. - Forme logique du développement de la géométrie.

A cet égard tout est subordonné à une nouvelle conception de la *rigueur en mathématiques*, bien supérieure à celle qui régnait autrefois.

Les progrès dans cet ordre d'idées ont été réalisés grâce surtout à la revision des fondements de l'analyse, entreprise dans la seconde moitié du 19ième siècle par K. WEIERSTRASS, R. DEDEKIND, G. CANTOR, P. DU BOIS-REYMOND, CH. MÉRAY, U. DINI, J. TANNERY et plusieurs autres géomètres.

Ce point de vue une fois acquis, on découvrit tout d'abord un certain nombre de postulats, non exprimés jusqu'alors, qu'on sous-entendait par intuition dans la démonstration des théorèmes. Dans cet ordre de idées on peut, par exemple, citer le *postulat de la continuité*, dû à G. CANTOR et à R. DEDEKIND, le *postulat d'Archimède*, sur lequel O. STOLZ a appelé l'attention des géomètres, et les *postulats d'ordre*, dus à M. PASCH.

On remarqua ensuite qu'une définition, tout comme une démonstration, n'a qu'une valeur relative. On reconnut, plus généralement, que tout système de relations entre des concepts suppose des *concepts primitifs* qui ne sont aucunement définis et par lesquels on définit tous les autres.

Les postulats apparurent alors comme les énoncés de relations entre les concepts primitifs. Et l'on admit que ces relations doivent avoir encore un sens lorsque, les concepts primitifs ayant été reconnus expérimentalement, on fait *abstraction* des objets physiques ou psychologiques qu'ils désignent.

C'est conformément à ces vues que M. PASCH [24] a défini le concept de la rigueur lui-même par les deux conditions que voici:

1) On énoncera explicitement les concepts primitifs au moyen desquels on se propose de définir logiquement tous les autres;

2) On énoncera explicitement les propositions fondamentales (postulats) grâce auxquelles on se propose de démontrer logiquement les autres propositions (théorèmes). Ces propositions fondamentales doivent apparaître comme de pures *relations logiques* entre les concepts primitifs,

---

[24] *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, 1882, p. 16.

et cela indépendamment de la signification que l'on donne à ces concepts primitifs.

Quoique le choix des postulats dont il a fait usage ait été dicté à M. PASCH par des vues psychologiques, il réalise très exactement les deux conditions que l'on vient d'énoncer: en effet, il place entièrement le fondement du développement logique de la géométrie dans les postulats.

Ce concept de la *rigueur* a depuis pénétré de plus en plus dans le domaine des recherches géométriques, principalement sous l'influence de G. PEANO (25), de G. VERONESE (26) et de D. HILBERT (27). Déjà même quelques traités élémentaires de géométrie à l'usage des écoles primaires ou secondaires l'ont adopté, surtout en Italie (28).

Une collection de mémoires, publiés par F. ENRIQUES (29), renferme une suite de critiques approfondies ayant trait au même objet; elle n'a pas été sans exercer, elle aussi, quelque influence sur l'étude rigoureuse des principes de la géométrie.

Au point de vue *logique abstrait*, les postulats apparaissent comme des propositions logiques arbitraires; et l'ensemble des relations logiques qu'ils énoncent constitue une définition implicite des concepts primitifs.

Comme l'a remarqué G. VACCA (30) cette sorte de définition se trouve déjà dans J. D. GERGONNE (31).

Et maintenant, quel usage devra-t-on faire de cette liberté, qui logiquement demeure entière, de choisir à son gré les postulats?

---

(25) *I principii di geometria logicamente esposti*, Turin, 1889.

(26) *Fondamenti di geometria*, Padoue 1891; trad. allemande par A. SCHEPP, *Grundzüge der Geometrie*, Leipzig 1894.

(27) *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1899; (2e éd.), Leipzig 1903; (3e éd.), Leipzig 1909. Voir aussi F. ENRIQUES, *Lezioni di geometria proiettiva*, Bologne 1898; (2e éd.), Bologne 1904; (3e éd.), Bologne 1909.

(28) G. VERONESE et P. GAZZANIGA, *Elementi di Geometria*, Vérone et Padoue 1897; (2e éd.), Vérone et Padoue 1900; (3e éd.), Vérone et Padoue 1908; G. INGRAMI, *Elementi di geometria*, Bologne 1899; F. ENRIQUES et U. AMALDI, *Elementi di geometria*, Bologne 1903; (2e éd.), Bologne 1905; (3e éd.), Bologne 1909.

(29) **Questioni riguardanti la geometria elementare*, Bologne 1900; éd. allemande publiée sous le titre: *Fragen der Elementargeometrie* 1, trad. par H. THIEME, Leipzig 1910; 2, trad. par H. FLEISCHER, Leipzig 1907.*

(30) « Revue math. » [Rivista mat.], 6 (1899), p. 195.

(31) « Ann. mat. pures appl. », 9 (1818-9), p. 1-35. Voir en particulier p. 22-3: « si une phrase contient un seul mot dont la signification nous est inconnue, l'énoncé de cette phrase pourra suffire à nous en révéler la valeur. *Si, par exemple, on dit à quelqu'un qui connaît bien les mots *triangle* et *quadrilatère* mais qui n'a jamais entendu prononcer le mot *diagonale*, que chacune des deux diagonales d'un quadrilatère le divise en deux triangles, il concevra sur le champ ce que c'est qu'une diagonale et le concevra d'autant mieux que c'est ici la seule ligne qui puisse diviser le quadrilatère en triangles.* Ces sortes de phrases qui donnent ainsi l'intelligence de l'un des mots dont elles se composent, au moyen de la signification connue des autres, pourraient être appelées ***définitions implicites***, par opposition aux définitions ordinaires qu'on appellerait ***définitions explicites***. ... On conçoit aussi que ... deux phrases qui contiennent deux mots nouveaux, combinés avec des mots connus, peuvent souvent en déterminer le sens. »

La réponse à cette question relève de la philosophie de la science, bien plus que la science elle-même, puisque la question ne peut être résolue qu'en portant un jugement sur la valeur relative de plusieurs choix et non sur la légitimité de tel ou tel choix.

En effet, quelques écoles géométriques récentes entendent profiter le plus largement possible de cette liberté. Telle l'école de G. PEANO dont les recherches se rapportent à des questions d'ordre logique formel; telle aussi l'école actuelle de D. HILBERT qui, quoique poursuivant surtout un but essentiellement mathématique, tend vers une abstraction de plus en plus grande et s'écarte, par suite, de plus en plus des données fournies par l'intuition.

Dans cet ordre d'idées, il y a lieu de rappeler que les conditions d'une rigueur formelle ont pu, dans la plupart des cas, être exprimés par les signes de la logique mathématique. Ce système de signes dont il sera question dans le tome VIII de l'Encyclopédie a été l'objet des recherches de plusieurs mathématiciens parmi lesquels nous citerons ici G. W. LEIBNIZ, G. PEACOCK, A. DE MORGAN, G. BOOLE, H. GRASSMANN, W. R. HAMILTON, CH. PEIRCE, E. SCHRÖDER, G. PEANO, G. FREGE et B. A. W. RUSSELL.

Le symbolisme de la logique mathématique qui, depuis 1889, est devenu pour G. PEANO un système de représentation mathématique, permet de constater, sous une forme sensible, la nécessité de l'introduction de concepts primitifs. Chacun de ces concepts s'introduit sous la forme d'un *nouveau signe* qui le représente.

Ce même symbolisme conduit aussi à une critique approfondie de la simplicité et de l'indépendance des postulats et des concepts primitifs. ainsi qu'à une critique approfondie de la compatibilité des postulats,

4. - Compatibilité des postulats.

En étudiant de très près le cinquième postulat d'Euclide (dans le but, auquel on a dû finalement renoncer, de le démontrer) on a reconnu qu'un postulat peut être indépendant d'autres postulats constituant un système donné, en ce sens qu'on ne peut le déduire de ce système. Partant de là on a, peu à peu, été amené à formuler les remarques suivantes:

A) Un système de postulats peut jouir d'une *indépendance ordonnée* ou d'une *indépendance absolue.* Dans le premier cas, les postulats du système étant pris dans un ordre déterminé, chacun d'eux est indépendant de ceux qui le précèdent. Dans le second cas, chaque postulat est indépendant de tous les autres, aucun ordre n'étant assigné.

B. LEVI (32) a montré que si l'on possède un système de postulats a, b, c, ..., jouissant d'une indépendance ordonnée, on peut toujours le remplacer par un autre système de postulats a_1, b_1, c_1, ..., jouissant de une indépendance absolue.

*Pour former ce dernier système il suffit de prendre

1) pour a_1, le postulat a;

2) pour b_1 le postulat que voici: la proposition énoncée par le postulat b est satisfaite pour tous les éléments qui satisfont au postulat a;

3) pour c_1 le postulat que voici: la proposition énoncée par le postulat c est satisfaite pour tous les éléments qui satisfont aux postulats a et b ou b_1; etc.*

B) Le *degré* d'indépendance des postulats a, b, c, ... est lié à leur complexité. Moins b est simple et plus on peut s'attendre à ce que b ne soit pas tout entier une conséquence de a, mais qu'on puisse cependant déduire de a une partie de b.

Dès lors l'indépendance des postulats a une valeur d'autant plus significative que ces postulats sont plus simples. Et l'on est ainsi tout naturellement amené à se poser la question suivante:

Peut-on construire la géométrie sur un système de postulats tout à fait simples? D'après A. PADOA (33), à cette question il faut répondre négativement, car toute proposition vraiment simple se ramène à la forme:

a est différent de b ,

où a et b sont des entités déterminées, et il faudrait un nombre infini de propositions semblables pour remplacer n'importe quel postulat fondamental de la géométrie ordinaire.

Pour démontrer qu'une proposition a est indépendante d'un système de propositions b, c, ... il suffit évidemment d'établir que la proposition contraire à a est compatible avec le système b, c, ...

On est ainsi amené à rechercher les *conditions de compatibilité* d'un certain nombre de *postulats*.

Pour cela on a recouru d'abord à l'interprétation analytique. On admet comme évident, ou comme déjà établi, que les théorèmes de l'arithmétique sont compatibles entre eux.

*Cela posé, étant donné un système d'hypothèses géométriques, on cherche à traduire ces hypothèses sous forme analytique [on s'est d'ailleurs toujours borné à des hypothèses permettant l'usage des coordon-

(32) « Memorie Accad. Torino », (2) 54 (1904), p. 283.

(33) A. PADOA, Communication verbale faite à F. ENRIQUES, en 1900.

nées]. On obtient ainsi des relations arithmétiques, et de leur compatibilité, si elle a lieu, on déduit celle des hypothèses géométriques envisagées.*

Cette façon de procéder peut d'ailleurs être encore interprétée autrement:

Les nombres dont nous admettons à l'avance l'existence logique nous conduisent à la construction d'ensembles (ou de variétés) que l'on conçoit comme des *espaces abstraits*. Le fait de pouvoir définir analytiquement un tel espace abstrait nous assure que les propositions fondamentales, exprimant les propriétés de cet espace, sont logiquement compatibles, puisque toute incompatibilité entre elles entraînerait des conséquences absurdes pour le développement de l'arithmétique.

Il suffit de modifier quelque peu cette dernière idée pour parvenir au procédé plus général que voici:

On admet établie à l'avance la possibilité d'une certaine géométrie, par exemple la possibilité de la géométrie euclidienne; cela posé, on cherche à interpréter tout système de géométrie donné comme un système de relations entre certaines figures de cet espace. Cette interprétation, si l'on y parvient, nous assure que le système en question est fondé sur des postulats compatibles, car toute contradiction existant entre eux se retrouverait comme contradiction dans le développement de la géométrie euclidienne.

*On peut d'ailleurs appliquer le même procédé en prenant comme point de départ n'importe quel système de concepts auxquels se rapportent des postulats que nous savons compatibles entre eux. Néanmoins la démonstration logique ainsi établie a toujours un *caractère relatif*.*

Si l'on se préoccupe de la légitimité de la thèse sur laquelle repose cette façon de procéder, on est amené à se poser une suite de questions qui, au fond, sont du domaine de la théorie de la connaissance plutôt que du domaine des mathématiques. Il serait surtout intéressant de savoir à l'aide de quel critère on peut reconnaître pratiquement la compatibilité logique de n'importe quel système de postulats ou d'hypothèses qu'il faut admettre *a priori* pour construire une géométrie quelconque.

Les avis sont partagés à cet égard. Pour quelques-uns ce critère est le résultat de l'expérience et de l'intuition. D'autres, et parmi eux il faut citer tout particulièrement D. HILBERT, pensent que la logique peut, à elle seule, établir la compatibilité des proprietés fondamentales des nombres entiers ([34]).

([34]) « Verhandl. des 3^{ten} internat. Math.-Kongresses Heidelberg 1904 », publ. par A. KRAZER, Leipzig 1905, p. 174-85.

C'est là un problème délicat qui a suggéré quelques réflexions critiques (35).

La question de l'*indépendance des concepts primitifs* a été étudiée surtout par les géomètres italiens de l'école logique mathématique de G. PEANO (36). Ces géomètres ont, en particulier, cherché à réduire le nombre des concepts sur lesquels reposent les constructions géométriques (cf. § 6).

Étant donnés plusieurs concepts A, B, C, ... on peut se demander si l'un d'eux, C par exemple, peut être entièrement défini au moyen des concepts A et B. Mais cette question n'a de sens qu'autant qu'on énonce les relations fondamentales supposées établies entre A, B et C.

Supposons que ces relations fondamentales a, b, c, ... soient données sous une forme purement logique. On pourra leur donner deux acceptions différentes:

1) une acception *concrète* les faisant considérer comme postulats fondamentaux du système de géométrie qui a pour base les concepts primitifs A, B, C, ...

2) une acception *abstraite* qui fait envisager A, B, C, ... comme des symboles correspondant à des objets indéterminés, lesquels pourront être fixés ultérieurement au moyen d'une convention arbitraire.

Prenons cette dernière acception abstraite de a, b, c, ... et supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait seulement trois concepts primitifs A, B, C. Cherchons alors à interpréter de deux façons le système abstrait envisagé, A et B conservant la même signification dans les deux interprétations, mais C prenant un sens différent dans chacune des deux interprétations adoptées, et en nous arrangeant de manière qu'une certaine proposition d, vraie dans la première interprétation, soit fausse dans la seconde. Si l'on y parvient, on aura, par cela même (37), prouvé que le concept C est indépendant des concepts A et B, par rapport au système de postulats a, b, c, ...

5. - Division de cet article.

La division de cet article a été dictée par la distinction entre les *développements élémentaires* et les *développements d'ordre plus élevé*, dans

(35) *Voir à ce sujet, F. ENRIQUES, *Problemi della scienza* (23), p. 196; trad. J. DUBOIS, *Les problèmes de la science et la logique*, Paris 1908, p. 190; trad. K. GRELLING, *Probleme der Wissenschaft* 1, Leipzig 1910, p. 195.*

(36) *Voir en particulier M. PIERI, *I principii della geometria di posizione composti in sistema logico-deduttivo* [« Memorie Accad. Torino », (2) 48 (1898), p. 1-62];* A. PADOA, *L'enseignement math.*, 5 (1903), p. 85.

(37) A. PADOA [« Bibl. Congrès intern. philos. Paris 1900 », 3, éd., Paris 1901, p. 309] a insisté sur ce point qu'il a particulièrement mis en évidence.

lesquels il est question du *continuum*, de la *géométrie projective* et des *déterminations métriques* en général: éléments linéaires, distances, groupes de transformation.

Ce qui caractérise le point de vue *élémentaire* c'est qu'on y rapproche immédiatement et sans s'attacher à les distinguer nettement les unes des autres, toutes les idées géométriques qui nous sont familières.

Les dévéloppements d'ordre plus élevé impliquent non seulement l'emploi de méthodes plus approfondies de recherches, et en particulier l'emploi de toutes les ressources de l'analyse, mais encore une séparation et pour ainsi dire une hiérarchie des concepts fondamentaux. Un ordre déterminé de concepts y sert de base à un système géométrique déterminé qu'on développe dans une direction abstraite, et à ce système géométrique on subordonne ensuite les autres concepts.

Dans un dernier chapitre on a réuni les recherches nouvelles relatives à la géométrie non archimédienne. Elles reposent sur une analyse plus abstraite que celle qui avait été faite auparavant de notre concept habituel du continuum.

QUESTIONS D'ORDRE ÉLÉMENTAIRE

6. - Remarque préliminaire.

Tout traité de Géométrie contient un exposé plus ou moins complet des principes de la géométrie élémentaire. Parmi ces principes nous n'envisageons ici que ceux qui ont un caractère général, en renvoyant le lecteur pour tout ce qui concerne plus particulièrement les questions de détail aux articles de l'Encyclopédie contenus dans le second volume du tome III.

En nous plaçant au point de vue général nous passerons ici successivement en revue les concepts du *point*, de la *droite*, du *plan*, du *segment* de l'*angle*, le concept *situé entre*, les concepts de *coïncidence* et de *mouvement*, les différentes formes du concept de *continuité* et enfin la *théorie des parallèles*.

Comme complément nous ajouterons quelques développements concernant d'une part la *théorie des proportions* telle que la concevaient les anciens, et d'autre part la *mesure des surfaces*.

7. - Point, ligne et surface.

Dans ses Eléments de géométrie, EUCLIDE (38) débute ainsi (39)

Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

. . . .

Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

Ce qui signifie:
Un point est une chose indivisible.
Une ligne est une longueur sans largeur.
Une surface est une chose qui n'a que longueur et largeur.

EUCLIDE ajoute que les limites de la ligne sont des points et les limites de la surface des lignes. Il procède de façon à caractériser les droites entre toutes les lignes et les plans entre toutes les surfaces comme nous le verrons un peu plus loin.

En se conformant à ces définitions d'EUCLIDE on peut développer les éléments de la géométrie en suivant deux voies bien distinctes:

1) On prend le *point* comme concept fondamental tiré, par abstraction, de l'idée que nous nous faisons d'un corps très petit; on cherche ensuite à engendrer les lignes par le *mouvement* du point, les surfaces par le mouvement des lignes, les corps (ou l'espace) par le mouvement des surfaces.

2) On part du concept du *corps* comme fondamental et l'on envisage les surfaces comme *limites* des corps, les lignes comme limites des surfaces et les points comme limites des lignes.

Ni l'un ni l'autre de ces deux procédés ne fournit de véritable définition logique du point, de la ligne ou de la surface; on n'a, en réalité, obtenu que des données et des descriptions ayant une certaine importance d'ordre physique ou d'ordre physiologique, et rien de plus.

En ce qui concerne particulièrement le second de ces deux procédés, on peut observer que le concept de la *limite* d'un corps, ou d'une surface, ou d'une ligne, contient déjà le concept de la surface, de la ligne ou du point que l'on veut définir, si même il ne comprend pas, en tout ou partie, ces trois concepts à la fois, ou du moins quelques-uns de leurs rapports, d'ailleurs fort difficiles à préciser.

---

(38) *Elementa,* livre 1, défin. 1, 2, 5; *Opera,* éd. J. L. HEIBERG, 1, Leipzig 1883, p. 2.

(39) *Les deux premières définitions, quoique exprimées en termes différents, se trouvent déjà dans ARISTOTE [voir J. L. HEIBERG, « Abh. Gesch. Math. Leipzig », 18 (1904), p. 8-9] tandis que la dernière semble être due à EUCLIDE lui-même [voir J. L. HEIBERG, « Abh. Gesch Math. Leipzig », 18 (1904), p. 8] (Note de G. ENESTRÖM).*

Le premier des deux procédés n'implique pas de cercle vicieux aussi évident, mais il nécessite une recherche approfondie et difficile pour permettre d'aboutir à une systématisation logique des concepts de point, de ligne, de surface et de corps. La grande difficulté de cette recherche résulte de ce que les concepts de la ligne et de la surface que nous obtenons par induction sont dans notre pensée à l'état de développement progressif et qu'il est par conséquent fort difficile de les caractériser nettement (40).

De là la tendance, qui se fait jour dans ceux des ouvrages actuels de géométrie élémentaire où l'on se préoccupe du point de vue critique, d'introduire, après avoir pris le point comme concept fondamental, d'abord des concepts de lignes et de surfaces *aussi simples que possible* (le concept de la droite ou celui du cercle, le concept du plan ou celui de la sphère, ...) pour chercher seulement ensuite à former, à l'aide de ces concents primitifs, les concepts plus généraux de la ligne, de la surface ou du corps.

En procédant ainsi, les attributs de celles des lignes et des surfaces que l'on a envisagées comme fondamentales peuvent être exprimés, sans trop de difficultés, avec la plus grande précision (cf. § 10).

Le concept du « point » pourrait être défini en partant des concepts « corps » et « mouvement ». Il suffirait pour cela de considérer les mouvements comme des éléments d'un groupe de transformations que l'on ferait subir aux corps (41). Les points se trouveraient alors, comme l'a indiqué H. POINCARÉ (42), correspondre à certains sous-groupes du groupe des mouvements [les groupes des rotations autour des points de l'espace] et ils pourraient être définis comme tels.

Ce mode de développement serait en réalité un peu pénible, mais il serait intéressant pour deux motifs:

D'une part les postulats y seraient exprimés d'une façon qui se rapprocherait plus que toute autre du résultat direct des expériences physiques.

D'autre part, il apparaîtrait ainsi bien nettement que le concept du point, correspondant à l'existence de certains sous-groupes du groupe des mouvements, suppose un fait physique.

8. - Droite et plan définis à l'aide de congruences et de mouvements.

Nous allons maintenant examiner successivement les différentes définitions que l'on a données de la droite et du plan.

---

(40) Voir à ce sujet nos 20 à 23 et l'article III 2.

(41) Cf. nos 39 à 42.

(42) **La science et l'hypothèse,* Paris s. d. [1903], en partic. p. 108-9.*

Les concepts « droite » et « plan » peuvent être pris comme concepts primitifs, mais ils peuvent aussi être définis à l'aide des concepts *congruence* et *mouvement*.

Euclide (43) définit (44) ainsi la droite:

εὐθεία γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

PROCLUS (45) interprète cette définition en disant que la droite est la ligne dont la longueur entre deux points coïncide avec la distance de ces deux points, ce qui nous ramènerait à la définition d'ARCHIMÈDE que nous allons rencontrer un peu plus loin.

On adopte plus généralement la traduction que voici (46):

« La droite est la ligne qui s'étend également par rapport à ses points », c'est-à-dire la ligne qui est divisée par chacun de ses points en deux parties égales (47).

Mais comme l'hélice jouit de la même propriété, il est évident que cette propriété, ainsi énoncée, ne peut servir à caractériser la droite.

G. W. LEIBNIZ (48) a considéré la droite comme la ligne qui divise le plan en deux parties congruentes et le plan comme la surface qui divise l'espace en deux parties congruentes.

Ces conceptions d'EUCLIDE et de G. W. LEIBNIZ peuvent conduire à une façon logique de formuler les principes de la géométrie, en prenant comme notions primitives les notions de *point* et d'*équidistance* et en établissant, à l'aide d'un système approprié de postulats, les *symétries* sur la droite, dans le plan et dans l'espace (49).

---

(43) *Elementa*, livre 1, défin. 4; *Opera*, éd. J. L. HEIBERG, 1, Leipzig 1883, p. 2. *Le véritable sens de cette définition obscure était déjà perdu du temps de PROCLUS. H. G. ZEUTHEN [« Archiv. für die Geschichte der Naturwiss. (Leipzig) », 1 (1909), p. 327] la qualifie de définition qui ne dit rien (nichtssagend).*

(44) *La plus ancienne définition de la ligne droite actuellement connue est celle de PLATON [*Παρμενίδης* (Parmenides), éd. H. ESTIENNE, 3, Paris 1578, p. 137, passage E; éd. F. DIDOT, 1, Paris 1891, p. 634 lignes 51-2]: *οὗ ἂν τὸ μέσον ἀμφοῖν τοῖν ἐσχάτοιν ἐπίπροσθεν ᾖ*, formulée ainsi par PROCLUS: *ἡ τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ*, ce qu'on pourrait traduire par: « la droite est une ligne dont le milieu obscurcit les deux extrémités », c'est-à-dire dont le milieu et les deux extrémités sont situés sur le même rayon visuel. ARISTOTE reproduit la même définition [voir J. L. HEIBERG, « Abh. Gesch. Math. Wiss. Leipzig », 18 (1904), p. 7].*

(45) PROCLI *Diadochi* (2), p. 109.

(46) H. G. ZEUTHEN [*Forelaesning over mathematikens historie*: *Oldtid og middelalder*, Copenhague 1893, p. 101; *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Copenhague 1896, p. 115; trad. par J. MASCART, *Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge*, Paris 1902, p. 94] et M. SIMON [*Euklid und die sechs planimetrischen Bücher*, Leipzig 1901, p. 26] abordent l'étude de ces diverses interprétations.

(47) *On consultera surtout, au sujet de ces diverses interprétations, T. L. HEATH, *The thirteen books* (8), p. 165-8 (Note de G. ENESTRÖM).*

(48) Lettre à V. GIORDANO écrite en 1689; *Werke*, éd. C. I. GERHARDT, « Math. Schr. 1 », Berlin 1849, p. 196, 199.

(49) Voir T. BRODÉN, « Pedagogisk tidskrift » (Halmstadt), 26, (1890), p. 255-71.

ARCHIMÈDE (50) a considéré la droite comme la ligne la plus courte entre deux points et ce concept a été repris par A. M. LEGENDRE (51).

Cette conception d'ARCHIMÈDE peut aussi conduire à une définition logique de la droite, en prenant comme notion primitive celle de *distance entre deux points* ou, d'une façon plus précise, la notion qui nous permet de comparer entre elles deux paires de points données d'une façon quelconque en disant suivant les cas, que la *distance* entre les deux points de la première paire de points est égale, est supérieure, ou est inférieure à la distance entre les deux points de la seconde paire de points. Un système approprié de postulats permet alors de déterminer, sous certaines conditions, la *longeur d'une ligne* et, par suite, de définir la droite comme la ligne de longueur minime entre deux points (52).

Une autre définition dont G. W. LEIBNIZ (53) a fait usage, et qui est rapportée déjà par PROCLUS (54) est souvent (55) mentionnée (56). Elle consiste à envisager la droite comme l'unique ligne qui reste immobile quand on la fait tourner autour de deux de ses points.

C. F. GAUSS (57) a observé, en passant, que dans la pratique on a recours à cette propriété de la ligne droite quand on opère avec le théodolite pour contrôler si une ligne est droite ou non.

Plusieurs géomètres, parmi lesquels il convient de citer tout particulièrement H. GRASSMANN (58), ont regardé la droite comme la ligne

---

(50) *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* (De la sphère et du cylindre), postulat 1, *Opera*, éd. J. L. HEIBERG, 1, Leipzig 1880, p. 8; cf. P. DU BOIS-REYMOND, « Math. Ann. », 15 (1879), p. 283. *On ne sait pas si ARCHIMÈDE a envisagé ce concept comme une définition ou comme un postulat [voir à ce sujet H. G. ZEUTHEN, « Archiv. für die Geschichte der Naturw. (Leipzig) », 1 (1909), p. 320-7; G. ENESTRÖM, « Bibl. math. » (3) (8) (1907-8), p. 66; (3) 10 (1909-10), p. 53-4.*

(51) *Eléments de géométrie*, (1re éd.), Paris an II, p. 1; (12ième éd.), Paris 1823, p. 1.

(52) Voir R. BETTAZZI, « Ann. mat. pura appl. », (2) (20) (1892-3), p. 19.

(53) Lettre à V. GIORDANO écrite en 1689; *Werke*, éd. C. I. GERHARDT, « Math. Schr. », 1, Berlin 1849, p. 196; cf. (67), id., 5, Halle 1858, p. 164; 7, Halle 1863, p. 27.

(54) *PROCLI *Diadochi* (2), p. 110.*

(55) *Voir par ex. P. RAMUS (PIERRE DE LA RAMÉE), *Scholarum mathematicarum libri unus et triginta*, Bâle 1569, p. 148.*

(56) *La même définition se trouve aussi [cf. G. FRIEDLEIN, « Bull. bibl. storia mat. », 4 (1871), p. 95; HERONIS *Alexandrini Geometricorum et stereometricorum reliquiae*, éd. F. HULTSCH, Berlin, 1864 p 8-9] dans les soit-disant « Définitions » attribuées sans qu'on sache pourquoi à HÉRON et dont la rédaction actuellement connue est postérieure à PROCLUS (Notes 54 à 56 de G. ENESTRÖM).

(57) Note posthume s. d. (semble être écrite entre 1840 et 1850); *Werke*, 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 196-7.

(58) *Die lineale Ausdehnungslehre*, Leipzig 1844; (2e éd.), Leipzig 1878, p. XXIX (introd. section C); *Werke* 1¹, publ. par F. ENGEL, Leipzig 1894, p. 28: « Die einfachste Ausdehnungsform ist die Form, welche durch eine aus demselben Gesetze erfolgende Änderung des erzeugenden Elementes entsteht » [La forme simple d'extension est la forme qui résulte d'un changement de l'élément générateur, d'après une même loi], et p. 29: « In der Raumlehre ist die Gleichheit der Richtung das die einzelnen Änderungen umfassende Gesetz » [Dans la théorie de l'espace, la constance de la direction est la loi qui comprend les divers changements].

qui conserve en chacun de ses points une direction constant. Pour que cette définition soit acceptable il faut prendre comme *notion primitive* celle de *direction*, et cela peut se faire, par exemple par rapport à deux points, sans tenir compte de la notion de droite.

Cette idée a été développée par E. T. DIXON (59). Elle se rattache d'ailleurs à une autre idée de H. GRASSMANN (60) d'après laquelle la géométrie peut être envisagée comme un *calcul géométrique effectué sur des vecteurs* ou, suivant le langage adopté aujourd'hui, comme une *analyse vectorielle*.

G. PEANO (61) a analysé avec le plus grand soin les notions et propositions fondamentales de ce calcul géométrique. G. DARBOUX (62), F. SIACCI (63), R. SCHIMMACK (6), F. SCHUR (65), G. HAMEL (66) ont aussi publié des recherches plus ou moins étendues sur ce même sujet.

Une définition bien plus remarquable de la droite et du plan est celle qu'a imaginée G. W. LEIBNIZ (67) et qui a été ensuite reprise et développée par J. BOLYAI (68) et par N. I. LOBAČEVSKIJ (69). Elle consiste à regarder le plan comme le lieu des points équidistants de deux points donnés (70) et la droite comme le lieu des points équidistants de trois points non alignés, ou aussi comme le lieu des centres des sphères ayant un même point de contact (71). La notion de l'*équidistance* de paires de points figure ici comme primitive.

Quand la définition du plan et celle de la droite ne sont pas données simultanément, ou que la définition du plan ne précède pas celle

(59) *The foundation of geometry*, Cambridge 1891, p. 32 et suiv.

(60) Pour avoir une idée générale de la question, lire par exemple l'article de H. GRASSMANN intitulé « *Kurze Übersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre* » [Archiv. Math. Phys. (1) 6 (1845), p. 337-50; *Werke*, 1[1], publ. par F. ENGEL, Leipzig 1894, p. 297 et suiv. (voir surtout les sections III et IV)].

(61) *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, Turin 1888.

(62) « Bull. sc. math. », (1) 9 (1875), p. 281; réimpr. dans CH. DESPEYROUS, *Cours de mécanique*, Paris 1884, p. 371-7 (note I).

(63) « Rend. Accad. Napoli », (3) 5 (1899), p. 34.

(64) « Nachr. Ges. Gött. », 1903, p. 34.

(65) « Z. Math. Phys. », 49 (1903), p. 352.

(66) « Z. Math. Phys. », 49 (1903), p. 362.

(67) *Characteristica geometria*, ms. bibl. Hanovre daté du 10 août 1679; *Werke*, éd. C. I. GERHARDT, « Math. Schr. », 5, Halle 1858, p. 166, 167.

(68) *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi*, 2, Maros-Vásárthelyini 1832; (2e éd.) 2, Budapest 1904, p. 8.

(69) *O načalach geometrii*, Kazan 1829-30; *Novyǐa načala geometrii s polnoj teoriej parallělinych*, Kazan 1835-8; trad. allemande par F. ENGEL, *Zwei geometrische Abhandlungen*, Leipzig 1899, p. 7, 95.

(70) Ces données mêmes conduisent tout naturellement à écrire l'équation du plan sous la forme normale [cf. III 22] (sous laquelle elle a été envisagée par L. O. HESSE).

(71) Voir aussi, à ce sujet, G. PEANO, « Atti Accad. Torino », 38 (1902-3), p. 6.

de la droite, on peut ramener sans difficulté la notion du plan à celle de la droite.

EUCLIDE (72) définit le plan:

ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται

ce que l'on traduit généralement (73):

« un plan est une surface qui est également située par rapport à ses droites ».

Cette définition contient certainement quelque chose de superflu, car le plan est déjà défini comme étant la surface contenant entièrement la droite qui joint deux quelconques de ses points, et cette définition, que l'on fait souvent remonter à HÉRON (74), est plus simple que la précédente.

C. F. GAUSS (75) a d'ailleurs mis en évidence que, dans la définition d'EUCLIDE, se trouve contenu implicitement un nouveau postulat, puisqu'une droite et un point extérieur à cette droite suffisent pour déterminer un plan. C'est pourquoi il a proposé de définir plutôt le plan comme le lieu des perpendiculaires à une droite menées par un point arbitrairement fixé sur cette droite.

La définition d'EUCLIDE se présente alors sous la forme d'un *théorème* dont la démonstration a préoccupé C. F. GAUSS (76) comme on le voit en consultant ses oeuvres posthumes.

Des considérations analogues ont amené F. DEAHNA (77) à une définition du plan qui ne diffère pas essentiellement de celle de C. F. GAUSS. Après avoir établi les concepts de la droite et de la sphère en s'appuyant sur le concept de l'équidistance comme sur un concept primitif, il suppose que l'on peut mouvoir la sphère autour d'un de ses diamètres de façon que chaque point de la surface décrive une ligne fermée (une circonférence de cercle); parmi ces circonférences il y en a une qui partage la surface de la sphère en deux parties congruentes: les droites qui

---

(72) *Elementa*, livre 1, déf. 7; *Opera*, éd. J. L. HEIBERG, 1, Leipzig 1883, p. 2.

(73) *Le véritable sens de la définition était déjà perdu du temps de PROCLUS (5ième siècle de notre ère); cf. note 42 (Note de G. ENESTRÖM).*

(74) *La définition se trouve chez THÉON DE SMYRNE (qui vivait au second siècle de notre ère) [cf. *Expositio rerum mathematicarum*, publ. par E. HILLER, Leipzig 1878, p. 112 [et dans les soi-disant « Définitions » attribuées sans qu'on sache pourquoi à HÉRON (56)] voir G. FRIEDLEIN « Bull. bibl. storia mat. », 4 (1871), p. 97; HERONIS *Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae*, éd. F. HULTSCH, Berlin 1864, p. 10-1; voir aussi: *Anaritii in decem libros priores elementorum Euclidis commentarii*, éd. M. CURTZE, Leipzig 1899, p. 10 [(Note de G. ENESTRÖM].*

(75) Lettre à F. W. BESSEL datée du 27 janvier 1829; *Werke*, 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 200.

(76) Note écrite très probablement en mars 1832; *Werke*, 8, Göttingue (Leipzig), p. 194.

(77) Diss. Marbourg 1837. Cf. W. KILLING, *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*, 1, Paderborn, 1893; 2, Paderborn 1898, p. 183.

joignent les points de cette circonférence au centre de la sphère engendrent un plan ([78]).

G. VERONESE ([79]) a repris à nouveau l'examen des définitions que l'on peut donner du plan. Après avoir énoncé quelques postulats sur la droite et la congruence (cf. § 11), il définit deux droites comme parallèles (dans la géométrie euclidienne) quand ces deux droites sont opposées (symétriques) relativement à un point, et il introduit le postulat suivant:

Deux droites parallèles sont opposées par rapport au milieu de chaque segment dont les extrémités sont situées sur ces deux droites.

En s'appuyant sur ce postulat il définit le plan par l'ensemble des droites (le faisceau de droites) qui projettent, d'un point A extérieur à une droite (a), les points de cette droite (a), en adjoignant à cet ensemble de droites la parallèle menée par A à (a). Ceci posé, il démontre que le plan ainsi défini et *construit* contient la droite qui joint deux quelconques de ses points ([80]).

La droite et le plan ([81]) peuvent aussi être introduits conformément aux principes de la théorie des groupes dont il est question dans d'autres articles de l'Encyclopédie ([82]).

9. - Droite et plan définis à l'aide de postulats.

Au lieu de définir les concepts « droite » et « plan » à l'aide des notions de « congruence » et de « mouvement », on peut les envisager comme des concepts fondamentaux caractérisés par un groupe de postulats.

([78]) *Les développements de F. DEAHNA renferment un cercle vicieux. Ils supposent, en effet, les postulats de congruence qui eux-mêmes ne peuvent être établis sans supposer préalablement la notion du plan (Note de F. SCHUR).*

([79]) *Fondamenti* ([26]), p. 299 (livre I n° 19, livre II n° 7). Pour plus de détails voir G. VERONESE et P. GAZZANIGA, *Elementi* ([28]), (2e éd.), p. 31, 32.

([80]) G. VERONESE a indiqué comment on pourrait définir le plan dans l'hypothèse de N. I. LOBAČEVSKIJ (donc indépendamment du postulat du texte qui contient le postulat des parallèles d'EUCLIDE et peut-être un peu plus). G. VERONESE a aussi examiné le cas de B. RIEMANN (n° 14) où par un point il n'y a aucune droite parallèle à une droite donnée: le plan tout entier est alors donné par les droites, issues d'un point extérieur à une droite fermée, qui projettent les points de cette droite fermée; mais, dans ce cas de B. RIEMANN, il n'a donné la définition du plan qu'en faisant aussi appel à une autre hypothèse dans laquelle apparaît le double concept d'un espace infiniment petit et d'un espace infiniment grand. G. VERONESE estime d'ailleurs que cette dernière hypothèse est inutile dans son système; mais cette affirmation demanderait à être justifiée.

([81]) *Pour la définition du plan par la droite, voir F. SCHUR, *Grundlagen der Geometrie,* Leipzig 1909, p. 9.*

([82]) *Cela n'est toutefois possible que si l'on suppose que l'espace est une variété analytique (Note de F. SCHUR).*

Si l'on envisage comme primitif le concept du *segment rectiligne*, on peut donner une définition de la *droite* ([83]) à l'abri de toute critique. Si l'on postule d'une façon convenable les attributs d'une surface plane, on peut de même définir nettement ce qu'il faut entendre par *plan illimité*. Si, au contraire, on part du concept de la droite comme fondamental, on ne peut définir le *segment de droite* sans faire intervenir encore un autre concept primitif.

Quand il sera question des principes de la géométrie projective (§§ 29 à 31) nous énumérerons les postulats auxquels on parvient en suivant la première de ces deux voies. Nous nous bornerons ici à montrer que, en suivant la seconde voie, les attributs concernant les rapports de position mutuelle, ou l'*appartenance*, des droites et des plans [ce que D. Hilbert ([84]) appelle *die Verknüpfung* c'est-à-dire en quelque sorte l'*enchevêtrement* des notions de droite et de plan] apparaissent, dans une certaine mesure, comme distincts des attributs que ces figures possèdent en tant que lignes et surfaces, c'est-à-dire des postulats d'*ordre* et de *séparation*.

Voici comment on peut d'ailleurs formuler ces postulats d'*appartenance*:

α) On suppose donnée une classe d'éléments appelés *points* [dont l'ensemble se nomme *espace*] et, dans cette classe, on envisage des sous-classes (droites et plans) qui satisfont aux postulats suivants:

1) deux points appartiennent à une droite et à une seule droite;

2) trois points n'appartenant pas à une même droite appartiennent à un plan et à un seul plan;

3) la droite déterminée par deux points d'un plan appartient à ce plan;

4) deux plans qui ont un point commun ont nécessairement encore un second point commun (et ont donc, par suite, une droite commune).

A ces postulats d'une forme d'abord hypothétique seulement, on adjoint les postulats affirmant l'*existence* de plusieurs points différents et celle de points *extérieurs* à une droite et à un plan. L'existence d'un nombre *infini* de points distincts, de droites distinctes, ou de plans distincts les uns des autres, résulte alors des postulats de la *disposition* dont on parlera plus loin [cf. § 10, β].

Il convient de remarquer que le quatrième des postulat α exprime

---

([83]) M. Pasch, *Neuere Geom.* ([25]), p. 7-8; G. Peano, *Principii* ([25]), p. 9; *Sui fondamenti della geometria* [« Rivista di mat. », 4 (1894), p. 51].

([84]) *Grundlagen* ([27]), (1re éd.), p. 5; (2e éd.), p. 2; (3e éd.), p. 3.

que l'espace a trois dimensions et qu'on peut le démontrer en se basant sur ce que le plan divise l'espace en deux parties distinctes (§ 10) et en énonçant convenablement cette propriété sous forme de postulat.

10. - Segment; angle; le concept « situé entre ».

Nous allons maintenant nous occuper des postulats qui expriment les propriétés linéaires de la droite et les propriétés de surface du plan (cf. §§ 20 à 23) attributs qui se rapportent aux concepts « situé entre » « ordre naturel de succession des points d'une droite », « segment », « demi-droite », « côté du plan », « angle ».

Ni EUCLIDE, ni ceux qui l'ont suivi n'ont examiné ces concepts; ils n'ont formulé aucun postulat les concernant. De tels postulats sont cependant nécessaires si l'on veut que le raisonnement géométrique soit purement logique et indépendant de toute intuition.

C. F. GAUSS [85] a attiré l'attention sur ce qu'il est absolument indispensable de formuler nettement le concept « situé entre ».

Le concept concernant la disposition (ordre de succession) des points d'une droite forme la base de toute la géométrie [86]. En effet ce concept s'introduit systématiquement en géométrie analytique par l'usage des *signes*. Le principe des signes a été utilisé en géométrie pure par A. F. MÖBIUS et H. GRASSMANN [87] en a, lui aussi, fait systématiquement usage.

Mais c'est à M. PASCH [88] que l'on doit d'avoir formulé le premier ensemble de postulats caractérisant ces relations. Après lui, G. PEANO [89] G. VERONESE [90], D. HILBERT [91] et plusieurs autres géomètres ont étudié à nouveau ces mêmes questions [92].

On peut distinguer deux manières de procéder à cet examen; elles se rattachent toutes deux, au moins dans une certaine mesure, aux remarques de C. F. GAUSS et de J. F. HERBART et se distinguent l'une de l'autre en ce que dans l'une on se place à un point de vue que l'on peut désigner comme *actuel*, où il s'agit de la figure achevée, tandis

---

[85] Lettre à W. BOLYAI datée du 6 mars 1832; *Werke*, 8, Göttingue (Leipsiz) 1900, p. 222.

[86] Cf. J. F. HERBART, *Werke*, publ. par G. HARTENSTEIN, 3, *Schriften zur Metaphysik*, I, Leipzig 1851, p. 18; 5, *Schriften zur Psychologie*, I, Leipzig 1850, p. 114 et suiv.

[87] A. F. MÖBIUS, *Der barycentrische Calcul*, Leipzig 1827, p. 3-4; *Werke*, 1, Leipzig 1885, p. 25; H. GRASSMANN, *Die lineale Ausdehnungslehre*, Leipzig 1844, p. 17; (2e éd.) Leipzig 1878, p. 17; *Werke*, 1^1, p. 47-8.

[88] *Neuere Geom.* [24], p. 5.

[89] *Principii* [25], p. 9-17; *Sui fondamenti della geometria* [« Rivista mat. », 4 (1894), p. 51].

[90] *Fondamenti* [26], p. 55, 68.

[91] *Grundlagen* [27], (1re éd.), p. 6; (2e éd.), p. 4; (3e éd.), p. 4-9.

[92] Voir nos 20 à 23.

que dans l'autre on se place au point de vue de la génération des figures: nous désignerons ce dernier point de vue sous le nom de *génétique*.

A) Envisageons d'abord les *attributs linéaires* de la droite. Ils peuvent être postulés au point de vue *actuel* en partant du concept « situé entre » ou « division en parties » de la façon suivante:

β) 1) Si A, B, C sont des points d'une droite et que B se trouve entre A et C, B se trouve entre C et A.

2) Si A et C sont deux points d'une droite, il y a toujours au moins un point B *entre* A et C et au moins un point D tel que C se trouve entre A et D.

3) De trois points quelconques d'une droite il y en a toujours un et un seul qui se trouve placé entre les deux autres [93].

Au point de vue *actuel*, on peut aussi postuler comme il suit:

β') Chaque point A de la droite divise la droite en deux classes de points [constituant deux parties distinctes de la droite] que l'on peut appeler l'une « partie à droite », l'autre « partie à gauche » du point A et qui sont telles que:

1) chaque point de la droite, autre que A, appartient à une et une seule des deux parties;

2) si A se trouve à gauche [à droite] d'un point B distinct de A, chaque point qui est à gauche [à droite] de A se trouve à gauche [à droite] de B;

3) si A se trouve à gauche de B, B se trouve à droite de A.

Si l'on se place au point de vue *génétique* on postule comme il suit:

β'') Les points de la droite sont rangés les uns à côté des autres en deux *ordres* (*naturels*) opposés l'un à l'autre, de façon qu'en considérant un ordre déterminé on ait:

1) deux points A, B de la droite étant donnés, si l'un d'eux, par exemple A, *précède* l'autre B, alors B suit A;

2) trois points A, B, C de la droite étant donnés, si d'une part A précède B et que d'autre part B précède C, alors A précède C;

3) entre deux points A et B existent des points *intermédiaires* (précédant l'un et suivant l'autre);

4) il n'existe aucun *premier point* (précédant tous les autres) ni aucun *dernier point* (suivant tous les autres).

En se basant sur ces postulats, on peut définir sur la droite le *segment* ayant ses points *extrêmes* en deux points donnés A et B de la droite et contenant les points intermédiaires. Et l'on peut aussi obtenir les attributs élémentaires d'un tel segment AB.

B) Envisageons en second lieu les attributs de surface du plan.

---

[93]) D. Hilbert, *Grundlagen* [27], (2e éd.), p. 4; (3e éd.), p. 5.

Si l'on se place ou point de vue du plan *actuel* on peut prendre comme base la division du plan en deux parties par une de ses droites et caractériser, avec M. PASCH ([94]), l'attribut fondamental correspondant par le postulat suivant (qui fait pendant en quelque sorte aux trois postulats β énoncés plus haut) pour la droite.

β) 4) Si, dans un plan, trois segments AB, BC, CA sont donnés, une droite (du plan) qui a un point commun avec l'un d'eux a aussi un point commun avec l'un des deux autres.

En raison de ce postulat, le plan est divisé par une quelconque de ses droites (d) en deux parties [*côtés* ou *demi-plans*] de façon que le segment joignant deux points situés du même côté de (d), mais extérieurs à (d), n'a aucun point commun avec (d); au contraire, le segment joignant deux points qui ne se trouvent pas du même côté de (d) a un point commun avec (d).

On peut introduire les mêmes attributs en se plaçant au point de vue *génétique*. Pour la géométrie euclidienne on y parvient très simplement en postulant comme il suit:

1) le postulat des parallèles d'Euclide;

2) si deux paires de droites (a, a'), (b, b') issues d'un même point O sont coupées par *une* transversale (d) [qui est supposée n'être parallèle à aucune des quatre droites et ne pas passer par O] en deux paires de points (A, A'), (B, B') tels que A et A' soient séparés par l'un des deux points B ou B' et que B et B' soient séparés par l'un des deux points A ou A', il en est nécessairement de même pour *toute* transversale qui ne passe pas par O et n'est parallèle à aucune des quatre droites envisagées (cf. §§ 24 à 28).

Ce postulat de M. PASCH conduit directement à la définition des *surfaces planes* dans lesquelles deux droites qui se coupent partagent le plan et à la définition des *angles* formés par ces deux droites.

La question de la définition de l'angle a soulevé autrefois bien des discussions.

EUCLIDE ([95]) désigne l'angle comme l'*inclinaison* de deux droites se coupant, ce qui est une tautologie manifeste ([96]). D'autres ont considéré

([94]) M. PASCH, *Neuere Geom.* ([24]), p. 21.

([95]) *Elementa,* livre 1, déf. 7; *Opera*, éd. J. L. HEIBERG, 1, Leipzig 1883, p. 2.

([96]) *Déjà dans l'antiquité des efforts avaient été tentés pour obtenir une meilleure définition de l'angle, mais presque tous ces efforts n'ont abouti à aucun résultat. D'après APOLLONIUS un angle est la contraction ou le resserrement [συναγωγή] d'une surface ou d'un solide autour d'un point sous forme de ligne brisée ou de surface ayant une pointe [en latin du moyen âge: angulus est coniunctio superficiei aut corporis ad unum punctum, quae comprehenditur a linea curva aut superficie acuta] définition qui n'est guère préférable à celle d'EUCLIDE. D'autres définitions presque aussi obscures ont été données par PLUTARQUE et CARPUS [cf. PROCLI Diadochi ([2]), p. 121-8; ANARITII *In libros Euclidis commentarii* ([74]), p. 11-4] (Note de G. ENESTRÖM).*

l'angle comme la « mesure d'une rotation ». L'essentiel dans toutes les définitions que l'on donnait consistait d'ailleurs à affirmer l'existence d'une certaine invariabilité, concernant une paire de droites qui se coupent, par rapport au groupe des mouvements. Le concept d'un tel invariant (la grandeur de l'angle) suffit évidemment pour constituer la théorie élémentaire des congruences des figures.

Mais l'angle joue dans d'autres questions un rôle différent. On le voit, en particulier, quand il s'agit de certains rapports de situation tels que la notion de « point situé à l'intérieur d'un angle », par exemple. Au point de vue de ces relations, on a besoin d'un concept de l'angle qui soit indépendant du concept de la congruence des angles.

C'est pourquoi LOUIS BERTRAND (97) a défini l'angle comme *partie d'un plan.* D'une façon précise: l'angle de deux droites est la partie du plan qui est commune aux deux demi-plans limités par ces deux droites; ou encore: l'angle de deux droites est l'*interférence* de ces deux demi-plans. Les deux droites sont les *côtés* de l'angle.

G. VERONESE (98) remarque que la figure ainsi définie, qu'il appelle « champ angulaire » ou « section angulaire », ne correspond pas à la conception habituelle de l'angle; on considère en général l'angle comme une figure n'ayant qu'*une* dimension, appartenant non à un plan mais à un faisceau de droites. C'est pourquoi il propose plutôt, en s'appuyant sur le principe de dualité qui domine toute la géométrie projective, de définir l'angle de deux demi-droites a, b comme l'*ensemble* des demi-droites *situées entre* les deux demi-droites a et b.

On peut développer tous les rapports de situation des figures polygonales quelconques en se basant sur le postulat de M. PASCH. On peut, en particulier, définir ainsi la *surface* d'un *polygone.*

G. VERONESE (99) parvient à ce même résultat d'une façon récurrente, en considérant d'abord la *surface* du triangle comme la partie du plan qui est commune à deux angles, puis en considérant la surface du polygone convexe comme une somme [une juxtaposition] de surfaces de triangles. Si l'on rattache ces développements à la construction génétique du plan, ils entrent en rapport avec le concept des parallèles (cf. § 14).

F. ENRIQUES et U. AMALDI (100) définissent la surface du polygone convexe comme l'interférence des demi-plans qui contiennent les sommets et sont limités par les côtés du polygone. Ils en déduisent les

---

(97) Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques, 2, Genève 1778, p. 6.

(98) *Fondamenti* (26), p. 619; trad. A. SCHEPP, *Grundzüge* (26), p. 307 et suiv. et p. 695; *Elementi* (26), (2e éd.), p. 35.

(99) *Fondamenti* (26), p. 321 et suiv.; trad. A. SCHEPP, *Grundzüge* (26), p. 346 et suiv.; *Elementi* (26), (2e éd.), p. 105; (3e éd.), p. 113.

(100) *Elementi* (26), (1re éd.), p. 98.

attributs élémentaires de situation des polygones en appliquant directement le postulat de M. PASCH.

Les deux parties dans lesquelles un plan est divisé par un polygone convexe peuvent de même être définies soit par *juxtaposition*, soit par *interférence* de demi-plans et l'on en déduit alors cette propriété fondamentale qu'un segment, ne passant pas par un sommet du polygone et joignant deux points du plan, coupe le périmètre du polygone en un nombre pair ou impair de points selon que ces deux points appartiennent, ou non, à la même partie du plan.

La partie *intérieure* (surface du polygone) ne semble pouvoir être distinguée de la partie *extérieure* qu'en raison de l'infinité de cette dernière.

C) Les concepts de géométrie *plane* dont on vient de parler s'appliquent aussi à la géométrie dans l'*espace*.

Les *parties* (ou *côtés du plan*) dans lesquelles l'espace est divisé par un plan peuvent être définies, si l'on admet un postulat [analogue au postulat de M. PASCH relatif au plan] affirmant que l'espace a trois dimensions et permettant de prouver que « deux plans ayant un point commun ont nécessairement une droite commune ». Si, au contraire, on prend cette propriété comme postulat (comme dans le § 7) la division de l'espace par un plan résulte du postulat de M. PASCH relatif au plan.

Le concept de l'*angle dièdre* est analogue à celui de l'angle plan et n'appelle pas de nouvelles réflexions.

La définition générale du polyèdre (ou plutôt de la figure polyédrique) et celle du corps fermé demandent quelque attention. En effet une nouvelle difficulté apparaît déjà ici quand on envisage les figures polyédriques et à cette première difficulté vient s'en ajouter une autre encore quand on envisage des corps fermés limités par des surfaces courbes. Ces questions seront traitées dans des articles spéciaux relatifs aux polyèdres.

Nous terminerons l'examen de ces concepts en remarquant que les concepts du *sens d'un angle*, du *sens d'une figure*, du *sens d'un segment*, ... dans le plan, ainsi que les concepts du *sens d'un angle dièdre*, du *sens hélicoïdal*, ... dans l'espace, peuvent être établis en prenant comme base le postulat de M. PASCH relatif au plan, et le postulat analogue dans l'espace, sans recourir à d'autres intuitions primitives.

Ce sujet a été traité de façons différentes par G. VERONESE [101] d'une part, par F. ENRIQUES et U. AMALDI [102] d'autre part [103], *et enfin par F. SCHUR [104].*

---

(101) *Elementi* (28), (2e éd.), p. 59.

(102) *Elementi* (28), (1re éd.), p. 58.

(103) Voir aussi, à ce sujet, l'article de U. AMALDI dans F. ENRIQUES, *Questioni*, p. 56; et voir encore B. LEVI, « Periodico di mat. », (3), 1 (1903-4), p. 207-14.

(104) **Grundlagen* (81), p.79.*

11. - Congruence et mouvement.

A la *congruence* (ou égalité géométrique) et au *mouvement* (des corps rigides) qui permet de la contrôler (dans l'espace physique) se rattachent deux manières de voir distinctes.

Selon les uns le mouvement géométrique fournit la définition de la congruence, puisque par mouvement on peut distinguer les figures superposables de celles qui ne le sont pas.

Pour d'autres, le concept même de mouvement géométrique, représentant une variation de position *sans déformation*, contient implicitement l'idée de congruence.

Nous ne parlerons pas ici des tentatives faites depuis EUCLIDE pour écarter des principes de la géométrie l'idée du mouvement. Nous rappellerons seulement que, vers 1868, H. VON HELMHOLTZ (105) a soutenu que le concept du mouvement (abstraction faite du temps) est le fondement naturel du concept de congruence [cf. §§ 39 à 42)] d'où il apparaît à G. J. HOÜEL (106) que l'on fait une confusion d'idées en voulant bannir le mouvement des éléments de la géométrie.

CH. MÉRAY (107) partage aussi cette façon de voir. Il part du concept de la *translation* pour parvenir à celui du parallélisme et c'est le concept de la *rotation* qui le mène au concept de l'orthogonalité.

H. POINCARÉ (108), lui aussi, considère le concept du mouvement comme le fondament propre de la géométrie.

Dans le domaine mathématique les deux thèses opposées que nous venons de mentionner peuvent également se défendre comme légitimes.

Si même on admet que, dans la genèse psychologique, l'idée de congruence est née du mouvement physique des corps rigides, on ne peut nier que l'esprit *formé* du mathématicien comprend, en fait, les deux notions de congruence et de mouvement de telle façon qu'il puisse logiquement prendre chacune d'elles, indépendamment de l'autre, comme notion primitive caractérisée par un système convenable de postulats.

Peut-être aussi, à un certain point de vue, serait-il possible de soutenir que la congruence, entendue comme un rapport physique, a par elle-même une signification indépendamment du mouvement des corps.

---

(105) « Verh. des Naturhist. medic. Vereins Heidelberg », (1) 4 (1865-8), p. 197; (1) 5 (1869-70), p. 31-2; « Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux », (1) 5 (1867), p. 372-8; « Nachr. Ges. Gött. », 1868, p. 193-221; « Wiss. Abh. », 2, Leipzig 1883, p. 610-617; 618-39.

(106) *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*, Paris 1867; (2e éd.), Paris 1883.

(107) *Nouveaux éléments de géométrie*, Dijon 1874; (2e ed.), Dijon 1903, p. 21, 31.

(108) *La science et l'hypothèse*, Paris s. d. [1903], p. 60-1.

Outre les deux manières de voir déjà indiquées, il en est une troisième ([109]) qui cherche à rattacher l'idée de la congruence géométrique à l'identité logique. Mais les critiques ont déjà noté, et cela à juste titre, que ceux qui procèdent ainsi se fondent sur une fausse interprétation du principe logique d'identité.

Sans quitter l'ordre élémentaire, nous allons exposer brièvement les systèmes de postulats par lesquels M. PASCH, G. VERONESE et D. HILBERT ont formulé logiquement les propriétés fondamentales de la congruence géométrique. Nous examinerons plus loin (§§ 39 à 42) les développements qui, d'après les idées de H. VON HELMHOLTZ, permettent de caractériser l'ensemble des mouvements comme un *groupe de transformations*.

a) *Systèmes de postulats de Pasch* ([110]). – Après avoir donné les postulats [de la géométrie projective] qui concernent les propriétés graphiques ([111]) de la droite et du plan dans une région de l'espace (Raumstück) convenablement délimitée (§ 15), M. PASCH introduit comme notion logiquement primitive (quoique psychologiquement acquise par l'expérience du mouvement) la notion de la relation de congruence *entre deux figures géométriques* composées de points, relation que nous désignerons par

$$M \equiv M' .$$

La congruence est conçue comme une correspondance parfaite [I 1, 1], c'est-à-dire univoque et réciproque, élément par élément, ainsi qu'il suit:

Les parties homologues de figures congruentes sont congruentes. Deux figures congruentes à une troisième sont congruentes entre elles. Si deux figures M, M' sont congruentes [$M \equiv M'$] et qu'à M on adjoigne un point A, on peut toujours déterminer un point A' de façon que les figures composées $M+A$, $M'+A'$ soient congruentes [$M+A \equiv M'+A'$].

Les propriétés fondamentales de la congruence par rapport à la droite et au plan sont énoncées dans les sept postulats suivants dont les cinq premiers se rapportent à la droite et les deux derniers au plan. [Dans les énoncés de ces sept postulats les lettres A, B, C, ... représentent des *points*].

([109]) G. VERONESE, *Elementi* ([28]), (2e éd.), p. 22 [première partie, livre I].

([110]) *Neuere Geom.* ([24]), p. 103.

([111]) J. V. PONCELET a désigné successivement sous le nom de *propriétés descriptives* [*Traité des propriétés projectives des figures*, Paris 1823; (nouv. éd.) 1, Paris 1865, Introd. p XIII] et de *propriétés graphiques* [id. 1, p. 5] les propriétés des figures qui ne concernent que la position respective de ces figures.

1) Les figures AB et BA sont congruentes; en d'autres termes on a

$$AB \equiv BA .$$

2) Si l'on envisage la figure plane ABC, il existe sur la droite qui joint A et C, du côté de A où est C, un point B' tel que

$$AB' \equiv AB .$$

3) Si $ABC \equiv A'B'C'$ et si C est intérieur à AB, alors C' est intérieur à $A'B'$.

4) Si C_1 est intérieur à AB et que sur la droite qui joint A et B, on construise, du côté opposé à A, le point C_2 de façon qu'on ait $C_1C_2 \equiv AC_1$, puis toujours du côté opposé à A, le point C_3 tel que l'on ait $C_2C_3 \equiv C_1C_2$, et ainsi de suite, on parvient nécessairement après un nombre fini d'opérations à un point C_{n+1} tel que C_nC_{n+1} contienne le point B.

5) Si dans la figure ABC on a

$$AB \equiv BC ,$$

il en résultera

$$ABC \equiv CBA .$$

6) Si D, E, F sont trois points non en ligne droite et que l'on ait

$$AB = DE ,$$

il existe, dans tout plan mené par AB, deux points C tels que

$$ABC \equiv DEF .$$

7) Si deux figures non planes $ABCD$, $ABCE$ sont congruentes, le point E coïncide avec le point D.

Le postulat 4) contient le postulat d'Archimède dont nous parlerons au § 13 avec plus de détail.

b) *Systèmes de postulats de Veronese.* – Quoique le système de postulats de M. Pasch soit d'une logique parfaite, celui de G. Veronese accuse, si l'on veut, un progrès en ce sens du moins qu'au lieu de prendre comme notion primitive celle de la congruence de deux figures quelconques, on n'y prend comme notion primitive que celle de la *congruence de deux segments*.

Le système de G. VERONESE est caractérisé par cinq postulats dont voici l'énoncé ([112]):

1) La congruence de deux segments consiste en une correspondance biunivoque entre les points de ces deux segments, telle que à des points successifs de l'un correspondent des points successifs de l'autre et que chaque segment partiel de l'un soit congruent au segment partiel homologue de l'autre.

2) Deux segments congruents à un troisième sont congruents entre eux.

3) Étant donnés, sur une droite, un segment AB et un point C, il existe sur la droite un segment déterminé CD congruent à AB et de même sens.

4) Étant donné sur une droite un segment AB, il existe sur cette droite un segment déterminé AB_1 qui est congruent à AB et de sens contraire.

5) Si deux droites ont un point commun A, à chaque segment AB de l'une correspond un segment congruent AB' de l'autre (et un segment AB'' de sens contraire).

Ces postulats, joints aux postulats relatifs à la notion primitive de droite (ordre de ses points, leur coïncidence au sens du § 13, leur détermination au moyen de deux points), permettent de comparer deux segments quelconques en parlant de segments *plus grand* et *moins grands* de *somme* ou de *différence* de deux segments, ...

Ces postulats ne renferment d'ailleurs pas le postulat d'Archimède qu'il faut donc encore leur adjoindre quand on en a besoin.

La congruence de deux figures quelconques (composées de points) peut ensuite être *définie* comme une correspondance telle que les segments homologues soient congruents.

Pour l'étude des figures congruentes, G. VERONESE propose un postulat relatif aux *paires de droites incidentes*, c'est-à-dire aux *angles*:

6) Si (AB, AC) et $(A'B', A'C')$ sont deux paires de droites et que les trois paires de segments $(AB, A'B')$, $(AC, A'C')$, $(BC, B'C')$ sont congruentes, alors les deux paires de droites (AB, AC) $(A'B', A'C')$ sont aussi congruentes.

Il se sert en outre du postulat suivant:

7) Si un côté d'un triangle devient infiniment petit, la différence des deux autres côtés devient aussi infiniment petite.

([112]) En formulant ainsi cet énoncé, on a égard non seulement au texte des « Fondamenti » mais aussi, en partie du moins, à celui des « Elementi » de G. VERONESE. On reproduit toutefois ici le système général des postulats [non contenu dans les « Elementi »] qui fait abstraction du postulat des parallèles.

Si, dans ce système de postulats et dans le développement des conséquences que l'on en tire plus d'un détail paraît compliqué, cela tient essentiellement à ce que G. VERONESE s'est imposé d'une part de ne pas prendre comme *donnée* la propriété fondamentale du plan (cf. § 8) et d'autre part de faire dépendre le concept général de la congruence, en particulier de la congruence des angles, uniquement de celui de la congruence des segments.

L'importance du dernier postulat sur la continuité du plan (continuité qui, dans le méthode ordinaire, résulte de celle de la droite, mais qui ici figure comme un *complément* de celle de la droite) apparaît nettement quand on cherche avec J. MOLLERUP ([113]) à développer les constructions dans le plan sans faire intervenir le concept de la congruence des angles.

Dans la méthode de J. MOLLERUP il est nécessaire d'établir un postulat d'après lequel « on puisse construire sur une droite donnée comme base, et d'un des côtés de cette droite, un seul triangle ayant ses côtés respectivement égaux à ceux d'un triangle donné ». Or dans le système de G. VERONESE, ce théorème peut être prouvé en se basant sur le postulat, déjà mentionné, de la continuité du plain ([114]).

c) *Système de postulats de Hilbert* ([115]). – En distinguant l'un de l'autre les postulats de l'appartenance et de la disposition [§§ 9 et 10, α) et β)] et en prenant par suite comme donnée la propriété fondamentale [§ 9, α)] du plan, D. HILBERT a établi un nouveau système de postulats fort simples dans lequel le concept de la *congruence des segments* et celui de la *congruence des angles* apparaissent tous les deux comme primitifs.

Si l'on considère les segments et les angles comme définis indépendamment de leur sens (§ 10), on peut formuler les postulats de Hilbert de la façon suivante:

γ) Sous le nom de *congruence*, on suppose donnée une relation *symétrique* entre les segments et les angles telle que les sept conditions que voici soient satisfaites:

1) Tout segment et tout angle est à lui-même congruent.

2) Deux segments, ou deux angles, qui sont congruents à un même troisième, sont congruents entre eux ([116]).

3) Sur une droite on peut déterminer, d'un côté d'un point A'

([113]) « Math. Ann. », 58 (1904), p. 479.

([114]) Voir aussi A. GUARDUCCI, dans F. ENRIQUES, *Questioni* ([29]), p. 65.

([115]) *Grundlagen* ([27]), (2e éd.) p. 7.

([116]) Ces deux premières conditions [auxquelles correspondent des propriétés que les logiciens qui s'occupent de mathématiques appellent propriétés *reflectives* et *transitives*] comme aussi la condition: si $a=b$ on a aussi $b=a$ [à laquelle correspond la propriété *symétrique*] constituent, en général, les attributs formels de tout rapport pouvant être envisagé comme une égalité.

donné sur cette droite, *un* segment $A'B'$ qui soit congruent à un segment donné AB; on écrit

$$A'B' \equiv AB .$$

4) Si B est un point du segment AC, B' un point du segment $A'C'$ et si

$$AB \equiv A'B' , \qquad BC \equiv B'C' ,$$

on a aussi

$$AC \equiv A'C' .$$

5) Si, dans un plan, on se donne une demi-droite $O'a'$ partant d'un point O' et si l'on considère un des deux demi-plans limités par la droite (a'), on peut déterminer, dans ce demi-plan, une demi-droite $O'b'$ issue de O' et formant avec $O'a'$ un angle congruent à un angle donné $\sphericalangle\,(a, b)$; on écrit

$$\sphericalangle\,(a', b') \equiv \sphericalangle\,(a, b) .$$

6) Si Ob est une demi-droite issue du sommet O de l'angle $\sphericalangle\,(a, c)$ et si $O'b'$ est une demi-droite issue du sommet O' de l'angle $\sphericalangle\,(a', c')$, si enfin

$$\sphericalangle\,(a, b) \equiv \sphericalangle\,(a', b') \qquad \text{et} \qquad \sphericalangle\,(b, c) \equiv \sphericalangle\,(b', c') ,$$

on a aussi

$$\sphericalangle\,(a, c) \equiv \sphericalangle\,(a', c') .$$

7) Si A, B, C d'une part, A', B', C' d'autre part, sont des « triples de points » [groupes de *trois* points] non situés en ligne droite et si

$$AB \equiv A'B' , \qquad AC \equiv A'C' ,$$

$$\sphericalangle\,BAC \equiv \sphericalangle\,B'A'C' ,$$

on a aussi

$$\sphericalangle\,ABC \equiv \sphericalangle\,A'B'C' \qquad \text{et} \qquad \sphericalangle\,ACB \equiv \sphericalangle\,A'C'B'$$

et par conséquent aussi

$$BC \equiv B'C' .$$

Ces postulats ne contiennent pas le postulat d'Archimède qui doit donc leur être expressément adjoint quand on en a besoin. Ils forment la base des théorèmes ordinaires relatifs à la congruence des triangles, théorèmes sur lesquels repose toute la théorie de la congruence des figures quelconques.

12. - Sur la réduction des concepts fondamentaux considérés dans les numéros précédents.

L'école de logique mathématique de G. PEANO (117), faisant abstraction de tout ce qui ne regarde pas uniquement la logique formelle, se propose de *restreindre* le nombre des concepts dont il vient d'être question (§§ 7 à 11) et de poursuivre au point de vue formel, autant que faire se peut, l'examen des postulats en les *décomposant* dans leurs éléments.

Dans cet ordre d'idées, G. PEANO (118) a pris comme point de départ les postulats de caractère projectif de M. PASCH se rapportant aux concepts « point », « segment » ou « situé entre » et « surface plane ». En les traduisant en symboles empruntés à la logique mathématique déjà systématisée à cette époque, il commença par ramener le concept de la surface plane à celui du segment (cf. § 11). Il montra ensuite (119) que l'on peut remplacer le concept de la congruence par les postulats de caractère projectif que nous venons d'énumérer en y joignant le postulat du « mouvement ». Il se préoccupa aussi de prouver l'indépendance de ses postulats en en donnant diverses interprétations (cf. § 4).

M. PIERI (120) a défini le « segment » à l'aide des concepts « point » et « mouvement » et, à cet effet, a développé un système convenable de postulats.

M. PIERI (121) et A. PADOA (122) ont proposé de remplacer le concept du mouvement par le concept « paire de points équidistants » qui peut être ramené au cas de « paire ayant un point commun » et cela en suivant une idée qui apparaît déjà dans les premiers théorèmes d'EUCLIDE et qui a été développée par G. VERONESE (123).

G. PEANO (124) a montré que ces définitions ne sont pas sans rela-

(117) Voir G. PEANO, *Formulaire de mathématiques*, 4, Turin 1903, p. 253.
(118) *Principii* (25), p. 9 et suiv.
(119) *« Rivista mat. », 4 (1894), p. 75.*
(120) « Memorie Acc. Torino », (2) 49 (1899), p. 173.
(121) « Memorie Acc. Torino », (2) 49 (1899), p. 173 et suiv.
(122) Voir en particulier: *C. R. du deuxième congrès intern. math.*, Paris 1900, publ. par E. DUPORCQ, Paris 1902, p. 353.
(123) *G. VERONESE, *Fondamenti* (26), en partic. p. 274.*
(124) « Atti Acc. Torino », 38 (1902-3), p. 6.

tions avec celles de la droite et du plan données par G. W. LEIBNIZ (§ 8); il a mis aussi en évidence le lien qui les unit à ses postulats concernant la théorie des vecteurs.

Il convient de remarquer que jusqu'ici M. PIERI seul a formulé d'une façon *complète* les postulats dont il fait usage. Il faut toutefois ajouter que ces postulats se présentent sous une forme extrêmement compliquée et perdent tout caractère d'évidence relativement à l'intuition que nous en avons. Cela vient surtout de ce que les concepts primitifs de la disposition (c'est-à-dire les attributs de la droite en tant que ligne) ont été supprimés par M. PIERI. D'ailleurs M. PIERI n'attache aucune importance à l'*évidence* plus ou moins grande de ses prémisses ([125]).

De son côté, B. LEVI ([126]) a développé un système de postulats en ne s'appuyant que sur les concepts « point » et « paires équidistantes »; mais les postulats de B. LEVI ne définissent pas seulement la géométrie habituelle: ils définissent aussi un système géométrique plus général; à l'aide des concepts de disposition, ce système plus général conduit d'ailleurs à la géométrie métrique habituelle (aussi bien euclidienne que non-euclidienne).

A côté de ces travaux il y a lieu de mentionner un mémoire de B. KAGAN ([127]) où l'on trouve un système de définitions et de postulats propres à caractériser la géométrie euclidienne en prenant comme base les concepts fondamentaux « point », « mouvement » (transformation des points) et « distance » (considérée comme invariante au point de vue des mouvements). Les développements de B. KAGAN sont très clairs et ses postulats sont plutôt simples; mais cette simplicité est obtenue en supposant que la distance est immédiatement représentée par un nombre; cette supposition remplace en particulier les concepts de la disposition; il convient d'ailleurs d'observer qu'elle semble en contradiction avec le point de vue auquel se place B. KAGAN.

Dans une voie différente, mais en suivant cepedant encore les idées directrices de l'Ecole de logique mathématique de G. PEANO, O. VEBLEN ([128]) a établi un système de postulats très simples dans lesquels le « point » et les « triples de points se succédant en ligne droite » apparaissent comme des concepts primitifs; il a aussi cherché à définir la congruence en se basant sur ces postulats. Mais cette dernière définition se fonde sur le choix arbitraire d'une certaine polarité [pour ce qui concerne le fonde-

([125]) « Memorie Accad. Torino », (2) 49 (1899), p. 178 et suiv.

([126]) « Memorie Accad. Torino », (2) 54 (1904), p. 281-353.

([127]) « Jahresb. deutch. Math.-Ver. », 11 (1902), p. 403.

([128]) « Trans. Amer. math. Soc. », 5 (1904), p. 343; *voir aussi E. H. MOORE, id., 3 (1902), p. 147; F. SCHUR, *Grundlagen* ([81]), p. 8.*

ment projectif de la géométrie métrique, cf. § 28, 30] et elle semble, par suite, ne faire que déguiser l'introduction d'un nouveau concept primitif.

13. - Continuité et postulat d'Archimède.

L'analyse du concept de continuité a reçu de nos jours une grande extension par suite du développement des considération infinitésimales (cf. § 46 à 52). On rencontre cependant déjà des traces de cette analyse dans quelques théories développées par les géomètres grecs, en particulier dans la théorie des *proportions*, où ces géomètres sont parvenus à surmonter les difficultés qui se présentent quand le rapport des grandeurs en proportion est incommensurable ([129]), et dans l'emploi de la méthode d'*exhaustion* ([130]). Dans ces deux cas toutefois, il s'introduit uniquement ce qui, dans la notion de continuité, correspond au *postulat d'*ARCHIMÈDE ([131]): « si deux segments sont donnés, il y a toujours un multiple du plus petit qui surpasse le plus grand ».

Ce postulat est implicitement contenu dans la quatrième définition du cinquième livre des « Eléments » d' EUCLIDE ([132]):

Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν « il existe un rapport mutuel entre des grandeurs qui peuvent en se multipliant se surpasser mutuellement ».

A notre point de vue moderne, l'importance du *postulats* d'ARCHIMÈDE résulte surtout de ce qu'on peut en conclure immédiatament la possibilité de représenter chaque segment par un nombre soit rationnel, soit irrationnel. En effet, étant données deux grandeurs quelconques y satisfaisant, ce postulat permet de déterminer deux multiples successifs de la première de ces deux grandeurs, encadrant la seconde, en sorte que l'on peut établir des calculs sur ces grandeurs et définir le rapport (*λόγος*) de deux d'entre elles conformément à la théorie des proportions d'EUCLIDE. Si l'on convient de prendre une des deux grandeurs envisagées comme

---

([129]) EUCLIDE, *Elementa*, livre 5, déf. 5; *Opera*, éd. J. L. HEIBERG 2, Leipzig 1884, p. 2.

([130]) EUCLIDE, *Elementa*, livre 10, prop. 1; *Opera*, éd. J. L. HEIBERG, 3, Leipzig 1886, p. 4.

([131]) C'est O. STOLZ [« Ber. naturw.-mediz. Ver. Innsbruck », 12 (1881-2), p. 75; réimpr. « Math. Ann. », 22 (1883), p. 504] qui a désigné cette proposition sous le nom de *postulat d'Archimède.* Il ne faudrait pas croire toutefois que ce postulat soit effectivement dû à ARCHIMÈDE. Comme le dit d'ailleurs O. STOLZ lui-même, [« Ber. naturw.-mediz. Ver. Innsbruck », 12 (1881-82), p. 86; « Math. Ann. », 22 (1883), p. 512] bien avant ARCHIMÈDE, plusieurs géomètres avaient déjà fait usage de cette proposition fondamentale. Elle se trouve dans ARISTOTE [voir. J. L. HEIBERG, « Abh. Gesch. Math. », 18 (1904), p. 23] et il est même vraisemblable [cf .H. G. ZEUTHEN, « Verhandl. des 3. internat. Math.-Kongresses Heidelberg 1904 », publ. par A. KRAZER, Leipzig 1905, p. 541; « Bibl. math. », (3) 7 (1906-7), p. 344] qu'EUDOXE s'en est déjà servi.

([132]) *Elementa,* livre 5, déf. 4; *Opera*, éd. J. L. HEIBERG, 2, Leipzig 1884, p. 2.

unité de mesure, ce rapport est un *nombre*, le nombre qui *mesure* l'autre grandeur ([133]).

Il résulte aussi du postulat d'Archimède qu'il n'existe pas d'*infiniment petit actuel* par rapport aux longueurs que l'on considère.

Mais de ce postulat à lui seul on ne saurait conclure que réciproquement à tout nombre irrationnel correspond un segment mesuré par ce nombre ([134]).

Notre concept de continuité renferme à la fois le postulat d'Archimède et ce qu'il faut lui adjoindre pour qu'effectivement à tout nombre réel corresponde un segment mesuré par ce nombre. Il renferme ainsi un énoncé positif d'existence que les Grecs ne semblent pas avoir connu: quelques sophismes célèbres, comme celui d'Achille et de la tortue, paraissent le prouver.

Ce n'est pas que les Grecs n'aient utilisé la représentation du continu. Tout ce qui, dans cette représentation, leur était nécessaire se retrouve implicitement dans les « Eléments » d'EUCLIDE: ainsi les faits essentiels touchant l'intersection des cercles et des droites y sont admis et les constructions basées sur ces faits sont pour EUCLIDE l'unique façon de prouver l'*existence des figures* ([135]).

A notre point de vue moderne, le postulat de la continuité des droites (et, par suite, celui de la continuité de l'espace) apparaît quand on cherche à représenter géométriquement tous les nombres réels et c'est sur ce fondement que repose pour nous la géométrie analytique.

Dans ses cours professés à l'Université de Berlin K. WEIERSTRASS ([136]) a déjà formulé ce postulat; G. CANTOR ([137]) et R. DEDEKIND ([138]) l'ont énoncé différemment.

Postulat de continuité de CANTOR. Ce postulat s'exprime géométriquement de la manière suivant:

S'il y a sur un segment rectiligne OM deux suites illimitées de segments $OA_1, OA_2, OA_3, \ldots$ d'une part, $OA'_1, OA'_2, OA'_3, \ldots$ d'autre part, tels que les segments de la première suite croissent indéfiniment et que les segments de la seconde suite décroissent indéfiniment, et cela de façon

([133]) Cf. O. HÖLDER, « Ber. Ges. Leipzig », 53 (1901), math., p. 1.

([134]) *F. SCHUR [« *Grundlagen* ([81]), p. 183] se place à un point de vue différent. Il admet que l'existence *géométrique* d'un segment résulte de ce que d'une part on le définit géométriquement sans ambiguïté et que d'autre part on suppose qu'il satisfait précisément aux mêmes postulats que ceux qui conviennent au segment analytique. A chaque segment géométrique correspond alors par définition un nombre réel et l'on peut déduire du postulat d'ARCHIMÈDE qu'à chaque nombre irrationnel correspond un segment existant géométriquement (Note de F. SCHUR).*

([135]) Cf. H. G. ZEUTHEN, « Math. Ann. », 47 (1896), p. 222.

([136]) *Ces cours n'ont pas été publiés.*

([137]) « Math. Ann. », 5 (1872), p. 128.

([138]) *Stetigkeit und irrationale Zaheln*, Brunswick 1872; (3e éd.) Brunswick 1905, p. 8.

que les segments A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3', ... décroissent constamment pour devenir plus petit qu'un segment arbitrairement fixé à l'avance (quelque petit qu'on fixe ce segment), à partir d'un indice n (qui dépend naturellement du choix de ce segment), alors il existe sur le segment OM *un point* X tel que OX soit plus grand que tous les segments de la première suite et plus petit que tous les segments de la seconde suite (139).

En adjoignant ce postulat au postulat d'Archimède, on peut renverser la correspondance entre segments et nombres qui résulte de la mesure des segments et l'on parvient ainsi au théorème fondamental d'après lequel *tout nombre réel* (irrationnel aussi bien que rationnel) *correspond à un segment dont il est la mesure.*

On peut donc dire que l'*ensemble des deux postulats d'*ARCHIMÈDE *et de* CANTOR *fournit la représentation cartésienne des points de la droite.*

Le rôle joué ici par le postulat de Cantor peut aussi bien l'être par un autre postulat auquel on a donné le nom de *postulat d'intégralité* (Vollständigkeit) et qu'on énonce ainsi (140):

L'espace est une variété d'éléments (points) qui ne saurait être agrandie par l'adjonction d'autres éléments de telle façon que le système des postulats formant la base de la géométrie soit encore satisfait dans la variété agrandie.

En traduisant géométriquement les expressions du postulat de la continuité formulées par K. WEIERSTRASS et par R. DEDEKIND on parvient à deux nouveaux énoncés de ce postulat qui se présentent sous une forme descriptive.

Postulat de continuité de Weierstrass. – Si un segment OM contient une suite illimitée de points successifs A_1, A_2, A_3, ... , il *existe* un point (*limite*) B tel que, dans le voisinage (141) de B, quelque petit que soit fixé ce voisinage, se trouve un au moins des points de la suite A_1, A_2, A_3, ...

Postulat de continuité de Dedekind. – Si un segment OM est divisé en deux classes de points de telle sorte que si O appartient à la première classe et M à la seconde, chaque point de OM appartienne à *une* des deux classes et qu'un point quelconque de la première classe se trouve à l'intérieur du segment formé par O avec chacun des points de la seconde classe, alors il *existe* un point X tel que tous les points situés à l'intérieur du segment OX appartiennent à la première classe

---

(139) C'est à propos de ce postulat de la continuité de G. CANTOR que F. KLEIN [« Bull. Soc. phys. mat. Kazan », (2) 8 (1898), p. 18; « Math. Ann. », 50 (1898), p. 594] remarque qu'au point de vue physique on doit déjà faire intervenir comme postulat l'existence de ceux des points du segment *OM* ayant une abscisse rationnelle dont le dénominateur est suffisamment grand.

(140) C'est ce que fait D. HILBERT, *Grundlagen* (27), (3e éd.), p. 22. Cf. note 134.

(141) *Au lieu de *voisinage* d'un point, on dit aussi souvent *environs* de ce point. Il vaudrait peut-être mieux dire *entourage* du point, mais cette locution est peu usitée.*

tandis que tous les points situés à l'intérieur du segment XM appartiennent à la seconde classe. On démontre qu'il n'existe qu'*un seul* point X jouissant de cette propriété. Il peut d'ailleurs arriver que X coincide soit avec O soit avec M.

Les deux postulats de K. WEIERSTRASS et de R. DEDEKIND sont entièrement équivalents.

Si l'on adjoint l'un de ces deux postulats de continuité aux postulats de congruence des segments sur la droite (§ 11, γ) on peut:

a) prouver (142) le postulat d'Archimède (143);

b) représenter les points de la droite sur le continuum numérique au moyen d'une correspondance biunivoque [dite aussi parfaite I 1, § 1].

On peut donc dire que *si les postulats sur la congruence des segments sont donnés* [§ 11, γ) 1) à 4)], *le postulat de continuité de Weierstrass* (*ou celui de Dedekind*) *est équivalent à l'ensemble des postulats de continuité de Cantor et d'Archimède.*

La question se pose maintenant de savoir si le postulat d'Archimède est aussi une conséquence des postulats sur la congruence des segments et du postulat de la continuité de Cantor.

G. VERONESE (144) a montré qu'à cette question il faut répondre négativement et a ainsi prouvé que le postulat de la continuité de Cantor est compatible avec la supposition d'un segment *actuel, infiniment petit* (par rapport à une unité donnée) [cf. § 47].

Cela résulte, en somme, du raisonnement que voici (145):

Supposons, dans un même plan, un système a, a', a'', ... de droites horizontales en nombre illimité, à distances égales les unes des autres, et considérons l'ensemble de tous les points de ces droites comme un système de points ordonnés de façon que chaque point B situé *à droite* d'un point A sur une même horizontale, et que chaque point C ou D situé *plus haut* que A, soient regardés comme «*suivant* A»; au contraire A *précède* B, C et D. Dans ce système de points que l'on peut supposer ordonné dans

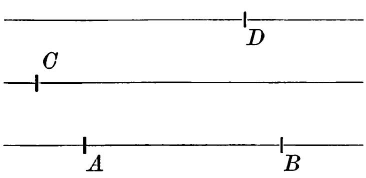


Fig. 1.

(142) Cf. O. STOLZ [« Ber. naturw.-med. Vér. Innsbruck ». 12 (1881-2), p. 75; « Math. Ann. », 22 (1883), p. 504].

(143) O. HÖLDER [« Ber. Ges. Lpz », 53 (1901), math. p. 1] a énuméré d'une façon précise les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

(144) « Atti Accad. Lincei, Memorie mat. », (4) 6 (1890), p. 603; *Fondamenti* (26), p. 105; trad. A. SCHEPP, *Grundzüge* (26) 1, (Einleitung: § 105).

(145) G. VERONESE, *Fondamenti* (26), p. 166; trad. A. SCHEPP, *Grundzüge* (26), Einleitung, p. 184 en note.

les deux sens à partir de chaque point A, la définition du segment est fixée (aussi bien celle du segment fini AB que celle du segment indéfini composé d'une demidroite, ou celle du segment tel que AC ou AD chevauchant sur deux ou plusieurs demidroites) et l'on peut aussi parler de *segments congruents* relativement à une translation quelconque du plan qui superposerait les droites envisagées.

Ainsi se trouvent réalisés à la fois tous les postulats concernant la congruence des segments et ceux qui regardent la disposition. Il en est de même pour le postulat de la continuité de Cantor (mais non pour le postulat de la continuité de Weierstrass ou de Dedekind).

Au contraire, le postulat d'Archimède ne convient pas au système envisagé, car un multiple quelconque du segment (fini) AB est toujours plus petit que le segment (indéfini) AC composé de deux demi-droites.

On en conclut que *le postulat d'Archimède est indépendant du postulat de la continuité de Cantor.*

On peut aussi formuler la différence entre le concept de continuité de Cantor-Dedekind et celui de G. Veronese de la façon suivante (146):

Si l'ensemble des points d'un segment OM est divisé en deux classes M' et M'' conformément au postulat de Dedekind, il peut se présenter quatre cas:

1) M' a un dernier point A' et M'' un premier A'' (on dit alors qu'il se produit un *saut* dans le segment);

2) M' a un dernier point A', mais M'' n'a pas de premier point;

3) M' n'a pas de dernier point, mais M'' a un premier point A'';

4) M' n'a pas de dernier point et M'' n'a pas de premier point (on dit dans ce cas qu'il y a un *vide* dans le segment).

Le concept de continuité de R. Dedekind exclut les vides et les sauts; celui de G. Veronese exclut toujours les sauts, mais n'exclut les vides que dans des condition particulières. Dans le continuum de G. Veronese des vides apparaissent par exemple toujours quand les segments A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3', ... dont on a parlé dans l'énoncé du postulat de continuité de Cantor *ne deviennent pas* inférieurs à tout segment du système envisagé, ce qui est possible.

On peut encore se demander si le postulat d'Archimède peut être démontré à l'aide des postulats de l'appartenance, de la disposition et de la congruence [§§ 9, 10, 11, α), β), γ)].

Il faut aussi répondre négativement à cette question (cf. § 47). Nous nous attacherons néanmoins, dans ce qui suit, au postulat de la continuité de Dedekind-Weierstrass, sauf dans certaines recherches spéciales où nous dirons *explicitement* que ce n'est pas ce postulat de continuité

(146) A. Schoenflies, « Jahresb. deutsch. Math.-Ver. », 15 (1906), p. 26.

que nous avons en vue. Toutefois nous ferons abstraction de la manière dont R. DEDEKIND ou K. WEIERSTRASS ont formulé leur postulat et nous le rapporterons plutôt à des concepts purement descriptifs, en particulier aux concepts qui sont déterminés par le groupe de postulats γ) énoncés au § 11.

14. - Le postulat des parallèles.

Le cinquième postulat des « Eléments » d'EUCLIDE ([147]) affirme que « deux droites d'un plan qui forment avec une troisième droite de ce plan et du même côté de celle-ci, des angles dont la somme est inférieure à deux droits, se rencontrent si on les prolonge suffisamment ».

« *Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες* ».

Ce postulat se trouve à la base de la théorie des parallèles. Il revient à affirmer que par un point extérieur à une droite donnée on peut mener une, et une seule parallèle à cette droite.

Les grecs déjà ([148]) ont cherché à démontrer ce postulat en le rattachant aux postulats déjà admis et aux 28 premières propositions des « Eléments » d'EUCLIDE qui n'ont rien à voir avec le postulat des parallèles. Il suffit de rappeler les essais tentés dans cet ordre d'idées, au second siècle de notre ère, par CLAUDE PTOLÉMÉE ([149]) et, au cinquième par PROCLUS ([150]). A ces essais ([151]) se rattachent ceux de NASSIR ED DIN ([152]) au treizième siècle de notre ère. Il est d'ailleurs intéressant de remarquer que ce géomètre arabe, dans ses développements, suppose

---

([147]) *Elementa*, livre 1, postulat 5; *Opera*, éd. J. L. HEIBERG, 1, Leipzig 1883, p. 8.

([148]) L'histoire de ces recherches depuis l'antiquité jusqu'à N. I. LOBAČEVSKIJ et J. BOLYAI a été exposée par P. STÄCKEL et F. ENGEL, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, Leipzig 1895. Voir aussi R. BONOLA, dans F. ENRIQUES, *Questioni* ([29]), p. 143-222.

([149]) *L'ouvrage où CLAUDE PTOLÉMÉE traite de cette question est perdu, mais PROCLUS nous a conservé son essai [PROCLI Diadochi ([2]), p. 363-3].*

([150]) *PROCLI Diadochi ([2]), p. 371-3.*

([151]) *Un géomètre grec, probablement un peu postérieur à PROCLUS et dont le nom ne nous est connu que sous la forme arabe AGANIS a essayé de démontrer le postulat des parallèles d'une manière que rappelle l'essai de J. WALLIS. Quel que soit le triangle que l'on envisage, AGANIS suppose que l'on puisse construire un triangle semblable plus grand ce qui lui permet de déterminer le point où deux droites non parallèles se rencontrent [ANARITII *Euclidis commentarii* ([74]), p. 70-3].*

([152]) *Une traduction latine de cet essai de NASSIR ED DIN a été publiée par J. WALLIS [*Opera*, 2, Oxford 1693, p. 669-73]. L'original de l'essai de NASSIR ED DIN se trouve dans la traduction arabe des *Eléments* d'EUCLIDE par NASSIR ED DIN publiée à Rome en 1594 on ne sait par qui (Notes 149 à 152 de G. ENESTRÖM).*

implicitement connu le postulat des parallèles puisqu'il part d'un triangle dont la somme des angles est égal à deux droits.

J. WALLIS ([153]) a introduit dans la théorie des parallèles un point de vue nouveau en remarquant que le postulat d'Euclide peut être remplacé par un postulat affirmant l'existence d'un triangle *semblable* à un triangle donné et d'une grandeur arbitraire ([154]). En fait, il suffit, pour éliminer les hypothèses contraires au postulat d'Euclide, d'admettre l'existence de deux triangles semblables et inégaux.

C'est précisément ce dernier postulat que L. N. M. CARNOT ([155]) et P. S. LAPLACE ([156]) ont proposé de substituer au postulat d'EUCLIDE.

V. GIORDANO ([157]), qui considérait les droites parallèles comme des droites équidistantes, ce qui concordait avec la définition que plusieurs géomètres en avaient donné avant lui, a prouvé que si trois points d'une droite (d) sont à égale distance δ d'une autre droite (d'), les deux droites (d) et (d') sont équidistantes, c'est-à-dire qu'alors *tout* point de la droite (d) est à la même distance δ de la droite (d').

G. SACCHERI ([158]), dans un ouvrage sur EUCLIDE, s'est livré à une critique approfondie du postulat des parallèles ([159]), en se plaçant au point de vue suivant qui se rattache d'une part aux idées de NASSIR ED DIN et de l'autre à celles de V. GIORDANO:

Si l'on prend dans un plan un segment AB et qu'on élève à ses deux extrémités A et B les perpendiculaires au segment d'un même côté de celui-ci, puis que l'on porte sur ces deux perpendiculaires deux segments égaux AC, BD, on obtient un quadrilatère $ABCD$ dont deux des angles sont droits et dont on peut démontrer que les deux autres angles sont nécessairement égaux entre eux; on peut d'ailleurs faire sur ces deux angles trois hypothèses distinctes: on peut les supposer *aigus droits* ou *obtus*. G. SACCHERI a démontré que si l'une de ces trois hypo-

([153]) *De postulato quinto et definitione quinta lib. 6 Euclidis disceptatio geometrica*; *Opera*, 2, Oxford 1693, p. 665-78.

([154]) *Effectivement J. WALLIS [*Opera* ([153]), 2, p. 667] se sert du postulat indiqué dans le texte, mais le postulat *posé* par lui [*Opera* ([153]), 2, p. 676] est plus général; il admet qu'à chaque *figure* correspond une *figure* semblable (Note de G. ENESTRÖM).*

([155]) *Géométrie de position*, Paris 1803, p. 481, en note.

([156]) *Esposition du système du monde*, note ajoutée à la 5ᵉ édition, Paris 1824; *Œuvres*, 6, Paris 1884, p. 472.

([157]) *Euclide restituto overo gli antichi elementi geometrici ristaurati e facilitati*, Rome 1680; (2ᵉ éd.) [d'après P. RICCARDI, elle ne diffère de la précédente que par le feuillet de titre], Rome 1686. Cf. R. BONOLA, « Bolletino bibl. storia mat. », 8 (1905), p. 33-6.

([158]) *Euclides ab omni naevo vindicatus*: *sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia*, Milan 1733; *réimpression partielle publiée sous le titre: *L'Euclide emendato* dal G. SACCHERI; traduzione e note di G. BOCCARDINI, Milan 1904 (Note de G. LORIA).*

([159]) C'est E. BELTRAMI [*Un precursore italiano di Legendre et di Lobatschewsky*, « Atti R. Accad. Lincei, Rendic. », (4) 5 II (1889), p. 441-8] qui a mis en pleine lumière l'importance des travaux de ce géomètre italien.

thèses est vérifiée une seule fois, elle le sera toujours, de quelque façon que l'on fasse varier les données.

La seconde des trois hypothèses équivaut au postulat d'Euclide tandis que la première conduit à la géométrie de N. I. LOBAČEVSKIJ et la troisième à celle de B. RIEMANN. G. SACCHERI prétend démontrer l'absurdité de la première et de la troisième hypothèse; il exclut le cas de l'angle obtus en se basant sur l'infinité de la droite et il croit trouver un élément « discordant » dans le caractère asymptotique des parallèles où aboutit l'hypothèse de l'angle aigu ([160a]).

J. H. LAMBERT ([160]) s'est placé à un point de vue qui ne diffère pas beaucoup de celui de G. SACCHERI ([161]). *Lui aussi part d'un quadrilatère, mais il le suppose construit avec *trois* angles droits; il considère trois hypothèses suivant que le quatrième angle est *aigu*, *droit* ou *obtus*. Il montre que si pour *un seul* quadrilatère on se trouve dans le cas de l'angle *droit*, il en est de même pour *tous* les autres quadrilatères envisagés, et que ce cas est celui qui convient au postulat d'Euclide.*

J. H. LAMBERT observe, en outre, que dans les cas où le quatrième angle est soit aigu, soit obtus, cas qui conviennent aux géométries non-euclidiennes, il doit y avoir une espèce d'*unité de mesure naturelle* ou *absolue*, c'est-à-dire une unité définie par ses relations avec le plan (dans la géométrie euclidienne il n'y a rien de semblable; une longueur quelconque ne saurait y être déterminée dans le plan tant qu'on ne s'y donne pas une unité arbitrairement fixée). J. H. LAMBERT montre que le rapport de l'aire d'un triangle à l'unité des aires est égal au rapport à l'unité d'angle de la différence entre la somme des angles du triangle et deux angles droits. Enfin il remarque, et ici il devance B. RIEMANN, que l'hypothèse du quatrième angle obtus se vérifie dans la géométrie sphérique et que l'hypothèse du quatrième angle aigu se vérifierait sur une sphère de rayon purement imaginaire.

Aux critiques formulées par G. SACCHERI et J. H. LAMBERT relativement à la théorie euclidienne des parallèles se rattachent les vues sur le postulat d'Euclide exposées par plusieurs des plus grands géomètres français de la fin du 18ième siècle, *entre autres par J. D'ALEMBERT ([162]),

([160]) *Theorie der Parallellinien* [« Leipziger Magazin für die reine und angew. Math. », 1 (1786), p. 137-64, 325-58]. Ce mémoire est daté de 1766. *Voir aussi P. STÄCKEL, « Bibl. math. », (2) 13 (1899), p. 107-10.*

([160a]) *Cf. O. LANGEKAMP, *Diss. Münster* (en Westphalie), 1907 (Note de G. LORIA).*

([161]) *Cependant J. H. LAMBERT, contrairement à ce qu'avait fait G. SACCHERI, n'utilise en général aucun postulat de continuité (Note de F. SCHUR).*

([162]) **Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie*, 5, Amsterdam 1759; nouv. éd. Amsterdam 1770, p. 202; *Œuvres*, 1, Paris 1821, p. 278; *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné*, 11, Neufchastel 1765, p. 905; *Encyclopédie méthodique, math.*, 2, Paris et Liège 1785, p. 520 (articles parallèles).*

P. S. LAPLACE (163), L. N. M. CARNOT (164). J. B. J. FOURIER (165) et peut-être J. L. LAGRANGE (166). Les résultats obtenus par ces géomètres (167) comprennent d'ailleurs la partie la plus essentielle du théorème formulé un peu plus tard par A. M. LEGENDRE (168), tout à fait indépendamment d'ailleurs des travaux de ses devanciers*, à savoir que *le postulat de Euclide équivaut entièrement à l'hypothèse que la somme des angles d'un seul triangle, arbitrairement choisi, est égale à deux angles droits*, hypothèse de laquelle découle alors la même propriété pour tous les triangles possibiles, au moins quand on admet comme donnés tous les postulats α), β), γ) des §§ 9 à 11, ainsi que le postulat d'Archimède.

C. F. GAUSS (169) semble avoir été le premier à concevoir l'impossibilité de démontrer le postulat des parallèles et, par suite, la possibilité d'une géométrie plus générale que celle d'EUCLIDE dans laquelle on ferait abstraction de ce postulat. Il a d'ailleurs établi les fondements d'une telle géométrie.

Avec C. F. GAUSS il faut aussi nommer F. K. SCHWEIKART (170), F. A. TAURINUS (171) et* F. L. WACHTER (172)* qui, entre 1816 et 1826, se sont occupés de ces mêmes questions. Il est, en effet, bien remarquable que F. K. SCHWEIKART dans des lettres et communications verbales ait, déjà à cette époque, nettement exprimé la conviction qu'un système de géométrie est possible où l'on ne tiendrait aucunement compte du postulat des parallèles. De son côté F. A. TAURINUS, en développant une idée dont le germe se trouve dans les publications de J. H. LAMBERT, a obtenu les formules de la trigonométrie non-euclidienne et a observé que le système de ces formules n'a rien de contradictoire;

(163) *P. S. LAPLACE (156), *Œuvres*, 6, Paris 1884, p. 472.*

(164) **Géom. de position* (155), p. 481.*

(165) **Séances des Écoles normales*, 1, Paris an III, p. 28-33; réimpr. « Mathesis », (1) 9 (1889), p. 139-41. Cf. L. COUTURAT, *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, Paris 1903, p. 554-5.*

(166) *Le mémoire de DAVIET DE FONCENEX [« Misc. Taurinensia (Mélanges de philos. et de math.) », 2 (1760-1), éd. 1762, p. 299-322] a peut-être rédigé d'après des communications verbales de J. L. LAGRANGE. Sur les vues de J. L. LAGRANGE voir la communication de F. LEFORT dans G. J. HOÜEL, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*, Paris 1867, p. 76 en note.*

(167) *Voir R. BONOLA, *Nicht-euklidische Geometrie*, Leipzig 1908, p. 54-8.*

(168) *Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles d'un triangle* [« Mém. Acad. sc. Institut France », (2) 12 (1833), p. 367-410].

(169) En tous cas avant 1816. Cf. *Werke*, 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 175, 182.

(170) Cf. P. STÄCKEL et F. ENGEL, *Parallellinien* (148), p. 243; C. F. GAUSS, *Werke*, 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 178.

(171) *Theorie der Parallellinien*, Cologne 1825; *Geometriae prima elementa*, Cologne 1826. Cf. P. STÄCKEL et F. ENGEL, *Parallellinien* (148), p. 246; P. STÄCKEL, « Abh. Gesch. Math. », 9 (1899), p. 399-427; C. F. GAUSS, *Werke*, 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 186.

(172) *Cf. P. STÄCKEL, « Math. Ann. », 54 (1901), p. 49-85; C. F. GAUSS, *Werke*, 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 175-6.*

une fausse interprétation des constantes (de la courbure) contenues dans ces formules l'avait toutefois amené à croire que la géométrie euclidienne est seule valable dans l'espace physique.

N. I. LOBAČEVSKIJ [173], dans des mémoires publiés à partir de 1829, a, le premier, énoncé la possibilité d'une géométrie où l'on ferait abstraction du postulat d'Euclide, et en a posé les fondements. Il fut d'ailleurs suivi de près, dans cette voie, par J. BOLYAI [174]. Les résultats concordants obtenus par ces deux géomètres [175] furent ensuite confirmés par C. F. GAUSS [176] dans sa correspondance avec F. W. BESSEL, W. BOLYAI, H. W. M. OLBERS et H. C. SCHUMACHER. Ils constituent un corps de doctrine que l'on a désigné tour à tour sous le nom de « géométrie imaginaire », « géométrie absolue », « géométrie non-euclidienne » et « pangéométrie » ou « géométrie générale ».

Le nom de « géométrie imaginaire » fait allusion au jugement porté par la plupart des géomètres sur l'absurdité physique des nouvelles théories. Le nom de « géométrie absolue » provient de la croyance à la validité absolue des postulats géométriques autres que celui des parallèles. Le nom de « géométrie non-euclidienne », dont C. F. GAUSS [177] faisait usage, peut être pris à bon droit au sens propre quand on considère le système géométrique correspondant comme résultant de la négation du postulat d'Euclide; on s'en est servi quelquefois d'une façon impropre pour désigner la géométrie qui comprend à la fois le cas euclidien et le cas non-euclidien. Nous ne ferons usage de ce nom de « géométrie non-euclidienne » qu'au sens propre et nous adopterons pour désigner le système géométrique comprenant à la fois la géométrie euclidienne et la géométrie non-euclidienne le nom de *géométrie générale.*

Les résultats de N. I. LOBAČEVSKIJ et de J. BOLYAI n'épuisent d'ailleurs pas tout le champ de la géométrie non-euclidienne. Ils supposent toujours, en effet, que la droite a une *longueur infinie.* Or on peut supposer, au contraire, que la droite a une *longueur finie* et, dans cette

---

(173) Cf. F. ENGEL, *N. I. Lobatschefskij, Zwei geometrische Abhandlungen*, 1, *Über die Anfangsgründe der Geometrie*, Leipzig 1898, p. 1 [1830]; 2, *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, Leipzig 1899, p. 67 [1840].

(174) *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens*, Leipzig, 1903, [déjà publié une première fois en appendice (28 p.) à W. BOLYAI, *Tentamen* (68), 1, Maros Vásárhelyini 1832]. J. BOLYAI possédait ces résultat dès 1823.

(175) Cf. P. STÄCKEL et F. ENGEL, « Math. Ann. », 49 (1897), p. 149-206; « Bull. sc. math. », (2) 21 (1897), p. 206-28; P. STÄCKEL, « Math.-Naturw. Ber. Ungarn », 16 (1899), p. 263-97; 17 (1901), p. 1-19; 18 (1902), p. 280-307; 19 (1903), p. 1-12.

(176) * *Werke*, 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 165-6, 200-1, 210-9.*

(177) * *Werke*, 8, Göttingue (Leipzig)1900, p. 220.*

hypothèse, on arrive à un système de géométrie non-euclidienne bien différent des précédents, comme l'a montré B. RIEMANN [178] (cf. § 26).

15. - Développement de la théorie des parallèles.

Nous allons chercher à préciser le fondement sur lequel repose la théorie générale des parallèles.

Convenons tout d'abord d'admettre les propositions fondamentales relatives à la droite et au plan ainsi qu'à la congruence et au mouvement, sur lesquelles s'appuient les 28 premières propositions d'EUCLIDE. Considérons une droite a et un point extérieur A. Construisons le faisceau de droites projetant, depuis A, les points de a. Les *droites limites* de ce faisceau sont désignées sous le nom de *parallèles à a menées par A*. Dans l'hypothèse *euclidienne* il y a une parallèle à a menée par A, et une seule. Mais deux autres hypothèses sont compatibles avec les postulats déjà admis: dans l'une de ces hypothèses, qui est celle de J. BOLYAI et N. I. LOBAČEVSKIJ, on peut mener deux parallèles à a par A; dans l'autre, qui est celle de B. RIEMANN, on ne peut mener aucune parallèle à a par A.

Si, relativement à une droite a et à un point A, on admet une de ces trois hypothèses, cette même hypothèse se trouve vérifiée par rapport à toute autre droite b et à un point B quelconque extérieur à b. De toute façon, si b est une parallèle à a menée par un point A, b est aussi une parallèle à a pour un autre point A' fixé arbitrairement sur b; de plus a est parallèle à b en sorte que le parallélisme est une relation *réciproque* entre deux droites (dites parallèles) qui ne dépend que de ces deux droites.

Les trois systèmes de géométrie résultant, le premier de l'hypothèse d'EUCLIDE, le second de celle de J. BOLYAI et N. I. LOBAČEVSKIJ, le troisième de celle de B. RIEMANN, ont été respectivement désignés par F. KLEIN [179] sous le nom de « géométrie parabolique », « géométrie hyperbolique » et « géométrie elliptique » [cf. § 30]. On peut les caractériser par la valeur de la somme des angles d'un triangle rectiligne quelconque: dans la géométrie parabolique cette somme est égale à deux angles droits, dans la géométrie hyperbolique elle est inférieure à deux angles droits, et dans la géométrie elliptique elle est supérieure à deux angles droits.

([178]) *B. RIEMANN, *Habilitationsschrift* ([12]); « Abh. Ges. Gött. », 13 (1866-7), éd. 1868, math. p. 133 et suiv.; *Werk*, (2e ed.) publ. par H. WEBER, Leipzig 1892, p. 272 et suiv. ;trad. L. LAUGEL, Paris 1898, p. 280 et suiv.*

([179]) *F. KLEIN, « Math. Ann. », 4 (1871), p. 577, 606, 607, 611.*

Dans les géométries non-euclidiennes, le théorème de Pythagore est remplacé par une relation plus générale qui sert de base aux formules de la trigonométrie non-euclidienne (elliptique et hyperbolique). La trigonométrie euclidienne, ou parabolique, rentre dans cette trigonométrie comme cas limite ([180]). Pour des triangles infiniment petits les formules de la trigonométrie non-euclidienne sont les même ([181]) que celles de la trigonométrie euclidienne ([182]).

16. - Nouveaux développements sur la théorie des parallèles.

Deux questions concernant la théorie des parallèles et intéressant les fondements de la géométrie se posent encore et demandent à être examinées avec soin:

a) Comment arrive-t-on à établir la possibilité logique de la géométrie non-euclidienne et, par suite, l'indépendance du postulat d'Euclide à l'égard des postulats qui le précèdent.

b) Sous quelles formes simples, équivalant au postulat d'Euclide, peut-on énoncer l'hypothèse qui se trouve à la base de la théorie ordinaire des parallèles.

a) En ce qui concerne la première de ces deux questions, N. I. Lobačevskij ([183]) a déjà observé que les formules de la trigonométrie hyperbolique peuvent être réalisées par un système analytique abstrait et il en a tiré la première démostration de la possibilité logique de la géométrie non-euclidienne.

([180]) Les formules de la trigonométrie hyperbolique ont été données par J. Bolyai et N. I. Lobačevskij. Celles du cas elliptique sont les formules de la trigonométrie sphérique dues pour la plupart à J. H. Lambert. Pour passer de ces formules de trigonométrie sphérique (dans lesquelles figure le rayon R de la sphère sur laquelle sont tracés les triangles sphériques) aux formules de la trigonométrie hyperbolique, il suffit d'ailleurs de remplacer dans les formules de trigonométrie sphérique le nombre réel R par le nombre purement imaginaire iR.

([181]) Cette remarque a servi de base à un procédé d'intégration par lequel on obtient les formules ordinaires de la trigonométrie en partant de celles qui concernent les triangles infiniment petits. *Ce procédé est dû à L. Euler. [« Hist. Acad. sc. Berlin », 9 (1753), éd. 1755, p. 223-57].*

Voir à ce sujet C. Flye S.te Marie, *Études analytiques sur la théorie des parallèles*, Paris 1871, p. 70 et suiv.; *W. Killing, *Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung* Leipzig 1885;* Ch. J, de la Vallée Poussin, « Mathesis », (2) 5 (1895), supplément 5, p. 7-15; « Ann. Soc. scient. Bruxelles », 19² (1894-5), p. 17-26 et déjà C. F. Gauss, *Werke*, 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 255.

([182]) Pour ce qui concerne la possibilité de fonder la géométrie hyperbolique sans faire usage de la continuité, cf. D. Hilbert, *Grundlagen* ([27]), (3e éd.), p. 156-76. *Pour ce qui, dans cet ordre d'idées, concerne la géométrie générale, voir F. Schur, *Grundlagen* ([81]), p. 100-2.*

([183]) *N. I. Lobačevskij ([173]) 1, p. 65; 2, p. 60.*

B. RIEMANN [184] et E. BELTRAMI [185] eurent ensuite l'idée de donner une interprétation effective de la géométrie non-euclidienne plane en utilisant la géométrie sur les surfaces à courbure constante (cf. § 24). Il en résulte une nouvelle preuve de la possibilité logique des systèmes non-euclidiens dans le plan. Mais une telle surface à courbure constante ne représente jamais qu'*une partie du plan.*

D'après F. KLEIN [186] on a une représentation de la géométrie non-euclidienne qui répond mieux à une intuition d'ensemble, dans la détermination métrique que A. CAYLEY [187] a appliquée à chaque conique. Tout le plan non-euclidien est ainsi mis en pleine lumière et non plus seulement une partie du plan. Nous reviendrons sur cette question dans le chapitre consacré à la géométrie projective.

Par cette interprétation projective on a aussi envisagé un point qui mérite de fixer l'attention du lecteur.

Souvent, en suivant l'exemple de J. H. LAMBERT, on a pris pour modèle de la géométrie plane elliptique la géométrie sur la sphère; et comme, sur celle-ci, deux cercles très grands (figurants des droites) se coupent toujours en deux points, on a regardé cette propriété comme convenant à la géométrie analytique plane à laquelle ne saurait dès lors s'appliquer le postulat: « deux points déterminent une droite ».

Cette manière de voir a été rectifiée par F. KLEIN [188] qui a montré que quand on reporte sur une surface donnée les constructions concernant la géométrie plane non euclidienne, ce n'est que ce qui concerne une *région limitée* du plan qui s'identifie avec ce qui concerne une *région limitée* de la surface et que, par suite, il n'est pas permis *a priori* d'appliquer au plan ce qui se dit de la surface considérée dans sa totalité (cfr. § 24 et 43).

La géométrie plane non-euclidienne se reflète entièrement, non dans la géométrie sur la sphère, mais dans la géométrie ordinaire des *gerbes de droites*, ce qui signifie qu'en substituant aux « points » du plan les « droites » de la gerbe et aux expressions « droite » et « distance », celles de « faisceau » et « angle » toutes les propositions du plan elliptique qui

---

(184) *B. RIEMANN, *Habilitationsschrift* (12); « Abh. Ges. Gött. », 13 (1866-7), éd. 1868, math. p. 145; *Werke*, (2e éd.), publ. par H. WEBER, Leipzig 1892, p. 282-3; trad. L. LAUGEL, Paris 1898, p. 293.*

(185) *E. BELTRAMI, *Saggio d'una interpretazione della geometria non-euclidea* [« Giorn. mat. », (1) 6 (1868), p. 284-312; trad. par G. J. HOÜEL, « Ann. Ec. Norm. », (1) 6 (1869), p. 251-88].*

(186) *F. KLEIN, « Math. Ann. », 6 (1873), p. 140.*

(187) *A. CAYLEY, « Philos. Trans. London », 149 (1859), p. 82; Papers 2, Cambridge 1889, p. 583.*

(188) *F. KLEIN, « Math. Ann. », 6 (1873), p. 140. Voir aussi ce que dit F. KLEIN [« Jahrb. Fortschr. Math. », 8 (1876), éd. 1878, p. 313-4] à propos de J. FRISCHAUF, *Elementes der absoluten Geometrie*, Leipzig 1876. Cf. W. KILLING, *Geometrie* (77), 1, p. 352, note 12.*

constituent la géométrie elliptique se ramènent aux propositions ordinaires de la géométrie de la gerbe, et inversement.

On voit ainsi la parfaite compatibilité de l'hypothèse elliptique du plan avec les postulats de la droite et de la congruence dans le plan.

Toutefois les interprétations des géométries planes non-euclidiennes ne sauraient suffire pour établir l'indépendance du postulat d'Euclide à l'égard des premiers postulats de la géométrie dans l'*espace*, parce qu'elles n'excluent pas la possibilité de démontrer le postulat d'Euclide par des constructions dans l'espace (analogues à celles par lesquelles on démontre le théorème des triangles homologues situés dans un même plan sans s'astreindre à ne construire que des figures situées dans ce plan).

On se rend ainsi bien nettement compte de la nécessité de chercher *dans l'espace* la preuve de la possibilité logique de la géométrie non-euclidienne.

Cette preuve se tire de la théorie des variétés à trois dimensions ayant une courbure constante (§ 31 *b*) ou encore, quand on se place au point de vue de F. KLEIN, elle se rattache à la détermination métrique que A. CAYLEY applique à chaque quadrique ([189]).

Chacune de ces démonstrations fournit la preuve de l'indépendance du postulat d'Euclide par rapport aux postulats qui concernent les relations de droites et de plans, la congruence et la continuité; elle montre aussi la possibilité d'établir l'existence logique des procédés employés soit par les formules analytiques non contradictoires que l'on a établies, soit en supposant donnée comme possible, sur la base de l'intuition, la géométrie euclidienne ordinaire [voir à ce sujet § 4].

C'est ainsi que se pose, au point de vue philosophique, le problème de savoir si la géométrie non euclidienne peut représenter non seulement une possibilité *logique*, mais aussi une *possibilité physique*.

A cet égard on observera tout d'abord que l'expérience seule peut décider en dernier ressort. Mais une expérience ne saurait être effectuée qu'avec une certaine approximation. Il en résulte que si des expériences dans lesquelles on constaterait par exemple que la somme des angles d'un triangle est, au degré d'approximation avec lequel on opère, inférieure à deux angles droits, fourniraient une preuve certaine de la légitimité de la géométrie hyperbolique, il ne sera jamais possible, quelque loin que l'on pousse l'approximation des mesures, de conclure de mesures effectuées, concernant la somme des angles d'un triangle, la certitude physique de l'hypothèse euclidienne ([190]).

([189]) Cf. A. CLEBSCH, *Vorlesungen über Geometrie* publ. par F. LINDEMANN, 2^1, Leipzig 1891, p. 540 (section 3, § 8).

([190]) Cf. F. ENRIQUES, *Problemi della scienza* ([23]), p. 289.

En effet, les mesures géodésiques ([191]) ou astronomiques ([192]) d'angles de triangles physiques effectuées jusqu'ici n'ont jamais permis de reconnaître que la somme des angles de quelque triangle physique diffère effectivement de deux angles droits, soit en plus, soit en moins ([193]).

b) Pour répondre à la seconde des deux questions posées, nous nous contenterons d'énumérer les principales hypothèses équivalents au postulat d'Euclide, quand on admet toutes les hypothèses concernant la liaison (§ 9, α), la disposition (§ 10, β), la congruence (§ 11, β) et la continuité, en modifiant toutefois les postulats β du § 10 de façon qu'ils n'impliquent pas nécessairement l'idée de la droite.

1) Existence d'une seule parallèle menée par un point à une droite donnée.

2) Existence de deux droites d'un plan qui ne se coupent pas et sont équidistantes.

3) Existence de deux triangles semblables et non congruents ([194]).

4) Existence d'*un* triangle où la somme des angles est égale à deux angles droits ([195]).

5) Existence de triangles rectilignes ayant une aire aussi grande que l'on veut ([196]).

Si l'on admet l'infinité de la droite, le postulat d'Euclide peut être remplacé par l'un ou l'autre des deux postulats suivants:

Par un point situé dans le plan d'un angle aigu et à l'intérieur de cet angle, on peut toujours mener une droite qui rencontre les deux côtés de l'angle ([197]).

Trois points non en ligne droite se trouvent toujours sur la surface d'une sphère ([198]).

Enfin on peut aussi caractériser, comme il suit, la géométrie euclidienne par rapport à la mécanique:

Le postulat d'Euclide se ramène au postulat mécanique d'Archi-

---

([191]) C. F. GAUSS, *Disquisitiones circa superficies curvas* [« Comment. Soc. Gött. recent. », (1823-7), éd. Göttingen 1828, : 28] ; « Göttingische gelehrte Anzeigen », 1827, p. 1767-8; *Werke*, 4, Göttingue 1880, p. 257-8, 346-7; cf. *Werke*, 8, Göttingue (Leipzig), 1900, p. 267-8.

([192]) F. ENGEL, *N. I. Lobatschewskij* ([173]), p. 22, 78.

([193]) Cf. F. ZÖLLNER, « Wiss. Abh. » 1, 1, Leipzig 1878, p. 229.

([194]) Voir les notes 151, 154, 155 et 156.

([195]) Cf. A. M. LEGENDRE, « Mém. Acad. sc. Institut France », (2) 12 (1833), p. 375.

([196]) C. F. GAUSS, lettre à W. BOLYAI datée du 16 décembre 1799; *Werke*, 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 159. Cf. n° 18.

([197]) A. M. LEGENDRE, *Eléments de géométrie*, (9e éd.) Paris 1812, p. 280-2. Voir à ce sujet id. (12e éd.), Paris 1823, p. 278-80.

([198]) W. BOLYAI, *Kurzer Grundriss eines Versuches*, Maros Vásárhelyini 1851, p. 46.

mède [199] suivant lequel, étant données deux forces égales et dirigées dans le même sens que l'on applique aux extrémités A et B d'un segment AB perpendiculairement à ce segment, la résultante des deux forces est une force appliquée au point C milieu du segment AB, parallèle aux deux forces données, de même sens que ces deux forces et d'intensité égale à la somme de leurs intensités [200].

Dans les géométries non euclidiennes l'intensité de la résultante des deux forces envisagées serait non la somme [201], mais une autre fonction déterminée [202] des intensités des forces composantes [203].

17. - Aire et volume [204].

EUCLIDE [205] traite les aires et volumes comme des *grandeurs sui generis* en prenant comme base les *axiomes* suivants où il voit des attributs du concept général de la grandeur:

1) *Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.*
2) *Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.*
3) *Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.*

. . . .

7) *Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλλήλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.*
8) *Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν* [*ἐστιν*].

---

(199) *Une partie de ce postulat est indiqué dans ARCHIMÈDE [*ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων α'* (de l'équilibre des plans ou de leurs centres de gravité livre 1); trad. F. PEYRARD, Paris 1807, p. 275; *Opera*, éd. J. L. HEIBERG, 2, Leipzig 1881, p. 142] mais le postulat tout entier ne semble pas contenu dans ses écrits (Note de G. ENESTRÖM).*

(200) *A. GENOCCHI, *Dei primi principii della meccanica e della geometria in relazione al postulato d'Euclide* [« Mem. mat. fis. Soc. ital. delle scienze », (3) 2 (1869-76), p. 153-89, en partic. p. 162] (Note de G. LORIA).*

(201) A. GENOCCHI, « Atti Accad. Torino », 12 (1876-7), p. 489; « Memorie Accad. Torino », (2) 29 (1878), p. 305 et suiv. [1877]. Cf. J. ANDRADE, *Leçons de mécanique physique*, Paris 1897, p. 355 et suiv.

(202) Les premiers travaux concernant la mécanique dans l'espace non euclidien sont ceux de J. DE TILLY, *Études de mécanique abstraite* [« Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique », in-8°, 21 (1870), mém. n° 5, p. 3-98 [1868]]. Voir aussi J. DE TILLY, « Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux », (2) 3 (1880), p. 1-190 [voir surtout p. 177 (chap. 5, n° 21)].

Après J. DE TILLY, on peut citer E. SCHERING, « Nachr. Ges. Gött. », 1870, p. 311; 1873, p. 149; R. LIPSCHITZ, « J. reine angew. Math. », 74 (1872), p. 116; W. KILLING, id., 98 (1885), p. 1-49 (surtout p. 24 et suiv.).

(203) Pour ce qui concerne le rapport du postulat des parallèles et du postulat d'ARCHIMÈDE, voir n° 52.

(204) Ces questions sont traitées d'une façon détaillée par U. AMALDI, dans F. ENRIQUES, *Questioni* (29), p. 103 et suiv., et par O. HÖLDER, « Ber. Ges. Lpz. », 53 (1901), math. p. 1 et suiv.

(205) *Elementa*, livre 1, *κοιναὶ ἔννοιαι α', β', γ', ζ', η'* (*Communes animi conceptiones*); *Opera*, éd. J. L. HEIBERG, 1, Leipzig, 1883, p. 10.

C'est-à-dire:

1) Les quantités égales à une même quantité sont égales entre elles.

2) Si l'on ajoute des quantités égales à des quantités égales, les sommes sont égales.

3) Si de quantités égales on soustrait des quantités égales les restes sont égaux.

. . . .

7) Des quantités superposables sont égales entre elles.

8) Le tout est plus grand que la partie.

A) Bornons-nous d'abord au cas des figures planes.

Les quatre premiers de ces cinq axiomes établissent deux critères nettement distincts pour reconnaître l'équivalence des surfaces planes, c'est-à-dire l'égalité des aires des surfaces planes:

a) le partage de ces surfaces en parties congruentes [équivalence des surfaces par addition: axiomes 1), 2) et 7)];

b) la possibilité de considérer deux figures comme différences entre figures congruentes [équivalence des surfaces, par soustraction: axiomes 3) et 7)].

De ces deux critères, EUCLIDE emploie tantôt l'un, tantôt l'autre dans la théorie de l'équivalence (l'égalité des aires) des polygones plans.

C'est en se basant sur l'axiome 8 qu'il prouve les théorèmes inverses où de l'équivalence (égalité des aires) de certains polygones il conclut à l'égalité de certains segments déterminés.

Aux critères *a*) et *b*), EUCLIDE en ajoute un troisième dans lequel l'égalité des aires (l'équivalence des surfaces) est prouvée *indirectement*. C'est l'emploi de ce troisième critère qui constitue la *méthode d'exhaustion* ([206]) (cf. I 3, § 14].

Ce critère se fonde sur la supposition implicite que « si deux surfaces sont inégales, il existe une surface qui, ajoutée à l'une des deux (à la plus petite), donne une somme égale à l'autre (à la plus grande) ».

Cette supposition, et par suite la méthode d'exhaustion, s'applique d'ailleurs aussi bien aux surfaces gauches et aux volumes qu'aux surfaces planes.

En appliquant alternativement les critères *a*) et *b*) pour reconnaître l'équivalence des polygones plans, EUCLIDE se trouve avoir fait quelque chose de superflu. P. GERVIEN ([207]) a, en effet, prouvé que deux polygones plans (ou sphériques), d'aires égales, peuvent toujours être envi-

---

([206]) *Elementa*, livre 10, prop. 1; livre 12, prop. 2; *Opera*, éd. J. L. HEIBERG, 3, Leipzig 1886, p. 4-7; 4, Leipzig 1885, p. 140-9.

([207]) « J. reine angew. Math. », 10 (1833), p. 228, 235.

sagés comme équivalents par addition, en sorte que le critère *b*) est inutile et qu'il suffit d'appliquer le critère *a*) seulement.

W. Bolyai ([208]) avait déjà fait la même remarque. Il voulait, en outre, démontrer, pour des surfaces quelconques, le théorème que voici:

Lorsque deux figures congruentes ont une partie commune, les parties de ces deux figures qui ne sont pas superposées peuvent être divisées en parties congruentes.

Si cette proposition était démontrée, il en résulterait le théorème plus général:

Quand de deux surfaces congruentes on enlève des parties congruentes, ce qui reste des deux surfaces peut être divisé en parties respectivement congruentes.

Mais la proposition de W. Bolyai ne peut être actuellement envisagée comme démontrée: en tous cas la démonstration qu'en a donnée W. Bolyai est tout à fait insuffisante.

J. M. C. Duhamel ([209]), qui a étudié au point de vue critique la question qui nous préoccupe, a, le premier, montré la nécessité logique de définir à nouveau, pour toute classe de grandeurs géométriques, les concepts « somme », « partie », « plus grand » et « plus petit ». Il a été ainsi amené, dans la théorie de l'équivalence des surfaces (l'égalité des aires), à suivre une nouvelle voie où le concept de l'équivalence (de l'égalité) n'apparaît plus comme une relation non définie vérifiant les conditions euclidiennes 1) à 5).

J. M. C. Duhamel définit, tout au contraire, l'équivalence des surfaces (l'égalité des aires) comme une équivalence ou une *égalité par addition* de parties congruentes et cette définition remplace complètement les axiomes 1) à 4) d'Euclide. Il développe ensuite quelques théorèmes concernant l'égalité des aires en cherchant à éviter systématiquement l'emploi de la soustraction et, par suite, de l'axiome 3) de Euclide. Il a, en particulier, prouvé, par un procédé dans lequel apparaît l'axiome d'Archimède ([210]), que deux parallélogrammes de base et de hauteur égales sont équivalents (c'est-à-dire décomposables en parties congruentes).

Ces développements ont été complétés par A. Faifofer ([211]): la théorie ainsi construite ne repose que sur des définitions; elle ne fait appel à aucun nouveau concept primitif.

([208]) *Tentamen* ([68]), 1, Maros-Vásárhelyini 1832, p. 51 (§ 35).

([209]) *Des méthodes dans les sciences de raisonnement* (2e éd.) 2, Paris 1866, p. 445 en note; (3e éd.), 2, Paris 1896, p. 445 en note; voir aussi les chapitres 1 et 5.

([210]) D. Hilbert [*Grundlagen* ([27]), (3e éd.), p. 60] a insisté sur l'impossibilité de se passer de cet axiome (voir n° 50).

([211]) *Elementi di geometria ad uso degli istituti tecnici e dei licei,* Venise 1895, p. 180.

Mais A. DE ZOLT ([212]) a remarqué que dans la démonstration des théorèmes inverses où, de l'égalité des aires, on conclut à celle de segments, apparaît toujours l'axiome 8) d'EUCLIDE qui, si l'on définit l'égalité des aires par addition, se traduit par le *principe* que voici: si l'on partage un polygone d'une manière quelconque, il est impossible, après avoir supprimé une de ses parties, de disposer les autres de telle sorte qu'elles couvrent complètement le polygone.

Si l'on suppose que ce principe est évident, on doit l'envisager comme un *postulat.* C'est ce qu'a fait effectivement R. DE PAOLIS ([213]). Les géomètres italiens désignent ordinairement ce postulat sous le nom de *postulat de A. de Zolt.*

Ce postulat est d'ailleurs tout à fait superflu. Son énoncé résulte de l'ensemble des suppositions énoncées dans les numéros précédents. Il est bien facile de le reconnaître en envisageant, conformément à notre façon de voir actuelle, une surface quelconque comme la limite vers laquelle tend une somme de carrés convenablement choisie et, par suite l'aire de cette surface comme une *intégrale* déterminée; car alors le principe de A. DE ZOLT n'est plus qu'un corollaire du théorème fondamental sur l'existence de l'intégrale envisagée. Ce fait a été mis en pleine lumière par W. KILLING ([214]).

Une preuve directe et élémentaire du principe de A. DE ZOLT a été donnée d'abord par I. SCHUR ([215]), puis, de diverses manières, par O. RAUSENBERGER ([216]), par G. VERONESE ([217]), par L. GÉRARD ([218]) et par G. LAZZERI ([219]).

En résumé, on peut envisager comme démontré d'une façon élémentaire que si l'on définit l'égalité des aires de deux polygones par la distribution de leurs surfaces en parties respectivement congruentes, la théorie de l'égalité des aires des polygones plans peut être développée sans avoir à ajouter aux postulats d'appartenance, de congruence et de disposition [y compris le postulat de continuité ou celui d'Archimède] quelque autre postulat.

Si, au lieu de surfaces polygonales, on envisage des *surfaces planes*

([212]) *Principii della eguaglianza di poligoni (equivalenza di poligoni) preceduti da alcuni cenni critici sulla teoria della equivalenza geometrica,* Milan 1881; *Principii della eguaglianza di poliedri e di poligoni sferici,* Milan 1883.

([213]) *Elementi di geometria,* Turin 1884, p. 281.

([214]) *Nichteuklidische Raumformen* ([180]), p. 49. Pour plus de détails, voir: *Geometrie* ([77]) 2, p. 24 et suiv.

([215]) « Sitzgsb. Naturf. Ges. Univ. Dorpat (Jurjev) », 13 (1892), p. 2-6; G. BIASI [« Periodico mat. » (1), 9 (1893-4), p. 85-7] a complété ces recherches.

([216]) « Math. Ann. », 42 (1893), p. 275.

([217]) « Atti Ist. Veneto », (7) 6 (1894-5), p. 421-37.

([218]) « Bull. Soc. math. France » 23, (1895), p. 268.

([219]) « Periodico mat. », (1) 10 (1894-5), p. 77-93, 133-41.

limitées par des *ligne courbes*, on ne peut plus faire usage du critère élémentaire à l'aide duquel on a comparé les surfaces des polygones; car, d'après un théorème de M. RETHY ([220]), les conditions qui doivent être vérifiées pour que deux surfaces équivalentes puissent être divisées en un nombre fini de parties congruentes ne sont en général pas réalisées pour des surfaces planes limitées par des lignes courbes. Pour ne citer qu'un exemple, elles ne le sont *jamais* quand l'une des deux surfaces planes est un cercle et l'autre un carré.

La théorie générale des aires exige donc que l'on ait recours, soit à la méthode d'exhaustion des anciens qui leur a permis de déterminer plusieurs aires comme celle de la surface du cercle et celle d'un secteur parabolique ([221]), soit aux procédés du calcul intégral (cf. I 3, § 14).

On a pu ainsi démontrer que les résultats obtenus pour les polygones, s'appliquent aux surfaces planes limitées par des lignes courbes, en sorte que l'on sait actuellement que:

Les postulats de l'appartenance, de la congruence et de la disposition (y compris le postulat de la continuité ou celui d'Archimède) ont pour conséquence que les surfaces planes peuvent être considérées comme une classe bien déterminée de grandeurs si l'on définit l'équivalence de deux surfaces par la distribution des deux surfaces en un nombre fini ou infini de parties respectivement congruentes.

B) Nous envisagerons maintenant les volumes de parties limitées de l'espace.

EUCLIDE ([222]) traite les étendues limitées à trois dimensions comme des grandeurs analogues aux surfaces planes limitées. Cela implique une proposition que l'on peut exprimer par le principe de DE ZOLT appliqué aux étendues à trois dimensions. On peut d'ailleurs, dans ce cas, démontrer encore ce principe par une extension à l'espace des preuves déjà mentionnées pour les surfaces planes. Cette extension a été brièvement indiquée par O. RAUSENBERGER ([223]) et L. GÉRARD ([224]); elle est exposée en détail par G. VERONESE ([225]).

Il en résulte que le théorie de l'équivalence des figures dans l'espace

---

([220]) « Math.-Naturw. Ber. Ungarn », 11 (1892-3), éd. 1894, p. 66-76; « Math. Ann. », 38, (1891), p. 145.

([221]) Un développement critique de cette méthode d'exhaustion, appliqué exclusivement à la détermination des aires dans les cas les plus élémentaires, est contenu dans F. ENRIQUES et U. AMALDI, *Elementi di geometria*, Bologna 1903, p. 354.

([222]) EUCLIDE, *Elementa*, livre 12; *Opera*, éd. J. L. HEIBERG, 4, Leipzig 1885, p. 138-247 [voir par ex. prop. 5 (p. 164-9)]. EUCLIDE traite aussi de cette même manière des surfaces gauches limitées: voir par ex. prop. 10 (p. 186-97).

([223]) « Math. Ann. », 43 (1893), p. 601-4.

([224]) « Bull. Soc. math. France », 23 (1895), p. 268-9.

([225]) « Atti Ist. Veneto », (7) 6 (1894-5), p. 421-37.

peut, tout aussi bien que celle des figures planes, être basée sur les postulats et définitions ordinaires, sans qu'il soit nécessaire de leur adjoindre aucun postulat particulier ([226]).

Mais quand on étudie l'équivalence des polyèdres, une nouvelle question se pose: il s'agit de savoir si deux polyèdres de volumes égaux peuvent toujours être divisés en un nombre fini de parties congruentes. Les nombreuses tentatives inutiles que l'on avait faites pour obtenir une telle division du tétraèdre et une remarque de G. SFORZA ([227]) permettait de prévoir que la réponse à cette question serait, en général négative; la démonstration en a été donnée par M. DEHN ([228]).

Avant de passer à un autre ordre d'idées, nous envisagerons encore ici d'une part *le rapport de la théorie des aires* (ou des volumes) *avec le postulat des parallèles*, et le rapport de cette même théorie *avec le postulat d'Archimède.*

1) Le principe d'après lequel on peut considérer les surfaces et les étendues à trois dimensions comme des *grandeurs* est indépendant du postulat des parallèles: c'est un principe de géométrie générale; il peut aussi bien être établi dans la géométrie non euclidienne que dans la géométrie euclidienne. Mais tous les théorèmes sur l'équivalence des surfaces (égalité des aires), ou sur l'équivalence des étendues (limitées) à trois dimensions (égalité des volumes), dépendent complètement de la façon dont on énonce le postulat des parallèles.

La théorie non euclidienne de l'aire, développée par C. F. GAUSS, J. BOLYAI, N. I. LOBAČEVSKIJ, permet de constater que l'aire d'un triangle est égale à la différence entre la somme de ses angles et deux angles droits; de là résulte par exemple l'existence d'une limite supérieure pour l'aire d'un triangle ([229]). Dans la géométrie elliptique la somme des angles est plus grande que deux droits, dans la géométrie hyperbolique elle est plus petite que deux droits ([230]).

2) Dans la théorie de l'égalité des aires (équivalence des surfaces) ainsi d'ailleurs que dans le développement des principes du calcul intégral, on applique ordinairement le postulat d'Archimède.

D. HILBERT ([231]) a démontré que l'on peut obtenir une mesure des

---

([226]) Cf. S. O. ŠATUNOVSKIJ (SCHATUNOVSKY), « Math. Ann. », 57 (1903), p. 496.

([227]) « Periodico mat. », (1) 12 (1896-7), p. 105-9. Voir aussi R. BRICARD, « Nouv. Ann. math. », (3) 15 (1896), p. 331.

([228]) « Math. Ann. », 55 (1902), p. 465.

([229]) C. F. GAUSS, lettre à CH. L. GERLING datée du 16 mars 1819; *Werke*, 8, Göttingue (Leipzig) 1900, p. 181. Cf. n° 16.

([230]) En ce qui concerne les « volumes » dans un espace non euclidien, voir F. ENGEL, *N. I. Lobačevskij* ([173]), 1, p. 46-7; 2, p. 63.

([231]) *Grundlagen* ([27]), (3e éd.), p. 62-8.

surfaces polygonales sans faire usage de ce postulat. Mais alors deux figures d'aires égales ne peuvent plus être toujours divisées en un nombre fini de parties respectivement congruentes [cf. § 51].

18. - Nouveaux développements de la théorie des proportions au sens des anciens.

Dans les Eléments d'EUCLIDE ([232]) on rencontre quelques propositions qui sont établies deux fois, une fois à l'aide de l'égalité des aires, une seconde fois à l'aide de la théorie arithmétique des proportions. H. G. ZEUTHEN ([233]) suppose qu'il y a là comme le dernier reflet d'une ancienne divergence de vues sur la façon de traiter les problèmes, divergence naturelle reposant en dernière analyse sur les difficultés inhérentes à l'introduction des rapports incommensurables. Ces difficultés ayant été complètement surmontées par les géomètres qui ont fondé la théorie des proportions, vraisemblablement peu de temps seulement avant que EUCLIDE n'ait rassemblé les matériaux à l'aide desquels il a composé ses « Eléments » ([234]), il est fort compréhensible que, tout en cherchant dans son ouvrage à mettre en pleine lumière les procédés arithmétiques de la théorie des proportions, il ait aussi insisté sur les démonstrations usuelles faites à l'aide des méthodes purement géométriques.

Les développements qui visent à dégager la géométrie de toute considération relative au concept du *nombre* ont été reprises de nos jours et l'on est ainsi parvenu à édifier une théorie *purement géométrique des proportions* entre segments de droite. Cette théorie fournit une méthode directe d'investigation géométrique entièrement indépendante de l'arithmétique.

Les théorèmes qui peuvent servir de fondement à cette façon de procéder sont:

1) le théorème concernant la proportionalité des segments déterminés sur les côtés d'un angle par des droites parallèles entre elles ([235]).

Ce théorème a été attribué par quelques auteurs ([236]) à THALÈS et,

---

([232]) Par exemple, le problème résolu deux fois: *Elementa*, livre 2, prop. 11 et livre 6, prop. 30 [*Opera*, éd. J. L. HEIBERG, 1, Leipzig 1883, p. 152; 2, Leipzig 1884, p. 170].

([233]) H. G. ZEUTHEN, *Forelaesning* ([40]), trad. J. MASCART, p. 90, lignes 5-8.

([234]) * On attribue ordinairement à EUDOXE la théorie des proportions formulée d'une façon rigoureuse. Voir à ce sujet H. G. ZEUTHEN, *Forelaesning* ([46]), trad. J. MASCART, p. 89. Cette théorie était déjà familière à ARISTOTE qui était de vingt ans plus jeune qu'EUDOXE [cf. J. L, HEIBERG, « Abh. Gesch. Math. », 18 (1904), p. 11-2] (Note de G. ENESTRÖM).*

([235]) Cf. EUCLIDE, *Elementa*, livre 6, prop. 2; *Opera*, éd. J. L. HEIBERG, 2, Leipzig 1884, p. 76-81.

([236]) * Pour ce qui concerne les raisons peu concluantes de cette attribution, voir P. TANNERY, *La géométrie grecque*, Paris 1887, p. 91 (Note de G. ENESTRÖM).*

pour abréger, nous conserverons dans ce qui suit cette dénomination quoi qu'elle n'ait aucune raison d'être.

2) L'égalité des aires de deux triangles (ou parallélogrammes) qui ont un angle commun et dans lesquels les côtés adjacents à cet angle sont inversement proportionnels (237).

Suivant que l'on s'appuie sur l'un ou l'autre de ces deux théorèmes pour formuler une *définition* de la proportion entre segments, les attributs fondamentaux des proportions s'expriment en *suppositions sur le parallélisme* ou sur l'*égalité des aires*. Ces suppositions doivent nécessairement être prouvées directement sans avoir recours au concept du *rapport* qui revient à celui du *nombre*.

Chacun des deux procédés 1) et 2) peuvent être rattachés à la *théorie de l'extension* de H. GRASSMANN (238) dans laquelle les segments ne sont pas seulement considérés au point de vue de leur grandeur, mais aussi à celui de leur direction. La propriété distributive de la multiplication dans le calcul de Grassmann s'exprime tout de suite ici par l'identité des deux définitions de la proportion fondées l'une sur le théorème de Thalès, l'autre sur le théorème de l'égalité des aires.

*D'après H. GRASSMANN, deux paires de segments

$$a\ ,\ a_1; \qquad b\ ,\ b_1$$

sont dites proportionnelles et l'on écrit

$$a : a_1 = b : b_1$$

quand, en portant ces segments sur deux demi-droites concourantes à partir de leur point d'intersection, a et b sur l'une d'elles, a_1 et b_1 sur l'autre, la droite qui joint les extrémités des segments a, a_1 et la droite qui joint les extrémités des segments b, b_1 sont parallèles. En s'appuyant sur le théorème de Desargues (démontré à l'aide de considérations de géométrie à trois dimensions) H. GRASSMANN montre que

1) cette notion de proportion est indépendante de l'angle d'inclinaison des deux demi-droites envisagées;

2) que si l'on a simultanément

$$a : a_1 = b : b_1 \qquad \text{et} \qquad a : a_1 = c : c_1$$

---

(237) EUCLIDE, *Elementa*, livre 6, prop. 14; *Opera*, éd. J. L. HEIBERG, 2, Leipzig 1884, p. 110-3.

(238) *Die lineale Ausdehnungslehre*, Leipzig 1844, p. 118 (nos 75 à 78); (2e éd.) Leipzig 1878, p. 118; *Werke* (58), 1[1], p. 138-40.

on a aussi

$$b : b_1 = c : c_1 .$$

Pour démontrer que dans une proportion ainsi définie on peut intervertir les termes extrêmes, ou les termes moyens, H. GRASSMANN a dû faire appel aux théorèmes d'Euclide concernant la mesure des aires planes, théorèmes qui supposent le postulat d'après lequel l'aire d'une surface ne peut être égale à celle d'une partie de cette surface.*

RAJOLA-PESCARINI (239) définit la proportion entre des segments à l'aide du théorème de Thalès relativement à un angle donné arbitrairement fixé et il en déduit géométriquement le théorème sur l'égalité des aires en s'appuyant sur le 35ième théorème du livre 3 des Eléments d'EUCLIDE (240) concernant les arcs de cercle; dans les Eléments d'EUCLIDE, ce théorème 35 est d'ailleurs établi à l'aide du théorème de Pythagore. RAJOLA-PESCARINI réussit de cette façon à étendre à *tous* les angles la définition des proportions donnée d'abord pour l'angle arbitrairement fixé dont il est parti. Il développe ensuite une démonstration du théorème d'après lequel « deux paires de segments proportionnels à une troisième paire sont proportionnels entre eux ». C'est en cela que consiste la propriété dite *transitive* de l'égalité des rapports. Il ne démontre d'ailleurs ce théorème que sous une restriction facilement évitable si l'on emploie un procédé de démonstration indiqué par G. VAILATI (241).

E. R. E. HOPPE (242) a imaginé un développement géométrique de la théorie des proportions en prenant aussi comme point de départ le théorème de Thalès, du moins en tant que la définition des proportions coïncide avec celle donnée par H. GRASSMANN. Ses développements ne diffèrent d'ailleurs de ceux de H. GRASSMANN que par l'introduction d'éléments d'ordre infinitésimal (243).

E. R. E. HOPPE démontre aussi le théorème suivant plus général que la proposition 2) de H. GRASSMANN

« si $a : b = e : f$ et si $b : c = d : e$, alors $a : c = d : f$ »

(239) *Studio sulla proporzionalità grafica e sue applicazioni alla similitudine e alla omotetia*, Naples 1876.

(240) *Elementa*, livre 1, prop. 35; *Opera*, éd. J. L. HEIBERG 1, Leipzig 1883, p. 84-7.

(241) « Atti del 2° Congresso tenuto ad iniziativa dell'Associazione Mathesis », Livourne 1902, p. 176.

(242) « Archiv. Math. Phys. », (1) 62 (1878), p. 153.

(243) E. R. E. HOPPE se place encore à un autre point de vue consistant essentiellement à prendre comme point de départ le théorème 2.

Voir aussi G. BIASI, *Corso di lezioni sulla teoria delle proporzioni* (*autographié*), Sassari 1882.

qu'il appelle « le théorème du rapport *troublé* ». Mais ici encore intervient le concept de l'égalité des aires.

Ce théorème revient au suivant:

Si sur les côtés d'un angle on marque un triple couple de points, les points (1, 3, 5) sur l'un des côtés, les points (2, 4, 6) sur l'autre côté, de façon que les paires de droites (12, 45) et (23, 56) soient parallèles, alors les droites (34, 61) seront aussi nécessairement parallèles.

Ce théorème et sa démonstration, basée sur des réflexions touchant l'égalité des aires (l'équivalence des surfaces), sont contenus dans la « Collection » de PAPPUS (244): c'est pourquoi, afin d'abréger, nous désignerons ce théorème sous le nom de *théorème de Pappus* (245).

Une démonstration fort simple du théorème de Pappus, due vraisemblablement à K. KUPFFER (246), est fondée sur l'égalité des angles périphériques dans le cercle; elle est indépendante du concept de l'aire.

Une démonstration dans laquelle intervient un hyperboloïde de révolution a été indiquée par F. SCHUR (247). D'autres démonstrations, conservant le caractère de *géométrie plane* ont été données par D. HILBERT (248).

D. HILBERT a d'ailleurs construit à nouveau toute la théorie géométrique des proportions entre segments.

De ce qui précède on conclut que le théorème de géométrie plane de G. DESARGUES [§ 27, *a*)] qui, comme on sait, ne peut être démontré, à l'aide des postulats de la dépendance mutuelle, de la disposition, et des parallèles, qu'en effectuant des constructions dans l'espace, peut être démontré, en se plaçant au point de vue qui nous occupe, sans quitter le plan. Si, en effet, la possibilité de l'interversion des termes moyens d'une proportion fait partie des données, la propriété transitive de l'égalité des rapports et le théorème du rapport composé se ramènent l'un à l'autre, en sorte que le théorème de Desargues conduit au caractère transitif du parallélisme (postulat des parallèles).

Des recherches de F. SCHUR et de D. HILBERT découle encore un autre résultat important:

Dans le plan, *la propriété géometrique des proportions entre segments basée sur les propriétés des parallèles et de la congruence, est indépendante du postulat d'Archimède.*

---

(244) *Συναγωγὴ μαθηματική* (écrit vers +295), livre 7, prop. 134; éd. F. HULTSCH' *Pappi Alexandrini math. collectiones*, 2, Berlin 1877, p. 878-9.

(245) Ce théorème de PAPPUS (et plus généralement celui qui en découle par projection et se rapporte à l'hexagone inscrit dans une paire de droites) rentre comme cas particulier dans celui de B. PASCAL sur l'hexagone inscrit dans une conique (cf. III 15).

(246) « Sitzgsb. Naturf. Ges. Univ. Dorpat (Jurgev) », 14 (1893), p. 373 et suiv.

(247) « Math. Ann. », 51 (1899), p. 401.

(248) *Grundlagen* (27), (3e éd.), p. 38-45, 97-106.

Le développement de cette théorie géométrique des proportions a encore été quelque peu semplifié par plusieurs recherches que nous allons énumérer:

F. SCHUR [249] a remarqué qu'il suffit de prouver le théorème da PAPPUS dans un seul cas particulier, par exemple quand l'angle sur les côtés duquel sont les deux triples de points envisagés est un angle droit. Dans ce cas particulier, il a démontré fort simplement le théorème en s'appuyant seulement sur ce que les trois hauteurs d'un triangle concourent en un même point.

J. MOLLERUP [250] a donné une demostration fort simple du même théorème dans le cas général, mais cette démostration ne contient au fond rien qui la distingue essentiellement des précédentes.

B. LEVI [251] a donné une forme élémentaire aux développements qui sont nécessaires à l'établissement du cas particulier du théorème de Pappus correspondant à la possibilité de l'interversion des termes moyens d'une proportion. La théorie des proportions est d'ailleurs intimement liée aux questions qui se rapportent au théorème fondamental de la géométrie projective (cfr. § 27).

En ce qui concerne le théorème de Pappus dans la géométrie non archimédienne, voir § 50.

19. - Conclusions.

Ce qui précède permet de reconnaître trois groupes distincts de propriétés géométriques:

1) Les propriétés qui se rapportent aux concepts *situé entre*, *côtés d'un plan*, *segment*, *angle* ... (propriétés linéaires des droites qui comprennent aussi la continuité, et propriétés des surfaces planes).

2) Les propriétés qui se rapportent au concept d'*appartenance* (de points, de droites et de plans).

3) Les propriétés qui se rapportent au concept de *congruence*.

En géométrie élémentaire, ces trois sortes de propriétés son intimement liées entre elles. Elles y sont dans un rapport de subordination réciproque tel qu'on ne peut énoncer les propriétés d'un groupe sans se reporter, au moins en partie, à des propriétes d'un autre groupe. Mais le développement de la géométrie a précisément conduit à les distinguer les unes des autres.

---

(249) « Math. Ann. », 57 (1903), p. 205.
(250) « Math. Ann. », 58 (1904), p. 479.
(251) « Supplemento al periodico mat. », 6 (1903-4), p. 114-7.

On comprend bien comment cette distinction s'est produite si l'on caractérise, comme l'a fait F. KLEIN ([252]) pour la première fois dans son programme d'Erlangen, les divers ordres de recherches de la géométrie par les groupes de transformation qui leur correspondent.

A la *géométrie élémentaire* correspond un groupe de transformations, le groupe des *mouvements* et *renversements*, y compris les transformations de similitude. Ce groupe, nommé par F. KLEIN *groupe principal* (*Hauptgruppe*), laisse *invariantes* toutes les propriétés énumérées 2,1 et 3.

Au lieu de mouvements, on peut d'ailleurs considérer des transformations plus générales qui ne laissent invariantes qu'une partie de ces propriétés 1, 2 ou 3, et modifient les autres. On obtient ainsi plusieurs espèces de géométries dans chacune desquelles on ne s'occupe que de celles de ces propriétés que l'on y considère comme invariantes. Nous ne mentionnerons ici que les deux principales d'entre elles:

a) C'est d'abord la *géométrie projective où* l'on étudie les propriétés qui sont invariantes relativament au groupe des collinéations, c'est-à-dire les propriétés résultant de l'ensemble des postulats α et β des numéros 9 et 10 auxquels on a adjoint le postulat (ordinaire) de la continuité.

b) C'est ensuite la *théorie du continuum* [ou *Analysis situs*] où l'on considère les propriétés qui sont invariantes relativament à des transformations continues quelconques. Ce sont les propriétés correspondant à l'ensemble des postulats α du § 9 détachées, par le procédé employé, des propriétés particulières des droites et du plan.

A cette façon de voir ajoutons encore une autre consideration ([253]). Si l'on examine un groupe de transformations relativament à une figure particulière (en faisant abstraction de ce qui est hors de cette figure), celles des propriétés géométrique qui sont invariantes relativament au groupe prennent une signification nouvelle et conduisent ainsi à une géométrie sur la figure envisagée.

Si, par exemple, on examine, relativament à une surface quelconque, le groupe des mouvements qui forme la base de la géométrie élémentaire, on est amené à des considérations générales sur les rapport métriques des figures situées sur une surface, considérations dont l'ensemble constitue la *géométrie sur les surfaces* (géométrie différentielle de mesure dans laquelle on considère les proprietés invariantes relatives à l'applicabilité des surfaces).

En généralisant ensuite cette géométrie sur les surfaces on aboutit à la géométrie métrique sur les variétés à plusieurs dimensions, et, en

---

([252]) F. KLEIN, *Progr. Erlangen*, 1872; « Math. Ann. », 43 (1893), p. 63-100.

([253]) Cf. F. ENRIQUES, *Conferenze di geometria* [cours autographié], Bologne 1894-5, p. 124 (n° 28).

particulier, sur les variétés à *trois* dimensions. Cette géométrie comprend les propriétés 3 de la congruence qui sont définies relativement aux propriétés 1 de l'Analysis situs, mais indépendamment des concepts de la droite et du plan.

Un même procédé d'abstraction consistant essentiellement dans l'élargissement du groupe de transformations qui correspond à la géométrie élémentaire, mène ainsi à trois ordres de recherches géométriques plus générales que celles de la géométrie élémentaire.

On peut représenter ces trois ordres de recherches, dans leur rapport de dépendance mutuelle, et dans leur dépendance de la géométrie élémentaire, par le schéma suivant:

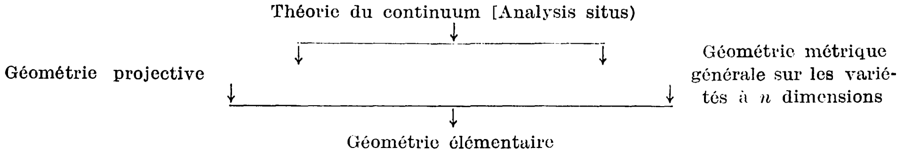


Fig. 2.

Les propriétés contenues dans les trois ordres de recherches générales dont on vient de parler pourraient être rattachées à trois groupes de sensations distinctes de la façon suivante ([254]):

les propriétés qui se rapportent au sens général du toucher et du muscle;

les propriétés optiques (descriptives);

les propriétés mécaniques (métriques) relatives à un organe tactile différencié, muni de mobilité.

On peut parcourir dans deux sens opposés le système de la Géométrie que l'on vient d'ébaucher.

Ou bien on étudie d'abord la *géométrie élémentaire*, pour s'élever ensuite d'une part à la *géométrie projective*, de l'autre à la *géométrie métrique* sur les variétés à n dimensions et l'on finit par aborder l'étude de l'*Analysis situs*.

([254]) F. Klein [« Math. Ann. », 37 (1890), p. 544] a le premier remarqué cette différence entre les propriétés descriptives et les propriétés métriques.

F. Enriques [*Questioni* ([29]), p. 16, 18; « Rivista filosofica » (Pavie), 4 (1901), p. 76, cf. ([19]); *Problemi della scienza* ([23]), p. 300 (chap. 4); la trad. française de J. Dubois, *Problèmes de la science*, Paris 1908, ne contient pas ce chapitre 4] a essayé d'en prouver la nécessité en examinant minutieusement les faits à la lumière de la psychologie physiologique. Il a été ainsi amené à rattacher les propriétés de la théorie du continuum au sens général du toucher et du muscle, base commune de nos sensations spatiales.

Ou bien l'on commence par envisager la *théorie du continuum*; on passe ensuite aux recherches de caractère plus restreint de *géométrie projective* d'une part, de *géométric métrique* sur les variétés à un nombre quelconque de dimensions d'autre part, pour aboutir à l'étude plus restreinte encore de la géométrie élémentaire.

Le passage de l'*Analysis situs* à la géométrie projective se fait en imaginant un système particulier de courbes et de surfaces données (jouissant de propriétés convenablement choisies) que l'on appelle lignes droites et plans (255).

Le passage de l'*Analysis situs* à la géométrie métrique générale sur les variétés à n dimensions se fait, soit avec B. RIEMANN (251) en imaginant comme donnée une certaine opération métrique (telle que la mesure d'une ligne ou de la distance de deux points par exemple jouissant de propriétés déterminées), soit en supposant donné un certain système de lignes et de surfaces (telle que des lignes géodésiques par exemple) relativement à l'opération métrique envisagée.

On passe de la géométrie projective à la géométrie métrique élémentaire en distinguant dans la détermination métrique une courbe (ou surface) du second degré (257). Si l'on veut, en particulier, parvenir à la détermination métrique ordinaire envisagée par Euclide, on peut le faire en envisageant la *géométrie de l'affinité* comme une étape intermédiaire (258).

On passe de la géométrie métrique générale des variétés à n dimensions à la géométrie élémentaire d'Euclide, ou aussi à la géométrie élémentaire non euclidienne, en imposant à l'opération métrique adoptée des conditions particulières, par exemple l'homogénéité et l'isotropie de l'espace, ou encore un caractère particulier du groupe des mouvements (259).

Dans les chapitres suivants nous adopterons la seconde façon de

---

(255) Cf. F. KLEIN (qui ici se rattache à K. G. CHR. VON STAUDT), « Math. Ann. », 6 (1873), p. 112; *Prog. Erlangen*, 1872, p. 32; « Math. Ann. », 43 (1893), p. 63-100.

(256) B. RIEMANN, *Habilitationsschrift* (12); « Abh. Ges. Gött. », 13 (1866-7), éd. 1868, math. p. 138; *Werke* (2e éd.) publ. par H. WEBER, Leipzig, 1892, p. 277; trad. L. LAUGEL, Paris 1898, p. 286.

(257) Cf. A. CAYLEY, « Philos. Trans. London », 149 (1859), p. 82; « Papers », 2, Cambridge 1889, p. 583; F. KLEIN, « Math. Ann. », 6 (1873), p. 127.

(258) Cf. A. F. MÖBIUS, *Der barycentrische Calcul*, Leipzig 1827, § 161-2; *Werke*, 1, Leipzig 1885, p. 194-5; H. GRASSMANN, *Die lineale Ausdehnungslehre*, Leipzig 1844, Section II, chap. 4; *Werke* (58), 1^1, p. 249-81.

(259) Cf. B. RIEMANN, *Habilitationsschrift* (12), « Abh. Ges. Gött. », 13 (1866-7), éd. 1868, math. p. 134; *Werke* (2e éd.), publ. par H. WEBER, Leipzig 1892, p. 273; trad. L. LAUGEL, Paris 1898, p. 282; E. BELTRAMI, *Teoria degli spazi di curvatura costante* [« Ann. mat. pura appl. », (2) 2 (1868-9), p. 232; L. SCHLÄFLI, id. (2) 5 (1871-3), p. 178 [1872]; S. LIE et F. ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, 3, Leipzig 1893, p. 393; F. SCHUR, « Math. Ann. », 27 (1886), p. 537 et suiv. Cf. nos 39 à 42.

procéder. Nous exposerons d'abord les fondements de l'Analysis situs pour envisager ensuite, d'une part la géométrie projective, d'autre part la géométrie métrique générale, et aboutir enfin, aussi bien par l'intermédiaire de la géométrie projective que par celui de la géométrie métrique générale, à la géométrie élémentaire.

PRINCIPES DE LA THÉORIE DU CONTINUUM

20. - Préliminaires.

Il conviendrait sans aucun doute de chercher à établir les principes de la théorie du continuum sans faire appel à des considérations étrangères à la géométrie ([260]), mais jusqu'ici on a plutôt essayé de rattacher ces principes à des notions analytiques comme celle de la représentation des lignes et des surfaces [cf. III 2] ou à la théorie des ensembles [cf. II 2].

Cependant, dans quelques-unes de ses recherches, G. CANTOR ([261]) a abordé *directement* l'étude de quelques questions concernant le continuum ([262]).

Quoi qu'il en soit, pour édifier *actuellement* une théorie du continuum il est indispensable de rappeler un certain nombre de résultats empruntés à d'autres théories:

1) C'est d'abord la possibilité, démontrée par G. CANTOR, de faire correspondre d'une façon *biunivoque* [que nous avons nommée *parfaite* (I 1, §2)] les points d'un segment de droite donné (u) aux points d'un carré donné (x, y), et cela, comme l'a montré G. PEANO, aussi bien à l'aide de fonctions continues non univoquement réversibles qu'à l'aide de fonctions continues univoquement réversibles

$$x = f_1(u)\,, \qquad y = f_2(u)\,.$$

2) C'est ensuite l'impossibilité d'établir entre deux variétés

$$(x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_m)\,, \qquad (y_1\,, y_2\,, \ldots\,, y_n)$$

([260]) F. ENRIQUES, « Rend. Circ. mat. Palermo », 12 (1898), p. 222.
([261]) « Math. Ann. », 46 (1895), p. 481.
([262]) *Depuis la constitution de la géométrie non-archimédienne [n^os 46 à 52], une orientation différente a été imprimée à ces recherches.*

d'ordres m et n, où m et n sont plus grands que un et où m est différent de n, une correspondance biunivoque et continue ([263]).

3) C'est aussi le théorème de C. JORDAN ([264]): Toute courbe plane fermée

$$x = \varphi(t)\,, \qquad y = \psi(t)$$

sans point double (ou multiple), où $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont des fonctions finies et continues de t, partage le plan en deux régions telles que, si l'on joint par un trait continu un point fixé arbitrairement dans l'une des deux régions à un point fixé arbitrairement dans l'autre région, ce trait continu rencontre la courbe en un point au moins. On donne à l'une de ces régions le nom de *région intérieure*, à l'autre le nom de *région extérieure* à la courbe fermée.

4) C'est enfin le fait que la distinction entre courbes planes analytiques et courbes planes non-analytiques n'est possible, en général, que si l'on tient compte, non seulement de la courbe envisagée elle-même mais encore du système de coordonnées auquel on rapporte la courbe dans le plan.

Si l'on exclut les *points singuliers* et si l'on ne considère qu'une région *finie* du plan, l'ensemble des courbes analytiques satisfait à la condition fondamentale qui nous est donnée par l'intuition que nous avons des courbes (que l'on imagine entièrement tracées):

α) *Deux courbes ne se coupent qu'en un nombre fini de points.*

Si l'on considère inversement comme donnés tous les segments de droite et tous les arcs de parabole d'ordres quelconques 2, 3, ... que l'on peut concevoir à l'intérieur d'une région finie, arbitrairement fixée dans le plan, on peut démontrer ([265]) que toute ligne (l) devant satisfaire relativement à ces segments de droite et à ces arcs de parabole, à la condition α) a en chacun de ses points une tangente, ou tout au moins une tangente à droite et une tangente à gauche; et l'on peut aussi démontrer que le ligne (l) a, par suite aussi, en chacun de ses points une parabole osculatrice d'ordre 2, d'ordre 3, ... et en général d'ordre entier quelconque n. La ligne (l) peut donc être représentée en coordonnées cartésiennes par trois fonctions F admettant des dérivées de tous les ordres ou, tout au moins, des dérivées à droite de tous les ordres et des dérivées à gauche de tous les ordres. Si l'on admet que, dans une région du plan convenablement limitée, la ligne (l) ne coupe qu'en un nombre *fini* de points chaque ligne analytique sans

---

([263]) Pour ce qui concerne les résultats (1°) et (2°) voir I 7, 2.
([264]) Cf. III 2, 8.
([265]) *Cette démonstration, due à F. ENRIQUES, n'a pas encore été publiée.*

points singuliers dans cette région, il est d'ailleurs fort vraisemblable que, dans cette région du plan, les trois fonctions F sont des fonctions analytiques.

21. - La notion de ligne.

Dans la théorie du continuum le premier concept que l'on rencontre est celui de la *variété continue à une dimension.*

On peut, par abstraction, identifier ce concept à celui de la *ligne*, à condition de prendre le *point* de la ligne comme *élément* de la variété continue à une dimension et de faire, en outre, abstraction des relations de la ligne avec l'espace dans lequel elle est située ainsi que de toute notion métrique (notion de longueur) concernant ses segments s'il s'agit d'une ligne droite, ses arcs s'il s'agit d'une ligne courbe. Les seules propriétés de la ligne que l'on doive prendre en considération sont celles qui se rattachent à sa détermination génétique par le mouvement d'un point, comme, par exemple, les propriétés concernant la suite naturelle des points d'une ligne, ou la continuité de la ligne, ou encore la notion de segment sur une droite, ou d'arc sur une courbe.

Pour formuler dans un système logique, en se plaçant uniquement au point de vue de la théorie du continuum, les propriétés qui caractérisent une variété à une dimension, ou une ligne envisagée comme on vient de le dire, il convient d'envisager d'abord un type déterminé de ligne, suffisamment simple, auquel on cherchera ensuite à ramener tous les autres.

Nous prendrons pour ce type la ligne (sans point double) que nous appellerons *ligne ouverte*, c'est-à-dire ligne *non limitée.* Nous appellerons *variété élémentaire* et nous représenterons par le symbole v_1 chaque variété à une dimension que l'on peut identifier à une ligne ouverte.

On peut caractériser les propriétés fondamentales des variétés élémentaires v_1 soit en se plaçant au point de vue *génétique*, soit en se plaçant au point de vue *actuel.*

Suivant que l'on se place à l'un ou à l'autre de ces deux points de vue on devra d'ailleurs appliquer sous la forme de K. WEIERSTRASS ou sous celle de R. DEDEKIND [§ 13] les postulats de la droite et le postulat de la continuité [§ 10].

Pour abréger, on convient de *dire* que chacun de ces deux points de vue implique *deux ordres continus opposés* sur v_1 (266).

Celà posé, il s'agit de savoir si les hypothèses faites suffisent pour

(266) *Un *ordre continu* sur une ligne *fermée* s'appelle une *disposition.**

permettre la représentation des points de v_1 sur le continuum *analytique* d'une variable réelle x, ou, ce qui est identique, sur un segment rectiligne dont les points extrêmes sont exclus. En d'autres termes, il s'agit de savoir si les hypothèses faites suffisent à l'*introduction des coordonnées.*

B. RIEMANN (267), qui, le premier, a envisagé dans toute sa généralité le concept du continuum à une dimension, considérait comme évident que ces hypothèses sont suffisantes. Il rattachait la variation continuelle de l'élément générateur de v_1 à la notion de la durée écoulée pendant cette génération. On n'a pas tardé toutefois à faire ressortir que cette supposition contenait implicitement un postulat (268).

Il est facile de formuler ce postulat si l'on admet que dans la variété élémentaire v_1 on peut comparer entre elles deux parties limitées quelconques d'après le critère de la *congruence*, tout au moins quand ces parties limitées de v_1 ont une extrémité commune.

Mais même si l'on fait abstraction de tels rapports de congruence, il suffit d'admettre comme postulat que, par un procédé quelconque, on puisse construire dans v_1 un ensemble dénombrable E de points de façon que tout point de v_1 soit un point-limite de l'ensemble E.

En s'appuyant sur ce postulat, G. CANTOR (269) définit le concept de v_1 de façon que cette variété à une dimension puisse être représentée sur le continuum analytique de la variable réelle x, que l'on envisage dans la théorie analytique des ensembles.

Il importe de remarquer que si ce postulat introduit à l'intérieur de v_1 un ensemble particulier E, l'intuition que nous pouvons avoir de la variété v_1 considérée en elle-même, indépendamment du concept de la congruence, ne nous renseigne en rien sur la construction de cet ensemble. C'est pourquoi nous tenons *le concept de la variété élémentaire v_1 comme plus général que celui du continuum analytique.* Voir à ce sujet les théories non-archimédiennes [§§ 46 à 52].

La question de l'introduction des coordonnées dans la variété élémentaire v_1 se présente sous un nouveau our quand on envisage v_1 comme contenue dans une variété à deux dimensions; aussi ne traiterons-nous cette question que plus loin.

Une fois en possession du concept de la variété élémentaire v_1 on parvient aisément à celui d'une variété *quelconque* à une dimension et, en particulier, à celui d'une *variété limitée* à une dimension.

---

(267) *Habilitationtsschrift* (12); « Abh. Ges. Gött. », 13 (1866-7), éd. 1868, math. p. 136; *Werke* (2e éd.) publ. par H. WEBER, Leipzig 1892, p. 275; trad. L. LAUGEL, Paris 1898, p. 283.
(268) Voir. F. KLEIN, « Math. Ann. », 6 (1873), p. 132, 143, 144.
(269) « Math. Ann. », 46 (1895), p. 481.

Convenons tout d'abord de désigner, pour abréger, sous le nom de *segment linéaire* soit un segment rectiligne soit un arc de courbe. On démontre qu'une variété *limitée* quelconque à une dimension peut être représentée d'une façon biunivoque [ou *parfaite* (I 1, § 1)] sur un segment linéaire. Or par la seule suppression de son origine et de son extrémité un segment linéaire devient une ligne ouverte comme celles que nous avons envisagées plus haut. Il suffit donc de modifier quelque peu les propositions précédentes pour qu'elles s'appliquent au concept d'une variété *limitée* quelconque à une dimension ou, si l'on veut, du *segment linéaire considéré en soi.*

On observe ensuite que *le concept le plus général d'une variété à une dimension*, ou d'une ligne, se rattache aux précédents, puisqu'on peut considérer une ligne quelconque comme formée par une juxtaposition de plusieurs segments linéaires soudés les uns aux autres de façon que l'extrémité de l'un coïncide avec l'origine de l'autre d'une façon convenable.

Si, en particulier, on juxtapose deux segments linéaires AB et CD de façon que A et D d'une part, B et C d'autre part, coincident, on obtient une ligne *fermée.* Nous représenterons les lignes fermées ou plutôt les variétés à une dimension correspondantes par le symbole V_1.

En se plaçant au point de vue *génétique*, les postulats qui, dans la théorie du continuum, caractérisent les propriétés de la variété V_1 peuvent être établis *directement* si l'on admet deux *ordres cycliques opposés* sur V_1, en d'autres termes si l'on admet que les *éléments* de V_1 (qu'on identifie aux *points* de la ligne fermée correspondante) puissent être *disposés* (270) dans l'un et l'autre sens sur V_1 *d'une façon cyclique* c'est-à-dire telle que les trois conditions que voici soient vérifiées:

1) Si un élément quelconque de V_1 est donné il existe *un seul ordre* sur V_1, ayant un sens déterminé avec cet élément comme *premier élément*, et dans lequel:

a) de deux éléments B et C, toujours l'un *précède* l'autre; si B précède C, C *suit* B;

b) si B précède C et si C précède D, alors B précède D;

c) entre deux éléments quelconques B et C il y a une infinité d'éléments;

d) il n'y a aucun *dernier* élément.

On appelle cette disposition des éléments de V_1 la *disposition natu-*

(270) *On entend par *disposition* d'éléments donnés sur une ligne formée la règle suivant laquelle on fixe une infinité d'*ordres possibles* de ces éléments. Pour fixer *un* de ces ordres, il suffit de fixer d'une part un des deux sens appartenant à la disposition et d'autre part celui des éléments qui doit être le premier.*

relle de V_1. Par rapport à cette disposition naturelle:

2) Les deux ordres de V_1 correspondant au même élément mais aux deux sens opposés sont des inversions l'un de l'autre.

3) Si, dans l'un des ordres naturels correspondant à un premier élément A, trois éléments P_1, P_2, P_3 se suivent dans l'ordre indiqué par leur indice, dans tout autre ordre naturel de même sens que le premier, mais ayant un autre premier élément A', les trois éléments envisagés se suivent, soit dans l'ordre

$$P_1, P_2, P_3,$$

soit dans l'ordre

$$P_2, P_3, P_1,$$

soit enfin dans l'ordre

$$P_3, P_1, P_2$$ (271).

A ces postulats il faut encore adjoindre le postulat de la continuité dans les sens restreint de G. CANTOR [§ 13].

En se plaçant au point de vue *actuel*, les postulats qui, dans la théorie du continuum, caractérisent les propriétés de la variété V_1 (correspondant à une ligne *fermée*) peuvent être établis si l'on suppose comme concept primitif le concept des *paires d'éléments qui se séparent* (272).

On postule alors:

Quatre éléments de V_1 ne peuvent être groupés que d'une seule manière en paires qui se séparent.

Si les paires AB, CD et AC, BE se séparent, alors les paires CD, BE et AC, ED se séparent aussi:

Ces postulats admis, on peut *définir* la disposition naturelle de V_1 correspondant à un premier élément donné et dans laquelle deux éléments B et C se suivent dans un ordre déterminé.

Aux postulats concernant les paires qui se séparent il faut encore adjoindre le postulat de la continuité sous une forme convenable.

---

(271) F. ENRIQUES, « Reale Ist. Lombardo, Rendic. », (2) 27 (1894), p. 550 [queste *Memorie*, vol. I, VIII]; *Lezioni geom. proiettiva*, (27), (1re éd.), p. 9 et suiv.; éd. allemande par H. FLEISCHER, *Vorlesungen über projektivische Geometrie*, Leipzig 1903, p. 23.

(272) G. VAILATI, « Rivista mat. », 5 (1895), p. 75-8. Cf. M. PIERI, « Atti Accad. Torino », 30 (1894-5), p. 607; 31 (1895-6), p. 381, 457; G. VAILATI, « Rivista mat. », 5 (1895), p.183-5; A. PADOA, « Revue math. [Rivista] », 6 (1899), p. 35-41 [1896]; M. PASCH, « Math. Ann. », 48 (1897), p. 111.

On remarquera que, sans le postulat de la continuité, les postulats précédents s'appliquent aussi bien à une ligne ouverte qu'à une ligne fermée.

22. - Surfaces. Variétés à *n* dimensions.

De même que la *ligne* sert de type aux variétés à une dimension [§ 22], de même la *surface* envisagée en soi ou l'*espace* peuvent servir à fixer les notions de variété à deux ou à trois dimensions. Ces notions correspondent à des types plus ou moins intuitifs. On généralise ensuite, à un nombre quelconque de dimensions, les notions ainsi acquises de variété à une, deux ou trois dimensions.

Il semble difficile de dire qui a, le premier, tenté cette généralisation. C'est qu'en réalité elle a été d'abord réalisée dans un but tout différent. Ainsi J. L. LAGRANGE (273) assimile la Mécanique à une Géométrie à quatre dimensions.

Dans les recherches de Géométrie pure, il s'agit essentiellement de généraliser le concept de la disposition des points d'une surface suivant deux directions ou dans un ordre double, et celui de la disposition des points de l'espace suivant trois directions ou dans un ordre triple.

Cette généralisation est analogue à celle qui permet de passer du concept d'une ligne mobile, formée de points disposés convenablement, à celui d'une surface, puis du concept de la surface supposée à son tour mobile, au concept d'une étendue déterminée ou à celui de l'espace tout entier. En continuant ainsi on parvient à la notion de variété à 4, 5, ... et, en général, à un nombre quelconque n de dimensions. Les éléments de la variété à n dimensions ainsi engendrée sont dit *disposés en ordre multiple.*

La possibilité de cette généralisation a déjà été connue par J. F. HERBART (274) dont le système philosophique a exercé dans cet ordre d'idées une grande influence sur le développement des idées de H. GRASSMANN et de B. RIEMANN.

En se plaçant à un point de vue exclusivement mathématique, A. CAYLEY (275) a d'ailleurs développé, dès 1843, le concept de variété à un nombre quelconque de dimensions.

En 1844, H. GRASSMANN (276) a, de son côté, formulé explicitement

---

(273) **Théorie des fonctions analytiques*, Paris an V, p. 223; *Œuvres*, 9, Paris 1881, p. 337.*

(274) **Werke* (86), 3, p. 59.*

(275) « Cambridge math. J. », 4 (1843-5), p. 119; « Papers », 1, Cambridge 1889, p. 55.

(276) *Die lineale Ausdehnungslehre*, Leipzig 1844, préface p. IX, X; (2e éd.), Leipzig 1878, préface p. VII; *Werke* (58), 1¹, p. 10-1.

la possibilité de soumettre au calcul l'étude de variétés plus générales que l'espace à trois dimensions qu'elles sont supposé contenir. Il a recours, à cet effet, à une analyse vectorielle généralisée dans laquelle, en particulier, l'addition jouit encore de propriétés commutatives. Le concept de *grandeur extensive*, auquel il parvient dans cette analyse vectorielle, embrasse celui de variété à n dimensions dont l'étude fait l'objet de la théorie du continuum; il contient d'ailleurs quelque chose de plus.

Le concept de variété à n dimensions à été posé par B. Riemann (277) d'une façon tout à fait générale à l'aide d'une *définition genétique récurrente.*

B. Riemann considère une variété à n dimensions comme une juxtaposition d'éléments pouvant être distribués en une infinité de variétés à $n-1$ dimensions, l'ensemble de ces variétés à $n-1$ dimensions formant une variété à *une* dimension, et cela de façon que chaque élément de la variété à n dimensions appartienne à l'une des variétés à $n-1$ dimensions.

Une variété à *deux* dimensions apparaît ainsi comme une juxtaposition d'éléments pouvant être distribués en une infinité de variétés à une dimension, l'ensemble de ces dernières variétés formant lui-même une variété à une dimension. Cette distribution des éléments de la varieté à deux dimensions correspond à la génération d'une surface par le mouvement d'une ligne, mouvement dans lequel la suite des lignes génératrices forme une variété à une dimension. On peut dire que les points de la surface sont disposés en quelque sorte suivant *deux directions*, ou dans un *ordre double.*

Comme type de variété à deux dimensions on peut prendre une surface simplement connexe, *ouverte*, c'est-à-dire *non-limitée.* Nous appellerons *variété élémentaire à deux dimensions* et nous représenterons par le symbole v_2, toute variété à deux dimensions dont les éléments correspondent aux points de cette surface ouverte et sont conçus suivant les mêmes relations d'ordre.

Le mode de génération des surfaces dont B. Riemann a fait usage amène tout naturellement à considérer sur une surface quelconque donnée un faisceau de *lignes genératrices* et un faisceau de *lignes directrices*; ces dernières sont décrites par les différents points de la ligne génératrice mobile. On peut alors définir la variété élémentaire v_2 relativement à *deux faisceaux de variétés élémentaires* v_1 *à une dimension* de façon que

1) un élément de v_2 appartienne à une variété v_1 de chacun des deux faisceaux [c'est là la *propriété fondamentale* des faisceaux envisagés],

---

(277) *Habilitationsschrift* (12); « Abh. Ges. Gött. », 13 (1866-7), éd. 1868, math. p. 134; *Werke* (2e éd.), publ. par H. Weber, Leipzig 1892, p. 273; trad. L. Laugel, Paris 1898, p. 281.

2) une variété élémentaire quelconque v_1 de l'un des deux faisceaux et une variété élémentaire quelconque v_1' de l'autre faisceau aient en commun un et un seul élément de v_2,

3) étant données plusieurs variétés v_1 de l'un des deux faisceaux, ceux de leurs éléments qui appartiennent à deux variétés v_1' de l'autre faisceau sont disposés dans le même ordre sur l'une et l'autre de ces deux variétés v_1'.

L'ensemble des deux faisceaux qui satisfont aux conditions 1), 2) et 3) constitue un *réseau* dont les sommets sont les éléments de v_2. La dispositions en réseau de ces éléments de v_2 permet de définir le concept du voisinage (ou entourage) d'un point d'une surface, le concept de point-limite sur une surface, le concept de correspondance biunivoque et *continue* entre deux variétés élémentaires v_2, le concept de correspondance biunivoque entre un faisceau continu de variétés v_1 et une variété v_2 *sur laquelle il est situé*, et d'autres concepts encore dont l'importance est moindre [cf. § 21].

En s'appuyant sur ce mode de génération de la variété élémentaire v_2 et sur les concepts qui s'y rapportent, on peut développer une théorie des variétés v_2 dans laquelle on démontre aisément les propriétés concernant la distribution de v_2 en parties limitées par des variétés v_1 faisant partie du faisceau des variétés v_1 situées sur v_2.

Toutefois la théorie des variétés élémentaires v_2 que l'on édifie ainsi ne saurait avoir qu'un simple caractère hypothétique, car on n'aperçoit aucun moyen de construire effectivement sur v_2 un faisceau de variétés élémentaires à une dimension v_1'' distinct des deux faisceaux v_1 et v_1' constituant le réseau dont on a parlé, sans faire appel au postulat de Cantor sur l'existence de l'ensemble spécial g du § 21 [cf. III 2, §§ 8 et 9].

En faisant appel à ce postulat on supprime la difficulté par l'introduction sur v_2 d'un système de coordonnées, autrement dit par une représentation biunivoque de v_2 sur une variété analytique (x, y) ce qui permet d'obtenir une représentation sur le continuum analytique du faisceau v_1''.

On peut toutefois éviter l'emploi de ce postulat de Cantor en introduisant, outre les conditions 1), 2) et 3), le postulat que voici:

4) Outre les deux faisceaux v_1 et v_1' constituant sur v_2 le réseau dont on a parlé, il existe sur v_2 un troisième faisceau de variétés v_1'' qui sont continues sur v_2 et coupent chacune une et une seule fois chacune des variétés v_1 et chacune des variétés v_1' des deux premiers faisceaux.

On démontre en effet ([278]) que, une fois admise l'existence de deux modes distincts de génération d'une variété v_2 par deux faisceaux de

([278]) F. ENRIQUES, « Rend. Circ. mat. Palermo », 12 (1898), p. 222.

variétés à une dimension formant réseau conformément aux conditions 1), 2) et 3), il y a une infinité de modes semblables de génération de v_2.

En s'appuyant sur 1), 2) 3), et 4) on peut *représenter d'une façon biunivoque la variété élémentaire v_2 sur la variété analytique* (x, y).

Ceci fait, on obtient aisément une définition de v_2 convenant à une étude systématique et complète de toutes les variétés à deux dimensions. Il suffit pour cela d'observer tout d'abord que le concept de voisinage d'un point et, par suite celui de point-limite sur une surface sont indépendants de la notion des réseaux de cette surface qu'on a utilisée pour définir ces concepts; ils appartiennent au concept de la variété v_2 elle-même. De là résulte que si l'on se donne un premier réseau sur v_2, on peut définir tout autre réseau sur v_2 en le rapportant au premier. Mais si l'on se donne seulement la variété v_2 elle-même, cette indépendance du concept de point-limite apparaît comme exprimant une relation entre deux distributions quelconques des éléments de v_2 en réseaux, et cette relation constitue une partie des conditions permettant d'obtenir la définition complète cherchée des variétés v_2.

La *définition génétique* de v_2 résulte des postulats suivants qui *caractérisent* v_2:

a) Les éléments de v_2 peuvent être disposés en réseaux conformément aux conditions 1), 2) et 3).

b) S'il y a deux distributions en réseaux des éléments de v_2 et si pour la première de ces deux distributions σ représente le voisinage d'un élément S, il existe nécessairement, pour la seconde de ces deux distributions, un voisinage σ_1 de l'élément S contenu dans le voisinage σ de cet élément S.

c) Sur v_2 il y a *deux* réseaux R_1, R_2 tels que l'un des faisceaux générateurs de R_1 coïncide avec l'un des faisceaux générateurs de R_2 et que chaque variété c_1 du second faisceau générateur de R_1 et chaque variété v_1' du second faisceau générateur de R_2 se coupent en un et un seul élément.

Ces considérations s'étendent aisément aux variétés à un nombre quelconque n de dimensions. Pour chaque indice n, toute variété élémentaire v_n est engendrée par n faisceaux générateurs de variétés élémentaires v_{n-1}.

On peut essayer de définir le concept de la variété élémentaire v_2 en se plaçant au point de vue *actuel.*

Il suffit pour celà de caractériser les propriétés qui se rattachent au concept des environs d'un élément de v_2 sans recourir au concept des environs fondé sur la distribution en réseau des éléments de v_2 dont il a été rendu indépendant par le postulat 4). Dans ce but on peut s'appuyer sur les postulats suivants à l'aide desquels D. HILBERT ([279]) a *défini* la variété v_2 en la rapportant au plan abstrait:

Le plan est un système d'éléments auxquels on donne le nom de *points*. Chaque point A du plan détermine certains systèmes partiels de points auxquels il appartient lui-même et qu'on appelle le *voisinage* de A ou l'*entourage* de A.

Les points du voisinage σ d'un point A peuvent être représentés d'une façon biunivoque par les points d'un certain *domaine de Jordan* dans le plan analytique (x, y). On dit de ce domaine de Jordan qu'il est une *image* des environs σ de A.

Chaque domaine de Jordan contenu dans une image de σ, et comprenant à son intérieur l'image du point A, est une image du voisinage déterminé σ_1 du point A.

Si l'on envisage diverses images des mêmes environs σ de A, la correspondance de ces diverses images est biunivoque et continue.

Si B est un point déterminé des environs σ de A, σ peut aussi être envisagé comme formant les environs de B.

Étant donnés un voisinage σ_1 et un voisinage σ_2 d'un même point A, on peut toujours envisager un voisinage σ de A commun à σ_1 et à σ_2.

Si A et B sont deux points quelconques du plan abstrait, on peut envisager un voisinage σ de A qui contienne B.

Il y a lieu de remarquer qu'en formulant ainsi ces postulats on envisage comme concept primitif non défini, non seulement le concept du *voisinage* d'un point, mais aussi celui d'une *certaine représentation* de ce voisinage sur un domaine de Jordan. Ceci suppose qu'entre toutes les correspondances (continues ou discontinues) pouvant être établies entre les deux variétés à deux dimensions envisagées (le voisinage de A et son image) on fait un choix. Il faudrait donc formuler expressément une règle déterminée précisant ce choix. Cette règle ne se trouve pas, du moins explicitement, formulée dans le système de D. HILBERT; mais D. HILBERT y supplée en supposant que la correspondance biunivoque entre deux domaines de Jordan, images du même voisinage, est *continue*. Une telle hypothèse ne permet pas toutefois de reconnaître si un domaine donné de Jordan correspondant biunivoquement à un voisinage σ d'un point A est, ou non, une image de ce voisinage, à moins qu'on ne suppose déjà connue a priori de quelque façon *une* image, au moins, de σ; or cette dernière hypothèse revient à se donner dans le voisinage du point A la distribution en réseau

$$x = \text{constante}\,, \qquad y = \text{constante}$$

et nous ramène donc, en réalité, à la définition *génétique* de v_2.

([279]) « Nachr. Ges. Gött. », 1902, p. 233; *Grundlagen* ([27]), (3[e] éd.), p. 122 en note.

Au concept de variété élémentaire ouverte v_2 se rattachent les concepts de toutes les variétés connexes à deux dimensions.

Pour passer du concept de v_2 au concept de surface ou de variété élémentaire à deux dimensions *limitée par une ligne* il suffit de modifier le concept de v_2 d'une façon entièrement analogue à celle qui nous a permis de passer du concept de v_1 à celui de V_1. Cette analogie parfaite nous dispense d'insister ici sur ces modifications. Nous désignerons dans ce qui suit, par V_2 les variétés à deux dimensions correspondant aux surfaces limitées par des lignes.

On parvient au concept plus général des variétés à deux dimension correspodant au surfaces *fermées sans bords*, et finalement au concept le plus général d'une variété quelconque à deux dimensions par simple juxtaposition d'un nombre fini de variétés V_2 dont les lignes limites sont soudées convenablement.

Après avoir effectué ces soudures il faut toutefois faire abstraction de la façon particulière dont les variétés V_2 envisagées ont été engendrées et, à cet effet, exprimer par un postulat les relations existant entre deux formations distinctes d'une même variété V_2.

Cela n'a pas encore été fait jusqu'ici en se plaçant, comme il convient, au seul point de vue des principes de la géométrie. On s'est contenté d'effectuer à cet égard quelques recherches d'un caractère plus particulier, comme celles ayant pour objet de définir le *genre* de la variété envisagée ou encore sa *connexion*.

Nous nous contenterons ici de faire remarquer que, à ce point de vue, la propriété qui, pour les surfaces de l'espace ordinaire à trois dimensions, se traduit par le mot « unilatéral » et la propriété contraire qui se traduit par le mot « bilatéral » apparaissent comme des propriétés intrinsèques des variétés à deux dimensions. A ces deux propriétés contraires correspondent respectivement ([280]) l'inversibilité du sens de rotation autour d'un point et la non-inversibilité de ce sens de rotation ([281]).

23. - Lignes tracées sur une surface.

Les recherches concernant le concept de la ligne tracée sur une surface ou sur une variété à plus de deux dimensions et, plus généralement, les recherches concernant le concept de la variété continue à m dimensions faisant partie d'une variété continue à $m+n$ dimensions se

([280]) Cf. F. KLEIN, « Math. Ann. », 9 (1876), p. 479.

([281]) Au sujet de ces considérations et de leur extension a des variétés à un nombre quelconque de dimensions, voir l'article III 6.

rattachent tout naturellement aux recherches sur les ensembles continus que G. CANTOR définit comme des ensembles à la fois parfaits et connexes ([282]).

On formule une définition complète d'une ligne [variété élémentaire v_1 (§ 21)] tracée sur une surface, en postulant ([283]):

1) l'existence d'une disposition continue [et, par suite aussi, de la disposition contraire] à l'*intérieur* de la ligne;

2) que, si l'on se donne un point A de la ligne et un voisinage σ de A sur la surface, il existe toujours sur la ligne un segment [§ 21] contenant le point A et entièrement situé dans σ.

De ces deux conditions, la première se rapporte aux propriétés *intérieures* de la ligne en tant que variété élémentaire continue v_1, la seconde à sa propriété *extérieure* (c'est-à-dire relative à la surface) par laquelle la continuité intérieure de la ligne prend le sens de continuité de cette ligne *sur* la surface.

L'ensemble des points rationnels d'un segment *rectiligne* dans le plan et des points irrationnels d'un segment rectiligne parallèle au premier peut d'ailleurs être disposé de façon que la condition 1) soit remplie sans que, dans le plan de ces deux segments, la conditions 2) le soit.

On remarquera que la proposition 2) indique que la ligne est un ensemble dense dans un intervalle ([284]) et que la condition de continuité intérieure 1) y ajoute que cet ensemble est *clos* ou *fermé* (abgeschlossen) en sorte que les conditions 1) et 2) réunies indiquent que l'ensemble est *parfait* au sens de G. CANTOR [cf. II 1, § 21 note 288].

De plus, d'après la condition 1), la disposition intérieure est telle qu'il y a toujours, entre deux points quelconques de la ligne, une suite de points intermédiaires, ce qui exclut les ensemble formés de plusieurs parties continues séparées les unes des autres.

La définition de la ligne continue *fermée* (sans point double) *tracée sur une surface* est entièrement analogue à celle de la ligne (variété élémentaire continue v_1) donnée au § 21. Le théorème de C. JORDAN [§ 20] s'applique ([285]) à ces lignes et la réciproque de ce théorème s'y applique aussi comme l'a montré A. SCHOENFLIES ([286]).

([282]) Voir les articles I 7 et II 2.

([283]) Voir F. ENRIQUES, *Conferenze di geometria* (cours autographié), Bologne 1894-5, p. 45; « Rend. Circ. mat. Palermo », 12 (1898), p. 222.

([284]) G. CANTOR [« Math. Ann. », 21 (1883), p. 545; « Acta math. », 7 (1885-6), p. 105] dit qu'un ensemble est *dense dans un intervalle* (*in sicht dicht*) lorsque chaque point de l'ensemble situé dans cet intervalle est un point-limite de points de cet ensemble.

([285]) F. ENRIQUES estime que ce théorème pourrait être démontré en s'appuyant seulement sur la définition de ces lignes continues fermées. Il serait alors démontré que le théorème de C. JORDAN ne dépend aucunément du choix que l'on fait du système de coordonnées dans le plan.

([286]) Cf. III 2, n° 8.

Dans des recherches plus profondes concernant la décomposition d'une surface par des ligne tracées sur cette surface, on est amené à étudier le rapport de ces lignes avec les lignes coordonnées tracées sur la surface. Nous nous contenterons ici de renvoyer à cet égard à ce qui a été dit [§ 22] sur les lignes tracées dans un plan.

Lorsque, dans ce qui suit, on aura occasion de parler d'une *ligne analytique* tracée sur une surface (ou sur une variété quelconque) on supposera toujours qu'une double *famille de lignes* est donnée sur la surface et y détermine un *système de coordonnées curvilignes.* C'est seulement relativement à cette double famille de lignes que le fait pour une ligne donnée d'avoir le caractère d'une *ligne analytique* acquiert un sens déterminé.

PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

24. - Postulats concernant une région de l'espace.

En étudiant systématiquement les propriétés graphiques des figures sans faire intervenir de notion métrique, K. G. CHR. VON STAUDT [287] a posé les fondements de la géométrie projective.

Dans une analyse critique de principes sur lesquels repose cette science, F. KLEIN [288] a surtout insisté sur ce que la géométrie projective est entièrement indépendante du postulat des parallèles: cela résulte déjà de ce qu'on peut y effectuer toutes les constructions dans une région *limitée* de l'espace, convenablement choisie.

Les postulats de la géométrie projective dans une région limitée de l'espace ont été analysés et formulés en toute rigueur par M. PASCH [289].

Si la région de l'espace que l'on envisage est limitée par un tétraèdre, ou par une surface convexe, il suffit de prolonger dans les deux sens, à l'intérieur de cette région, chacun des segments rectilignes qu'on y peut concevoir, pour parvenir à la notion générale de *ligne droite* (en tant que définie à l'intérieur de cette région).

Les propriétés caractéristiques des segments rectilignes énoncées au point de vue actuel [§ 10], à l'exclusion toutefois de la continuité, et

[287] *Geometrie der Lage*, Nuremberg 1847; *Beiträge sur Geometrie der Lage* (en 3 fascicules), Nuremberg 1856-60.

[288] « Nachr. Ges. Gött. », 1871, p. 419; « Math. Ann. », 4 (1871), p. 573; 6 (1873), p. 112; 7 (1874), p. 531; 17 (1880), p. 52.

[289] *Neuere Geom.* [24]; cf. G. PEANO, *Principii* [25].

la propriété que « deux points déterminent un segment rectiligne » forment le contenu des huit premières propositions fondamentales de M. PASCH: ce sont, si l'on veut, les *postulats de la droite.*

Viennent ensuite les *postulats du plan*, ou plutôt de la surface plane dans la région limitée envisagée. Ils sont au nombre de quatre et concernent la détermination du plan par trois points non en ligne droite, la propriété du plan de contenir le segment rectiligne déterminé par deux points arbitrairement fixés dans le plan, la propriété de deux plans quelconques ayant un point commun d'avoir nécessairement un second point commun, enfin la propriété d'une droite quelconque située dans le plan d'un triangle ABC et rencontrant un des côtés de ce triangle (c'est-à-dire un des trois segments rectilignes AB, BC ou CA) de rencontrer nécessairement un de ses deux autres côtés ([290]). Cette dernière

---

([290]) Ces postulats sont d'ailleurs équivalents aux postulats I du n° 9 et II du n° 10. Si on leur adjoint le postulat de R. DEDEKIND sous la forme descriptive du n° 13, on a un *système complet de postulats descriptifs* pour une région limitée de l'espace.

La réduction du concept du plan proposée par G. PEANO [« Rivista mat. », 4 (1894), p. 51] une fois admise, les postulats descriptifs, dans une région limitée de l'espace, abstraction faite du postulat de la continuité, peuvent être formulés de la façon suivante:

1) Il y a une infinitè d'éléments à chacun desquels on donne le nom de *point.*

2) Deux points distincts quelconques A, B déterminent univoquement une classe de points, renfermant une infinité de points, classe à laquelle ils appartiennent eux-mêmes et à laquelle on donne le nom de *segment* joignant les deux points A et B, qu'on désigne par AB. Deux point, quelconques C et D du segment AB déterminent un segment CD dont chacun des points appartient au segment AB. Si C est un point du segment AB tout point D (autre que C) de ce segment AB appartient soit au segment AC soit au segment CB mais ne peut appartenir à la fois à AC et à CB.

3) Tout segment AB détermine deux autres classes de points auxquelles on donne respectivement le nom de prolongement de AB au delà de A et de prolongement de AB au delà de B. Le prolongement de AB au delà de B, par exemple, est une classe de points tels:

α) que tout point de ce prolongement détermine avec B un segment auquel appartient B,

β) que si C est un point quelconque de AB, le prolongement de CB au delà de B coïncide avec le prolongement de AB au delà de A,

γ) que le prolongement de AC au delà de C est composé du segment CB et de son prolongement au delà de B.

La définition du prolongement de AB au delà de A est identique, à l'ordre des deux points A, B près.

4) Il n'y a pas de point appartenant à la fois à l'un et à l'autre des deux prolongements d'un segment.

*La définition 3) du *prolongement* d'un segment AB (au delà de B par ex.) peut aussi être formulée de la façon suivante [cf. F. SCHUR, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1909, p. 1] après avoir formulé (1°) et (2°) comme plus haut:

3') Si C est un point de segment AB distinct de B et si B appartient à un segment CD, le point C, donc aussi B, appartient au segment AD.

Définition du prolongement. Les postulats 1), 2), 3') étant posés, on appelle *prolongement* du segment AB au delà de B l'ensemble des point D tels que le point B appartienne à chacun des segments AD.

A cette définition on joint encore le postulat:

3") Si C appartient simultanément aux deux segments AB et AD, ou bien le point B est sur AD, ou bien le point D est sur AB.*

Définition de la droite. Une droite AB se compose des points du segment AB et de ceux des propriété exprime, au fond que « la droite divise le plan en *deux* parties » et elle postule, par suite, que le plan est une surface dont la droite est une ligne [cf. § 21].

Dans ces postulats, les concepts de segment rectiligne et de surface plane apparaissent comme primitifs (donnés empiriquement).

Pour passer de la notion d'un espace limité à celle de l'espace projectif il suffit d'adjoindre aux points qui composent l'espace limité de nouveaux éléments convenablement définis auxquels on a donné le nom de *points idéaux*.

Ces éléments sont idéaux au même titre que les points que l'on suppose communs à l'infini à deux droites parallèles ([291]). On les définit en généralisant le concept de « gerbe de droites » qui, au sens primitif du mot, représente l'ensemble des droites passant par un même point donné de la région limitée de l'espace que l'on envisage.

Soient a et b deux droites situées dans un même plan. Si chacune des deux droites c et d est située dans un même plan avec a et dans un même plan avec b, les deux droites c et d seront aussi situées dans

---

deux prolongements de ce segment AB au delà de A et au delà de B.

5) A l'extérieur de chaque droite il y a des points.

6) Soient A, B, C trois points non en ligne droite; désignons par D un quelconque des points du segment BC et par D un quelconque des points du segment AD. Il y a sur AB un point F tel que E soit un des points du segment CF.

7) Soient A, B, C trois points non en ligne droite. Désignons par D un quelconque des points du segment BC et par F un quelconque des points du segment AB. Les deux segments AD et CF ont un point en commun.

Définition du triangle. Un *triangle* est formé par l'ensemble des points des segments obtenus en joignant successivement trois points A, B, C, non en ligne droite, à tous les points des segments BC, AC, AB.

Définition du plan. Un *plan* est formé par l'ensemble des points des droites obtenues en joignant successivement trois points A, B, C, non en ligne droite, à tous les points des droites BC, CA, AB.

*F. SCHUR [*Grundlagen* ([81]), p. 7] ajoute encore:

8) A l'extérieur de chaque plan il y a des points.

Définition de l'espace. L'*espace* est formé par l'ensemble des points de droites obtenues en joignant d'une part successivement quatre points A, B, C, D, non situés dans un plan, respectivement à tous les points des triangles BCD, CDA, DAB, ABC, et d'autre part successivement les points de segments AB, AC, AD, BC, BD, CD à tous les points des segments CD, BD, BC, AD, AC, AB.

A cette definition on joint encore le postulat: A l'extérieur de l'espace il n'y a aucun point.*

([291]) G. BATTAGLINI [« Rendic. Accad. Napoli », (1) 6 (1867), p. 163; « Nouv. Ann. math. », (2) 7 (1868), p. 202, 265] a déjà observé que, dans la géométrie de LOBAČEVSKIJ, les points à l'infini de la droite sont considérés comme reliés *idéalement* entre eux; F. KLEIN [« Math. Ann. », 6 (1873), p. 130] remarque que les points idéaux sont, comme les points à l'infini, donnés par des gerbes de droites et cette remarque est faite à nouveau par G. BATTAGLINI [« Giorn. mat. », (1) 12 (1874), p. 300].

La théorie complète des points idéaux a été développée par M. PASCH [*Neuere Geom.* ([24]), p. 40]. Voir aussi V. REYES Y PROSPER [« Math. Ann »., 32 (1888), p 157], M. PASCH. [id. p. 159], F. SCHUR [id. 39 (1891), p. 113], R. BONOLA [« Giorn. mat. », (2) 7 (1900), p. 105].

un même plan. Cette proposition, démontrée par M. PASCH ([292]) sans supposer que les deux droites a et b aient un point en commun, permet de généraliser le concept de la gerbe de droites.

On appellera *gerbe de droites* l'ensemble des droites, deux à deux situées dans un même plan, sans être toutes dans un même plan. Lorsque les droites de la gerbe ne se rencontrent pas toutes en un même point de la région limitée de l'espace envisagée, on dira que la gerbe est impropre pour cette région et que ses droites ont en commun un *point idéal*.

De là les concepts de *point idéal*, de *droite idéale*, de *plan idéal*, relativement à la région limitée de l'espace envisagée ([293]).

L'introduction des éléments idéaux permet d'énoncer les propriétés concernant la détermination des droites et des plans au moyen d'ensembles de points, et les propositions concernant les intersections des droites et des plans, sans avoir besoin de modifier ces énoncés dans certains cas particuliers.

Mais cette introduction d'éléments idéaux nous oblige à modifier la notion intuitive que nous avons de la *droite*: par adjonction des points *idéaux* cette ligne apparaît plutôt comme une ligne *fermée* que comme une ligne *ouverte*.

Notre intuition journalière de l'espace se trouve ainsi modifiée; le concept de l'*espace ordinaire* est remplacé par celui de l'*espace projectif*.

25. - Postulats de l'espace projectif complet.

On peut aussi parvenir au concept de l'espace projectif par une voie entièrement distincte de la précédente.

L'intuition visuelle peut, en effet, par simple abstraction, nous amener à ce concept. Nous n'examinerons pas ici les difficultés que cette façon de procéder présente au point de vue psychologique. Notre but sera plutôt de montrer comment, en supposant le concept de l'espace entièrement acquis, le géomètre peut développer un système de postulats élémentaires caractérisant l'espace projectif ([294]).

([292]) « Math. Ann. », 32 (1888), p. 159.

([293]) *Le fait que ces éléments idéaux peuvent être introduits sans faire usage du postulat sur lequel on s'appuie pour énoncer le théorème fondamental de la projectivité [§ 27 γ] est important (Note de F. SCHUR).*

([294]) A cet ordre d'idées appartiennent les recherches de F. AMODEO [« Atti Accad. Torino », 26 (1890-1), p. 741], G. FANO [« Giorn. mat. », (1) 30 (1892), p. 106], F. ENRIQUES [*Conferenze di geometria* (cours autographié), Bologne 1894-5, p. 5 (n° 3)], M. PIERI [« Atti Accad. Torino », 30 (1894-5), p. 607; 31 (1895-6), p. 381, 457; 32 (1895-7), p. 343; « Reale Ist. Lombardo, Rendic. », (2) 31 (1898), p. 780; « Memorie Accad. Torino » (2), 48 (1898), p. 1]; B. LEVI, [id. (2) 54 (1904), p. 278]. On peut aussi consulter H. THIEME, « Progr. », Posen 1900.

Les postulats caractérisant l'espace projectif appartiennent à deux groupes bien distincts:

a) *Les postulats relatifs à la determination de droites et de plans et aux intersections des droites entre elles, des plans entre eux ou des droites et des plans.*

Parmi ces postulats il faut signaler tout d'abord celui d'après lequel « deux points déterminent *une droite* », c'est-à-dire un ensemble de points d'ailleurs tout aussi bien déterminé par deux quelconques de ses points.

Le *plan* (complet) peut être *engendré* en projetant d'un point extérieur l'ensemble des points d'une droite.

Le postulat fondamental du plan peut être énoncé de diverses manières. M. PIERI ([295]) l'a énoncé sous la forme très simple que voici:

« Soient A, B, C trois points non en ligne droite. La droite déterminée par A et par un point fixé arbitrairement sur la droite BC et la droite déterminée par B et par un point fixé arbitrairement sur la droite CA, ont un point commun ([296]) ».

De là résulte la propriété du plan complet dans l'espace projectif de contenir la droite complète déterminée par deux quelconques des points de ce plan et aussi la propriété, pour deux droites d'un même plan, d'avoir toujours un point commun.

De même que le plan peut être engendré par projection centrale d'une droite, de même l'espace projectif peut être engendré par projection centrale d'un plan. Pour parvenir ainsi au concept de l'espace projectif ordinaire il faut alors postuler que par projection on épuise l'ensemble de *tous* les points et admettre, à cet effet, qu'une droite et un plan ont toujours un point commun. Ce dernier postulat équivaut à celui d'après lequel, dans la région limitée de l'espace envisagée au § 24, deux plans qui ont un point commun ont nécessairement un second point commun. Son rôle est de limiter à *trois* le nombre des dimensions de l'espace projectif.

En faisant abstraction de ce postulat, on engendre encore, en effet, par projection centrale d'un plan, un espace projectif S_3 à trois dimensions, mais rien n'empêche d'admettre qu'il existe un point au moins hors de S_3. Si de ce point on projette S_3 on engendre un espace projectif S_4 à quatre dimensions, hors duquel on peut encore admettre qu'il existe un point au moins, et en continuant ainsi on parvient à un espace projectif S_n à un nombre quelconque n de dimensions.

Cette génération récurrente d'espaces projectifs à n dimensions a

---

([295]) « Memorie Accad. Torino », (2) 48 (1898), p. 16.

([296]) L'énoncé que F. SCHUR [*Grundlagen* ([81]), p. 7-9] donne d'après E. H. MOORE [« Trans. Amer. math. Soc. », 3 (1902), p. 147] postule *moins* que l'énoncé de M. PIERI.

été exposée par G. VERONESE (297). En y adjoignant les postulats b) dont il va être question, relatifs au caractère linéaire de la droite et au caractère superficial du plan, l'espace S_n apparaît comme une variété particulière à n dimensions dont la propriété caractéristique est exprimée par le postulat du plan convenablement modifié pour $n > 2$.

b) *Les postulats relatifs aux propriétés linéaires de la droite et aux propriétés superficielles du plan.*

La droite de l'espace projectif est une ligne fermée; ses points sont rangés en un ordre cyclique [§ 22].

La propriété du plan d'être une surface dans laquelle les droites sont des lignes peut être énoncée au point de vue génétique en postulant le *caractère projectif* de la disposition cyclique des points de la droite (298).

De ce postulat et de celui d'après lequel « deux droites d'un même plan ont toujours un point commun », il résulte que le plan projectif est une surface *à un sens* (299).

On peut remarquer, à ce propos, que la différence qui se manifeste à cet égard entre le plan métrique ordinaire euclidien et le plan projectif ne se retrouve pas quand on passe des variétés à deux dimensions aux variétés à trois dimensions.

Dans l'espace projectif aussi bien que dans l'espace métrique ordinaire euclidien il y a toujours deux sens hélicoïdaux non réductibles l'un à l'autre.

26. - Coordonnées projectives.

Les postulats du § 24 ou les postulats équivalents du § 25 permettent de représenter les points de l'espace projectif au moyen des rapports de quatre coordonnées homogènes et cela de façon que chaque plan soit représenté par une équation du *premier* degré. On a donné à ces coordonnées homogènes le nom de *coordonnées projectives.*

Dans l'espace ordinaire (euclidien ou non euclidien) on obtient un système de coordonnées projectives en fixant un tétraèdre fondamental et un point-unité E. Pour obtenir les coordonnées projectives d'un point P on mène un plan par ce point P et chacune des six arêtes d_{hi} du tétraèdre fondamental et l'on détermine l'intersection P_{jk} de ce plan

(297) Il en sera question dans l'article III 26.

(298) Voir F. ENRIQUES, *Lezioni geom. proiettiva* (27), p. 27; éd. allemande par H. FLEISCHER, *Vorlesungen über projektivische Geometrie*, Leipzig 1903, p. 24.

(299) L. SCHLÄFLI dans F. KLEIN, « Math. Ann. », 7 (1874), p. 550; W. FIEDLER, *Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage*, (2° éd.), Leipzig 1875, p. 549, 739; (3° éd.) 3, Leipzig 1888, p. 62, 75, 102-9. Cf. nos 22, 30.

et de l'arête d_{ik} du tétraèdre opposée à d_{hi}; on dit de ce point P_{jk} qu'il est la *projection* de P sur l'arête d_{jk}. On projette de même le point-unité E sur les six arêtes du tétraèdre. On obtient ainsi sur chacune de ces six arêtes d_{jk} quatre points: les deux sommets A_j, A_k du tétraèdre et les projections P_{jk} et E_{jk} de P et de E. Ces quatre points rangés dans l'ordre indiqué déterminent un rapport anharmonique

$$(A_i,\ A_k,\ P_{jk},\ E_{jk});$$

on appelle coordonnées projectives x_h, x_i, x_j, x_k du point P quatre nombres dont les rapports sont précisément égaux aux six rapports projectifs ainsi définis sur les six arêtes du tétraèdre, en sorte que, pour j différent de k, on a

$$\frac{x_j}{x_k} = (A_j,\ A_k,\ P_{jk},\ E_{jk})\,, \qquad (j, k = 1, 2, 3, 4);$$

les propriétés fondamentales des rapports projectifs montrent aisément que ces relations concordent et définissent les quatre nombres x_1, x_2, x_3, x_4 à un même coefficient de proportionnalité près (300).

Dans l'espace projectif la même construction permet encore de définir les coordonnées projectives d'un point quelconque P, pourvu que l'on ait soin de définir le rapport anharmonique, ou comme dit K. G. Chr. von Staudt, le *quaterne* (*Wurf*) de quatre points d'une droite, rangés dans un ordre déterminé, comme un *nombre*, sans que dans cette définition intervienne la notion de longueur d'un segment, notion qui n'a aucun sens en géométrie projective.

La définition graphique du rapport projectif se rattache, comme l'a montré K. G. Chr. von Staudt (301) au calcul des quaternes qui lui est dû et que J. Lüroth (302) a complété et systématisé.

La définition graphique du rapport anharmonique s'étend d'ailleurs

---

(300) A. F. Möbius [*Der barycentrische Calcul*, Leipzig 1827, chap. 3; *Werke*, 1, Leipzig 1885, p. 54] a été amené à introduire ce système de coordonnées projectives (le plus général que l'on puisse concevoir) en remarquant que les rapports de ses coordonnées barycentriques aux coordonnées respectives d'un point fixe (le point-unité) s'expriment au moyen de rapports anharmoniques.

On peut consulter, au sujet de ces coordonnées, W. Fiedler, « Viertelj. Naturf. Ges. Zürich ». 15 (1870), p. 152-82; *Darstellende Geom.* (288), (2° éd.), p. 549, 739; (3° éd.) 3, p. 69, 75, 102-9.

Au sujet de l'introduction des rapports anharmoniques en géométrie non-euclidienne, voir F. Klein, « Math. Ann., 6 (1873), p. 129.

(301) *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 2, Nuremberg 1857, p. 261. Cf. W. R. Hamilton, *Elements of quaternions*, London 1866, p. 24, 62; W. Fiedler, *Darstellende Geom.* (299), (3° éd.), 3, p. 31.

(302) « Math. Ann. », 8 (1875), p. 145.

aux points imaginaires pourvu que l'on tienne compte du concept d'*involution.*

Dans le cas de points réels on peut définir graphiquement le rapport projectif

$$(A, B, C, P)$$

de quatre points d'une droite donnée pris dans un ordre déterminé, de façon à ramener cette définition à la mesure ordinaire des longueurs. Il suffit, pour cela, d'envisager C comme s'il était le point à l'infini de la droite donnée. Les points P pour lesquels le rapport projectif (A, B, C, P) a une valeur rationelle r appartiennent alors nécessairement à la *suite harmonique* déterminée par A, B et C comme on l'explique au § 27; les constructions répétées du quatrième harmonique à trois points donnés à l'aide desquelles on les obtient dépendent de la valeur de r. Les points P pour lesquels le rapport anharmonique (A, B, C, P) a une valeur irrationelle s'obtiennent ensuite par un passage à la limite ([303]).

K. G. CHR. VON STAUDT a étendu ces résultats au cas où les éléments envisagés sont imaginaires [cf. III 8].

27. - Remarques concernant les propositions fondamentales de la géométrie projective.

Du système de postulats du § 24 et aussi de celui du § 25, on peut déduire toute la géométrie projective ([304]). Nous nous contenterons de faire ici quelques remarques concernant la dépendance dans laquelle se trouvent les principaux théorèmes de cette géométrie avec les postulats en question.

α) *Théorème de Desargues* ([305]). – Si deux triangles ABC, $A'B'C'$ sont

---

([303]) Voir par ex. R. DE PAOLIS, « Atti R. Accad. Lincei, Memorie mat. », (3) 11 (1881), p. 491; F. ENRIQUES, [*Lezioni geom. proiettiva* ([27]), (1re éd.), p. 348 (appendice); éd. allemande ([298]) Anhang; « Rendic. Circ. mat. Palermo », 12 (1898), p. 222] met en évidence la façon dont l'introduction des coordonnées projectives dépend de la considération de la projectivité de deux espaces projectifs abstraits.

([304]) Voir l'article III 8.

([305]) *Le théorème a été publié pour la première fois par A. BOSSE [*Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer la perpsective*, Paris 1648, p. 340]. L'exposé de A. BOSSE a été réimprimée par N. G. POUDRA, dans les *Oeuvres de Desargues*, 1, Paris 1864, p. 413-5. G. DESARGUES démontre le théorème d'abord pour deux triangles situés dans l'espace (à peu près comme on le fait dans les traités contemporains) puis pour deux triangles situés dans le même plan en s'appuyant sur le théorème des transversales auquel on donne parfois le nom de *théorème de Ménélas* (Note de G. ENESTRÖM).*

tels que les trois paires de côtés

$$AB, A'B'; \qquad BC, B'C'; \qquad CA, C'A'$$

se coupent en trois points en ligne droite, les trois droites

$$AA', BB', CC'$$

sont concourantes. Et réciproquement.

K. G. CHR. VON STAUDT (306) a démontré ce théorème en effectuant des constructions dans l'espace et en ne s'appuyant que sur les postulats de l'appartenance.

F. KLEIN (307) a appelé l'attention sur ce que le théorème de Desargues ne peut être démontré, en s'appuyant sur les postulats de la géométrie projective, qu'à l'aide de constructions effectuées dans l'espace. Si, en effet, on pouvait le démontrer en s'appuyant uniquement sur les postulats de la géométrie plane, sans quitter une région *limitée* du plan, il en résulterait qu'étant donnée sur une surface quelconque une famille de lignes dont *une* et *une seule* passe par deux points arbitrairement fixés sur la surface, il suffirait de choisir convenablement sur cette surface un système de coordonnées curvilignes (u, v) pour obtenir une représentation de la famille de lignes envisagées par des équations du premier degré en u, v. Or il n'en est pas ainsi, comme on le voit immédiatement en envisageant la famille des lignes géodésiques d'une surface à courbure variable; comme l'a montré E. BELTRAMI (308) ces lignes ne peuvent être représentées par des équations du premier degré quel que soit le système de coordonnées curvilignes fixées sur la surface.

D. HILBERT (309) a constitué par des procédés élémentaires une géométrie conventionnelle du plan complet dans laquelle le théorème de Desargues ne s'applique pas, bien que tous les postulats projectifs y soient satisfaits. On voit donc qu'en géométrie projective pure le théorème de Desargues ne découle pas des postulats du plan; il ne découle que des postulats de l'espace à trois dimensions.

Il n'en est d'ailleurs plus ainsi lorqu'on introduit en géométrie projective les concepts métriques en posant les postulats de la congruence·

(306) *Geometrie der Lage*, Nuremberg 1847, p. 52. G. DESARGUES lui-même (305) en avait donné une démonstration métrique.

(307) « Math. Ann. », 6 (1873), p. 112-45.

(308) « Ann. mat. pura appl. », (1) 7 (1865), p. 185 [cf. III 33 et 34].

(309) *Grundlagen* (27), (2° éd.), p. 49 (§ 23).

Au sujet de la géométrie non désarguienne, voir aussi F. R. MOULTON, « Trans. Amer. math. Soc. », 3 (1902), p. 192.

On peut alors en effet démontrer le théorème de Desargues dans le plan (sans effectuer de constructions dans l'espace [cf. § 18]).

D. Hilbert a aussi remarqué qu'inversement le théorème de Desargues dans le plan permet de se passer complètement des postulats de l'espace dans la démonstration des propriétés des figures du plan projectif [310].

β) *Sur la séparation des points conjugués d'une division harmonique.* — Le fait de cette séparation des points conjugués par l'un ou l'autre des deux autres points de la division harmonique est établi par K. G. Chr. von Staudt en faisant appel à une notion qui n'est pas purement graphique, la notion d'un angle solide (ayant pour arêtes des demi-droites concourantes) considéré au point de vue métrique.

La démonstration que M. Pasch [311] a donnée du même théorème présente une lacune; elle n'exclut pas, en effet, la possibilité pour le quatrième harmonique à trois points donnés, de coïncider avec l'un de ces trois points. G. Fano [312] en a conclu qu'il y avait lieu d'introduire ici un nouveau postulat. Il n'en est rien cependant comme il résulte nettement de la démonstration du même théorème donnée par F. Enriques [313]: cette démonstration repose essentiellement sur la disposition des points sur la droite et sur le caractère projectif de cette disposition sans que la continuité intervienne en aucune façon, en sorte que le théorème dépend uniquement des postulats projectifs que l'on vient d'énoncer.

γ) *Sur le théorème fondamental de la projectivité, ou théorème de Staudt*:

« La projectivité de deux droites est entièrement déterminée par trois paires de points homologues ».

L'étude de la correspondance particulière entre les points de deux plans à laquelle on a donné le nom d'*homographie* (plane) [*collinéation* (plane)], correspondance dans laquelle à chaque droite du premier plan correspond une droite du second plan et inversement, a amené K. G. Chr. von Staudt [314] à *définir la projectivité* entre droites, ou plus généralement entre formes *de rang un*, comme *une correspondance biunivoque dans laquelle à toute division harmonique correspond une division harmonique.*

La construction de figures projectives à l'aide de projections et de

---

[310] L'emploi d'espaces projectifs S_n à un nombre de dimensions $n > 3$, dans le but de démontrer les propositions concernant l'espace projectif S_3 à trois dimensions, n'aboutit à aucun résultat qu'on ne pourrait déduire directement des postulats de la géométrie projective de l'espace S_3 lui-même. Cf. C. Segre, « Rivista mat. », 1 (1891), p. 42-66.

[311] *Neuere Geom.* [24], p. 85.

[312] « Giorn. mat. », (1) 30 (1892), p. 106.

[313] « Reale Ist. Lombardo, Rendic. », (2) 27 (1894), p. 560 [cf., §§ 7,8 [271]]; *Lezioni geom. proiettiva* [27], (1re éd.), p. 58.

[314] *Geometrie der Lage*, Nuremberg 1847, p. 49 (§ 9).

sections repose alors sur le théorème fondamental cité au début de ce numéro. K. G. CHR. VON STAUDT en ramène d'ailleurs la démonstration dans tous les cas à sa démonstration dans le cas où les deux formes envisagées sont deux ponctuelles projectives ayant même support. Dans ce cas particulier, le théorème se ramène à celui-ci:

« Toute projectivité de deux ponctuelles sur une même droite ayant trois points doubles revient à l'*identité* de ces deux ponctuelles (en un point double les deux points correspondants des deux ponctuelles sont confondus) ».

Il est essentiel d'observer que le rôle fondamental joué par ce théorème dans l'étude de la projectivité des figures repose sur la façon dont K. G. CHR. VON STAUDT définit la projectivité.

Si, au lieu de cette définition on adopte celle de J. V. PONCELET ([315]), d'après laquelle:

« deux droites sont dites projectives lorsqu'elles se correspondent par projections ou sections »,

le fait que la détermination de la projectivité de deux figures ne dépend que de trois paires d'éléments homologues a moins de portée, en ce qu'il ne permet pas, à lui tout seul, d'édifier la théorie de l'homographie entre plans et espaces. Ce n'est donc plus qu'une partie du « théorème fondamental de la géométrie projective ». Quand nous envisagerons cette proposition, en nous plaçant au point de vue de J. V. PONCELET, nous la désignerons sous le nom de théorème fondamental de la géométrie projective entendu *au sens restreint.*

La démonstration graphique que K. G. CHR. VON STAUDT a donnée de son théorème présente une lacune qui a été signalée par K. WEIERSTRASS ([316]) dans son cours professé à l'Université de Berlin. Cette lacune a été comblée de diverses façons en faisant appel à la continuité des droites envisagées ou à quelque autre notion qui en dépend.

F. KLEIN ([317]) ainsi que J. LÜROTH et H. G. ZEUTHEN ([318]), aban-

---

([315]) Cette définition a été reprise par L. CREMONA [*Elementi di geometria proiettiva ad uso degli istituti tecnici,* Turin 1873, p. 20] et par J. THOMAE [*Ebene geometrische Gebilde,* Halle 1873, p. 12].

Même dans les meilleurs des traités plus anciens, on confond souvent les relations projectives entre figures élémentaires de rang un avec les correspondances biunivoques de ces figures entre elles, ce qui n'est permis que lorsqu'il s'agit de correspondance établies par une construction donnant lieu à des fonctions algébriques ou tout au moins analytiques.

([316]) K. WEIERSTRASS a aussi donné une démonstration génétique, mais non descriptive, du même théorème de K. G. CHR. VON STAUDT envisagé au sens restreint. Cette démonstration a été publiée par E. KÖTTER et H. A. SCHWARZ dans K. WEIERSTRASS, *Werke,* 3, Berlin 1903, p. 161.

([317]) F. KLEIN, « Math. Ann. », 7 (1874), p. 531.

([318]) Pour ces recherches de J. LÜROTH et H. G. ZEUTHEN, voir F. KLEIN, « Math. Ann. », 7 (1874), p. 535-6. Voir aussi les recherches de F. KLEIN, « Math. Ann. », 37 (1890), p. 544-72, en partic. p. 565 et suiv.

donnant la voie suivie par K. G. CHR. VON STAUDT qui suppose *donnée* la correspondance projective, ont montré comment cette correspondance s'obtient, quand on se donne trois paires (A, A') (B, B'), (C, C') de points homologues, en construisant les deux ponctuelles engendrées par les deux suites de points harmoniques déterminées l'une par les trois points A, B, C, l'autre par les trois points homologues A', B', C'.

Pour construire la suite de points harmoniques déterminée par A, B, C par exemple, on construit d'abord les quatrièmes harmoniques D à A, B, C, rangés de toutes les manières possibles, puis les quatrièmes harmoniques à trois quelconques des points A, B, C, D, et ainsi de suite indéfiniment.

La démonstration de F. KLEIN repose sur une répétition de la construction du quatrième harmonique pour les points-limites de chacune des deux ponctuelles ainsi formées.

J. LÜROTH et H. G. ZEUTHEN évitent, au moins au début, de faire usage de la continuité de la droite en montrant de quelle façon figurent dans tout segment de la droite des points de chacune des deux suites de points harmoniques ainsi formées. La construction qu'ils indiquent est très facile à réaliser quand on rejette à l'infini un des trois points fondamentaux A, B, C. Les abscisse des points de *chacune* des deux suites de points harmoniques qu'ils envisagent sont alors représentées par une suite de fractions ayant pour dénominateurs les puissances successives de 2 et il est aisé de voir que chaque segment de la droite contient des points ayant pour abscisses des termes ou des sommes de termes de *chacune* de ces deux suites, pourvu qu'on suppose le postulat d'Archimède. A l'époque où ces recherches ont eu lieu, on admettait d'ailleurs ce postulat comme évident; ce n'est qu'un peu plus tard ([319]) qu'on a commencé à en discuter le caractère ([320]). Finalement on a ainsi une démonstration, métrique à certains égards, du théorème fondamental qui ne diffère pas essentiellement de celle donnée par M. PASCH ([321]).

G. DARBOUX ([322]), tout en se rapprochant du concept de K. G. CHR. VON STAUDT, a ramené la question à un point de vue analytique. Il

---

([319]) O. STOLZ, « Ber. naturw.-mediz. Ver. Innsbruck », 12 (1881-2), p. 75; « Math. Ann. », 22 (1883), p. 104.

([320]) F. KLEIN [*Nicht-Euklidische Geometrie* (cours autographié Göttingue), 1 (1889-90), p. 315 et suiv.; *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, 1, Leipzig 1890, p. 239 et suiv.] remarque que la suite des quatrièmes harmoniques définie dans le texte au moyen de trois points en ligne droite, si on la définit de même sur une conique au moyen de trois points de cette conique, est intimement liée aux triangles mixtilignes que l'on rencontre dans l'étude des fonctions modulaires elliptiques. De ce que, parmi ces triangles, il y en a d'aussi petits que l'on veut [cf. II 12], on peut conclure intuitivement à la continuité de la suite des quatrièmes harmoniques envisagée.

([321]) *Neuere Geom.* ([24]), p. 129.

([322]) « Math. Ann. », 17 (1880), p. 155.

suppose donnée la correspondance projective entre deux droites, au sens de K. G. CHR. VON STAUDT, et il montre que cette correspondance est ordonnée (donc continue). Ceci posé il ramène la question à l'étude de l'équation fonctionnelle

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

dont la solution continue est (323)

$$f(x)=ax\ .$$

F. SCHUR (324), qui évite d'introduire ici le concept de nombre, surmonte la principale difficulté de la démonstration du théorème de K. G. CHR. VON STAUDT en postulant que si deux points se meuvent sur la droite en sens contraires l'un de l'autre, ils se rencontrent nécessairement en un point déterminé de la droite.

F. ENRIQUES (325) déduit le théorème de K. G. CHR. VON STAUDT du postulat de la continuité énoncé sous la forme (graphique) de R. DEDEKIND.

En résumé, toutes les démonstrations indiquées s'appuient sur la continuité des droites, énoncée soit sous une forme métrique, soit sous une forme graphique, ou tout au moins sur la possibilité de considérer la droite comme contenue dans une variété continue d'éléments pour laquelle le postulat d'Archimède a lieu.

On s'est demandé s'il ne serait pas possible de faire abstraction de cette hypothèse en envisageant la projectivité comme résultant d'une suite de projections successives. L'étude à laquelle on a été ainsi amené a permis de développer quelques points de la géométrie projective non archimédienne à l'aide desquels la question des relations entre les divers théorèmes fondamentaux de la géométrie projective a pu être envisagée sous un jour tout nouveau [cf. § 50].

δ) *Relation entre le théorème fondamental et le réseau de Möbius.* – On a vu que la définition de la projectivité de deux droites résulte de la considération de l'homographie entre plans et de l'homographie entre espaces. Il résulte du théorème fondamental de l'espace projectif que

(323) Cf. II 26, n° 42.

(324) « Math. Ann. », 18 (1881), p. 252. Cf. J. THOMAE, *Grundriss einer analytischen Geometrie der Ebene*, Leipzig 1906, p. 10 et suiv.; TH. REYE, *Die Geometrie der Lage*, (4e éd.), Leipzig 1899, p. 58.

(325) « Reale Ist. Lombardo, Rendic. », (2) 27 (1894), p. 565. § 12 [cf. (271)]; *Lezioni geom. proiettiva* (27), (1re éd.), p. 88 et suiv.

Cf. L. BALSER, « Math. Ann. », 55 (1902), p. 293-300.

cette homographie est déterminée dans le plan par quatre paires de points homologues et dans l'espace par cinq paires de points homologues.

Cette conséquence du théorème fondamental est d'ailleurs entièrement équivalente au théorème fondamental lui-même. Il est remarquable qu'elle puisse être établie directement en utilisant seulement les procédés de construction de ce qu'on appelle les *réseaux de Möbius*.

Dans le plan, par exemple, on définit ces réseaux de la façon que voici:

Soient A, B, C, D quatre points donnés dans le plan, entièrement indépendants les uns des autres. On peut, par des constructions linéaires seulement, obtenir un ensemble de points comprenant *tous* les points dont les coordonnées s'expriment rationnellement au moyen de celles de A, B, C, D, donc par tous les nombres rationnels si l'on prend pour coordonnées de A, B, C, D respectivement

$$(0, 0, 1), \quad (0, 1, 0), \quad (1, 0, 0), \quad (1, 1, 1)\,.$$

A cause du postulat de la continuité on peut dire que cet ensemble de points couvre tout le plan. Chaque point du plan qui n'appartient pas à cet ensemble peut, en effet, être envisagé comme un point-limite déterminé de l'ensemble, en sorte qu'on peut établir une correspondance biunivoque entre les points du plan d'une part et leurs coordonnées (rationnelles ou irrationnelles) d'autre part. C'est à cet ensemble que l'on donne le nom de *réseau de Möbius*.

De la constructions des points de ce réseau A. F. MÖBIUS déduit la possibilité de déterminer l'homographie dans le plan, pourvu qu'on la suppose définie par une correspondance *continue*.

Si, dans une homographie entre deux plans, on fait se correspondre entre eux quatre paires de points indépendants, les points homologues des réseaux de Möbius construits dans les deux plans, ainsi que leurs points-limites, se correspondent d'une façon biunivoque en sorte que l'homographie est entièrement déterminée.

On remarquera que l'hypothèse de la continuité de la correspondance homographique dans laquelle à chaque droite d'un plan correspond une droite n'est pas une condition qu'il faut adjoindre à la définition. On peut, en effet, *démontrer* cette continuité en supposant seulement la continuité de la droite, comme il résulte de la marche suivie par K. G. CHR. VON STAUDT lui-même.

ε) *Relations entre le théorème fondamental et la théorie des proportions.* – Ces relations résultent des deux remarques suivantes:

1) En s'appuyant sur les résultats obtenus dans la théorie arithmétique ordinaire des proportions entre segments de droites que l'on

donne dans les éléments, on peut introduire un système de coordonnées projectives quelconques, donc, en particulier, un système de coordonnées cartésiennes [cf. § 26].

2) Le théorème fondamental de l'espace projectif entendu au sens restreint, peut être démontré en s'appuyant sur ce que le rapport anharmonique ne change pas quand on effectue une projection de la figure envisagée; cette invariance du rapport anharmonique résulte d'ailleurs si l'on veut, de la théorie arithmétique ordinaire des proportions.

Quand on fait abstraction de la continuité toutes ces questions se présentent sous un jour entièrement nouveau. Elles ressortent alors du domaine de la géométrie non-archimédienne [cf. §§ 46 à 52].

28. - Sur le rôle du concept de la disposition dans l'étude des principes de la géométrie projective.

On peut se demander s'il est possible d'établir les principes de la géométrie projective sans faire appel à d'autres données qu'aux concepts fondamentaux du *point* et de la *ligne joignant deux points*, auxquels on adjoint les postulats du groupe a) du § 25 qui les concernent.

A cette question se rattache un ordre de recherches dans lequel on n'envisage comme données *a priori* qu'un nombre déterminé de points, et dans lequel on n'envisage que les points qui se déduisent de ces points donnés par des constructions rectilignes.

Ces recherches concernent ainsi une *géométrie projective de systèmes remarquables de points.* Elles supposent que l'on se donne au moins quatre points de l'espace [ou du système fondamental envisagé] non situés dans un même plan et, en outre, un point non situé dans l'un des quatre plans déterminés par trois de ces quatre points fondamentaux de façon que sur chaque droite joignant deux points quelconques on puisse construire, en utilisant les quatre points fondamentaux et le cinquième point envisagé, par projections et sections, *au moins un* nouveau point. Jusqu'ici tout se passe comme dans l'espace projectif ordinaire. Mais des hypothèses faites il ne résulte pas que le quatrième harmonique de trois points A, B, C d'une ligne droite [326] soit distinct du point C; il n'en est ainsi pour trois points quelconque A, B, C que si l'on *postule* qu'il en est ainsi pour *un* système de trois points déterminés A, B, C. D'ailleurs, si même on postulait qu'il en est ainsi, on ne pourrait pas pour cela reconnaître si, en partant de trois points A, B, C

[326] Cf. M. PASCH, n° 27 β.

de la droite et construisant la suite de quatrièmes harmoniques qui s'en déduit comme il a été expliqué au § 27, on obtient une *infinité* de points sur la droite. Il existe, en effet, des configurations formées par un nombre *fini* de points qui satisfont, à elles seules, au postulats a) [§ 25] de la géométrie projective (327).

Mais si l'on postule que les points de la droite sont disposés dans un ordre cyclique de caractère projectif, on peut *démontrer* que la droite, et même chacun des segments de la droite, contient une infinité de points (328). Toutes les propriétés des divisions harmoniques relatives à la séparation des éléments conjugués s'appliquent et il en est de même des propriétés concernant la suite des quatrièmes harmoniques (329).

M. Pieri (330) a mis en pleine lumière le rôle que joue l'hypothèse de la disposition cyclique à caractère projectif dans la théorie des divisions harmoniques et des suites de quatrièmes harmoniques. Dans des recherches [§ 12] concernant la possibilité de restreindre le nombre des concepts primitifs il montre que l'on peut se passer du concept de la disposition naturelle si l'on postule:

1) Le quatrième harmonique à trois points en ligne droite est distinct de ces trois points [postulat de Fano, § 27].

2) Si l'on envisage quatre points A, B, C, D sur une droite et qu'on les groupe en couples de trois façon distinctes

$$(AB, CD), \qquad (AC, BD), \qquad (AD, BC)\,,$$

pour *deux* de ces trois groupes, les deux premiers par exemple, il existe un couple de points harmonique conjugué à la fois à chacun des deux couples du groupe, en sorte qu'un couple de points est harmonique conjugué à la fois au couple AB et au couple CD et qu'un couple de points est harmonique conjugué à la fois au couple AC et au couple BD;

(327) G. Fano, « Giorn. mat. », (1) 30 (1892), p. 123; E. H. Moore, [« Amer. J. math. », 18 (1896), p. 264] a, lui aussi, envisagé des configurations analogues. Voir aussi G. Hessenberg, « Archiv Math. Phys. », (3) 6 (1904), p. 123-7.

(328) Voir G. Fano et F. Enriques, « Rend. Circ. mat. Palermo », 9 (1895), p. 79 [queste *Memorie*, vol. I, VIII, p. 158].

(329) Le procédé de construction graphique, qui consiste à effectuer toutes les projections et sections possibles à partir de cinq points donnés, conduit au réseau de Möbius, lorsqu'on n'effectue que des constructions rectilignes en partant de cinq points de l'espace convenablement choisis.

En se bornant à ce réseau, le théorème γ de Staudt peut être déduit de celui de Desargues. Le theorème γ de Staudt s'étend ensuite à tout l'espace si l'on suppose (ce qu'on peut d'ailleurs n'envisager que comme une conséquence du postulat de la continuité) que tout point de l'espace est un point-limite du réseau de Möbius construit dans l'espace.

(330) « Mem. Accad. Torino », (2) 48 (1898), p. 1. Voir en partic. « Atti Accad. Torino », 39 (1903-4), p. 313.

mais il n'en est alors pas de même pour le troisième groupe, en sorte qu'aucun couple de points n'est harmonique conjugué à la fois au couple AD et au couple BC.

3) Si A, B, C, D, E sont cinq points situés sur une même droite et s'il existe un couple de points harmoniques conjugués à la fois au couple AC et au couple BD, et un couple de points harmoniques conjugués à la fois au couple AC et au couple DE, alors il existe aussi un couple de points harmoniques conjugués à la fois au couple AC et au couple BE.

4) Si A, B, C, D, E sont cinq points situés sur une même droite et appartenant à la suite infinie des quatrièmes harmoniques obtenue en partant de A, B, C et appliquant le procédé indiqué au § 27, on peut déterminer un point X tel qu'il n'existe pas de couple de points harmoniques conjugués à la fois au couple AX et au couple DE.

La continuité conduit ensuite à une nouvelle propriété que M. Pieri, se plaçant exclusivement au point de vue de l'étude des propriétés projectives des formes de rang *un*, postule en introduisant seulement les irrationalités quadratiques dont il a besoin pour cette étude élémentaire.

MÉTRIQUE PROJECTIVE

29. - La géométrie métrique ordinaire rattachée à la géométrie projective ([331]).

Si l'on adjoint aux points de l'espace ordinaire euclidien les points impropres que l'on suppose former un plan (impropre) à l'infini [§ 9], on peut envisager l'espace euclidien comme un espace projectif particulier dans lequel l'*ombilicale* (cercle imaginaire de l'infini) serait donné dans le plan impropre à l'infini comme intersection (imaginaire) de toutes les sphères de l'espace. Les propriétés métriques de l'espace peuvent alors être envisagées comme propriétés projectives dans l'espace ainsi complété.

C'est ainsi déjà que procède J. V. Poncelet ([332]) en envisageant les relations métriques des figures planes comme des relations projectives des points de l'espace auxquels on a adjoint les points cycliques (immaginaires à l'infini) communs à tous les cercles du plan, et les relations métriques

([331]) Cf. III 3.

([332]) *Traité des propriétés projectives des figures,* (1re éd.), Paris 1822.

des figures dans l'espace comme des relations projectives des points de l'espace par rapport au cercle imaginaire de l'infini appartenant à toutes les sphères. De cette façon de présenter les principes de la géométrie métrique il n'à cependant pas déduit l'expression de la distance de deux points métriques ou de l'angle de deux droites. Après lui, M. CHASLES ainsi que plusieurs autres géomètres français ont, dans les démostrations de divers théorèmes, fait usage des ombilics (points cycliques) du plan (333) ou de l'ombilicale dans l'espace; ils ont en particulier envisagé deux droites d'un même plan comme perpendiculaires entre elles lorsque les points à l'infini de ces deux droites et les deux ombilics (point cycliques) du plan forment une division harmonique.

E. N. LAGUERRE (334) a observé que, si un système d'angles $A_1, A_2, A_3, \ldots$ d'une figure F est lié par une relation

$$f(A_1, A_2, A_3, \ldots) = 0 ,$$

et qu'on transforme homographiquement la figure F, les angles $A'_1, A'_2, A'_3, \ldots$ en lesquels se transforment $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sont liés par la relation

$$f\left(\frac{1}{2i} \log_e a_1 , \frac{1}{2i} \log_e a_2 , \frac{1}{2i} \log_e a_3 , \ldots\right) = 0 ,$$

où, pour $h = 1, 2, 3, \ldots$, a_h désigne le rapport projectif des deux côtés, de l'angle A_h et des deux droites A_hP, A_hQ qui sont les droites transformées des deux droites joignant le point A_h aux deux points cycliques du plan de F.

Il convient toutefois d'observer que E. N. LAGUERRE n'a pas envisagé cette espression comme une *définition* de la mesure de l'angle (335). La définition graphique du rapport anharmonique due à K. G. CHR. VON STAUDT au moyen d'un nombre fourni par une construction projective lui était étrangère.

A. CAYLEY (336) a envisagè les expressions les plus générales de la distance de deux points et de l'angle de deux plans comme des invariants par rapport au cercle des sphères (imaginaire dans le plan à l'infini), et il a étudié les mêmes invariants par rapport à une conique quelconque arbitrairement fixée. Il appelle cette conique la *conique absolue* ou sim-

(333) *Traité de géométrie supérieure*, (1re éd.), Paris 1852, p. 447-53, 461-2, 502; (2e éd.), Paris 1880, p. 411-6, 424-5, 462.

(334) « Nouv. Ann. math. », (1) 12 (1853), p. 64 (probl. 4); *Œuvres*, 2, Paris 1905, p. 12.

(335) Cf. H. FAURE, « Nouv. Ann. math. », (1) 18 (1859), p. 381.

(336) « Philos. Trans. London », 149 (1859), p. 61 et suiv., en partic. p. 82-90; « Papers », 2, Cambridge 1889, p. 561, en partic. p. 583-92; « Philos. Trans. London », 160 (1870), p. 51; « Papers », 6, Cambridge 1893, p. 456.

plement *l'absolu* du plan. C'est à cette conique absolue qu'il rapporte toutes ses recherches sur la mesure des distances et des angles; il n'entre d'ailleurs dans aucun détail et ne distingue en particulier aucunement le cas où la conique absolue est réelle de celui où elle est imaginaire. Ses recherches ont un caractère essentiellement analytique; il envisage les invariants de formes données lorsqu'on effectue des substitutions linéaires homogènes sur les variables homogènes figurant dans ces formes, et insiste sur le rôle que jouent ces invariants dans l'étude des relations projectives en géométrie euclidienne; il interprète ensuite les formules générales ainsi obtenues dans le cas où la conique absolue est le cercle des sphères (imaginaire dans le plan de l'infini). Il envisage aussi le cas où la conique absolue dégénère en un couple de points; c'est à ce cas qu'il ramène celui de la géométrie métrique euclidienne des figures situées dans un plan ordinaire.

Les recherches précédentes ont un caractère analytique. Mais il convient aussi de rechercher comment on peut parvenir *géométriquement* à faire rentrer la géométrie métrique ordinaire dans la géométrie projective.

On s'appuie pour cela sur les faits suivants qui concernent les formes de rang un, deux ou trois ([337]):

a) *Formes de rang un.* – La congruence entre segments situés sur une même droite peut être envisagée comme une correspondance par rapport à une projectivité parabolique ayant son point double à l'infini.

Dans un faisceau quelconque de droites concourantes dans le plan, la *congruence* d'angles peut être envisagé comme une correspondance des droites du faisceau considéré par rapport à une projectivité ayant deux droites doubles imaginaires qui vont du centre du faisceau aux deux points cycliques du plan de ce faisceau. Cette projectivité transforme donc en elle-même l'involution des angles droits du faisceau envisagé. De même dans l'espace, pour les faisceaux de plans se coupant suivant une droite ordinaire (et non suivant une droite à l'infini).

b) *Formes de rang deux.* – La similitude de deux figures dans le plan [égalité (congruence) des angles correspondants et proportionnalité des segments correspondants de ces figures] peut être envisagée comme une correspondance projective des éléments d'un plan dans laquelle chacun des deux points cycliques du plan se correspond à lui-même. [Les deux points cycliques sont les points doubles de l'involution (absolue) formée par les couples de points à l'infini des droites orthogonales deux à deux dans le plan].

La congruence de deux segments quelconques du plan peut donc être

---

([337]) F. Klein, *Nicht-Euklidische Geom.* ([320]), 1, p. 1 et suiv.; F. Enriques, *Lezioni geom. proiettiva* ([27]), (1re éd.), p. 113, 177, 356.

définie graphiquement au moyen des concepts du parallélisme et de l'orthogonalité, dont la dépendance avec la droite de l'infini et les deux points cycliques situés sur cette droite a déjà été établie. Il suffit pour cela d'appliquer les deux définitions que voici:

α) Deux segments congruents ayant en commun une de leurs extrémités sont deux côtés adjacents d'un *losange* (parallélogramme à diagonales orthogonales).

β) Deux segments parallèles congruentes sont deux côtés opposés d'un parallélogramme.

Ces deux définitions permettent de comparer entre eux deux segments quelconques du plan.

Dans une gerbe quelconque (à centre fini) de l'espace, la congruence peut être envisagée comme une correspondance projective qui transforme en elle-même la polarité orthogonale existant entre droites et plans perpendiculaires.

c) *Formes de rang trois.* – La similitude de deux figures dans l'espace [égalité (congruence) des angles correspondants, et proportionnalité des segments correspondants de ces figures] peut être envisagée comme une correspondance projective des éléments de l'espace dans laquelle le cercle des sphères se correspond à lui-même. [Le cercle des sphères est la conique fondamentale de la polarité absolue dans le plan de l'infini: c'est l'intersection par ce plan de l'infini de la polarité orthogonale d'une gerbe quelconque dans l'espace].

La congruence de deux segments quelconque de l'espace peut être définie graphiquement comme dans le plan en ramenant tous les cas à celui de deux segments parallèles et à celui de deux segments ayant une de leurs extrémités commune. Mais on peut aussi envisager la congruence dans l'espace comme une similitude n'ayant en général aucun point double effectif (c'est-à-dire situé hors du plan à l'infini).

Tous les théorèmes sur l'égalité (congruence) des figures dans l'espace contenus dans la géométrie métrique ordinaire apparaissent ainsi comme des corollaires de théorèmes de géométrie projective.

Pour parvenir à la représentation analytique de ces diverses relations métriques, prenons pour tétraèdre de référence un tétraèdre dont les trois sommets situés dans le plan de l'infini $x_4 = 0$ soient les sommets d'un triangle conjugué par rapport à la conique absolue. Dans le plan $x_4 = 0$ déterminons le quadrangle dont les points diagonaux ont pour coordonnées, par rapport au tétraèdre de référence,

$$(0, 0, 1, 0)\,, \qquad (0, 1, 0, 0)\,, \qquad (1, 0, 0, 0)$$

et dont les côtés opposés sont conjugués par rapport à la conique absolue.

On peut toujours prendre un des sommets de ce quadrangle au point de coordonnées

$$(1, 1, 1, 0) .$$

Ce sommet du quadrangle, le point-unité et le sommet fini du tétraèdre de référence sont alors en ligne droite; et les équations de la conique absolue sont

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 , \qquad x_4 = 0 .$$

Cela fixé, il suffit, pour déterminer l'angle de deux droites, de connaître les directions de ces deux droites, c'est-à-dire leurs points à l'infini. Si

$$(x_1, x_2, x_3, 0) , \qquad (y_1, y_2, y_3, 0)$$

sont les coordonnées de ces points, l'angle des deux droites est mesuré par l'expression

$$\alpha_{xy} = \frac{i}{2} \log_e \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{B - \sqrt{B^2 - AC}} ,$$

où l'on a posé pour abréger l'écriture

$$A = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 ,$$
$$B = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 ,$$
$$C = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 .$$

La distance de deux points x, y de coordonnées

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) , \qquad (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

est de même mesurée par l'expression

$$d_{xy} = k \sqrt{\left(\frac{x_1}{x_4} - \frac{y_1}{y_4}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_4} - \frac{y_2}{y_4}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{x_4} - \frac{y_3}{y_4}\right)^2} ,$$

où le radical a sa détermination positive et où k est une constante positive dont la valeur dépend du choix que l'on a fait du point-unité sur la droite

$$x_1 = x_2 = x_3 .$$

Ces deux expressions de α_{xy} et de d_{xy} sont des invariants par rapport aux équations précédentes de la conique absolue.

30. - Détermination métrique générale de Cayley et son interprétation non-euclidienne par Klein.

Il résulte de ce qui précède que l'on peut établir dans tout espace projectif une géométrie *métrique conventionnelle*, analogue à la géométrie métrique ordinaire, en regardant un plan de l'espace comme plan idéal (à l'infini) et une conique

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 , \qquad x_4 = 0$$

située dans ce plan, comme conique absolue. On a tout naturellement l'idée de généraliser ces conventions, de façon à rattacher aussi à la géométrie projective une géométrie métrique conventionnelle dans laquelle, au lieu d'une conique absolue, on envisage comme forme absolue une quadrique quelconque arbitrairement fixée. On est ainsi conduit à la détermination métrique projective la plus générale de A. CAYLEY (338).

Cette géométrie métrique projective comprend les différentes géométries non-euclidiennes et se ramène en particulier à la géométrie euclidienne ordinaire que nous venons d'envisager ci-dessus. Ce fait important apparaît déjà en partie dans les travaux de E. BELTRAMI (339). Il est mis en pleine lumière dans ceux de F. KLEIN (340). Il fallait pour le montrer discuter les différents cas de réalité de la forme absolue et aussi introduire dans l'expression de la distance des deux points un facteur constant k, ayant, suivant le cas, une valeur réelle ou purement

---

(338) « Philos. Trans. London », 149 (1859), p. 61; 160 (1870), p. 51; « Papers », 2, Cambridge 1889, p. 561; 6, Cambridge 1893, p. 456.

Voir aussi G. BATTAGLINI, « Rendic. Accad. Napoli », (1) 6 (1867), p. 157; « Nouv. Ann. math. », (2) 7 (1868), p. 209, 265; G. SALMON, *A treatise on conic sections*; trad. allemande par W. FIEDLER, (2e éd.), Leipzig 1867, et toutes les éditions suivantes; (6e éd.), 2, Leipzig 1903, p. 560.

F. LINDEMANN, dans A. CLEBSCH, *Vorlesungen über Geometrie*, 2^1, Leipzig 1891, p. 540 (section 3, § 8).

(339) « Giorn. mat. », (1) 6 (1868), p. 285; « Ann. mat. pura appl. », (2) 2 (1868-9), p. 232; *Opere*, 1, Milan 1902, p. 375, 406.

(340) « Nachr. Ges. Gött. », 1871, p. 419; « Math. Ann. », 4 (1871), p. 573.

imaginaire. En même temps, F. KLEIN faisait ressortir l'importance capitale de ces recherches en reprenant les recherches purement géométriques de CHR. VON STAUDT sur les fondements de la géométrie projective et en les affranchissant du postulat d'Euclide sur les parallèles. Il aboutit finalement à une construction dans laquelle les différentes géométries non-euclidiennes sont, comme la géométrie euclidienne [§ 27] fondées sur une base purement projective.

Voici comment F. KLEIN définit la détermination métrique de A. CAYLEY dans le cas des diverses formes géométriques que l'on est amené à envisager.

a) *Formes de rang un.* – Fixons arbitrairement, comme couple absolu, deux éléments P et Q, réels ou imaginaires conjugués, et soit

$$\Omega_{zz} = az_1^2 + 2bz_1z_2 + cz_2^2 = 0$$

l'équation en coordonnées projectives de ce couple absolu.

L'intervalle de deux éléments

$$A \equiv (x)\,, \qquad B \equiv (y)$$

ayant respectivement pour coordonnées $(x_1; x_2)$ et $(y_1; y_2)$ est défini par la formule

$$(1) \qquad AB = k \log_e (ABPQ) = kxy = k \log_e \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}\,,$$

où Ω_{xy} désigne la forme polaire

$$\Omega_{xy} = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2$$

et où k désigne une constante arbitrairement fixée.

Quand les éléments envisagés sont des points, cet intervalle représente une distance. Quand les éléments envisagés sont des droites dans un plan ou des plans dans l'espace, cet intervalle représente la mesure d'un angle.

On obtient deux déterminations métriques générales distinctes suivant le signe du discriminant de Ω_{zz}. On dit qu'on est dans le cas *elliptique* lorsque les deux éléments P et Q du couple absolu sont imaginaires; on dit qu'on est dans le cas *hyperbolique* lorsque ces deux éléments P et Q sont réels et distincts. Dans le cas limite où ils sont confondus on dit qu'on est dans le cas *parabolique.*

Dans le cas elliptique, on prend pour k un nombre purement imaginaire. L'intervalle de deux éléments est alors toujours réel. Pour $k = 1/2i$, cet intervalle est donné par la formule

$$\cos \overline{AB} = \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}} . \tag{2}$$

On obtient ainsi une géométrie métrique qui n'est autre que celle du faisceau de droites dans le plan ou celle du faisceau de plans dans l'espace, et cela aussi bien dans le plan ou l'espace euclidien que dans le plan ou l'espace non-euclidien. La forme de rang un, envisagée tout entière, a une longueur finie; en prenant pour unité de mesure l'unité ordinaire, auquel cas $k = 1/2i$, cette longueur finie est égale à π ([341]).

Dans le cas hyperbolique, on prend pour k un nombre réel; l'intervalle de deux éléments n'est alors réel que quand ces deux éléments ne sont pas séparés par le couple absolu P, Q. L'intervalle qui sépare chacun des deux éléments P et Q de tout autre élément est infini. Si donc on considère un seul des deux segments PQ (joignant les points P et Q, ou intersection de deux plans P et Q) comme constitué par des éléments effectifs, points ou plans, en excluant l'autre segment PQ supposé constitué par des éléments idéaux par rapport à l'intuition métrique, on obtient une géométrie métrique qui coïncide avec celle de la géométrie ponctuelle dans la géométrie non-euclidienne de N. I. Lobačevskij.

Dans le cas parabolique, la formule qui a servi de définition à l'intervalle $\overline{AB}$ n'a plus aucun sens. On peut alors définir cet intervalle comme cas limite de sa valeur dans le cas hyperbolique. A cet effet, on prendra k inversement proportionnel à la racine carrée du nombre positif $b^2 - 4ac$ et l'on appellera intervalle $\overline{AB}$ la limite vers laquelle tend l'intervalle hyperbolique $\overline{AB}$ quand $b^2 - 4ac$ tend vers zéro. Cette limite peut être mise sous la forme de la différence de deux rapports projectifs où figurent deux éléments auxiliaires C, D, en sorte que

$$\overline{AB} = (CDBP) - (CDAP) .$$

L'intervalle $\overline{A\text{-}B}$ n'est déterminé qu'à un facteur numérique constant près, dont le choix dépend de celui de l'unité de mesure.

([341]) Dans A. Cayley on ne rencontre que cette formule (2). La formule (1) de F. Klein est une formule intermédiaire permettant de passer de cette formule (1) à la propriété projective concernant l'angle ordinaire signalée par E. N. Laguerre [n° 29]; mais les recherches de F. Klein ose différencient surtout des précédentes par l'introduction de la constante arbitraire k à laquelle tn peut donner une infinité de valeurs au lieu de la valeur particulière $1/2i$ qui figure expliciement dans les expressions envisagées par E. N. Laguerre et implicitement dans la formule de A. Cayley.

On obtient ainsi une géométrie métrique qui n'est autre que celle des ponctuelles dans l'espace euclidien.

Les trois cas envisagés ont été désignés sous le nom d'elliptique, d'hyperbolique ou de parabolique, parce que, dans ces trois cas, les deux points absolus sont imaginaires, réels et distincts ou réels et confondus, tout comme les intersections respectives dans ces trois cas de l'ellipse, de l'hyperbole ou de la parabole par la droite de l'infini.

Les *mouvements* des formes fondamentales de rang un en elles-mêmes apparaissent, dans le cas elliptique et dans le cas hyperbolique, comme identiques aux transformations projectives laissant invariables les deux éléments absolus.

Ajoutons que, en ce qui concerne les formes de rang un, la détermination métrique de A. CAYLEY peut être regardée comme fournissant l'extension la plus générale possible de la détermination métrique ordinaire des ponctuelles et des faisceaux, si l'on n'envisage que des extensions telles que les deux conditions suivantes soient satisfaites:

1) l'intervalle de deux éléments reste fixe pour tous les mouvements (c'est-à-dire pour ∞^1 projectivités réelles des formes fondamentales en elles-mêmes);

2) les intervalles de deux éléments jouissent de la propriété additive

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}.$$

b) *Formes de rang deux.* – Pour énoncer plus simplement les résultats, bornons-nous au cas où la forme fondamentale de rang deux envisagée est un plan envisagé comme un ensemble de points.

Si

$$\Omega_{xx} = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

est l'équation en coordonnées ponctuelles de la conique absolue et si

$$\Phi_{uu} = \alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1 u_2 + \alpha_{22}u_2^2 + 2\alpha_{13}u_1u_3 + 2\alpha_{23}u_2u_3 + \alpha_{33}u_3^2 = 0$$

est l'équation de cette même conique en coordonnées tangentielles, on définit la distance de deux points (x) et (y) du plan par la formule

$$D_{xy} = k \log_e \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

et la mesure de l'angle de deux droites du plan par la formule

$$A_{uv} = k' \log_e \frac{\Phi_{uv} + \sqrt{\Phi_{uv}^2 - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}{\Phi_{uv} - \sqrt{\Phi_{uv}^2 - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}},$$

où

$$\Omega_{xy} = a_{11}x_1y_1 + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + a_{22}x_2y_2 + a_{33}x_3y_3 + \\ + a_{13}(x_1y_3 + x_3y_1) + a_{23}(x_2y_3 + x_3y_2),$$

$$\Phi_{uv} = \alpha_{11}u_1v_1 + \alpha_{12}(u_1v_2 + u_2v_1) + \alpha_{22}u_2v_2 + \alpha_{33}u_3v_3 + \\ + \alpha_{13}(u_1v_3 + u_3v_1) + \alpha_{23}(u_2v_3 + u_3v_2),$$

et où k et k' désignent deux constantes fixées à volonté.

On se borne généralement au cas où la détermination métrique dans le faisceau de droites est toujours elliptique; et pour que cette détermination soit identique à la mesure ordinaire des angles il suffit de prendre $k' = i/2$. Il y a alors lieu de distinguer trois cas:

1) le cas *elliptique* où la conique absolue est imaginaire;

2) le cas *hyperbolique* où la conique absolue est réelle, mais où l'on n'envisage (pour les déterminations métriques) que les points situés à l'intérieur de cette conique;

3) le cas *parabolique* où la conique absolue dégénère en une paire de points imaginaires; dans ce cas la droite réelle qui joint ces deux points imaginaires apparaît comme droite de l'infini relativement à l'ensemble des points propres qui restent en dehors d'elle.

Dans le cas elliptique, on prend pour k un nombre purement imaginaire, dans le cas hyperbolique on prend pour k un nombre réel, dans le cas parabolique on prend k infiniment grand.

La quantité que l'on désigne dans l'étude de l'élément de courbe sous le nom de courbure d'une *détermination métrique* [§ 31] est dans les trois cas envisagés égale à

$$-\frac{1}{4k^2};$$

elle est donc positive dans le cas elliptique, négative dans le cas hyperbolique, nulle dans le cas parabolique.

Dans le cas elliptique toutes les droites apparaissent comme fermées et de longueur finie; de même les faisceaux de droites; l'aire du plan est, elle aussi, finie. A ce cas correspond le postulat de B. RIEMANN: que par un point on ne peut mener de parallèles à une droite [§ 14].

Pour $k = i/2$ la détermination métrique coïncide avec la détermination métrique ordinaire de la gerbe.

Dans le cas hyperbolique toutes les droites sont ouvertes et de longueur infinie. Par chaque point on peut mener *deux* parallèles à une droite donnée. *La courbure est négative.* Cette hypothèse correspond à la géométrie de Lobačefskij-Bolyai.

Le cas parabolique peut être envisagé comme un cas limite commun aux deux précédents; on y retrouve les relations métriques euclidiennes ordinaires. En particulier la droite joignant les deux points absolus est la droite de l'infini de la géométrie projective ordinaire.

Pour simplifier les calculs, il convient de prendre pour Ω_{xx} et Φ_{uu} des formes très simples, comme par exemple

$$\Omega_{xx} = x_3^2 - a(x_1^2 + x_2^2)\,,$$

$$\Phi_{uu} = u_3^2 - a\,(u_1^2 + u_2^2)\,,$$

où a est un nombre réel. Suivant que a est négatif, positif ou nul, on se trouve dans le cas elliptique, dans le cas hyperbolique ou dans le cas parabolique. Dans le cas parabolique, il faut, avant de passer à la limite $a = 0$, prendre

$$k = \frac{c}{\sqrt{a}}\,,$$

c désignant un nombre fini arbitrairement fixé.

c) *Formes de rang trois.* – Quand on convient de ne pas envisager de variétés à plus de trois dimensions, on donne à la forme de rang trois le nom d'*espace*.

On distingue d'ailleurs *l'espace ponctuel* et *l'espace tangentiel.* Si l'on envisageait des variétés de plus de trois dimensions, l'étude des formes de rang trois serait d'ailleurs toute semblable à celle dont nous allons nous occuper.

Dans l'espace (ponctuel ou tangentiel) l'absolu est constitué par une quadrique arbitrairement fixée.

Si l'on se borne au cas où la détermination métrique, dans le faisceau de plans, est elliptique, les formules et la discussion de tous les cas qui peuvent se présenter sont entièrement semblables aux formules et à la discussion convenant aux formes de rang deux.

Dans l'espace (ponctuel ou tangentiel) on distingue encore trois cas: le cas ***elliptique*** qui correspond aux hypothèses de B. RIEMANN, le cas ***hyperbolique*** qui correspond aux hypothèses de BOLYAI-LOBAČEFSKIJ, et le cas ***parabolique*** qui correspond au postulat d'Euclide.

Dans le cas elliptique, la surface absolue est une quadrique imaginaire fixée arbitrairement.

Dans le cas hyperbolique, la surface absolue est une quadrique réelle autre qu'une surface réglée; pour les relations métriques, on n'envisage que les points intérieurs à cette quadrique.

Dans le cas parabolique, la surface absolue dégénère en une conique imaginaire dont le plan joue le rôle que joue le plan de l'infini dans la géométrie projective ordinaire.

Dans le cas elliptique il n'y a naturellement pas de parallèles au sens ordinaire du mot. Mais il convient de faire ressortir que W. K. CLIFFORD a élargi la définition ordinaire des parallèles et que, si l'on prend ce mot dans le sens qu'il lui a attribué, on peut, par chaque point de l'espace, mener deux parallèles à une droite donnée; chacune de ces deux parallèles et la droite donnée ne sont toutefois pas dans un plan: elles forment une paire de droites gauches. De ce fait on déduit diverses conséquences remarquables (342).

Dans les cas non-euclidiens, aux mouvements dans le plan et dans l'espace correspondent des homographies laissant invariable la forme absolue.

Au lieu de déduire de la géométrie projective les diverses géométries métriques des formes de rang un, deux ou trois, en choisissant dans chaque cas un « absolu » convenable (qui se trouve être toujours du second degré), on peut se proposer de construire tout au contraire la géométrie projective des formes de rang un, deux ou trois en partant de la géométrie métrique des formes de mêmes rangs.

Pour la géométrie elliptique, il n'y a aucune difficulté. Pour la géométrie parabolique, il suffit d'adjoindre aux points effectifs les points à l'infini constituant un plan, le plan de l'infini, et de faire au sujet de ce plan de l'infini les conventions usuelles. Pour la géométrie hyperbolique, il faut adjoindre aux points effectifs non seulement les points à l'infini constituant ici une quadrique, mais encore les points *idéaux* que l'on peut déterminer par l'intersection de droites qui ne se coupent pas en un point effectif et ne sont cependant pas parallèles.

Si l'on envisage une quadrique *absolue* tout à fait quelconque, en faisant abstraction de la condition restrictive d'après laquelle la géométrie métrique du faisceau doit être nécessairement elliptique, on obtient naturellement des résultats d'un caractère plus général encore. Les géométries (343) auxquelles on parvient alors en partant de la déter-

---

(342) Voir W. K. CLIFFORD [« Proc. London math. Soc. », (1) 4 (1871-3), p. 381-95; (1) 7 (1875-6), p. 67-70; « Papers », Londres 1882, p. 181, 236; voir aussi « Papers », p. 378, 385, 402] et F. KLEIN [« Math. Ann. », 37 (1890), p. 544].

(343) Voir H. POINCARÉ, « Bull. Soc. math. France », 15 (1886-7), p. 203.

mination métrique projective conduisent à des droites réelles de longueur nulle, à des angles infiniment grands, à des droites non superposables, et des autres concepts en contradiction avec ceux de la géométrie métrique générale ordinaire.

31. - Remarques diverses sur les déterminations métriques projectives.

a) *Sur la détermination métrique parabolique tangente à une détermination métrique hyperbolique ou elliptique.* – Soit A un point d'un espace hyperbolique. On peut envisager une détermination métrique parabolique qui, aux environs infiniment voisins de A, fournit des résultats ne différant de ceux de la détermination métrique hyperbolique que par des infiniment petits d'ordre supérieur au premier. On donne à cette détermination métrique le nom de détermination métrique parabolique tangente à la détermination métrique hyperbolique. On l'obtient en prenant pour conique absolue la section de la quadrique absolue de l'espace hyperbolique par le plan polaire de A par rapport à cette quadrique, et en choisissant convenablement l'unité de longueur ([344]).

Il en est de même si A est un point d'un espace elliptique.

Si l'on prend pour mesure de la différence entre la détermination parabolique tangente à la détermination hyperbolique ou elliptique donnée et cette détermination hyperbolique ou elliptique elle-même l'expression $-1/4k^2$, c'est-à-dire la mesure de la courbure [§ 30] de l'espace hyperbolique ou elliptique en A, on a, dans la construction de la détermination parabolique tangente, une interprétation intuitive de cette courbure.

b) *Sur la connexion de l'espace métrique.* – Dans les cas hyperbolique et parabolique, la droite est une ligne ouverte. Le plan est une surface *simplement connexe* (c'est-à-dire telle que chaque ligne fermée la partage en deux parties) et *bilatérale*, c'est-à-dire telle que en chaque point A on puisse distinguer deux sens de rotation ne pouvant être ramenés l'un à l'autre par translation du point A le long de cette surface; ces deux sens de rotation sont identiques aux deux sens suivant lesquels on peut disposer, conformément aux fondements de la géométrie projective, les points de la conique ou de la droite limitée qui constituent l'*absolu.*

Dans le cas elliptique, la droite est une ligne fermée. Le plan (il s'agit du plan projectif dans sa totalité) n'est divisé en parties distinctes que si l'on effectue une *coupure* le long de deux droites illimitées. Le

---

([344]) F. Klein, « Math. Ann. », 4 (1871), p. 573.

plan est une surface *unilatérale*, c'est-à-dire telle qu'on n'y distingue plus autour d'un point A deux sens de rotation; ces deux sens peuvent en effet être ramenés l'un à l'autre par un mouvement du point A le long de la surface. On peut le vérifier (345) en se reportant à la gerbe qui fournit une image précise du plan elliptique.

Il est d'ailleurs très difficile de se figurer intuitivement un plan elliptique.

Les différences de connexion du plan que nous venons de signaler apparaissent clairement si l'on envisage l'image d'une quadrique non réglée Q obtenue en projetant d'un centre A la quadrique Q sur un plan P ne contenant pas A. Le contour de l'image de Q sur P est une conique C qui est réelle, imaginaire ou dégénérée en un couple de points imaginaires situés sur une droite réelle, suivant que A a été choisi extérieur à Q, intérieur à Q ou sur la surface Q. Si l'on fixe dans le plan P à l'intérieur de la conique C une détermination métrique de Cayley en prenant pour absolu la conique C elle-même, et si, en projetant du même centre A les points du plan, on reporte ensuite cette géométrie métrique sur la quadrique Q, on obtient une géométrie métrique déterminée sur cette quadrique Q.

La section S de la quadrique Q et du plan polaire α du point A est l'image de C et joue le rôle du lieu des points à l'infini dans le plan ordinaire.

Si le point A est extérieur à la quadrique Q, la section S est une conique réelle; si le point A est intérieur à la quadrique Q, la section S est une courbe imaginaire. Si A est sur la quadrique Q, la section S se réduit à un point.

Comme image du plan hyperbolique, on obtient ainsi une calotte simplement connexe de la quadrique Q; comme image du plan parabolique, on obtient la surface de la quadrique à l'exception d'un point de cette surface supposé enlevé [au sens de l'analysis situs (III 6), cette surface est simplement connexe]. Comme image du plan elliptique, on obtient la surface totale de la quadrique; toutefois la correspondance entre le plan elliptique et la surface de la quadrique n'est pas biunivoque: elle n'est univoque que dans un sens, car, si à chaque point de la surface de la quadrique correspond un point du plan, à chaque point B du plan correspondent deux points de la surface de la quadrique situés en ligne droite avec le centre de projection A (du plan elliptique).

Cette image du plan elliptique est particulièrement suggestive quand on prend pour quadrique une sphère et pour centre de projection A

(345) Voir F. KLEIN, *Nicht-Euklidische Geom.* (320), 1, p. 98 et suiv.

le centre de cette sphère. La géométrie métrique elliptique que l'on transporte par projection du plan sur la sphère n'est alors que la géométrie métrique ordinaire de la sphère (346). Deux lignes géodésiques (c'est-à-dire deux grands cercles) se coupent ici en deux antipodes; par deux antipodes passent une infinité de lignes géodésiques de la sphère [§ 16].

Indépendamment de son importance comme image des diverses géométries planes, la détermination métrique ainsi obtenue par projection sur la quadrique envisagée est d'ailleurs fort remarquable en elle-même.

Prenons, pour simplifier, comme quadrique la sphère, comme plan α de la conique absolue, le plan de l'un des grands cercles de la sphère (nous le désignerons sous le nom de plan équatorial) et pour centre de projection A le point à l'infini du diamètre prolongé de la sphère perpendiculaire à α.

La géométrie hyperbolique que l'on peut fonder dans le plan équatorial α en prenant la circonférence (α) du cercle équatorial comme conique absolue a pour image sur la sphère une géométrie dans laquelle les lignes droites (d) de la géométrie hyperbolique sont remplacées par des demi-circonférences de cercle (c) perpendiculaires au plan équatorial α et les angles non-euclidiens formés par les droites (d) par les angles sphériques ordinaires que font entre eux ces demi-cercles (c).

D'un point P de (α) comme centre, projetons ensuite stéréographiquement [par exemple sur le plan du grand cercle ayant P pour pôle] la sphère et la détermination métrique qu'on vient d'obtenir sur elle; l'image de la circonférence de l'équateur support des éléments infinis de la détermination métrique hyperbolique est la ligne droite (a) intersection du nouveau plan de projection et de α.

Les demi-cercles (c) se projettent suivant des demi-cercles, images des droites (d): ces demi-cercles sont orthogonaux à la droite (a); les angles formés par les droites (d) dans le plan α sont représentés dans le nouveau plan de projection par les angles ordinaires sous lesquels ces demi-cercles se coupent dans le sens de la géométrie euclidienne.

C'est cette image de la géométrie hyperbolique que H. Poincaré a utilisée systématiquement dans ses recherches fondamentales sur la théorie des fonctions.

On peut d'ailleurs construire d'une façon analogue une image toute semblable dans l'espace à trois dimensions (347).

---

(346) Voir F. Klein, « Prog. Erlangen », 1872, p. 46 (note VI); réimpr. « Math. Ann. », 43, (1893), p. 63-100.

(347) H. Poincaré, « Acta math. », 1 (1882-3), p. 1 [1882]. Voir aussi R. Fricke et F. Klein, *Vorles. über automorphe Funktionen*, 1, Leipzig 1897; F. Klein, *Ellipt. Modulfunkt.* (320), 1, p. 196.

c) *Sur le principe de dualité.* – Le principe de dualité de la géométrie projective s'applique aussi aux propositions de la géométrie métrique elliptique où l'absolu [§ 29] a été fixé d'une façon symétrique par rapport aux points et aux plans. A cet égard, la géométrie elliptique est la plus belle de toutes les géométries métriques.

En géométrie hyperbolique ou parabolique, au contraire, le principe de dualité ne s'applique pas. Il ne saurait s'appliquer en géométrie hyperbolique, car dans cette géométrie l'espace métrique se déduit de l'espace projectif en excluant les points extérieurs à la quadrique absolue, et à cette exclusion correspond celle des plans extérieurs à la quadrique, au lieu de celle des plans qui rencontrent la quadrique comme il le faudrait pour satisfaire au principe de dualité.

En géométrie parabolique l'*absolu* envisagé comme courbe ponctuelle ou surface ponctuelle n'est pas corrélatif à lui-même, envisagé comme courbe tangentielle ou surface tangentielle, en sorte qu'il ne saurait être question d'appliquer à cette géométrie le principe de dualité.

d) *Sur les postulats de la géométrie métrico-projective.* – On peut se demander quels concepts métriques et quels postulats relatifs à ces concepts il faut ajouter aux concepts et aux postulats de la géométrie projective pour poser les fondements de la géométrie métrique générale.

Ce qui a été dit au § 29 permet de répondre fort simplement à cette question.

Pour fonder la géométrie métrique générale il suffit d'adjoindre aux concepts graphiques (descriptifs) de la géométrie projective le concept d'orthogonalité entre plans, envisagé comme concept métrique primitif, et de postuler les propriétés fondamentales de ce concept. Ces propriétés permettent en effet d'envisager les plans orthogonaux comme des plans conjugués dans une correspondance polaire des éléments de l'espace qui définit l'absolu de la géométrie métrique ([348]).

Pour distinguer les trois cas (elliptique, hyperbolique, parabolique) de la métrique générale, il faut encore préciser la forme sous laquelle on convient d'énoncer le postulat des parallèles.

On répond non moins simplement à la question posée de la façon suivante:

Pour fonder la géométrie métrique générale il suffit d'adjoindre aux concepts et aux postulats graphiques (descriptifs) de la géométrie projective, le concept métrique primitif du mouvement en considérant les mouvements comme formant un groupe de transformations projectives dont les propriétés fondamentales doivent être postulées [§ 30].

([348]) Voir l'exposé d'ensemble de ces questions dans F. ENRIQUES, *Lezioni di geom. proiettiva* ([27]); éd. allemande ([288]), p. 179 et suiv.

Les propriétés qui caractérisent le groupe des mouvements comme groupe projectif d'une quadrique peuvent s'énoncer de différentes façons: par exemple en tenant compte de ce que le groupe indiqué est le plus petit groupe projectif qui opère d'une façon *transitive* sur les points, les droites et les plans, de façon qu'il y ait toujours une transformation du groupe amenant un élément (point, droite ou plan) en un autre élément de même espèce donné ([349]).

PRINCIPES DE LA MÉTRIQUE GÉNÉRALE

32. - Avant-propos.

Les concepts de *distance* et de *mouvement* sont à la base des recherches générales sur la métrique des variétés à un nombre quelconque de dimensions. A chacun de ces deux concepts correspond un ordre particulier de recherches. L'un, qui se rapporte à l'étude du concept de distance, se rattache généralement à l'expression linéaire, en d'autres termes à l'expression de la distance de deux points infiniments voisins; mais il existe aussi des travaux fondés sur la formule relative à la distance finie de deux points. Dans toutes ces recherches on admet naturellement que les points de la variété sont représentés par des nombres (les coordonnées de ces points).

Un autre ordre de recherches se rattache d'une façon particulière au point de vue auquel on se place dans la théorie des groupes. Nous envisagerons successivement ces deux ordres de recherches.

A) Élément linéaire. Distance finie de deux points.

33. - Géométrie sur une surface courbe.

Pour étudier les propriétés des figures tracées sur une surface courbe, on commence par étendre aux lignes courbes le concept de la distance de deux points et l'on parvient ainsi au concept de la longueur d'un arc de courbe.

([349]) W. Killing, « J. reine angew. Math. », 109 (1892), p. 176.

Sous certaines restrictions, toujours supposées vérifiées, concernant la continuité et la dérivabilité des expressions envisagées, cette longueur dépend des extrémités de l'arc de courbe et de la forme de la ligne courbe envisagée; et elle jouit de la *propriété additive*, en vertu de laquelle elle est définie par l'expression de l'élément linéaire

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \tag{1}$$

de la ligne courbe envisagée:

$$x = x(t) \,, \quad y = y(t) \,, \quad z = z(t) \,.$$

De cette expression générale on déduit immédiatement que l'*élément linéaire sur une surface* [cf. III 29 et III 32]

$$x = x(u, v) \,, \quad y = y(u, v) \,, \quad z = z(u, v) \,,$$

c'est-à-dire la distance de deux points infiniment voisins

$$(u, v) \,, \qquad (u + du, v + dv)$$

situés tous deux sur cette surface, est donné par la formule

$$ds = \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} \,, \tag{2}$$

où

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 ,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} ,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 .$$

En se limitant sur la surface envisagée à des régions telles que par deux points quelconques situés dans une même région ne passe qu'une seule ligne géodésique, on rattache immédiatement à la formule (2) la définition de la distance (curviligne) de deux points quelconques

$$(u_1 v_1)\,, \qquad (u_2 v_2)$$

sur la surface; cette distance est la longueur de l'arc de la ligne géodésique de la surface passant par les deux points.

La géométrie que l'on obtient ainsi est généralement désignée sous le nom de *géométrie métrique différentielle*. Le mot différentiel est pris ici dans le sens de « restreint en général à une partie de la surface ». Dans cette géométrie les propositions sont en effet essentiellement restreintes à des régions limitées de la surface auxquelles correspondent des parties limitées du plan des (u, v).

Dans le géométrie métrique différentielle, le concept de surfaces mutuellement applicables, ou plutôt celui de surfaces *isométriques* (c'est-à-dire telles que leurs éléments linéaires soient donnés par les mêmes formules), est fondamental. Deux surfaces isométriques ont en effet *même géométrie différentielle* [350].

La géométrie plane métrique différentielle ordinaire se reflète ainsi dans les géométries métriques différentielles des diverses surfaces développables. Toutefois les géométries métriques sur diverses surfaces ayant même géométrie métrique differentielle ne sont pas en général identiques.

Si même deux surfaces analytiquement définies ont même géométrie métrique différentielle, la géométrie métrique sur l'une d'elles considérée comme *entière* ne trouve pas nécessairement sa représentation dans la géométrie métrique sur l'autre. Les rapports de connexion des deux surfaces [§ 43] jouent ici un rôle important.

Ainsi quoique le *cylindre* soit une surface développable et ait donc même géométrie métrique différentielle que le plan, la géométrie métrique pour le cylindre *entier* diffère de celle du plan *complet* euclidien [§ 44].

B. Riemann a envisagé la géométrie métrique sur une surface S correspondant à un élément linéaire tel que dans l'expression (2) du carré ds^2 de sa longueur on ait

$$(2) \qquad ds^2 = E(u, v)\,du^2 + 2F(u, v)\,du\,dv + G(u, v)\,dv^2\,.$$

La *courbure* K d'une surface en un point de cette surface a été définie par C. F. Gauss [III 29] comme étant la valeur réciproque du

[350] Voir à ce sujet l'article III 34.

produit des rayons de courbure principaux de la surface en ce point. Cette courbure K est, comme on sait, un invariant par rapport à une déformation quelconque, sans *extension* ni *déchirement* de la surface. Elle s'exprime donc à l'aide des coefficients E, F, G, qui apparaissent dans l'expression (2) de ds^2 et de leurs dérivées prises par rapport à u et à v; sans que la forme concrète de la surface joue aucun rôle. Dans la variété abstraite (u, v) l'expression « courbure » perd la signification intuitive qui résulterait pour une surface de la définition même que C. F. GAUSS donnait à k; la quantité k n'est plus qu'un invariant différentiel formé par E, F, G et les dérivées de E, F, G, prises par rapport à u et v. Cet invariant ne change pas si, dans l'expression de ds^2, on remplace u et v par deux autres variables quelconques. Quand on se place à ce point de vue de B. RIEMANN, on donne encore à l'invariant k le nom de courbure; mais pour éviter tout malentendu, on ne dit plus « la courbure de la surface ou de la variété abstraite (u, v) »; on dit plutôt la *courbure de la détermination métrique* de cette variété abstraite (u, v).

Les locutions « courbure du plan hyperbolique », « courbure du plan elliptique », ou « courbure du plan parabolique », dont nous avons déjà fait usage au § 31, doivent être entendues ainsi dans ce sens conforme au point de vue de B. RIEMANN.

On peut aussi se demander s'il est possible d'obtenir, dans la géométrie métrique différentielle d'une surface de l'espace ordinaire, l'exacte représentation de la géométrie métrique *générale* du plan et plus particulièrement de la géométrie non-euclidienne du plan [cf. § 15].

A cet effet, il faut tout d'abord envisager les surfaces qui, comme le plan, peuvent se mouvoir librement sur elles-mêmes, de façon qu'un point quelconque de la surface vienne en un autre point de cette surface arbitrairement fixé à l'avance. Ces surfaces sont nécessairement à courbure constante; et inversement il résulte d'un théorème de E. F. A. MINDING ([351]) que toute surface à courbure constante peut se mouvoir librement par applicabilité sur elle-même, et cela d'une ∞^3 de manières [III 32].

En distinguant les surfaces à courbure constante d'après la valeur k de leur courbure, on obtient

a) pour $k = 0$ les surfaces développables, dont la géométrie métrique différentielle équivaut à la géométrie plane euclidienne;

b) pour $k > 0$ les surfaces applicables sur une sphère, dont la géométrie métrique différentielle équivaut à la géométrie plane elliptique de courbure k [voir § 23 *a*), en particulier la note ([183])];

([351]) « J. reine angew. Math. », 19 (1839), p. 378; 20 (1840), p. 324.

c) pour $k < 0$ les surfaces auxquelles on a donné le nom de *pseudo-sphériques* dont la géométrie métrique différentielle équivaut à la géométrie plane hyperbolique de courbure k.

Cette dernière équivalence qui correspond au cas où $k < 0$ résulte, en fait, des formules trigonométriques établies par E. F. A. MINDING pour les triangles géodésiques tracés sur une surface à courbure $k < 0$. E. F. A. MINDING lui-même n'a toutefois tiré de ses formules aucune déduction relative à la géométrie non-euclidienne, ce qui s'explique d'ailleurs par ce fait que, à l'époque où il les a obtenues, il n'avait sans doute pas connaissance des recherches de N. I. LOBAČEVSKIJ publiées depuis peu.

L'équivalence concernant le cas *c*) où $k < 0$, a été indiquée dans la thèse de B. RIEMANN (352); peu après la publication de cette thèse en 1866 elle a été mise en pleine lumière par E. BELTRAMI (353) dont les recherches sont d'ailleurs entièrement indépendantes de celles de B. RIEMANN.

E. BELTRAMI (354) avait observé que pour les surfaces à courbure constante, et pour elles seulement, on peut choisir les coordonnées u, v de façon que les lignes géodésique soient représentées par des équations linéaires [cf. § 27]. Cette remarque l'a naturellement conduit à établir une correspondance biunivoque entre les points d'une surface abstraite [ou variété élémentaire] (u, v) à courbure constante négative et la région d'un plan ordinaire intérieur à un cercle limite. On obtient ainsi une représentation de chaque surface à courbure constante négative dans laquelle aux lignes géodésiques de la surface correspondent les cordes du cercle limite. E. BELTRAMI ne manque d'ailleurs pas d'observer que la métrique sur la surface est alors identique à la détermination métrique plane de A. CAYLEY correspondant au cas où le cercle limite est pris comme conique absolue dans le plan.

Une autre représentation de la géométrie hyperbolique plane sur un plan ordinaire dans lequel on suppose tracés deux axes rectangulaires Ox, Oy est la représentation *conforme* dont il a été parlé au § 31, et que l'on obtient en projetant d'abord le plan hyperbolique sur une demi-sphère limitée par ce plan et ensuite cette demi-sphère stéréographiquement à partir d'un point de son équateur.

Si, pour obtenir cette représentation conforme, on prend comme centre de projection le centre de la sphère, on obtient pour le carré de

---

(352) *Habilitationsschrift* (12): « Abh. Ges. Gött. », 13 (1866-7), éd. 1868, math. p. 133; *Werke*, (2e éd.), publ. par H. WEBER, Leipzig 1892, p. 272; trad. L. LAUGEL, Paris 1898, p. 280.

(353) « Giorn. mat. », (1) 4 (1866), p. 76-92; *Opere*, 1, Milan 1902, p. 281-96.

(354) « Ann. mat. pura appl. », (1) 7 (1865), p. 185; *Opere* 1, Milan 1902, p. 262.

l'élément linéaire dans l'expression déjà indiquée par B. Riemann [cf. § 34]

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + \frac{k}{4}(x^2 + y^2)},$$

où k mesure la courbure de la surface.

Si, au contraire, on choisit comme au § 31 le centre de projection sur l'équateur même de la sphère, on a

$$ds^2 = k^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2};$$

si, en particulier, on prend [III 32 et III 33]

$$k = -\frac{1}{R^2},$$

on a ainsi, en choisissant

$$x = v,$$

$$y = R\, e^{-\frac{u}{R}},$$

la formule

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2.$$

Si, dans ces formules, on envisage (x, y) ou (u, v) comme les coordonnées ordinaires cartésiennes de points situés dans un plan auxiliaire, la géométrie métrique du plan hyperbolique *total* trouvera dans ce plan auxiliaire une interprétation abstraite.

Il n'en est pas de même pour les surfaces à courbure constante négative qu'on a jusqu'ici construites dans l'espace ordinaire. Ces surfaces sont toutes, en effet, limitées par des courbes ou des points singuliers. De là résulte qu'une portion seulement du plan hyperbolique trouve en elles sa représentation. C'est ce qu'on peut vérifier en se rapportant, par exemple, aux surfaces de révolution déterminées par E. F. A. Minding. Ce qui précède ne peut donc s'appliquer à ces surfaces particulières à courbure constante négative.

Dès lors la question se pose de savoir *s'il est possible de construire une surface pseudosphérique offrant l'image complète de la variété abstraite* (u, v), *donc aussi du plan hyperbolique entier.*

D. HILBERT (355) a démontré qu'il n'existe aucune surface *analytique* régulière satisfaisant à la question. Il a montré, en effet, que sur toute surface analytique régulière apparaissent des courbes singulières ou des points singuliers. La même conclusion s'applique aux surfaces *non-analytique* ainsi que l'ont montré G. LÜTKEMEYER (356) et E. HOLMGREN (357).

Aucune surface ne peut donc offrir l'image complète du plan hyperbolique entier.

Des remarques analogues aux précédentes s'appliquent à la géométrie des surfaces à courbure constante positive, lorqu'on envisage ces surfaces dans leur totalité. On a déjà remarqué [§ 31] que la géométrie sphérique donne, pour ainsi dire, une représentation surabondante de la géométrie du plan elliptique. C'est le *gerbe de droites* et non la sphère qui définit une variété abstraite à deux dimensions donnant une image complète et parfaite du plan elliptique.

Or on démontre que *la sphère est, dans l'espace ordinaire euclidien, la seule surface fermée à courbure constante positive.* Ce théorème a été récemment établi à nouveau dans le cas des surfaces analytiques par H. LIEBMANN (358), et d'autre part G. LÜTKEMEYER (359) et E. HOLMGREN (360) ont montré que des surfaces $f=0$ à courbure constante positive sont, en fait, toujours analytiques, au moins quand la fonction f est supposée admettre des dérivées partielles continues du premier, du second et du troisième ordre. Aucune de ces surfaces ne peut offrir l'image complète du plan elliptique entier.

34. - Détermination métrique de Riemann dans une variété d'une dimension quelconque.

Les concepts que nous avons développés en nous reportant à la géométrie métrique sur une surface, ou plutôt sur une variété abstraite à deux dimensions, trouvent leur extension naturelle dans la géométrie métrique des variétés à plusieurs dimensions, dont B. RIEMANN a analysé

---

(355) « Trans. Amer. math. Soc. », 2 (1901), p. 87; *Grundlagen* (27), (2e éd.), p. 162, Anhang V.

(356) Diss. Göttingue 1902.

(357) « C. R. Acad. sc. Paris », 134 (1902), p. 740-3.

L'idée des surfaces régulières non analytiques remonte à CHR. WIENER [*Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, 2, Leipzig 1887, p. 29] qui a pris en considération des surfaces non-rectilignes développables envisagées chacune comme la limite d'un polyèdre.

(358) « Nachr. Ges. Gött. », 1899, p. 44-55; « Math. Ann. », 53 (1900), p. 81; 54 (1901), p. 505; cf. D. HILBERT, *Grundlagen* (27), (2e éd.), p. 172.

(359) Diss. Göttingue 1902, p. 163.

(360) « Math. Ann. », 57 (1903), p. 409.

les principes dans sa dissertation sur les hypothèses qui servent de base à la géométrie.

En partant d'une varieté élémentaire v_3 à trois dimensions ou, plus généralement, d'une variété élémentaire v_n à un nombre quelconque n de dimensions, dans laquelle on suppose donné un système de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ [cf. § 22], ou peut établir dans cette variété une *détermination métrique* et ensuite définir pour elle une *géométrie métrique différentielle*, en prenant comme expression de la distance ds de deux points infiniment voisins

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{et} \qquad (x_1 + dx_1, x_2, + dx_2\ , \ldots, x_n + dx_n)\ ,$$

de cette variété v_n la racine carrée positive de la forme quadratique supposée essentiellement positive

$$\sum_{(i,k)} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)\ .$$

Quand nous choisirons ainsi ds nous dirons avec H. von Helmholtz que le *théorème de Pytagore généralisé*, s'applique à la variété v_n envisagée. Cette forme de ds est d'ailleurs la plus simple que l'on puisse envisager lorsque'on veut établir les concepts métriques dans une variété

$$v_n \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)\ ,$$

en fixant la définition de la *longueur d'une ligne*

$$x_1 = x_1(t)\ , \qquad x_2 = x_2(t)\ , \qquad \ldots, \qquad x_n = x_n(t)\ ,$$

représentée par des fonctions continues et dérivable dans tout intervalle qui n'est pas nul, de façon

a) que cette longueur ait une valeur essentiellement positive,

b) qu'elle dépende d'une façon continue et dérivable des points extrêmes et de la forme de la ligne,

c) qu'elle jouisse de la *propriété additive* [cf. § 30].

Ces conditions étant vérifiées, on obtient la fonction qui représente la longueur d'une ligne donnée en intégrant entre des limites convenablement choisies l'élément linéaire ds, où l'expression de ds ne peut dépendre que des coordonnées

$$x_1, x_2, \ldots, x_n; \qquad x_1 + dx_1, \quad x_2 + dx_2, \ldots, \quad x_n + dx_n,$$

de deux points infiniment voisins de la ligne envisagée.

Cette expression de ds ne peut d'ailleurs être fonction *linéaire* de

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \qquad dx_1, dx_2 \ldots, dx_n,$$

parce que, s'il en était ainsi, elle devrait, en raison de la continuité, prendre une valeur négative quand on fait varier la ligne d'une façon continue autour d'un de ses points jusqu'à ce qu'elle reprenne sa position primitive mais en sens inverse de son sens primitif. C'est ds^2 ou ds^4, ou toute autre fonction univoque quelconque de ds^2, qu'il faut chercher à exprimer en fonction de

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \quad dx_1, \ldots, dx_n,$$

de façon à satisfaire aux conditions énoncées. Si l'on impose à l'expression de ds^2 la condition d'être dérivable autant qu'il faut pour pouvoir être développée aux environs de chaque point par la formule de MacLaurin jusqu'au troisième terme de cette formule, et en outre la condition d'être infiniment petite du deuxième ordre par rapport aux différentielles $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, on démontre ([361]) que cette expression est necessairement de la forme

$$ds^2 = \sum_{(i,k)} a_{ik} dx_i dx_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

en sorte que le théorème de Pythagore généralisé fournit bien, comme on l'annonçait, la forme la plus simple possible de ds.

Mais si, au contraire, on admet quelque exception à la dérivabilité de ds^2 au point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on peut fixer autrement l'expression de ds^2 en fonction de

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \qquad dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$$

et en déduire, dans la variété envisagée v_n, une détermination métrique distincte de celle qui repose sur le théorème de Pythagore généralisé. Ainsi on peut par exemple prendre pour ds^4 une forme essentiellement positive du quatrième degré en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ qui ne soit pas un carré parfait. B. RIEMANN ([362]) a déjà signalé la possibilité de ces déterminations métriques; mais il n'a développé que les conséquences concer-

([361]) Voir F. ENRIQUES, *Conferenze di geometria* (cours autographié), Bologne 1894-5, p. 58.
([362]) *Habilitationsschrift* ([12]); « Abh. Ges. Gött. », 13 (1866-7), éd. 1868, math. p. 133; *Werke*, (2ᵉ éd.) publ. par H. WEBER, Leipzig 1892, p. 272; trad. L. LAUGEL, Paris 1898, p. 280.

nant le cas le plus simple et le plus important, où le théorème de Pythagore généralisé s'applique.

Dans toute variété v_n où la détermination métrique résulte du théorème de Pythagore généralisé, on peut envisager, comme on l'a fait pour les surfaces v_2, des lignes *géodésiques* (ou lignes de longueur minime). Dans des régions convenablement limitées de v_n, chacune de ces lignes est complètement déterminée par deux de ses points.

Le concept de *distance* entre deux points de v_n étant fixé à l'aide de ces lignes géodésiques de v_n, on peut ensuite définir dans v_n les concepts de *l'angle* ([363]) et du *volume* ([364]).

35. - Variétés homogènes.

B. Riemann s'est tout particulièrement occupé des variétés v_n (en particulier des variétés v_3) qui, comme l'espace ordinaire, peuvent se mouvoir par applicabilité sur elles-mêmes. On dit de ces variétés que elles sont *homogènes*.

Voici comment on peut préciser ce concept de l'homogénéité d'une variété quelconque v_n. Soit P un point de v_n, de coordonnées

$$x_1, x_2, \ldots, x_n .$$

Envisageons tous les points Q de v_n infiniment voisins de P et, parmi ces points, fixons-en deux, Q_1, Q_2, arbitrairement; soient

$$x_1 + dx_1, \; x_2 + dx_2, \; \ldots, \; x_n + dx_n$$

les coordonnées d'un quelconque des points Q,

$$x_1 + d_1x_1, \; x_2 + d_1x_2, \; \ldots, \; x_n + d_1x_n ,$$
$$x_1 + d_2x_1, \; x_2 + d_2x_2, \; \ldots, \; x_n + d_2x_n ,$$

les coordonnées des deux points Q_1 et Q_2 arbitrairement fixés.

Parmi les éléments $P\,Q$, envisageons ceux pour lesquels, λ et μ désignant deux paramètres, on a

$$dx_1 = \lambda d_1x_1 + \mu d_2x_1 ,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$dx_n = \lambda d_1x_n + \mu d_2x_n .$$

([363]) Voir F. Enriques, *Conferenze di geometria* (cours autographié), Bologne 1894-5, p. 65.
([364]) T. Levi-Civita, « Atti Ist. Veneto », (7) 4 (1892-3), p. 1765-815, (surtout § 19).

L'ensemble de ces éléments PQ forme en quelque sorte un élément de surface de v_n issu de P.

Les géodésiques issues de P suivant ces éléments PQ forment ce que l'on appelle, d'après F. SCHUR ([365]), une *surface géodésique* de v_n passant par le point P.

B. RIEMANN dit qu'une variété v_n est *homogène* quand il est possible de la faire mouvoir sur elle-même de façon à faire coïncider un de ses points P avec un quelconque de ses autres points P' et un élément de surface issu de ce point P avec un élément de surface arbitrairement fixé parmi ceux issus de P'. De cette définition de l'homogénéité il résulte immédiatement que toutes les surfaces géodésiques issues de deux points quelconques d'une variété homogène v_n ont la même courbure k. C'est ce qu'on exprime en disant que la variété a une *courbure constante.* La courbure k dont il est ici question est celle fournie par l'expression analytique que C. F. GAUSS ([366]) a donnée pour k dans le cas d'une surface ($n = 2$) de l'espace ordinaire, généralisée au cas d'une variété d'un nombre quelconque n de dimensions dans un espace à $n+1$ dimensions.

Dans toute variété à courbure constante k, le carré de l'élément linéaire ds s'exprime d'après B. RIEMANN ([367]) par une expression de la forme

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2}{1 + \frac{k}{4}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}.$$

La géométrie métrique différentielle d'une variété v_3 à courbure constante k équivaut pour $k = 0$ à la géométrie parabolique dans une région de l'espace ordinaire euclidien; pour $k < 0$, elle équivaut à la géométrie hyperbolique dans une région de l'espace ordinaire euclidien; pour $k > 0$ elle équivaut à la géométrie elliptique dans une région de l'espace ordinaire euclidien.

Dans cet ordre d'idées, B. RIEMANN a tout d'abord attiré l'attention sur le cas où $k > 0$, cas qui est celui de la géométrie elliptique.

L'affirmation de B. RIEMANN relative à la forme à laquelle on peut ramener l'expression du carré ds^2 de l'élément linéaire ds d'une variété

([365]) « Math. Ann. », 27 (1886), p. 546.

([366]) « Commentat. Soc. sc. Gött. recent. », 6 (1823-7), éd. Göttingue 1828, math. § 12 [1827]; *Werke*, 4, Göttingue 1880, p. 236.

([367]) *Habilitationsschrift* ([12]); « Abh. Ges. Gött. », 13 (1866-7), éd. 1868, math. p. 144; *Werke*, (2e éd.) publ. par H. WEBER, Leipzig 1892, p. 282; trad. L. LAUGEL, Paris 1898, p. 292.

à courbure constante k a été vérifiée ([368]) par E. B. CHRISTOFFEL ([369]) et par R. LIPSCHITZ ([370]).

S. LIE ([371]) a démontré comme conséquence d'un de ses théorèmes sur les groupes continus que *toute variété métrique* v_n *a nécessairement une courbure constante, quand il est possible de la faire mouvoir sur elle-même de façon à transformer en général un élément linéaire issu d'un point de la variété fixé arbitrairement en un autre élément arbitraire issu du même point.* Sous ces hypothèses le groupe de mouvements de v_n renferme $\frac{1}{2}n(n+1)$ paramètres, c'est-à-dire le *plus grand nombre possible de paramètres.*

Ces recherches de S. LIE simplifient les conditions d'homogéneité d'une variété v_n établies par B. RIEMANN.

36. - Caractère projectif des variétés à courbure constante.

E. BELTRAMI ([372]) et L. SCHLÄFLI ([373]) ont étudié le *caractère projectif des variétés à courbure constante.*

E. BELTRAMI a montré que, dans une *variété à courbure constante,* on peut, par un choix convenable du système de coordonnées, représenter les lignes géodésiques par des équations du premier degré.

Il en résulte que la géométrie projective s'applique, au sens différentiel, aux variétés à courbure constante quand on envisage dans ces variétés *les lignes géodésiques comme des droites.*

Inversement, comme l'a montré L. SCHLÄFLI ([374]), *toute variété, dans laquelle serait définie une géométrie métrique différentielle où la géométrie projective serait valable en considérant les géodésiques de cette variété comme des droites, est nécessairement une variété à courbure constante.*

La détermination métrique d'une variété à courbure constante peut aussi toujours être envisagée comme une détermination métrique projective de Cayley relative à une surface absolue du deuxième degré. Inversement *la détermination métrique établie dans un espace projectif* v_n *par rapport à une surface absolue du deuxième degré conduit à une expression quadratique pour le carré* ds^2 *de l'élément linéaire de* v_n, *de sorte que l'espace*

([368]) Cf. L. BIANCHI, « Atti R. Accad. Lincei, Rendic. mat. », (5) 7 II (1898), p. 147.
([369]) « J. reine angew. Math. », 70 (1869), p. 46. 241.
([370]) « J. reine angew. Math. », 70 (1869), p. 71; 72 (1870), p. 1.
([371]) Cf. S. LIE et F. ENGEL, *Transformationsgruppen* ([93]), 3, p. 353-5.
([372]) « Ann. mat. pura appl. », (2) 2 (1868-9), p. 232; *Opera*, 1, Milan 1902, p. 406.
([373]) « Ann. mat. pura appl. », (2) 5 (1871-3), p. 178-93.
([374]) « Ann. mat. pura appl. », (2) 5 (1871-3), p. 194.

projectif v_n apparaît comme une variété à courbure constante dans laquelle les droites sont des lignes géodésiques (375).

La correspondance entre les variétés à courbure constante et les espaces projectifs métriques devient parfaite si la variété où se trouve définie une géométrie métrique différentielle (pour des régions convenablement limitées) est telle que deux points y déterminent toujours *une seule* géodésique. Il est d'ailleurs toujours possible de compléter en ce sens une variété élémentaire abstraite quelconque par l'introduction de points idéaux [§ 24].

Au caractère projectif des variétés à courbure constante se rattachent aussi certaines recherches de F. SCHUR (376): cet auteur remarque que ce caractère projectif dépend de la propriété fondamentale, que possède une surface géodésique, de contenir un nombre ∞^2 de lignes géodésiques de l'espace (à trois ou à plus de trois dimensions), ce qui revient à la propriété fondamentale du plan [§ 8]. En s'appuyant sur cette remarque, F. SCHUR démontre les propriétés suivantes:

Si dans une variété métrique à n dimensions (où $n \geqslant 3$) *les surfaces géodésiques issues du point P contiennent chacune ∞^2 lignes géodésiques, la variété a une courbure constante relativement à tous les éléments de surface issus du point P.*

Si cette propriété a lieu pour les surfaces géodésiques issues de deux points P et P' de la variété envisagée, elle a aussi lieu pour toutes les surfaces géodésiques de cette variété et la variété a une courbure constante.

Ces théorèmes de F. SCHUR, par lesquels le problème des variétés métriques à courbure constante est en quelque sorte divisé en ses éléments projectifs, fournissent ainsi une solution très simple de ce problème.

Les recherches de F. SCHUR excluent aussi l'existence de variétés v_n à trois ou plus de trois dimensions ayant en chaque point déterminé une courbure constante sur tous les éléments de surface issus de ce point, courbure variant cependant d'un point à l'autre de v_n.

37. - Recherches de Tilly sur l'expression de la distance finie.

Au lieu de chercher avec B. RIEMANN à caractériser la géométrie métrique par l'expression de la distance élémentaire entre deux points infiniment voisins, on peut chercher à caractériser directement l'expression

(375) Voir E. BELTRAMI (353) et F. KLEIN, « Progr. Erlangen », 1872; réimpr. « Math. Ann. », 43 (1893), p. 63-100.

(376) « Math. Ann. », 27 (1886), p. 537. Voir aussi: L. BIANCHI, « Atti R. Accad. Lincei, Rendic. mat. », (5) 11 I (1902), p. 265. A propos d'une démonstration géométrique des mêmes résultats, voir F. ENRIQUES, « Rendic. Accad. Bologna », (2) 7 (1902-3), p. 52; L. BIANCHI, *Lezioni di geom. diff.*, (2e éd.), 1, Pise 1902, p. 349 (§ 161).

de la distance finie entre deux points essentiellement distincts. C'est précisement le but que J. DE TILLY ([377]) avait cherché à atteindre; il n'y est d'ailleurs pas parvenu.

Considérons l'espace comme une variété à trois dimensions dans laquelle on a fixé un système de coordonnées x, y, z. Étant donnés deux points quelconques i et k de coordonnées

$$(x_i, y_i, z_i)\,, \qquad (x_k, y_k, z_k)$$

leur distance (ik) s'exprime par une fonction symétrique

$$F_{ik}(x_i, y_i, z\ ;\ x_k, y_k, z_k)$$

de x_i, y_i, z_i, x_k, y_k, z_k qui satisfait à plusieurs conditions parmi lesquelles les deux suivantes sont essentielles:

a) La distance de deux points i et k varie avec ces deux points d'une façon continue et s'annule seulement quand les deux points coïncident.

b) Étant donnée une suite de points 1, 2, 3, 4, ... et un point $2'$ tel que sa distance $(1\ 2')$ au point 1 soit égale à la distance $(1\ 2)$ des points 1 et 2, il existe une suite de points $3'$, $4'$, ... tels que la distance entre deux points quelconques de la seconde suite soit égale à la distance entre les deux points homologues de la première.

Cette seconde condition, qui, au fond, introduit la notion de mobilité ([378]) des figures, est une condition fonctionnelle à laquelle *doit satisfaire* la fonction à l'aide de laquelle s'exprime la distance (ik) de deux points quelconques i et k.

Si l'on considère deux groupes de cinq points (1, 2, 3, 4, 5) et (1, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$) ayant en commun un premier point 1, des neuf équations,

$$(1)\qquad \begin{cases} (1\ 2) = (1\ 2')\,, & (1\ 3) = (1\ 3')\,, \quad (1\ 4) = (1\ 4')\,, \\ (1\ 5) = (1\ 5')\,, & (2\ 3) = (2'3')\,, \quad (2\ 4) = (2'4')\,, \\ (2\ 5) = (2'5')\,, & (3\ 4) = (3'4')\,, \quad (3\ 5) = (3'5') \end{cases}$$

on déduit, sous certaines restrictions convenables, que l'on a identiquement

$$(4\ 5) = (4'\ 5')\,.$$

([377]) « Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux », (2) 3 (1880), p. 1-190; « Mém. couronnés et autres Mém. Acad. Belgique », in-8°, 47 (1892-3), mém. n° 5, p. 3-80 [1892].

([378]) Voir au n° 39 les postulats de H. VON HELMHOLTZ.

Il existe donc nécessairement, entre les dix distances de deux quelconques des cinq points d'un groupe (1, 2, 3, 4, 5), une relation caractéristique dont la forme doit être indépendante du groupe des cinq points considérés. On a donné à cette relation le nom de *relation des cinq points.* C'est une *condition d'homogénéité* de l'espace.

La relation des cinq points peut se mettre sous la forme

$$\Psi[(1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)(1\ 5)(2\ 3)(2\ 4)(2\ 5)(3\ 4)(3\ 5)(4\ 5)] = 0\,,$$

où Ψ est une fonction *déterminée* des dix distances qui figurent entre crochets. Pour abréger, nous représenterons cette relation par l'équation symbolique

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5) = 0\,.$$

Si l'on envisage un groupe de six points (1, 2, 3, 4, 5, 6), la condition d'homogénéité de l'espace se traduit par une condition dite *relation des six points* à laquelle une fonction *déterminée* Ψ, analogue à la précédente, doit satisfaire. On peut énoncer simplement cette condition en observant tout d'abord que, après avoir fixé arbitrairement sous certaines restrictions convenables (1 6), (2 6) et (3 6), on peut toujours déterminer (4 6) et (5 6) de façon que les relations

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 6) = 0\,, \qquad (1\ 2\ 3\ 5\ 6) = 0$$

soient vérifiées en même temps que la relation

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5) = 0\,,$$

quelle que soit la forme de la fonction Ψ. Ceci posé, la condition des six points peut être énoncée ainsi:

Les trois relations simultanées

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5) = 0\,, \qquad (1\ 2\ 3\ 4\ 6) = 0\,, \qquad (1\ 2\ 3\ 5\ 6) = 0$$

entraînent comme conséquences les trois relations

$$(1\ 2\ 4\ 5\ 6) = 0\,, \qquad (1\ 3\ 4\ 5\ 6) = 0\,, \qquad (2\ 3\ 4\ 5\ 6) = 0\,.$$

Les recherches concernant la relation des *cinq* points, faites par

A. CAYLEY ([379]), L. N. M. CARNOT ([380]) et J. L. LAGRANGE ([381]) pour la géométrie euclidienne, et par E. SCHERING ([382]) et P. MANSION ([383]) pour la géométrie non-euclidienne, ont conduit, dans le cas de cinq points, à deux expressions particulières Ψ_1 et Ψ_2 de la fonction

$$\Psi = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$$

qui se présentent toutes les deux sous la forme d'un déterminant. De ces deux expressions particulières de

$$\Psi = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$$

on peut, inversement, déduire l'expression de la distance dans la géométrie euclidienne et non-euclidienne, si, outre les deux conditions essentielles *a*) et *b*), on tient compte d'une troisième condition *c*), à laquelle doit aussi satisfaire la fonction symétrique F_{ik} des coordonnées des deux points i et k, condition exprimant la propriété additive des distances des deux points d'une même droite.

Il faudrait toutefois démontrer que les expressions de la distance déterminées par Ψ_1 et Ψ_2 sont, au moins sous certaines conditions de réalité convenablement choisies, les seules solutions possibles du problème proposé. Les considérations peu rigoureuses de J. DE TILLY sont à cet égard complètement insuffisantes: on ne saurait en conclure que d'autres solutions ne sont pas possibles. H. F. BLICHFELDT ([384]) a d'ailleurs obtenu des expressions de relations possibles entre les distances qui ne sont pas contenues dans les formules de J. DE TILLY.

38. - Systèmes géométriques de Minkowski-Hilbert.

Certaines recherches de H. MINKOWSKI et D. HILBERT, qui ont aussi comme point de départ l'expression de la distance finie entre deux points d'une variété donnée, conduisent à des systèmes géométriques plus gé-

---

([379]) *« Cambr. math. J. », 2 (1839-41), p. 267-71; « Papers », 1, Cambridge 1889, p. 1-4.*

([380]) * *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points pris dans l'espace*, Paris 1806.*

([381]) « Nouv. Mém. Acad. Berlin », 4 (1773), éd. 1775, p. 149; *Œuvres*, 3, Paris 1869, p. 661.

([382]) E. SCHERING, « Nachr. Ges. Gött. », 1870, p. 317; 1873, p. 13, 149; *Werke*, 1, Berlin 1902, p. 160, 169, 177.

([383]) P. MANSION, « Ann. Soc. scient. Bruxelles », 13^1 (1888-9), p. 57; 15^1 (1890-1), p. 8; 16^1 (1891-2), p. 51.

([384]) « Trans. Amer. math. Soc. », 3 (1902), p. 467.

néraux que les précédents dont la métrique comprend comme cas particulier la métrique ordinaire euclidienne et non-euclidienne.

Soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) les coordonnées cartésiennes ordinaires de deux points de l'espace.

H. MINKOWSKI ([385]) prend comme expression de la *distance* entre ces deux points une fonction

$$\Omega(x_1 - x_2, \; y_1 - y_2, \; z_1 - z_2) ,$$

homogène du premier degré en $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$, de sorte que, quel que soit le paramètre t,

$$\Omega(tx_1 - tx_2, \; ty_1 - ty_2, \; tz_1 - tz_2) = t\, \Omega(x_1 - x_2, \; y_1 - y_2, \; z_1 - z_2) ,$$

et telle que, en fixant x_2, y_2, z_2 et envisageant x_1, y_1, z_1 comme des coordonnées courantes, l'équation

$$\Omega = 0$$

représente une surface non-concave. La fonction Ω envisagée est, en général, une fonction transcendante de $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$.

On obtient ainsi une géométrie métrique conventionelle, compatible avec la *géométrie projective*, en ce sens que les droites sont les lignes de longueur minime. Dans cette géométrie de H. MINKOWSKI il n'y a que ∞^3 mouvements qui ne sont autres que les ∞^3 translations de l'espace. Cette géométrie renferme comme cas particulier la géométrie ordinaire euclidienne.

D. HILBERT ([386]) a obtenu des résultats d'un caractère plus général en se proposant de résoudre le problème inverse:

Déterminer toutes les métriques possibles de l'espace dans lesquelles les droites sont des lignes de longueur minime et ont en outre une longueur infinie.

Il montre que *de telles métriques peuvent s'établir dans l'espace projectif en prenant comme absolu une surface fermée non-concave et comme expression de la distance de deux points A, B,* intérieurs à celle-ci, *l'expression*

$$c \log_e (ABMN) ,$$

où M, N désignent les points d'intersection de la droite indéfinie qui

---

([385]) *Geometrie der Zahlen*, Leipzig 1910, p. 1 [1896].

([386]) « Math. Ann. », 46 (1895), p. 91.

joint les deux point A et B avec la surface absolue et où c est une constante; $(ABMN)$ désigne le rapport anharmonique des quatre points A, B, M, N. La métrique de D. HILBERT est identique à la détermination métrique hyperbolique, si l'on prend comme absolu une quadrique réelle qui ne soit pas réglée.

La métrique de H. MINKOWSKI peut être envisagée comme le cas limite de celle de D. HILBERT correspondant au cas où l'absolu dégénère en un plan double à l'infini.

Dans la métrique générale de D. HILBERT, aucun mouvement n'est possible.

Le système géométrique de D. HILBERT peut être lui-même généralisé de nouveau de diverses façons, en abandonnant l'une ou l'autre des conditions auxquelles doit satisfaire la fonction de la distance entre deux points pour posséder les attributs que nous lui concédons conformément à notre intuition. Il suffit pour cela d'admettre que cette fonction n'est pas symétrique par rapport aux deux points dont elle dépend ou encore qu'elle n'est pas univoquement déterminée par eux ([387]).

B) GROUPE DE MOUVEMENTS.

39. - Postulats de Helmholtz.

Les recherches ayant pour objet de caractériser la géométrie de l'espace physique par les propriétés des *mouvements*, envisagés comme des transformations de points dans une région de l'espace, ont eu pour point de départ certaines remarques de F. UEBERWEG ([388]) et une première ébauche élaborée par H. VON HELMHOLTZ ([389]).

En faisant ressortir le caractère fondamental qu'ont les mouvements de constituer un groupe, F. KLEIN ([390]) posa le problème sous une forme plus précise: il l'énonça comme un problème ressortissant de la théorie des groupes. Ainsi posée, la question fut traitée et résolue à divers points de vue par S. LIE et, en partie aussi, indépendamment de S. LIE par H. POINCARÉ. Les postulats que H. VON HELMHOLTZ pose comme fondements de la géométrie sont les suivants:

([387]) Voir G. HAMEL, Diss. Göttingue 1901; « Math. Ann. », 57 (1903), p. 231.

([388]) « Archiv. für Philologie und Pädagogik », 17 (1851), p. 20-54.

([389]) « Verh. des Naturhist. medic. Vereins Heidelberg », (1) 4 (1865-8), p. 197; « Wiss. Abh. », 2, Leipzig 1883, p. 610; « Nachr. Ges. Gött. », 1868, p. 193; « Wiss. Abh. », 2, Leipzig 1883 p. 618.

([390]) « Progr. Erlangen » 1872; réimpr. « Math. Ann. », 43 (1893), p. 63-100; voir aussi « Math. Ann. », 6 (1873), p. 116.

I. – *Postulat concernant la continuité et les dimensions de l'espace.*

C'est le postulat qui permet de regarder l'espace comme une variété v_n à n dimensions, où $n = 3$ [cf. § 15].

La condition $n = 3$ peut d'ailleurs n'être introduite [cf. S. LIE, § 33] qu'après l'énoncé des postulats du mouvement pour n quelconque.

II. – *Postulat concernant l'existence des corps solides mobiles.*

Les coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ de deux points quelconques d'un corps solide (rigide) sont liées par une équation

$$\Omega(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$$

qui est la même, de quelque façon que l'on choisisse les deux points $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ parmi les paires de points congruents aux premiers, c'est-à-dire superposables aux premiers par un déplacement du corps solide dans l'espace.

III. – *Postulat concernant la liberté des mouvements.*

Si, dans un solide (rigide), on choisit arbitrairement un point P_1, ce point est entièrement libre de se mouvoir dans toutes les directions.

Si, ayant fixé P_1, on choisit en suite arbitrairement dans le solide un second point P_2, la rigidité du corps implique une équation entre les coordonnées de P_2 et celles de P_1.

Si, ayant fixé P_1 et P_2, on choisit en suite arbitrairement un troisième point P_3, la rigidité du corps implique deux équations entre les coordonnées de P_3 et celles de P_1 et P_2, et ainsi de suite.

Pour que chaque point du corps solide soit entièrement fixé dans l'espace à n dimensions, il faut et il suffit que l'on fixe n points de ce solide; entre les coordonnées de ces n points, on a

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

équations de conditions.

IV. – *Postulat concernant la connexion entre rotation et identité, ou postulat de monodromie.*

On admet que dans l'espace à n dimensions une rotation complète autour de $n - 1$ points fixés d'une façon générale (en évitant certaines positions particulières) fait coïncider identiquement avec lui-même un corps solide; dans ce mouvement de rotation, la ligne circulaire décrite par un point quelconque du solide est fermée.

En s'appuyant sur ces quatre postulats, H. VON HELMHOLTZ parvient à l'expression du carré ds^2 de l'élément linéaire donnée par B. RIEMANN.

H. VON HELMHOLTZ croyait avoir prouvé que ses quatre postulats sont indépendants les uns des autres et peuvent donc servir à caractériser complètement la géométrie générale, euclidienne ou non-euclidienne, de l'espace.

Mais aux démonstrations de H. VON HELMHOLTZ, S. LIE ([391]) oppose plusieurs objections, en particulier l'objection fondamentale: que H. VON HELMHOLTZ a fait correspondre aux diverses rotations possibles autour d'un point fixe P des équations linéaires entre les *dérivées premières* des coordonnées de P, ce qui n'est pas toujours nécessairement exact ([392]).

Il faut aussi remarquer que le postulat de monodromie qui est nécessaire pour fonder la géométrie plane, où $n = 2$, devient superflu dans le cas de l'espace, où $n = 3$, comme J. DE TILLY ([377]) l'avait soutenu déjà avant S. LIE. F. KLEIN ([393]) a cherché, mais sans y parvenir, à mettre ce fait en évidence par des considérations d'un caractère intuitif.

Des résultats obtenus par H. VON HELMHOLTZ subsiste toutefois la possibilité de fonder la géométrie générale de l'espace sur les trois premiers postulats, pourvu que ces postulats soient regardés comme valables pour tous les points d'une région de l'espace ([394]).

40. - Recherches de S. Lie ([395]).

Voici sous quelle forme S. LIE pose le problème de H. VON HELMHOLTZ, dont il parvient à donner deux nouvelles solutions.

Supposons tout d'abord que l'espace soit une variété à trois dimensions v_3, où se trouve fixé un système de coordonnées

$$v_3 \equiv (x, y, z) .$$

Les mouvements dans l'espace, en tant qu'ils sont composables et inversibles, apparaissent comme formant un groupe de transformations ponctuelles; cette hypothèse remplace celle que H. VON HELMHOLTZ rattache

([391]) Cf. S. LIE et F. ENGEL, *Transformationsgruppen* ([93]), 3, p. 437.

([392]) Il est en effet possible que dans le groupe de mouvements du corps rigide autour de P, il y ait des mouvements pour lesquels les dérivées premières des coordonnés de P restent fixes, alors que les dérivées secondes, par exemple, ou des dérivées d'ordre supérieur varient.

([393]) « Math. Ann. », 37 (1890), p. 544; d'une façon plus précise dans: *Höhere Geometrie* (cours autographié), 2, Leipzig 1893; réimpr. 2, Leipzig 1907, p. 240.

([394]) Cf. S. LIE et F. ENGEL, *Transformationsgruppen* ([93]), 3, p. 498.

([395]) « Ber. Ges. Lpz. », 38 (1886), math. p. 337; *Transformationsgruppen* ([93]), 3, p. 471, 498 (section 6).

*Voir aussi W. KILLING, *Geometrie* ([77]), 2e p. 360. Les deux premières publications de W. KILLING ayant trait à cette question [*Über die nicht euklidischen Raumformen von n-Dimensionen*, Brauenberg 1883; *Erweiterung des Raumbegriffes*, Brauenberg 1884] sont antérieures à celles de S. LIE (Note de F. SCHUR).*

à la notion de congruence, à savoir que la congruence est une relation réciproque et que deux figures congruentes à une troisième sont congruentes entre elles. Or le problème ([396]) « fixer un système de postulats qui soit à la base de la géométrie métrique générale » se ramène à celui de caractériser par des propriétés générales les groupes de mouvements des géométries euclidienne et non-euclidienne, en les distinguant de tous les groupes possibles de transformation d'une variété v_3. Il est possible d'y parvenir en faisant des hypothèses se rapportant au voisinage infiniment petit de chaque point de la variété v_3, ou bien en posant les postulats convenant à une région finie de la variété v_3.

Avant d'énoncer les résultats obtenus par S. LIE, établissons d'abord la définition suivante: un groupe de transformations dans une variété v_3 permet une liberté entière de mouvement infiniment petit autour de chaque point P de v_3 lorsque, le point P restant fixe, il est encore possible d'amener par des transformations du groupe un élément linéaire p, issu de P, à coïncider avec un autre élément linéaire quelconque p', issu de P, et un élément de surface π, mené par p, en un élément de surface quelconque π', mené par p'.

Ceci posé, on montre que *les groupes de mouvements euclidiens et non-euclidiens de l'espace envisagé comme une variété à trois dimensions*

$$v_3 \equiv (x, y, z)$$

sont complètement caractérisés par la propriété d'être réels, transitifs, engendrés par des transformations infinitésimales et de rendre possible tout mouvement infiniment petit autour de chaque point arbitrairement fixé dans v_3.

La conclusion s'étend sans modification importante au cas des groupes de mouvements dans des variétés à un nombre $n > 3$ de dimensions; mais pour $n = 2$, il faut ajouter le postulat de monodromie de H. VON HELMHOLTZ, afin d'écarter d'autres types de groupes qui seraient conciliables avec l'hypothèse des mouvements infiniment petits envisagés.

Si l'on considère, au contraire, les propriétés des mouvements dans une région *finie* simplement connexe, on arrive au résultat suivant:

La géométrie métrique générale de l'espace peut être fondée au sens différentiel, c'est-à-dire pour une région limitée de l'espace, sur les postulats suivants:

1) *L'espace est une variété à trois dimensions* (v_3) *où l'on peut fixer un système de coordonnées.*

([396]) On laisse ici provisoirement de côté la question des rapports de connexion de l'espace illimité, dont on s'occupera dans le chapitre suivant.

2) *Les mouvements dans l'espace forment un groupe réel de transformations engendré par des transformations infinitésimales.*

3) *Si l'on fixe arbitrairement un point* (y_1^0, y_2^0, y_3^0) *de l'espace à trois dimensions, les coordonnées* x_1, x_2, x_3 *des points avec lesquels un point* (x_1^0, x_2^0, x_3^0) *peut être amené à coïncider par un mouvement convenable satisfont à une équation*

$$\Omega(x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0, y_2^0, y_3^0, x_1, x_2, x_3) = 0$$

représentant une surface qui passe par le point (x_1^0, x_2^0, x_3^0), *mais non par le point* (y_1^0, y_2^0, y_3^0).

4) *Autour du point* (y_1^0, y_2^0, y_3^0) *on peut délimiter dans l'espace une région à trois dimensions telle que, le point* (y_1^0, y_2^0, y_3^0) *restant fixe, tout autre point* (x_1^0, x_2^0, x_3^0) *de cette région puisse être amené, par un mouvement continu, en un quelconque des points dont les coordonnées verifient l'équation*

$$\Omega = 0 .$$

41. - Recherches de Poincaré.

Sans connaître aucun des résultats obtenus par S. Lie, dont le premier mémoire [397] est daté du 25 octobre 1886, H. Poincaré [398] s'est proposé de caractériser, au moyen de la théorie des groupes, les géométries du plan qui ont pour absolu une forme quadratique au sens de la géométrie projective [cf. § 30].

Il est amené à poser le système suivant de postulats:

1) *Le plan est une variété à deux dimensions.*

2) *Les mouvements forment dans le plan un groupe réel de transformations, engendré par des transformations infinitésimales et dépendant de trois paramètres.*

3) *Lorsque, dans le plan, on fixe deux points d'une figure, la figure elle-même reste immobile.*

Ce troisième postulat correspond au postulat de monodromie de H. von Helmholtz. Il est conçu de façon qu'on n'exclut pas le cas où, d'un point du plan, on peut mener des tangentes réelles à la forme quadrique prise pour absolu. Pour que les trois cas, auxquels on a donné

---

[397] S. Lie, « Ber. Ges. Lpz. », 38 (1886), math. p. 342; cf. *Über die Grundlagen der Geometrie* [« Ber. Ges. Lpz. », 42 (1890), math. p. 283].

[398] « Bull. Soc. math. France », 15 (1886-7), p. 203. Cf. S. Lie, *Transformationsgruppen* [93], 3, p. 437, note 2.

les noms d'elliptique, d'hyperbolique et de parabolique, soient seuls possibles il suffiit de postuler par exemple que *toutes* les droites partant d'un même point doivent être congruentes.

42. - Recherches de Hilbert.

Dans la classification des groupes de transformation, S. Lie et H. Poincaré se bornent à envisager des transformations *analytiques* ou tout au moins des transformations pouvant être représentées par des *fonctions dérivables*, ce qui concorde avec la génération des groupes à l'aide des transformations infinitésimales représentées analytiquement comme le fait S. Lie dans sa théorie des groupes. Or on ne voit pas bien si cette restriction ajoute ou non des hypothèses aux postulats de la géométrie qu'il s'agit de caractériser ([399]).

D. Hilbert ([400]) a cherché à éclaircir cette question; après avoir posé les hypothèses qui caractérisent le plan comme variété à deux dimensions dans laquelle on puisse fixer un système de coordonnées, il montre *que les groupes de mouvements euclidiens et non-euclidiens du plan sont caractérisés, entre tous les groupes de transformations continues biunivoques par les trois postulats suivants*:

I) *Les mouvements forment un groupe.*

II) *Les mouvements pour lesquels un point reste fixe peuvent amener un point quelconque autre que le point fixe en une infinité de positions distinctes.*

III) *Les mouvements forment un système fermé, au sens de G. Cantor*, en ce sens que s'il y a, par exemple, des mouvements par lesquels on peut amener aussi près que l'on veut d'un groupe de trois points donnés A', B', C' chaque groupe de trois points situés aussi près que l'on veut d'un groupe déterminé de trois points A, B, C, il y aussi nécessairement un mouvement par lequel le groupe de points A, B, C, lui-même peut être amené à coïncider avec le groupe de points A', B', C'.

Il peut tout d'abord sembler étrange que ces seules conditions suffisent à caractériser le groupe des mouvements entre tous les groupes possibles de transformations planes, surtout parce que l'on ne postule pas que les mouvements pour lesquels un point reste fixe doivent être seulement en nombre ∞^1; mais il convient de remarquer que la condition III

([399]) S. Lie [« Ber. Ges. Lpz. » 38 (1886), math. p. 342] se demande comment on peut caractériser les groupes des transformations définissant la géométrie euclidienne et non-euclidienne, si l'on abandonne le caractère analytique des fonctions considérées. Cf. F. Schur, « Math. Ann. », 41 (1893), p. 509-38.

([400]) *Grundlagen* ([27]), (2e éd.), p. 121, Anhang IV.

a pour effet d'exclure tous les groupes (tels que le groupe projectif et le groupe conforme) où il entre, comme cas-limites, des *transformations dégenérées* et par conséquent non bi-univoques.

RAPPORTS DE CONNEXION DE L'ESPACE ILLIMITÉ

43. - Variétés pouvant se mouvoir tout entières.

Les recherches mentionnées, relatives aux fondements de la géométrie métrique, reposent sur ce que l'on prend comme postulats certaines propositions révélées immédietament par l'expérience dans une région de l'espace physique accessible aux sens.

En procédant ainsi, on n'obtient pas toutefois les propriétés de l'*espace entier*. Pour les obtenir il faut adjoindre aux recherches dont on vient de parler certaines recherches particulières complémentaires ([401]).

Si l'on admet que les conclusions auxquelles l'expérience conduit relativement à la géométrie de la région observable de l'espace s'étendent, aux environs de chaque point de l'espace situé en dehors de cette région, à une certaine région convenablement choisie autour de ce point, l'espace complet apparaît comme une variété à trois dimensions V_3 à courbure constante et sans points singuliers, telle que, aux environs du *chacun* des points de V_3, la métrique générale ordinaire euclidienne oe non-euclidienne s'applique. Aux environs d'un point, on peut d'ailleurs faire correspondre une région déterminée d'un espace projectif métrique S_3, de façon que les figures correspondantes tracées dans V_3 et S_3 soient congruentes.

Mais on ne peut pas affirmer que la correspondance ainsi établie s'étend nécessairement à la variété total V_3 et à l'espace projectif complet S_3; il peut au contraire arriver que la géométrie de la variété total diffère de la géométrie de l'espace complet S_3, comme la géométrie d'une surface entière diffère souvent de la géométrie d'une seconde surface, même quand les deux surfaces sont applicables au sens différentiel [§ 16].

Il peut ainsi arriver que, dans toute partie simplement connexe située dans une variété V_3, il y ait ∞^6 mouvements possibles, et que cependant, par suite de la connexion de la variété totale V_3, cette variété totale V_3 ne puisse se mouvoir qu'avec un degré de liberté moindre. Un fait analogue se produit déjà dans la géometrie des surfaces; si l'on envisage,

([401]) F. KLEIN, « Math. Ann. », 37 (1890), p. 544.

par exemple, la surface d'un cylindre circulaire applicable sur le plan dans le sens différentiel, on voit qu'une portion simplement connexe quelconque de la surface cylindrique peut se mouvoir sur cette surface autour d'un de ses points arbitrairement fixé, mais la surface entière ne peut plus se mouvoir dès qu'un seul de ses points est fixé.

Supposons que non seulement chacune des parties d'une variété V_3 à courbure constante puisse se mouvoir de ∞^6 manières, mais qu'il en soit de même de la variété entière V_3. Est-il alors possible d'envisager la variété *entière* V_3 comme un espace projectif métrique S_3? Il est un cas bien connu dans lequel cela n'est certainement pas possible. Dans une variété à quatre dimensions dans laquelle on a fixé un système de coordonnées cartésiennes, considérons, en effet, la variété à trois dimensions dont les éléments (ou points) correspondent à toutes les valeurs des quatre coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 satisfaisant à la relation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x^4 = r^2$, où r est une constant donnée; on a donné à cette variété le nom *d'espace sphérique* de rayon r. Il y a ∞^6 mouvements qui transforment en soi l'espace sphérique tout entier. Toutefois celui-ci n'est pas identique à l'espace elliptique; car deux points de l'espace sphérique ne déterminent pas toujours une seule ligne géodésique contenant, en même temps qu'un point (a_1, a_2, a_3, a_4), le point opposé $(-a_1, -a_2, -a_3, -a_4)$. L'espace sphérique est plutôt dérivé de l'espace elliptique par une transformation ([402]) [1, 2] de ce dernier (tout comme la sphère ordinaire peut être dérivée du plan elliptique ou de la gerbe).

On admettait autrefois, en général, que la géométrie sphérique était la seule géométrie compatible avec l'hypothèse d'une courbure constante positive ([403]) et que, par suite, dans une variété de courbure constante positive sans points singuliers, considérée comme *entière*, deux lignes géodésiques devaient nécessairement se rencontrer en deux points opposés. Comme nous l'avons déjà signalé plus haut [§ 16], F. KLEIN ([404]) a remarqué que cette opinion était erronée. S. NEWCOMB ([405]) et W. KILLING ([406]) ont envisagé l'espace elliptique en opposition avec l'espace sphérique ou parallèlement à l'espace sphérique.

Revenons maintenant à la question précédemment posée. On a démontré ([407]) que, dans tous les cas, *une variété à trois dimensions de courbure constante k, qui, considérée dans son entier, admet ∞^6 mouvements*

([402]) *On entend par transformation [2, 1] entre deux variétés v et v' une transformation univoque non réversible dont l'inverse [1, 2] fait correspondre à chaque élément de v' deux éléments de v.*

([403]) B. RIEMANN ne semble cependant pas avoir émis d'opinion à ce sujet.

([404]) « Math. Ann. », 4 (1871), p. 604-5 en note; id. 6 (1873), p. 125.

([405]) « J. reine angew. Math. », 83 (1877), p. 293.

([406]) « J. reine angew. Math. », 86 (1879), p. 72; 89 (1880), p. 265.

([407]) W. KILLING, *Grundlagen* ([77]), 1, p. 313.

en elle-même, comme en chacune de ses parties, peut être envisagée quand $k < 0$ *comme un espace hyperbolique, quand* $k = 0$ *comme un espace parabolique, et quand* $k < 0$ *soit comme un espace elliptique soit comme un espace sphérique.*

G. VERONESE ([408]) a introduit l'espace sphérique à côté de l'espace elliptique par un système convenable de postulats. Pour cela, il suppose que la proposition: *deux points déterminent une droite* est en défaut pour certaines paires particulières de points d'une certaine droite; il admet aussi que cette exception concerne également tous les couples de points congruents aux premiers sur la droite; mais qu'un point d'une droite quelconque et un point en dehors de cette droite ne déterminent jamais qu'une seule droite.

44. - Formes à deux dimensions de Clifford-Klein.

Abandonnons maintenant la condition que notre variété V_3 à courbure constante, considérée dans son entier, puisse se muovoir de ∞^6 manières.

On trouve alors d'autres formes de l'espace qui, dans les environs de chaque point, peuvent être envisagées comme une partie d'espace projectif métrique, mais ces formes différeront cependant essentiellement d'un tel espace par leurs propriétés de connexion; ces formes ont été désignées par W. KILLING ([409]) sous le nom de *formes de Clifford-Klein.*

Considérons une variété entière V_2 à courbure constante nulle. Toute portion simplement connexe de cette variété V_2 peut être représentée d'une façon isométrique bi-univoque sur une certaine partie du plan euclidien. Mais pour pouvoir représenter de cette façon la variété V_2 tout entière sur le plan euclidien, il faut éventuellement commencer par la diviser en parties convenablement choisies. L'image de V_2 apparaît alors sur une partie du plan euclidien limitée par une ligne formée de parties deux à deux congruentes l'une à l'autre. Les deux parties congruentes soudées l'une à l'autre correspondent sur V_2 aux deux côtés des coupures ayant servi à diviser V_2.

Un premier exemple d'une forme de Clifford-Klein à deux dimensions est fourni par un cylindre fermé, un cylindre droit à base circulaire par exemple. Si l'on coupe le cylindre le long d'une de ses génératrices, on peut le représenter d'une façon bi-univoque sur une partie du plan euclidien comprise entre deux droites parallèles. Inversement, on peut considérer toute partie du plan euclidien comprise entre deux

---

([408]) *Fondamenti* ([26]), p. 435.

([409]) « Math. Ann. », 39 (1891), p. 257.

droites parallèles comme l'image complète d'un cylindre droit à base circulaire, si l'on convient de regarder comme images du même point du cylindre les points des deux droites parallèles situées sur une même perpendiculaire à ces deux droites (410).

On obtient un second exemple d'une forme de Clifford-Klein en traçant dans le plan euclidien un parallélogramme, et en convenant d'envisager comme correspondants les points du périmètre de ce parallélogramme situés sur une même parallèle aux deux autres côtés.

En effectuant ses recherches sur l'espace elliptique, W. K. Clifford (411) a trouvé que l'on peut construire dans un tel espace des surfaces réglées du second degré de courbure nulle (au sens de la détermination métrique elliptique) et cependant de contenu total fini. A ces quadriques correspond d'une façon isométrique biunivoque un parallélogramme du plan euclidien, de façon qu'à deux points correspondants du périmètre de ce parallélogramme ne correspond qu'un seul et même point de la coupure effectuée sur la quadrique le long d'une de ses génératrices. (Ces quadriques réglées sont les quadriques qui coupent l'absolu imaginaire F_2 suivant un quadrilatère rectiligne). C'est en partant de ce résultat de W. K. Clifford, que F. Klein a développé la théorie générale des variétés à deux dimensions envisagées ici.

Les surfaces cylindriques, aussi bien que les surfaces de Clifford considérées dans leur totalité, ne peuvent se mouvoir sur elles-mêmes que de ∞^2 manières.

On démontre qu'une variété euclidienne V_2 à deux dimensions illimitée, sans points singuliers ou lignes doubles, mais à deux faces, peut s'appliquer entièrement soit sur le plan euclidien, soit sur un cylindre droit à base circulaire, soit sur la surface de Clifford (412).

On rencontre d'ailleurs un autre type de variété V_2 à une seule face qui est représentée sur une surface de Clifford de façon qu'à chaque point de V_2 correspondent *deux* points homologues sur la surface de Clifford, tandis qu'à chaque point de cette surface ne corresponde qu'un point de V_2 (413). En envisageant de même les différents types de variété V_2 à courbure constante *positive* ou *négative*, on arrive aux résultats suivants (414):

Une variété illimitée à deux dimensions, à courbure constante, positive

(410) Voir F. Klein, « Math. Ann. », 37 (1890), p. 544; *Nicht-Euklidische Geometrie* (cours autographié) Göttingue, 2 (1890), p. 293.

(411) W. K. Clifford (342). Voir aussi F. Klein (410) et L. Bianchi, « Atti Accad. Torino », 30 (1894-5), p. 743; « Ann. mat. pura appl. », (2) 24 (1896), p. 93.

(412) F. Klein (410); W. Killing, « Math. Ann. », 39 (1891), p. 257; *Geometrie* (77), 1, p. 325.

(413) F. Klein (410).

(414) F. Klein (410); cf. W. Killing, *Geometrie* (77), 1, p. 325 et suiv.

peut s'appliquer entièrement, d'une façon bi-univoque, soit sur le plan elliptique, soit sur la sphère. Il existe, par contre, une infinité de types de variétés illimitées à deux dimensions (sans points singuliers ni lignes doubles), ayant une courbure constante négative, qui ,envisagées dans leur totalité, ne peuvent se mouvoir sur elles-mêmes de ∞^3 manières. Leur détermination conduit à des divisions du plan hyperbolique en polygones congruents qui sont analogues aux divisions du plan euclidien soit en bandes parallèles, soit en parallélogrammes.

Tout cet ordre de recherches se rattache étroitement aux questions géométriques que l'on aborde dans la théorie des fonctions des variables complexes, quand on y étudie les fonctions périodiques ainsi que les fonctions automorphes linéaires ([415]).

45. - Formes à trois dimensions de Clifford-Klein.

Parmi les variétés V_3 a trois dimensions, on trouve de même des formes de CLIFFORD-KLEIN. Elles sont également illimitées, sans points singuliers ni lignes doubles, et, envisagées dans leur totalité, elles ne peuvent se mouvoir sur elles-mêmes de ∞^6 manières, comme le peut une quelconque de leurs parties simplement connexe.

W. KILLING ([416]) a étudié les diverses formes V_3 de Clifford-Klein à courbure constante nulle; ce sont celles qui correspondent à l'espace euclidien.

La détermination des formes V_3 de Clifford-Klein à courbure constante négative conduit aux *divisions de l'espace hyperbolique en polyèdres congruents* (divisions que l'on rencontre aussi dans la théorie des fonctions automorphes).

On démontre aussi que *toute forme V_3 de Clifford-Klein à courbure constante positive peut s'appliquer entièrement soit sur l'espace elliptique, soit sur l'espace sphérique, de façon qu'à chacun des points de la forme V_3 corresponde dans cet espace (elliptique ou sphérique suivant les cas) un certain nombre entier p de points*; *deux quelconques de ces points qu'on appelle points homologues peuvent être amenés à coïncider par une translation de longueur* $\frac{l\pi}{d}$ *ou* $\frac{2l\pi}{p}\cdot$ Ce dernier résultat s'étend d'ailleurs à toutes les formes V_n de Clifford-Klein à courbure positive pour lesquelles n est un nombre impair.

([415]) Voir par ex. H. POINCARÉ, « Acta math. », 1 (1882), p. 1-62 ou encore l'exposé résumé de R. FRICKE et F. KLEIN, *Vorlesungen über automorphe Funktionen*, 1, Leipzig 1897. Cf. II 11 et II 12.

([416]) *Geometrie* ([77]), 1, p. 332.

GÉOMÉTRIE NON-ARCHIMÉDIENNE

46. - Introduction.

Dans tout ce qui précède, sauf toutefois aux §§ 13, 17, 18, et 20 à 23, on a toujours supposé que la continuité envisagée était la continuité *ordinaire*. Mais on a déjà mentionné à plusieurs reprises les recherches contemporaines où l'on s'est préoccupé de voir dans quelle mesure cette hypothèse est nécessaire au développement de la géométrie, et aussi dans quelle mesure elle peut être déduite d'autres postulats.

Ces recherches concernent tout particulièrement ce qui, dans la notion de continuité, correspond au postulat que l'on désigne sous le nom de postulat d'Archimède [§ 7]; elles ont conduit à fonder une géométrie *non-archimédienne* où l'on considère un continuum *de type supérieur* à celui du continuum ordinaire.

47. - Continuum à une dimension de type supérieur.

La question du postulat archimédien se rattache à celle de l'existence de grandeurs infiniment petites (ou infiniment grandes) actuelles qui s'est déjà posée dès la fondation de l'analyse infinitésimale. Nier le postulat d'Archimède revient en effet à admettre la possibilité de concevoir un *segment actuellement infini* ou *infiniment petit actuellement* [§ 7] relativement à l'unité de mesure adoptée, et par conséquent la possibilité de concevoir un nombre actuellement infini ou infiniment petit.

Les géomètres grecs avaient déjà rencontré une grandeur de cette espèce, *l'angle de contingence* ([417]), c'est-à-dire l'angle d'une courbe et de la tangente en un point de cette courbe, ou encore l'angle de deux courbes tangentes en leur point de rencontre. EUCLIDE ([418]) a démontré que l'angle formé par un cercle et sa tangente est plus petit que tout angle rectiligne; en s'appuyant sur une proposition d'Apollonius ([419]) on

---

([417]) *La locution *angulus contingentiae* a été employée en passant par JORDAN NEMORARIUS [*Geometria vel de triangulis libri IV*, éd. M. CURTZE, Thorn 1887, p. 28]; elle est probablement plus ancienne [cf. G. ENESTRÖM, « Bibl. math. », (3) 11 (1910-1), p. 82]. Les géomètres grecs employaient la locution γωνία κερατοειδής (angle corniforme); cf. PROCLI Diadochi ([2]), p. 122.*

([418]) **Elementa*, livre 3, prop. 16; *Opera*, éd. J. L. HEIBERG, 1, Leipzig 1883, p. 208-12.*

([419]) **Coniques* (κωνικά) livre 1, prop. 32; *Quae graece extant*, éd. J. L. HEIBERG, 1, Leipzig 1891, p. 94-8.*

en conclut qu'il en est de même pour une conique quelconque. L'observation que l'angle de contingence et l'angle rectiligne ne sont pas de même espèce semble avoir été faite dans l'antiquité (420) en comparant le théorème d'EUCLIDE avec un autre théorème (421) des Eléments; elle a été formulée nettement au moyen âge par J. CAMPANUS (422).

L'évaluation de l'ordre de grandeur de l'angle de contingence a soulevé de nombreuses controverses parmi les mathématiciens du seizième et du dix-septième siècle (423). D'une part on avançait avec J. PELETIER (424) que l'angle de contingence est effectivement nul (*quantitas non est*), d'autre part on estimait avec C. CLAVIUS (425) que cet angle doit être considéré comme infiniment petit par rapport à l'angle droit, en le considérant toutefois comme une quantité susceptible de division ou de multiplication.

La question de l'angle de contingence prenait ainsi place parmi celles dont la solution devait préoccuper les fondateurs de l'analyse infinitésimale. Aussi les mathématiciens de cette époque ne manquèrent-ils pas de s'en occuper.

Parmi les mathématiciens des 16ième, 17ième et 18ième siècles qui se rattachent au point de vue de J. PELETIER on peut citer F. COMMANDINO, F. VIÈTE, G. GALILÉE (GALILEO GALILEI) et J. WALLIS; parmi ceux qui se rattachent au point de vue de C. CLAVIUS on peut citer TH. HOBBES, G. W. LEIBNIZ et I. NEWTON.

La critique moderne a écarté de l'analyse mathématique telle qu'on la conçoit ordinairement l'infiniment petit actuel, aussi bien que l'infiniment grand actuel, en montrant que l'on peut édifier toute l'analyse sans avoir besoin de s'écarter de la considération de quantités satisfaisant au postulat d'Archimède. Mais l'infiniment petit actuel ainsi que l'infiniment grand actuel apparaissent dans d'autres branches des mathématiques.

1) L'infiniment grand actuel s'impose par exemple lorsq'on compare la manière plus ou moins rapide avec laquelle diverses fonctions variables

---

(420) Cf. PROCLI Diadochi (2), p. 234, 333-4.*

(421) **Elementa*, livre 10, prop. 1; *Opera*, éd. J. L. HEIBERG, 3, Leipzig 1886, p. 4.*

(422) **Addition à la proposition* 1 *du livre* 10 *des* « *Elementa* » [voir par ex. *Elementorum geometricorum lib. XV*, Bâle 1537, p. 244; cf. p. 67] (Notes 417 à 422 de G. ENESTRÖM).*

(423) Un exposé détaillé de l'histoire de la question a été donné par G. VIVANTI, *Il concetto d'infinitesimo*, Mantoue 1894; (2e éd.), « Giorn. mat. (2) 7 (1900), p. 285-303; tirage à part, Naples 1901; voir aussi « Bibl. math. », (2) 5 (1891), p. 97-8.

(424) **Demonstrationum in Euclidis elementa geometrica libri sex*, Lyon 1557; (2e éd.) Lyon 1610, p. 132; cf. J. PELETIER, *Commentarii tres: de dimensione circuli, de contactu linearum, de constitutione horoscopi*, Bâle 1563, p. 32.*

(425) **Euclidis elementorum libri XV*, Rome 1574, Addition à la proposition 16 du livre 3; éd. Rome 1603, p. 360-94 (Notes 424 et 425 de G. ENESTRÖM).*

tendent vers une certaine limite, ce qui amène P. DU BOIS-REYMOND à introduire divers *ordres d'infini* [I 3, § 23].

2) Il apparaît aussi dans la théorie des ensembles [I 3, § 17], où il a été formulé pour la première fois d'une façon arithmétique dans la construction des nombres transfinis de G. CANTOR [I 7, § 3].

En postulant à priori la propriété que les nombres transfinis qu'il introduit en arithmétique doivent former un ensemble bien ordonné, c'est-à-dire tel que dans chaque sous-groupe des éléments de l'ensemble de ces nombres il y ait toujours un *premier* élément (plus petit que tous les autres), G. CANTOR est forcément conduit à renoncer à imposer aux nouveaux nombres toutes les propriétés formelles des opérations arithmétiques auxquelles satisfont l'ensemble des nombres ordinaires. De là résulte que les nombres transfinis de G. CANTOR ne forment pas un système non-archimédien; car tout système non-archimédien pris au sens abstrait peut être envisagé comme une « droite » dans laquelle les postulats ordinaires de congruence ont lieu.

48. - Nombres non-archimédiens de Veronese et de Hilbert.

Dans ses recherches géométriques ayant pour objet l'étude des postulats sur lesquels repose la notion de « ligne droite », G. VERONESE ([426]) est parvenu à montrer la possibilité d'une géométrie non-archimédienne satisfaisant à tous les postulats de la disposition et de la congruence, mais pour laquelle la continuité ne s'applique qu'au sens restreint de G. CANTOR [cf. § 13]. Partant de là, il est parvenu à construire un système de nombres *non-archimédiens* pour lequel subsistent les propriétés formelles des opérations arithmétiques auxquelles satisfont l'ensemble des nombres ordinaires.

T. LEVI-CIVITA ([427]) a ensuite débarrassé cette construction de G. VERONESE de son enveloppe géométrique et a même obtenu un système de nombres non-archimédiens, qu'il a appelés *monosemii*, représentant des nombres d'un caractère encore plus général que ceux de G. VERONESE.

D. HILBERT ([428]) est parvenu par un autre procédé à un système spécial de nombres non-archimédiens.

Il considère un *corps de fonctions* $\Omega(t)$ dans lequel figurent comme éléments toutes les fonctions rationnelles de t et de $\sqrt{1+\omega^2}$, où ω est une fonctions rationnelle de t et de $\sqrt{1+t^2}$.

([426]) *Fondamenti* ([26]), en partic. p. 257 et p. 262.

([427]) « Atti Ist. Veneto », (7) 4 (1892-3), p. 1765-815.

([428]) *Grundlagen* ([27]), (2e éd.), p. 22.

Dans ce corps $\Omega(t)$, la somme et le produit des éléments sont définis comme d'habitude, c'est-à-dire de telle façon que les propriétés formelles des opérations de l'arithmétique des nombres ordinaires s'appliquent.

L'inégalité de deux éléments a, b de $\Omega(t)$ peut alors être définie, en prenant

$$a > b ,$$

quand la différence $a - b$ est positive pour une valeur t_0 de t suffisamment grande et pour toutes les valeurs de $t > t_0$.

S'il en est ainsi on peut considérer les éléments de $\Omega(t)$ comme les nombres d'un *système* non-archimédien particulier.

A. Bindoni ([429]) a cherché à établir un parallèle entre les nombres non-archimédiens de D. Hilbert et ceux de G. Veronese. En particulier il met en évidence la tendance de G. Veronese à envisager parmi les systèmes d'éléments satisfaisant à certaines propriétés données les systèmes les plus étendus possibles, et la tendance opposée de D. Hilbert d'envisager plutôt les systèmes les plus restreints possibles parmi ceux qui satisfont aux propriétés données.

49. - Résultats généraux de Veronese.

G. Veronese ne s'est pas borné à montrer la possibilité d'un continuum non-archimédien à une dimension; il a cherché à édifier une géométrie non-archimédienne à plusieurs dimensions. L'idée directrice de ses recherches paraît être que l'espace intuitif à n dimensions est doué d'un certain ensemble de propriétés grâce auxquelles il peut être construit de la façon suivante: en projetant une droite (espace à une dimension) par un point *extérieur* à cette droite, on obtient un plan (espace à deux dimensions); en projetant ce plan par un point *extérieur* à ce plan on obtient un espace à trois dimensions; en projetant cet espace à trois dimensions par un point *extérieur* à cet espace on obtient un espace à quatre dimensions; et ainsi de suite.

G. Veronese observe que, si l'on envisage une droite sur laquelle sont donnés les rapports de disposition et de congruence, on peut, à l'aide du postulat de G. Cantor, *construire*, en partant de certaines suites de points donnés sur la droite, d'autres points envisagés comme points limites de ces suites de points. Il examine dans quelle mesure les hypothèses sur lesquelles repose cette construction sont compatibles

([429]) « Atti R. Accad. Lincei, Rendic. mat. », (5) 11 II (1902), p. 205.

avec l'existence de points situés à l'extérieur de l'ensemble des points construits ainsi successivement sur la droite, et parvient ainsi à un *espace général* d'une infinité de dimensions et contenant une infinité d'unités rectilignes, qui est la forme la plus étendue à l'intérieur de laquelle la construction envisagée est toujours possible.

G. VERONESE a construit deux systèmes géométriques en prenant comme points de départ deux concepts différents de la droite.

1) Un système dans lequel la droite est une ligne *ouverte* et où l'on peut mener, par un point donné extérieur à une droite donnée, une infinité de parallèles à cette droite.

2) Un système dans lequel, comme dans la géométrie de B. RIEMANN, la droite est une ligne fermée.

En ce qui concerne le second système, il s'est surtout attaché à envisager les faits géométriques, concernant les diverses unités, avec ce qu'on pourrait appeler une approximation infiniment grande. Il remarque que, dans ce second système, aux environs d'un point quelconque la géométrie peut être envisagée comme euclidienne avec une approximation infinie (au sens de l'infini actuel).

50. - Géométrie projective non-archimédienne.

G. VERONESE a remarqué que, dans son espace ou dans celui qui peut être défini analytiquement par les nombres de T. LEVI-CIVITA, la géométrie projective s'applique.

Mais on est encore parvenu à une géométrie projective non-archimédienne à la suite de recherches ayant pour objet de restreindre les hypothèses nécessaires à la démonstration *geométrique* du théorème fondamental de la projectivité au sens restreint [cf. § 27].

Il s'agit d'établir ce théorème sans introduire les concepts ordinaires de la continuité [§ 13].

A l'aide de considérations *métriques*, où l'on envisage la similitude perspective comme une affinité, H. WIENER ([430]) avait établi que le théorème fondamental de la projectivité au sens restreint de V. A. PONCELET peut être déduit des théorèmes de Desargues et de Pappus sans qu'il soit nécessaire de faire appel à la continuité [§ 13].

Ce fait a été établi à nouveau par F. SCHUR ([431]); mais F. SCHUR

([430]) « Jahresb, deutsch. Math.-Ver. », 1, (1890-1), éd. Berlin 1892, p. 45; 3 (1892-3), éd. Berlin 1894, p. 70.

([431]) « Math. Ann. », 51 (1899), p. 401-9; voir aussi id. 55 (1902), p. 265-92 et L. BALSER, « Math. Ann. », 55 (1902), p. 293-300.

en a, le premier, donné une démonstration complète, et il l'a donnée à l'aide de considérations projectives seulement. F. SCHUR a fait, à cet effet, usage des postulats de l'appartenance.

H. G. ZEUTHEN ([432]) a proposé de rattacher le théorème fondamental de la projectivité au sens restreint à la propriété fondamentale des deux systèmes de génératrices de l'hyperboloïde ([433]).

F. SCHUR ([434]) utilisant une remarque de G. P. DANDELIN ([435]) a montré comment on peut déduire de cette propriété de l'hyperboloïde le théorème de Pappus, duquel résulte, comme on l'a dit à l'instant, le théorème fondamental de la projectivité. F. SCHUR remarque qu'il suffit d'admettre l'existence d'un seul hyperboloïde jouissant de la propriété fondamentale envisagée, et fait ressortir que des postulats de la congruence on déduit immédiatement que l'hyperboloïde de révolution jouit de cette propriété fondamentale concernant ses deux systèmes de génératrices.

D. HILBERT a encore restreint davantage les hypothèses nécessaires pour la démonstration du théorème de Pappus: il conserve les postulats de la congruence, *mais ne quitte pas le plan*; en fait il n'utilise donc parmi les postulats de l'*appartenance* que ceux qui se rapportent au plan. Il postule l'axiome des parallèles.

Comme résultat de toutes ces recherches, on peut énoncer le théorème que voici:

Le théorème fondamental de la projectivité entendu au sens restreint [§ 27] *peut être démontré en adjoignant aux postulats projectifs de la géométrie plane les postulats de la congruence et le postulat des parallèles* ([436]), *sans avoir recours ni au postulat de la continuité ni au postulat d'Archimède.*

La géométrie projective analytique peut être développée, sans avoir recours au postulat d'Archimède, en s'appuyant:

d'une part, sur les développements récents concernant la théorie des proportions [cf. § 18], dont la connexion avec le théorème fondamental de la projectivité (au sens restreint) apparaît dans la démonstration de ce théorème fondée sur l'invariance par projection du rapport anharmonique;

([432]) « C. R. Acad. sc. Paris », 125 (1897), p. 638-40, 858-9; 126 (1898), p. 213-5. L'essai de démonstration de H. G. ZEUTHEN n'a pas abouti.

([433]) Il s'agit de la proposition bien connue: soient trois droites (directrices) d_1, d_2, d_3 ne se coupant pas deux à deux et quatre droites g_1, g_2, g_3, g_4 rencontrant chacune d_1, d_2, d_3. Toute droite rencontrant g_1, g_2, g_3 rencontre aussi g_4.

([434]) « Math. Ann. », 51 (1899), p. 401-9.

([435]) « Ann. math. pures appl. », 15 (1824-5), p. 390 et suiv. [voir III 17, n° 23].

([436]) G. HESSENBERG [« Math. Ann. », 61 (1905), p. 161-72] et J. HJEMSLEV [« Math. Ann. », 64 (1907), p. 449-74] ont démontré le même théorème sans faire usage du postulat des parallèles et sans quitter le plan.

d'autre part, sur l'introduction des coordonnées sans faire usage d'un procédé de mesure, en d'autres termes sur le calcul des *tétraèdres* (*Würfen*) de K. G. CHR. VON STAUDT [cf. III 8] et sur les développements de H. HANKEL et F. SCHUR concernant le calcul par segments en géométrie projective.

D. HILBERT part d'un calcul par segments basé sur le théorème de Desargues et met en lumière le rôle du théorème de Pappus en montrant son équivalence avec la *commutativité de la multiplication*.

Comme, en se plaçant au point de vue arithmétique, on peut définir un système de nombres non-archimédiens pour lesquels la multiplication n'est pas commutative, on peut donc conclure avec D. HILBERT que *le théorème de Pappus ne peut être démontré à l'aide des postulats projectifs de l'espace sans faire usage des postulats de la continuité et de la congruence.*

On voit ainsi qu'il existe un système abstrait géométrique *non-pappusien* ou, comme dit D. HILBERT, un système *non-pascalien*, auquel s'appliquent les propriétés fondamentales de la disposition et de l'appartenance.

Il semble que l'on puisse caractériser le lien du postulat de la congruence et du théorème fondamental de la projectivité de la manière suivante: par des projections et sections successives en partant d'une droite et en aboutissant finalement à cette même droite, ou encore en partant d'un plan et en aboutissant finalement à ce même plan, on obtient sur la droite envisagée, ou sur le plan envisagé, une projectivité; le théorème fondamental nous apprend que la suite de projectivités que l'on peut ainsi former constitue un *groupe* dépendant d'un nombre *fini* de paramètres (pour la droite ce nombre est égal à trois). Ce fait semble être une conséquence de ce que les postulats de la congruence impliquent déjà que la suite de projectivités envisagées contient un sous-groupe fermé contenant *un seul* paramètre.

Comme le remarque B. LEVI ([437]), les postulats de la congruence dans la géométrie non-euclidienne nous permettent de déterminer dans le plan une certaine polarité alors que dans la géométrie euclidienne ils nous font connaître une polarité (à savoir la polarité orthogonale) dans la gerbe de droites ou de plans. On peut démontrer le théorème de la projectivité dans le plan ou dans la gerbe sans faire usage des postulats de la continuité, en ayant seulement soin d'adjoindre aux postulats descriptifs de l'espace un postulat affirmant l'existence d'une polarité à l'intérieur de la forme donnée de rang deux (plan ou gerbe).

([437]) « Memorie Accad. Torino », (2) 54 (1904), p. 283.

51. - Géométrie euclidienne non-archimédienne.

Les nombres fonctionnels de D. HILBERT [§ 47] peuvent être considérés comme coordonnées de « points » d'un espace non-archimédien, qui satisfait à tous les postulats de l'appartenance, de la disposition et de la congruence, ainsi qu'au postulat des parallèles.

On obtient ainsi une géométrie *euclidienne non-archimédienne* particulièrement simple. D. HILBERT a étudié les théorèmes fondamentaux de cette géométrie dans leurs rapports d'une part avec la notion d'aire et d'autre part avec les théorèmes fondamentaux de la géométrie métrique plane [438]:

α) Comme on l'a dit au § 17, on peut obtenir une mesure de surface indépendamment du postulat d'Archimède, si l'on convient d'envisager comme *équivalents* (c'est-à-dire de même aire), non seulement deux polygones P et P' pouvant être décomposés en un nombre fini de polygones congruentes, en sorte que

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n ,$$
$$P' = P'_1 + P'_2 + \dots + P'_n$$

(où pour $i = 1, 2, \dots, n$, P'_i est congruent à P_i), mais aussi deux polygones P et P' pouvant être décomposés en un nombre infini de polygones congruents.

β) Le postulat III 7 du § 11 se rapporte à la congruence des triangles dans lesquels deux côtés et l'angle compris sont respectivement congruents; la congruence est *directe* quand le sens des angles congruents est le même; elle est inverse dans le cas contraire; le postulat est satisfait dans les deux cas.

La vérification de ce postulat a un caractère expérimental et, dans le cas congruence inverse, un rabattement de la figure plane autour d'une droite du plan (rabattement pendant lequel la figure quitte le plan) est nécessaire. Sans quitter le plan des deux triangles, on ne peut reconnaître s'ils sont congruentes ou non que lorsque les angles égaux sont de même sens; ainsi donc on est amené à remplacer le postulat III 7 par un postulat sur la congruence au *sens restreint* concernant les triangles.

Bornons-nous toujours au cas des figures planes. Si dans ce cas, *on pose les postulats ordinaires de l'appartenance et des parallèles, de la dispo-*

---

(438) « Proc. London math. Soc. », (1), 35 (1902-3), p. 50; *Grundlagen* (27), Anhang II.

sition et de la congruence [cf. α), β), γ) des §§ 9, 10, 11], *en convenant de restreindre ce dernier au postulat de la congruence de triangles* directement congruents, *on peut* démontrer *le postulat de la congruence au sens le plus étendu en adjoignant aux autres postulats*:

a) *le postulat d'Archimède*;

b) *le postulat du* voisinage.

Ce dernier consiste en ce que *à tout segment AB correspond un triangle à l'intericur duquel n'existe aucun segment congruent à AB.*

Mais *si l'on fait abstraction du postulat d'Archimède* on ne peut démontrer *le theorème sur la congruence des triangles dans les sens le plus étendu.* Cela résulte de ce qu'il existe un système géométrique qui satisfait aux postulats cités, mais où les *angles à la base d'un triangle isocèle* ne sont pas égaux. D. HILBERT a donné à ce système le nom de système *non-pythagorien.*

D. HILBERT montre que dans tout système non-pythagorien:

a) on peut établir une théorie géométrique des proportions;

b) on peut démontrer que la somme des surfaces des carrés construits sur les deux côtés d'un triangle rectangle est, par soustraction de parties congruentes, égale à la surface du carré construit sur l'hypoténuse de ce triangle rectangle (en sorte que le théorème de Pythagore s'applique); mais il n'en résulte pas que, si b et c sont les longueurs des côtés et a celle de l'hypoténuse, on ait

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

parce que le *principe de A. de Zolt* qui sert de fondement à la mesure ordinaire des surfaces ne s'applique pas [cf. § 17];

c) on ne peut pas cependant toujours appliquer le théorème que la somme de deux côtés d'un triangle est plus grande que le troisième.

Si cependant on adjoint aux postulats du système non-pythagorien le principe de A. DE ZOLT, on peut prouver le théorème de l'égalité des angles de base dans le triangle isocèle ([439]).

Ces résultats mettent en lumière les rapports des théorèmes fondamentaux de la géométrie métrique plane (construite dans le sens des anciens) avec l'intuition de l'espace à trois dimensions, de même que le résultat du § 27 touchant le théorème de Desargues démontre l'importance de l'espace à trois dimensions pour fonder la géométrie projective.

([439]) Cela résulte déjà implicitement du mémoire de T. BONNESEN, « Nyt Tidsskrift mat. », Köbenhavn (Copenhague), Afd, B 11 (1900), p. 25.

52. - Développements non-archimédiens sur la théorie des parallèles.

Les rapports du postulat d'Archimède avec la théorie des parallèles ont été mis en lumière en se plaçant à deux points de vue distincts:

1) en établissant les fondements de la géométrie hyperbolique non-archimédienne: c'est ce qu'ont fait M. DEHN, F. SCHUR et D. HILBERT;

2) à l'occasion des développements non-archimédiens relatifs aux théorèmes de G. SACCHERI (ou de A. M. LEGENDRE), en d'autres termes en construisant les systèmes géométriques de M. DEHN.

Dans l'étude des principes de la théorie des parallèles de J. BOLYAI et N. I. LOBAČEVSKIJ on applique souvent le postulat de la continuité sous la forme ordinaire de R. DEDEKIND ainsi que le postulat d'Archimède (qui est contenu dans celui de R. DEDEKIND).

On a tout d'abord recours à la continuité pour établir *l'existence des parallèles* (menées par un point à une droite donnée) puisqu'on définit les parallèles comme des *droites limites* séparant les droites sécantes des droites non-sécantes.

Si, l'existence des parallèles étant admise comme résultat d'un postulat, on adjoint ce postulat aux postulats α), β), γ) des §§ 9, 10, 11 restreints au plan, la théorie de J. BOLYAI et N. I. LOBAČEVSKIJ peut, comme l'a fait voir D. HILBERT (440), être développée d'une façon très simple sans faire usage de la continuité ou du postulat d'Archimède. Il faut d'ailleurs remarquer (441) que la possibilité de procéder ainsi peut être considérée comme résultant implicitement des principes mêmes de la géométrie non-archimédienne, puisque, en admettant l'existence de parallèles dans le plan, on se donne la conique limite des véritables points pour laquelle la métrique est définie au sens de A. CAYLEY et F. KLEIN [§ 29].

F. SCHUR (442) *a prouvé que l'existence de droites parallèles* (*limites de droites sécantes*) *dans le plan de* J. BOLYAI *et* N. I. LOBAČEVSKIJ *peut être démontrée à l'intérieur du plan sans faire usage de la continuité ou du postulat d'Archimède, si l'on adjoint aux postulats ordinaires de l'appartenance, de la disposition et de la congruence, le postulat qu'un cercle et une droite dont la distance au centre de ce cercle est moindre que le rayon, ont deux points communs.*

---

(440) « Math. Ann. », 57 (1903), p. 137-50; *Grundlagen* (27), (2e éd.), p. 107-20; cf. H. LIEBMANN, « Math. Ann. », 59 (1904), p. 110-28.

(441) Cf. F. SCHUR, « Math. Ann. », 59 (1904), p. 314.

(442) « Math. Ann. », 59 (1904), p. 314-20.

Ce dernier postulat peut être envisagé comme le postulat fondamental des constructions euclidiennes.

L'importance du résultat obtenu par F. SCHUR résulte surtout de ce qu'il a pu aussi démontrer qu'inversement:

Si les postulats de l'appartenance, de la disposition et de la congruence [cf. α), β), γ) des §§ 9, 10, 11] *s'appliquent, on fait, en supposant l'existence de droites parallèles dans le plan de* J. BOLYAI *et* N. I. LOBAČEVSKJ, *une hypothèse qui contient le postulat fondamental des constructions euclidiennes.*

Si, en effet, on considère la métrique projective relative à la conique limite des véritables points, on peut, quand les points d'intersection de cette conique avec une véritable droite sont donnés, déterminer les points d'intersection d'un cercle avec une droite dont la distance au centre de ce cercle est inférieure au rayon.

Après examen des constructions que l'on peut exécuter à l'aide du seul transporteur de segments ou plus simplement encore à l'aide du seul *transporteur du segment-unité*, D. HILBERT (443) a prouvé que le postulat fondamental des constructions euclidiennes ne résulte pas des postulats α), β), γ) des §§ 9, 10, 11.

En ce qui concerne les rapports entre les théorèmes de G. SACCHERI sur la somme des angles d'un triangle et les postulats sur les parallèles, M. DEHN (444) a obtenu les résultats suivants:

En se basant sur les postulats de l'appartenance, de la disposition (445) *et de la congruence, mais sans faire usage du postulat d'Archimède, on démontre que la somme s des angles de chaque triangle est plus grande que deux angles droits, égale à deux angles droits ou plus petite que deux angles droits, s'il en est ainsi pour un seul triangle particulier.*

Si l'on n'applique pas le postulat d'Archimède, le fait d'être dans le cas où la somme s est plus grande que deux angles droits n'implique pas nécessairement que la droite soit une ligne fermée, ni que toutes les droites du plan la coupent; de même, le fait d'être dans le cas où la somme s est égale à deux angles droits n'implique pas que l'on puisse démontrer le postulat d'Euclide d'après lequel par un point on peut mener une et une seule droite parallèle à une droite donnée; par contre le fait d'être dans le cas où la somme s est plus petite que deux angles droits, implique (comme dans la géométrie hyperbolique ordinaire) l'existence d'une infinité de droites passant par un point extérieur à une droite donnée et ne rencontrant pas cette droite.

---

(443) *Grundlagen* (27), (2e éd.), p. 73.
(444) « Math. Ann. », 53 (1900), p. 404.
(445) Ceux-ci sont modifiés au besoin, de façon que la ligne droite puisse être fermée.

Ces résultats ont été obtenus par M. DEHN par la construction de systèmes géométriques nouveaux non-archimédiens de deux types différents qu'il appelle système *non-legendrien* et système *semi-euclidien.*

Dans la géométrie *non-legendrienne* (on devrait plutôt dire *non-saccherienne*) le rapport de la somme des angles d'un triangle à deux angles droits est plus grand que 1 et, par un point du plan extérieur à une droite donnée, on peut mener une infinité de droites ne rencontrant pas la droite donnée ou, comme dit M. DEHN, parallèles à la droite donnée (446).

Dans la géométrie *semi-euclidienne*, le rapport de la somme des angles d'un triangle à deux angles droits est égal à 1, et, par un point extérieur à une droite donnée, on peut aussi mener une infinité de droites ne rencontrant pas la droite donnée.

Ces résultats sont résumés dans le schéma suivant, où ϱ désigne le rapport de la somme des angles d'un triangle à deux angles droits.

	Par un point extérieur à une droite, on peut mener à cette droite		
	zéro parallèle	*une* parallèle	*une infinité* de parallèles
$\varrho > 1$	Géom. elliptique	Cas impossible	Géométrie non-legendrienne
$\varrho = 1$	Cas impossible	Géom. euclidienne	Géométrie semi-euclidienne
$\varrho < 1$	Cas impossible	Cas impossible	Géométrie hyperbolique

(446) Ce système serait à étudier en connexion avec la seconde forme véronésienne [voir n. 49].
G. VERONESE, *Atti del quarto congresso internazionale dei matematici in Roma,* 1908, vol. 1, Rome 1909, p. 197-208; trad. française: « Bull. sc. math. », (2) 33 (1909), p. 186-204.

L.

SULLE SUPERFICIE ALGEBRICHE CON UN FASCIO DI CURVE ELLITTICHE

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XXI_7 (1º sem., 1912),

pp. 14-17

1. – In una Nota, che ho avuto l'onore di presentare all'Accademia nella seduta del 2 dicembre 1906 (¹) ho dimostrato che le superficie possedenti infinite trasformazioni birazionali in sè contengono in generale un fascio di curve ellittiche, le sole eccezioni appartenendo alla famiglia delle rigate o a quella delle superficie coi generi $p_a = p_g = P_2 = P_3 = \ldots = 1$. Per contro ho fatto notare che ogni superficie contenente un fascio di curve ellittiche C ammette infinite trasformazioni birazionali in sè, *purchè esistano due curve secanti le C in gruppi di punti i cui multipli non sieno equivalenti*. L'esame delle condizioni a cui conduce siffatta ipotesi (esame ch'io proseguivo allora in rapporto alla base della superficie considerata dal sig. SEVERI), fu da me rimandato ad altra occasione. Oggi ritornando sul problema, e limitandomi per ora al caso in cui il fascio delle C sia lineare, sono pervenuto ad una conclusione inaspettata:

Ogni superficie contenente un fascio lineare di curve ellittiche C di ordine n, possiede infinite curve secanti le C in gruppi di n punti non equivalenti ed i cui multipli sono pure non equivalenti; *per conseguenza ammette una serie discontinua di trasformazioni birazionali in se stessa.*

2. – Premettiamo alcune osservazioni sulle curve ellittiche.

Quando sopra una curva ellittica C è *dato* un gruppo di n punti G_n si può costruire razionalmente in funzione di esso:

1) la serie lineare completa g_n^{n-1} a cui il G_n appartiene;

2) un qualsiasi multiplo $g_{rn}^{rn-1} (= rg_n)$ della serie anzidetta.

In generale non è possibile costruire razionalmente altre serie ed in

(¹) *Sulle superficie algebriche, che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali* « Rendiconti », vol. XV, ser. 5ª, pag. 665 [queste *Memorie*, vol. II, XL].

ispecie serie g_m di grado $m < n$. Cosí le superficie ellittiche di determinante $n(p_a = -1,\ p_g = 0)$ ( ) porgono esempio di superficie contenenti un fascio lineare di curve ellittiche, tutte identiche fra loro, sopra le quali non si può determinare (razionalmente) un gruppo di $m < n$ punti.

Se la curva ellittica C è data proiettivamente come curva d'un certo ordine m, per es. nel piano, la serie g_m segata su di essa dalle rette deve considerarsi come *data*. Allora se è dato anche un gruppo G_n, non appartenente a quella, si possono costruire razionalmente anche

3) le serie

$$rg_n + sg_m\,,$$

dove r, s ricevono valori positivi o negativi tali che

$$rn + sm > 0\,.$$

Pertanto se sopra una curva ellittica C si suppone *dato* unicamente un gruppo G_n, bisogna supporre che la curva C stessa sia proiettivamente data mediante una serie multipla di g_n, cioè che la C sia d'un certo ordine rn, con r intero $\geqslant 1$, e che G_n sia il gruppo dei punti di contatto d'una retta (o d'un piano ...) avente n contatti r-punti colla curva.

In particolare quando si parlerà di una curva ellittica su cui è dato razionalmente *un* punto, si dovrà riferirsi a una curva C_n d'un certo ordine n che apparterrà ad uno spazio S_{n-1} o sarà proiezione di una siffatta curva normale, sulla quale il punto dato sia il punto di contatto d'un iperpiano n tangente. Sarà in nostro arbitrio di fissare il valore di n, e — prendendo $n = 3$ — si potrà avere *in funzione razionale del punto dato* una trasformazione della nostra curva in una *cubica su cui è dato un flesso.*

Data una curva ellittica e sopra di essa un punto qualsiasi è sempre possibile trasformarla in una cubica su cui è dato un flesso, *senza aggiunta d'irrazionalità numeriche.* Invece data una cubica con un flesso, ogni trasformazione di questa che conduca per es. ad una nuova cubica su cui sia dato un punto non di flesso, richiede operazioni irrazionali sui coefficienti dell'equazione della curva e sulle coordinate del punto dato.

Cosí appare che sopra una curva ellittica su cui è dato un punto non è possibile *in generale* costruire razionalmente un altro punto.

([1]) Cfr. F. ENRIQUES, « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », tomo XX, 5 marzo 1905 [queste *Memorie*, vol. II, XXXVI].

3. – Ora suppongasi data una superficie F contenente un fascio lineare di curve ellittiche C, ed una curva K unisecante le C. In base alle osservazioni precedenti si può sempre trasformare le C in cubiche su cui è dato un flesso, e poichè questa trasformazione si compie *razionalmente* per ogni C, *essendo data la K*, cosí si riesce a trasformare birazionalmente la superficie data in una F_n d'un certo ordine n con retta $(n - 3)$-pla e con un punto $(n - 2)$-plo su questa, costituente un flesso per le cubiche C. Si può anche supporre che la retta $(n - 3)$-pla sia tangente di flesso per tutte le cubiche C.

Dal punto $(n - 2)$-plo la superficie si lascia proiettare sopra un piano doppio con curva di diramazione D d'un certo ordine $2m$ dotata d'un punto $(2m - 3)$-plo O.

Consideriamo, in questo piano, le curve d'ordine p passanti $p - 1$ volte per O; esse formano un sistema lineare di dimensione

$$\frac{p(p+3)}{2} - \frac{p(p-1)}{2} = 2p\,.$$

Una di esse, interseca D nel punto O contato $(2m - 3)(p - 1)$ volte e in

$$2mp - (2m - 3)(p - 1) = 2m + 3(p - 1)$$

punti variabili.

Per ogni contatto che L abbia con D, spariscono 2 fra i $2m + 3(p - 1)$ punti di diramazione. Se si hanno $m + 3(p - 1)/2$ contatti, cioè se la L tocca la D ovunque la incontra, l'immagine di L sulla superficie F_n dovrà spezzarsi in due curve unisecanti le C. La determinazione di una L per cui ciò avvenga importa

$$m + \frac{3(p-1)}{2}$$

equazioni, provenienti dalla bisezione dei periodi delle funzioni abeliane relative a D; a codeste equazioni si può soddisfare in un certo numero finito di modi se si prende

$$2p = m + \frac{3(p-1)}{2}$$

cioè

$$p = 2m - 3\,.$$

Per tal guisa si determinano dunque sopra F_n due curve unisecanti le C, ed è facile vedere che — considerando una qualunque di esse L_1 — il punto che L_1 determina sopra una C generica è tale che un suo multiplo qualsiasi non è equivalente all'equimultiplo del flesso dato, giacchè in corrispondenza alle tangenti ad L in O si hanno curve ellittiche C su cui i due punti vengono a coincidere, il che importa che la differenza dei valori dell'integrale ellittico C nei due nominati punti non possa essere sempre uguale ad una frazione di periodo, al variare di C.

In conclusione, se una superficie F contiene un fascio lineare di curve ellittiche C ed una curva unisecante le C, si può costruire una seconda unisecante, per modo che i punti segati dalle due unisecanti sopra una C generica sieno disequivalenti insieme coi loro multipli.

4. – Si abbia ora una superficie F contenente un fascio di curve ellittiche C ed una curva K secante le C in un certo numero n di punti, per modo che su ogni C venga *data* una g_n^{n-1}.

Siamo in questo caso se per es. le curve C sono d'ordine n.

Consideriamo tutte le g_n^{n-1} di una curva ellittica C. Esse costituiscono gli elementi (punti) d'un ente ellittico C', che può ritenersi come una curva nascente da C per mezzo di una nota trasformazione.

Alla serie g_n che si suppone data sulla C corrisponde un punto razionalmente dato su C'.

Al variare di C, C' varia pure e descrive un ente algebrico a due dimensioni o superficie F', contenente un fascio lineare di curve ellittiche C' ed una curva K' unisecante le C'.

In forza del n. 3 si può determinare su F' una seconda unisecante L', e cosí si riesce a determinare sopra ogni C *un'altra* serie $\overline{g}_n$ disequivalente alla data g_n, ed anzi tale che due multipli delle anzidette serie non sono equivalenti.

Tanto basta perchè sopra ogni C venga razionalmente determinata una trasformazione birazionale non ciclica

$$A' = A + g_n - \overline{g}_n ,$$

e quindi perchè si ottenga una trasformazione birazionale non ciclica della superficie F. c.d.d.

LI.

SOPRA UNA INVOLUZIONE NON RAZIONALE DELLO SPAZIO

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XXI (1º sem., 1912),

pp. 81-83

1. - Un noto teorema del sig. LÜROTH dice che « *le involuzioni sopra la retta sono razionali* ». Il sig. CASTELNUOVO ha esteso questo teorema al caso di due variabili, dimostrando la « *razionalità delle involuzioni piane* ».

Si è cercato lungamente di fornire una dimostrazione generale del teorema, applicabile al caso di $n > 2$ variabili; ma i tentativi fatti sono riusciti infruttuosi.

In questa Nota risolvo negativamente la questione costruendo una *involuzione non razionale nello spazio a* 3 *dimensioni*. Risulta dunque che:

Essendo data un'equazione algebrica

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 ,$$

con $n > 3$, *e supposto che l'equazione stessa sia risolubile per mezzo di funzioni razionali non invertibili di* $n-1$ *variabili*:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(u_1, \dots, u_{n-1}) \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n(u_1, \dots, u_{n-1}) , \end{cases}$$

non è possibile in generale ottenere una nuova risoluzione della $f = 0$ *per mezzo di funzioni razionali invertibili.*

L'esempio che fornisce la prova dell'affermazione precedente mi è porto dalla nota varietà V_6 del 6º ordine di S_5, intersezione di due varietà degli ordini 2, 3.

Già il sig. FANO [1], mediante un'analisi profonda, ha provato che codesta varietà (immagine del complesso cubico di rette) è in generale *non razionale*. Io dimostro qui che essa può essere rappresentata sopra una involuzione dello spazio S_3.

2. – Consideriamo la varietà V_6, a 3 dimensioni, dello spazio S_5, intersezione di una quadrica Q e di una varietà cubica. Ci sono sopra V_6 due sistemi ∞^3 di linee piane, cubiche, C, sezioni dei piani appartenenti a Q, i quali formano appunto due sistemi Σ, Σ'.

Consideriamo le C segate dai piani di Σ. Le C di questo sistema passanti per un punto A di V_6 costituiscono una serie razionale, che viene razionalmente rappresentata sopra una retta, senza aggiunta di irrazionalità dipendenti dal punto A, come si vede mercè la rappresentazione kleineiana di V_6 nello spazio rigato, dove ai piani di Σ corrispondono i punti di questo spazio.

Ora sopra ogni C per A si può determinare razionalmente *un* punto, cioè il tangenziale di A; al variare di C questo punto descrive una curva razionale, K, passante per A con una certa molteplicità, che si trova facilmente essere 4. Ripetiamo la costruzione a partire da un punto A variabile su V, e avremo infinite curve razionali K generanti una superficie razionale F. Ripetiamo ancora la costruzione facendo variare A su F, ed otterremo ∞^2 curve razionali K che invaderanno tutta la varietà V_6. Queste K si possono riferire birazionalmente alle rette di una stella data in S_3. Per tal modo ad ogni punto di S_3 corrisponderà *un* punto di V_6, ma viceversa ad un punto di V_6, corrisponderanno *più* punti di S_3, e i gruppi di punti analoghi (al variare del punto corrispondente su V_6) genereranno in S_3 una involuzione.

Dunque la varietà V_6 si può rappresentare sopra una involuzione di S_3, la quale risulta non razionale. c.d.d.

3. – Come è stato notato dal sig. NOETHER (e successivamente da me) la *varietà cubica generale* V_3 di S_4 si può rappresentare sopra una involuzione di coppie di punti in S_3. Il teorema sopra stabilito rende assai probabile che la V_3 *non sia razionale*. A questa convinzione io sono giunto da qualche anno per mezzo di un procedimento che aspetta ancora di essere rigorosamente dimostrato, e che si basa sulle considerazioni seguenti:

1) Se la V_3 è razionale esiste una sua rappresentazione su S_3 che non degenera quando la V_3 acquista un punto doppio.

---

[1] *Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli*, « Atti Accad. di Torino », 1908.

2) In tale ipotesi il sistema delle superficie cubiche di S_3 passanti per una sestica di genere 4, si può considerare come limite di un sistema lineare d'ordine $n > 3$, rappresentativo della V_3 generale, e quindi esiste una superficie (riducibile o irriducibile) d'ordine $n - 3$, che sommata alle cubiche suddette, dà luogo a superficie (connesse) di genere 0. Il che è impossibile.

LII.

SUI MODULI D'UNA CLASSE DI SUPERFICIE ALGEBRICHE E SUL TEOREMA D'ESISTENZA PER LE FUNZIONI ALGEBRICHE DI DUE VARIABILI

« Atti Acc. Torino », vol. XLVII (1912),

pp. 300-307

1. - Moduli d'una classe di curve di genere p.

I moduli di una classe di curve algebriche di genere p si possono determinare nei due modi che seguono:

1) *Mediante il teorema d'esistenza* (*di Riemann*) *per le funzioni algebriche d'una variabile.*

Presi sulla retta (o nel piano d'una variabile complessa) $2n + 2p - 2$ punti di diramazione, si può costruire (in diversi modi il cui numero è stato determinato dal sig. HURWITZ) una superficie di Riemann ad n fogli, a cui corrisponde una *curva* C_p di genere p con una $g_n^{\prime}$. I $2n + 2p - 2$ punti di diramazione danno luogo a

$$2n + 2p - 5$$

birapporti indipendenti. Ma, supposto per semplicità $n > 2p - 2$ si hanno su una C_p ∞^p g_n^{n-p} e quindi

$$\infty^{2n-p-2}$$

$g_n^{\prime}$. Perciò la costruzione anzidetta conduce a determinare

$$2n + 2p - 5 - (2n - p - 2) = 3p - 3$$

costanti che, se la C_p non possiede trasformazioni in sè, corrispondono a C_p birazionalmente distinte. Si hanno quindi, per $p > 1$,

$$3p - 3$$

moduli.

2) *Valutando la dimensione della serie continua delle curve piane di dato ordine con un dato numero di punti doppi.*

Si considerino le curve piane d'ordine n e genere p, aventi

$$\delta = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$$

punti doppi. La serie continua di queste determina sopra una di esse, C_n^p, una serie lineare *caratteristica* (nel senso di SEVERI), i cui gruppi vengono segati dalle curve infinitamente vicine a C_n^p. La detta serie è completa e non speciale equivalendo alla serie segata su C_n^p dalle curve aggiunte d'ordine n; la sua dimensione vale dunque

$$n^2 - 2\delta - p = 3n - 2 + p;$$

e pertanto la serie delle C_n^p ha la dimensione

$$3n - 1 + p\,.$$

Ma supposto per semplicità $n > 2p - 2$, ad una C_n^p appartengono ∞^p serie g_n^{n-p}, ognuna delle quali contiene

$$\infty^{3(n-p)-6}$$

g_n^2; e ciascuna di tali g_n^2 dà luogo a

$$\infty^8$$

curve piane C_n^p proiettivamente identiche. Se ne deduce che vi sono

$$3n - 1 + p - (p + 3(n-p) - 6 + 8) = 3p - 3$$

costanti che, se le curve C_n^p non possiedono trasformazioni in sè, corrispondono a curve birazionalmente distinte. Cosí di nuovo si ritrovano i $3p - 3$ *moduli* da cui dipende una classe di curve di genere $p > 1$.

E confrontando i resultati ottenuti per le due vie se ne trae anche una dimostrazione elementare del teorema d'esistenza almeno nel senso che « *esistono funzioni algebriche ad n rami, di genere p, aventi* $2n + 2p - 2$ *punti di diramazione arbitrariamente assegnati* ».

Seguendo la via sopra indicata si può anche fornire una semplice dimostrazione algebrico-geometrica del fatto che: *le curve di genere p formano una sola famiglia irriducibile, che (per* $p > 1$*) è composta di* ∞^{3p-3} *classi distinte.*

Si supponga che la proposizione sia dimostrata per un certo valore di p; si dimostrerà che essa sussiste per le curve di genere $p+1$. Siccome la proposizione si verifica subito per i primi valori di p (e già per $p = 1$, salvo che vi sono $3p - 2 = 1$ invece che $3p - 3 = 0$ moduli), così essa sarà stabilita in generale.

Nell'ipotesi che abbiamo ammesso, le curve piane C^p_{2p} d'ordine $2p$ e genere p, formano una serie continua irriducibile Σ_p. Ora questa serie è contenuta in quella, Σ_{p+1}, delle curve piane, C^{p+1}_{2p}, d'ordine $2p$ e genere $p+1$, le quali hanno un punto doppio di meno. Se la nuova serie fosse riducibile, cioè composta di un certo numero > 1 di serie distinte, in ciascuna di queste si avrebbero delle curve con un punto doppio di piú, e però ci sarebbero diverse serie di C^p_{2p}, contrariamente all'ipotesi fatta.

Invero è facile riconoscere che due serie complete, distinte, di curve piane C^{p+1}_{2p} con $\delta = 2(p-1)^2 - 2$ punti doppi, non potrebbero aver comune la serie, Σ_p, delle C^p_{2p} con $\delta + 1$ punti doppi. A tale scopo si osservi che partendo da una C^p_{2p} con $\delta + 1$ punti doppi, e scegliendo uno di questi da riguardarsi come virtualmente inesistente, si determina *una* serie completa di C^{p+1}_{2p} a cui C^p_{2p} appartiene; ma due serie così costituite, in corrispondenza a due punti doppi diversi di C^p_{2p}, coincidono, perchè — facendo variare per continuità C^p_{2p} entro il sistema Σ_p — i due punti doppi suddetti si possono far coincidere in un tacnodo e quindi si possono scambiare fra loro.

Ne risulta stabilita la proposizione enunciata.

2. - Moduli d'una classe di superficie.

Passo al problema dei moduli per le superficie, del quale problema già mi sono occupato in una Nota del 1908 (1).

In mancanza di un *teorema d'esistenza* per le funzioni algebriche di due variabili, è naturale di cercare di estendere il secondo fra i proce-

(1) *Sui moduli delle superficie algebriche*, « Rendic. Accad. dei Lincei », 6 gennaio 1908 [queste *Memorie*, vol. II, XLV].

dimenti indicati innanzi. Anzi quel procedimento non è che l'applicazione al caso delle curve del metodo che fui condotto ad immaginare per il calcolo dei moduli delle superficie, nella mia Nota citata.

L'uso di codesto metodo conduce al risultato che una classe di superficie di generi p_a, p_g, $p^{(1)}$ (non appartenente alla famiglia delle rigate) dipende da

$$M = 10p_a - p_g - 2p^{(1)} + 12 + \theta$$

moduli; $\theta \geqslant 0$ ha il seguente significato: essendo $|C|$ un qualsiasi sistema lineare irriducibile, puro, ∞^3, sopra la superficie, vi sono in generale sopra una curva C_j, jacobiana d'una rete contenuta in $|C|$, dei punti neutri, formanti un gruppo G, che sono doppi per ∞' curve C del sistema ∞^3; ora si consideri il sistema completo $|3C+C'|$ che ha come punti base i punti di G; θ designa la sovrabbondanza di questo sistema.

Nel caso di superficie regolari di genere $p_a = p_g = p > 3$, a sistema canonico irriducibile, si ha

$$\theta = p + \theta'$$

con

$$\theta' \geqslant 0\,,$$

e però

$$M = 10p - 2p^{(1)} + 12 + \theta'.$$

Facendo l'ipotesi $\theta' = 0$ si ottiene così il numero dei moduli a cui il sig. NOETHER (2) fu condotto dall'applicazione delle formule di postulazione; sicchè viene dimostrato che codesto numero vale almeno come un limite inferiore.

3. - Moduli dei piani multipli.

Ora *supponiamo* che si abbia un *teorema d'esistenza* per le funzioni algebriche di due variabili, il quale assegni le condizioni perchè una curva piana sia curva di diramazione d'un piano multiplo, n-plo. Da questa semplice ipotesi dedurremo di nuovo il calcolo dei moduli da cui dipende una classe di superficie di generi p_a, p_g, $p^{(1)}$; e il confronto

(2) *Anzahl der Moduln einer Classe algebraischer Flächen*, « Sitzungsberichte der Akad. zu Berlin », 1888.

col resultato già stabilito innanzi ci permetterà di trarne un'effettiva conclusione intorno allo stesso teorema di esistenza.

Poniamo dunque che una superficie F_n, d'ordine n, senza curve eccezionali, a sezioni piane, di genere π, formanti un sistema regolare $|C|$, venga proiettata sopra un piano n-plo con curva di diramazione K_{2m} d'ordine

$$2m = 2n + 2\pi - 2 .$$

Aggiungiamo anzi l'ipotesi semplificativa che $|C|$ contenga il sistema canonico di F. La K_{2m} possiederà in generale δ nodi e h cuspidi, dove

$$\delta = \tfrac{1}{2}[(n + 4\pi + 12p_a - p^{(1)} + 9)^2 - 3n - 78\pi - 84p_a + p^{(1)} - 7] ,$$

$$h = 3n + 18\pi + 3p^{(1)} - 12p_a - 33 \text{ (}^3\text{)} .$$

Il sistema $|C|$, di dimensione

$$r = p_a + n - \pi + 1 ,$$

sarà contenuto in una serie di $\infty^{p_g - p_a}$ sistemi lineari analoghi; in corrispondenza alle reti contenute in siffatti sistemi (ognuna delle quali può essere riferita al piano in ∞^8 proiettività), si otterranno

$$\infty^{3r+2+p_g-p_a}$$

piani multipli, aventi curve di diramazione d'ordine $2m$ con δ nodi e h cuspidi, e appartenenti ad uno stesso sistema continuo $\{K_{2m}\}$ colla K_{2m} suddetta.

Ora cerchiamo di valutare la dimensione del sistema continuo completo $\{K_{2m}\}$, formata dalle curve piane d'ordine $2m$ con δ nodi e h cuspidi, a cui appartiene K_{2m}. Perciò si dovrà considerare la serie caratteristica determinata su K_{2m} dalle curve infinitamente vicine di $\{K_{2m}\}$.

Questa serie caratteristica (completa) è definita dalle curve d'ordine $2m$ aggiunte a K_{2m} e toccanti nelle h cuspidi le relative tangenti cuspidali di quella curva; il suo grado vale

$$3n + 6\pi + 12p_a - p^{(1)} + 8 .$$

---

(3) Le espressioni di δ e h risultano da note formule di ZEUTHEN-NOETHER e SEVERI. Cfr. SEVERI, « Atti Accad. di Torino », 15 giugno 1902.

Il genere di K_{2m} essendo

$$x = p^{(1)} + 9\pi - 9 ,$$

la dimensione della suddetta serie sarà

$$3n - 3\pi + 12p_a - 2p^{(1)} + 16 + \omega ,$$

designando ω l'indice di specialità della serie stessa; e la dimensione del sistema $\{K_{2m}\}$ sarà

$$3n - 3\pi + 12p_a - 2p^{(1)} + 17 + \omega .$$

Se ogni curva del sistema, soddisfacente ad y condizioni, è curva di diramazione di un piano n-plo, si trova così una famiglia di superficie analoghe ad F, di dimensione

$$3n - 3\pi + 12p_a - 2p^{(1)} + 17 + \omega - y ;$$

tra queste ci sono

$$3n - 3\pi + 12p_a - 2p^{(1)} + 17 + \omega - y - (3r + 2 + p_g - p_a) =$$
$$= 10p_a - p_g - 2p^{(1)} + 12 + \omega - y ,$$

superficie birazionalmente distinte.

Cerchiamo di valutare ω! A questo scopo riflettiamo che alla curva K_{2m} corrisponde su F la jacobiana C_j di una rete di sezioni piane (appartenente al sistema $|2C + C'|$), la qual curva C_j è segata su F da una superficie polare; le superficie polari analoghe passanti per i punti cuspidali (*pinch-points*) di F, che sono i punti neutri di $|C|$ su C_j, segano su C_j una serie che viene proiettata in quella segata su K_{2m} dalle curve polari di ordine $2m - 1$; e perciò la serie segata su K_{2m} dalle curve aggiunte d'ordine $2m$ è la proiezione di quella segata in C_j dalle curve di $|3C + C'|$ passanti pel gruppo G dei neutri punti considerati. — Siccome (nelle ipotesi fatte) $|3C + C'|$ sega su C_j una serie non speciale, si deduce che ω equivale alla sovrabbondanza θ del sistema delle curve di $|3C + C'|$ passanti per i punti di G.

Dunque il numero dei moduli della classe di superficie, calcolato per questa via, risulta

$$M = 10p_a - p_g - 2p^{(1)} + 12 + \theta - y .$$

4. - Intorno ad un teorema d'esistenza.

Confrontiamo le due espressioni ottenute per il numero M nei n[i] 2, 3; si deduce che

$$y = 0 .$$

E pertanto si conclude che: *Se la curva piana* K_{2m} *d'ordine* 2m, *con* δ *nodi e* h *cuspidi, è curva di diramazione di un piano* n*-plo ottenuto per proiezione di una superficie* F *d'ordine* n (sotto le ipotesi semplificative di natura non essenziale adottate riguardo al sistema delle sezioni piane di F), *tutte le curve piane dello stesso ordine* 2m, *fornite parimente di* δ *nodi e* h *cuspidi, e appartenenti con* K_{2m} *ad uno stesso sistema continuo, sono pure curve di diramazione di analoghi piani* n*-pli.*

Questa conclusione suggerisce l'idea che valga un *teorema d'esistenza* enunciabile come segue: « le condizioni perchè una curva piana di un dato ordine sia curva di diramazione d'un piano n-plo (con dati caratteri p_a, p_g, $p^{(1)}$ ...) consistono in ciò che la curva stessa possieda un certo numero di nodi e un certo numero di cuspidi ».

Ad una conclusione siffatta si sarebbe condotti dall'ipotesi che « le curve piane di dato ordine con un dato numero di nodi e di cuspidi formino in generale *una sola* serie continua irriducibile ». Ma approfondendo lo studio della questione si scopre invece che la totalità della curve piane soddisfacenti alle condizioni indicate si spezza in generale *in più serie continue.* Ciò risulta già indirettamente dall'osservare che: *Le superficie con dati caratteri* p_a, p_g, $p^{(1)}$ *danno luogo in generale a diverse famiglie irriducibili, distinte fra loro per diversi caratteri numerici.*

Infatti si considerino le curve gobbe di dato ordine n e genere p; secondo Halphen e Noether esse si distribuiscono in generale in diverse famiglie irriducibili C, K .... Ora si può determinare un ordine m cosí elevato che esistano superficie regolari d'ordine m passanti doppiamente per C, K .... — Queste superficie avranno gli stessi caratteri $p_a = p_g$, $p^{(1)}$, ma apparterranno a famiglie distinte.

5. - Conclusione.

Quale conclusione si può trarre dunque dalle considerazioni che precedono?

Affinchè una curva piana di dato ordine $f(xy) = 0$ sia curva di diramazione d'un piano multiplo n-plo con dati caratteri, occorrerà in generale non soltanto che essa possieda un dato numero di nodi e di cuspidi, ma anche che soddisfi a *certe condizioni di natura aritmetica* che diminuiscono il numero dei moduli della classe di superficie corrispondente.

Questa conclusione pone in luce il carattere del *teorema d'esistenza* per le funzioni algebriche di due variabili. A prima vista la ricerca d'un teorema siffatto apparirebbe molto difficile. Ma un esame diretto della questione mostra il modo di superare la difficoltà *mediante l'analisi del gruppo di monodromia della funzione algebrica* $y(x)$. Per questa via si è condotti a stabilire effettivamente il *teorema d'esistenza* di cui sopra si è discorso, come dimostrerò in un altro lavoro.

LIII

ALCUNE OSSERVAZIONI INTORNO ALLE SUPERFICIE RAZIONALI REALI

« Rend. dell'Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », vol. XVI (1912), pp. 70-73

Considero le *superficie razionali reali* (¹)

$$f(xyz) = 0\,,$$

che sono realmente rappresentate sul piano mediante formule del tipo

$$x = \varphi(uv)$$
$$y = \psi(uv)$$
$$z = \chi(uv)\,,$$

dove φ, ψ, χ designano funzioni razionali a coefficienti reali. Esse constano d'una sola falda, che considereremo dal punto di vista proiettivo, senza distinguere i punti impropri.

A queste superficie si riferiscono le semplici osservazioni che seguono.

L'ordine di connessione di una superficie razionale reale (cioè il numero dei tagli chiusi che occorre fare su di essa per ridurla semplicemente connessa) *è uguale ad* 1 *aumentato del numero dei punti base del sistema rappresentativo*

$$\lambda\varphi + \mu\psi + \nu\chi = 0\,,$$

e diminuito del numero delle curve eccezionali fondamentali per codesto sistema.

(¹) Da un altro punto di vista si pone il sig. COMESSATTI in una Nota interessante recentemente apparsa (« Rendic. Lincei », 1911) dove classifica le superficie razionali reali indipendentemente dalla realtà della rappresentazione piana, incontrando perciò superficie con più falde; la suddetta nota prelude evidentemente ad uno studio più largo.

Infatti il piano proiettivo ha l'ordine di connessione 1; ogni punto-base comune a $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ dà luogo ad un ciclo della superficie razionale; viceversa sparisce un ciclo per ogni curva eccezionale del piano a cui corrisponda un punto della superficie.

Si può investigare il carattere di unilateralità o bilateralità delle nostre superficie. Perciò giova partire dall'osservazione seguente:

Una superficie è unilatera se contiene un sistema continuo di curve secantisi a due a due in un numero dispari di punti.

Da ciò risulta (con STAUDT) che:

Tutte le superficie algebriche reali, d'ordine dispari, contengono almeno una falda d'ordine dispari, che è unilatera.

Consideriamo ora una superficie razionale reale, F, d'ordine pari. Alle rette del piano rappresentativo corrispondono su F ∞^2 curve chiuse, C, secantisi in un punto variabile. Ma designando con

$$i_1 i_2 \dots i_s$$

gli ordini delle $s(\geqslant 0)$ curve eccezionali fondamentali, si ha che le C hanno comuni s punti fissi di molteplicità rispettiva

$$i_1 i_2 \dots i_s \ ;$$

perciò il numero delle intersezioni di due curve C vale

$$1 + \sum_{\bullet}^{s} i_h^2 \, .$$

Ove si avverta che $\sum i_h^2$ ha la stessa parità che $\sum_{\bullet}^{s} i_h$, si potrà concludere che:

Una superficie razionale reale d'ordine pari è unilatera se è pari ($\geqslant 0$) *la somma degli ordini delle curve eccezionali fondamentali per il sistema piano rappresentativo.*

Si avverta che il teorema non è invertibile, come risulta dagli esempii che seguono.

Esempi. – Le quadriche generali sono rappresentate (per proiezione) sul piano da coniche per due punti, reali o no, e c'è sempre una retta eccezionale fondamentale pel sistema di queste coniche; così le quadriche sono superficie bilatere il cui ordine di connessione vale rispettivamente 2 o 0 (quadriche iperboliche e quadriche ellittiche).

Le superficie cubiche generali rappresentate sul piano da linee cubiche reali per 6 punti reali, sono superficie unilatere di ordine di connessione 7.

La superficie romana di STEINER (del 4° ordine) è rappresentata realmente sul piano da un sistema ∞^3 di coniche, senza punti base; perciò essa è una superficie unilatera d'ordine di connessione 1.

La superficie del 4° ordine con conica doppia rappresentata sul piano da un sistema ∞^3 di cubiche reali con 5 punti base reali (e senza curve eccezionali fondamentali), è una superficie unilatera d'ordine di connessione 6.

In generale tutte le superficie razionali a sezioni ellittiche, d'ordine $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, rappresentabili sul piano mediante un sistema di cubiche reali, con punti base reali, o senza punti base per $n = 9$, sono superficie unilatere il cui ordine di connessione è uguale a 10 diminuito dell'ordine n della superficie.

La superficie d'ordine 8 rappresentata sul piano mediante le quartiche con due punti base doppi (reali o no) è bilatera ed ha la connessione di una quadrica. Sono anche bilatere ed hanno la stessa connessione delle quadriche (2 o 0) le superficie d'ordine pari $n = 4, 6$ rappresentate sul piano da un sistema di quartiche con due punti base doppi (reali o no) e 4 o rispettivamente 2 punti base semplici immaginarii; codesto sistema non potendo ridursi a un sistema di cubiche con una trasformazione reale del piano. Se invece uno dei punti base semplici suddetti è reale, le quartiche possono trasformarsi in cubiche facendo sparire la curva eccezionale fondamentale, e però si ricade in superficie unilatere.

LIV.

INTORNO ALLA RISOLUZIONE RAZIONALE DI UNA CLASSE DI EQUAZIONI ALGEBRICHE FRA QUATTRO VARIABILI

« Annali di Matematica pura ed applicata », s. 3ª, to. XX (1913),

pp. 109-111

1. – Scopo di questa Nota è d'indicare un criterio generale per la possibilità di risolvere razionalmente una classe di equazioni algebriche fra quattro variabili.

I. – *Sia* $f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$ *un'equazione algebrica, irriducibile, di grado* 2 *complessivamente rispetto alle variabili* $x_1\ x_2$, *e di grado qualsiasi* n *rispetto ad* $x_3\ x_4$; *affinchè l'equazione* $f = 0$ *possa esser risoluta razionalmente, cioè ponendo* $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ *funzioni razionali (in generale non razionalmente invertibili) di tre parametri:*

$$x_1 = \varphi_1(u_1 u_2 u_3)$$

$$x_2 = \varphi_2(u_1 u_2 u_3)$$

$$x_3 = \varphi_3(u_1 u_2 u_3)$$

$$x_4 = \varphi_4(u_1 u_2 u_3) ,$$

basta che si possano determinare quattro funzioni razionali di due variabili

$$x_1 = x_1(v_1 v_2) , \qquad x_2 = x_2(v_1 v_2)$$

$$x_3 = x_3(v_1 v_2) , \qquad x_4 = x_4(v_1 v_2) ,$$

per modo che $x_3\ x_4$ *non siano legate fra loro da una relazione indipendente da* $v_1 v_2$ *e che soddisfino all'equazione* $f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$.

In linguaggio geometrico:

I′. – *Una varietà di 3 dimensioni d'ordine* $n > 2$, in S_4, *dotata d'una retta* $(n-2)$-pla, a, *si può rappresentare sopra un'involuzione di* S_3, *se contiene una superficie razionale non composta di coniche giacenti in piani per* a.

Piú generalmente:

II. – *Una varietà algebrica di* 3 (*o di* $r > 3$) *dimensioni, possedente una congruenza del* 1° *ordine di curve razionali, si può rappresentare sopra una involuzione dello spazio* S_3 (*o* S_r), *se contiene una superficie* (*o una varietà* V_{r-1}) *razionale, non composta di curve della congruenza.*

Un'applicazione particolare di questo Teorema ci fornisce il seguente corollario:

Ogni congruenza del 1° *ordine di curve razionali nello spazio ordinario,* (S_3), *si può far nascere da una stella di rette per mezzo di una trasformazione razionale* (*generalmente non invertibile*) *dello spazio.*

Nel caso di curve razionali d'ordine dispari la congruenza può ridursi ad una stella di rette già con una trasformazione birazionale (invertibile). Sappiamo (MONTESANO) che non è più così quando si tratti di coniche o di curve d'ordine pari. Ora il risultato innanzi enunciato permette di ridurre in generale la costruzione delle congruenze del 1° ordine di curve razionali d'ordine pari, nello spazio, alla classificazione delle involuzioni di JONQUIÈRES dello spazio e quindi a quella delle involuzioni di gruppi di punti nel piano.

2. – Dimostriamo il teorema I′.

Si abbia una varietà V_3^n, d'un certo ordine $n (> 2)$, dotata di una retta $(n-2)$-pla, a, nello spazio S_4; i piani per a segano V_3^n secondo coniche C.

Supponiamo che alla V_3^n appartenga una superficie razionale F, secante le coniche C in $m (\geqslant 1)$ punti. Riferiamo la F ad una stella di raggi, di centro O, in S_3, per modo che ad ogni punto generico di F corrisponda un raggio per O e viceversa.

Consideriamo una conica C che sega F in m punti: $A_1, A_2, \ldots, A_m$. A questi punti rispondono m rette, $a_1, a_2, \ldots, a_m$, per O; e cosí alle coniche C di V_3 si possono associare gruppi di m raggi, generanti un'involuzione nella stella O. Ora si può porre *razionalmente in funzione del punto* A_i, una corrispondenza proiettiva fra la conica C e la retta a_i: Ne risulta definita razionalmente una corrispondenza (univoca) fra lo spazio S_3 e la varietà V_3^n, dove ad ogni punto di S_3 risponde *un* punto di V_3^n, e ad ogni punto di V_3^n rispondono m punti di S_3; per modo che mentre un punto di V_3^n si muove descrivendo una conica C, gli omologhi m punti in S_3 descrivono gli m raggi associati a C, della stella O. Cosí dunque la V_3^n viene rappresentata sopra una involuzione di gruppi di m punti in S_3.

c.d.d.

3. – Per giungere al teorema piú generale II, basta quindi ricordare che, secondo NOETHER, ogni curva razionale si può trasformare birazionalmente in una conica senza aggiungere irrazionalità numeriche al campo di razionalità definito dai coefficienti della sua equazione, e perciò, come già ebbi luogo di notare (cfr. *Math. Annalen*, Bd 49) (*), ogni varietà V_r di dimensione r possedente una congruenza del 1° ordine di curve razionali, si può trasformare in una varietà V_r^n, d'un certo ordine n in S_{r+1}, possedente una retta $(n-2)$-pla.

Il corollario segue immediatamente osservando che se è data nello spazio S_3 una congruenza di curve razionali, un piano generico di S_3 porge appunto una superficie razionale non composta colle curve della congruenza.

(*) [Queste *Memorie*, vol. I, XVIII].

LV.

SULLA CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICIE ALGEBRICHE E PARTICOLARMENTE SULLE SUPERFICIE DI GENERE LINEARE $p^{(1)} = 1$

NOTA I.

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XXIII (1º sem., 1914),

pp. 206-214

1. – Il problema capitale della teoria delle superficie algebriche è la classificazione di queste, cioè la determinazione effettiva delle *famiglie* di superficie distinte per trasformazioni birazionali, ciascuna famiglia venendo caratterizzata da un gruppo di caratteri interi invarianti e contenendo, entro di sè, un'infinità continua di *classi* dipendenti da un certo numero di parametri (moduli).

Vale la pena di esaminare quali resultati d'insieme si possano trarre dal lavoro dell'ultimo ventennio, in ordine al suddetto problema di classificazione.

Questo è appunto lo scopo della presente Nota, in cui pervengo alle conclusioni che seguono:

La classificazione delle superficie algebriche, conduce naturalmente a considerare il genere d'ordine 12: P_{12}

Per $P_{12} = 0$ si ha la famiglia delle rigate.

Per $P_{12} = 1$ si hanno le superficie possedenti *curve canoniche* o *pluricanoniche d'ordine* 0 (tutti i P_i essendo $= 0, 1$).

Per $P_{12} > 1$ si hanno le superficie con curve canoniche o pluricanoniche effettive, d'ordine > 0.

Per $P_{12} \geqslant 1$ il genere lineare $p^{(1)} \geqslant 1$ (mentre si può ritenere — com'è noto — $p^{(1)} \leqslant 0$ per le rigate, cioè per $P_{12} = 0$).

Ad ogni valore del genere lineare $p^{(1)} > 1$ corrisponde un *numero finito di famiglie* di superficie.

Per $p^{(1)} = 1$ si ha un'*infinità numerabile di famiglie* in cui entrano *due interi arbitrari*; tali famiglie sono caratterizzate dal contenere un fascio di curve ellittiche, salvo per $p_g = P_4 = 1$: in questo caso si hanno superficie di generi geometrici,

$$p_g = P_1 = P_2 = \ldots = 1\,,$$

e di genere numerico,

$$p_a = 1 \quad \text{o} \quad p_a = -1\,,$$

dipendenti altresì da un intiero arbitrario (e da 19 o 3 moduli rispettivamente) che non contengono, *in generale*, fasci di curve ellittiche.

La costruzione e lo studio delle superficie con $p^{(1)} = 1$ $(p_g P_4 \neq 1)$ dà luogo a sviluppi interessanti in ordine ai valori dei plurigeneri, alla base e ai moduli. Questi sviluppi sono riferiti, per semplicità, al caso delle superficie regolari $(p_a = p_g)$. Ma l'estensione al caso $p_a < p_g$ non presenta difficoltà essenziali.

2. – Nella teoria delle superficie s'introducono, com'è noto, i seguenti caratteri invarianti [1]:

a) il genere geometrico $p_g = P_1$, ed i plurigeneri $P_2, P_3, \ldots$;

b) il genere lineare (virtuale) $p^{(1)}$;

c) il genere numerico (o aritmetico) p_a.

La classificazione delle superficie secondo i valori dei plurigeneri conduce a considerare in ispecie il 12-genere, P_{12}, e a distinguere i tre casi:

$$P_{12} = 0\,, \qquad P_{12} = 1\,, \qquad P_{12} > 1\,.$$

La condizione

$$P_{12} = 0 \qquad\qquad (P_4 = P_6 = 0)$$

caratterizza la famiglia delle superficie razionali e rigate [2].

3. – La condizione

$$P_{12} = 1$$

caratterizza le superficie possedenti una curva canonica o pluricanonica

---

(1) Cfr. F. ENRIQUES, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*, in « Memorie della Società italiana delle scienze (detta dei XL) », 1896 [queste *Memorie*, vol. I, XIII].

(2) F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*, in « Rendiconti Circolo Matematico di Palermo », 1905 [queste *Memorie*, vol. II, XXXVI].

d'ordine 0, sopra le quali (riferendosi ad un modello senza curve eccezionali) ogni sistema di curve di genere (virtuale) π è di grado (virtuale)

$$n = 2\pi - 2 .$$

Il teorema sopra enunciato risulta dall'analisi delle differenti famiglie di superficie con $P_{12} = 1$, che sono le seguenti:

a) Per $p_a = -1$, le superficie iperellittiche irregolari, cioè:

a') le superficie iperellittiche di rango 1 (di Picard) caratterizzate [3] da

$$p_a = -1 , \qquad p_g = P_4 = 1 ,$$

e formanti un'infinità numerabile di famiglie (con 3 moduli) indipendenti da un numero intero δ, detto il divisore di codeste superficie [4];

a'') le superficie iperellittiche irregolari di rango $r > 1$ che formano 7 famiglie di superficie ellittiche

$$(r = 2,\ 3,\ 4,\ 6)$$

di determinante n=2, 4, 3, 9, 4, 8, 6, classificate da Bagnera-De Franchis e caratterizzate [5] mediante i valori dei plurigeneri che per esse sono uguali a 0 e 1. Si ha infatti, per codeste superficie, secondochè $r = 2, 3, 4, 6$, un primo plurigenere non nullo, $P_2 = 1$, o $P_3 = 1$, o $P_4 = 1$, o $P_6 = 1$, e quindi, in ogni caso,

$$P_{12} = 1 .$$

b) Per

$$p_a = 0 ,$$

le superficie coi generi dispari nulli e coi generi uguali ad 1, caratterizzate da

$$p_a = P_3 = 0 , \qquad P_2 = 1 ,$$

---

(3) F. Enriques, *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali*, in « Rendiconti Circolo Matematico di Palermo », 1905 [queste *Memorie*, vol. II, xxxvii].

(4) Cfr. p. es. Enriques-Severi, *Mémoires sur les surfaces hyperelliptiques*, in « Acta Math. », tomo 32 [queste *Memorie*, vol. II, xlvii].

(5) Enriques-Severi, *Intorno alle superficie iperellittiche irregolari*, in « Rendiconti Accad. Lincei », 1908 [queste *Memorie*, vol. II, xliii].

e riducibili alla sestica che passa doppiamente per gli spigoli d'un tetraedro (10 moduli) [6].

c) Per

$$p_a = 1 ,$$

le superficie con tutti i generi uguali ad 1, caratterizzate da

$$p_a = P_4 = 1 \ (^7) ,$$

le quali formano un'infinità numerabile di superficie dipendenti da un intero $\pi = 2, 3, \ldots$ (e da 19 moduli per ciascuna famiglia) [8].

Dimostriamo che, effettivamente, *i tipi a*), *b*), *c*) *esauriscono tutte le superficie con* $P_{12} = 1$.

A tale scopo si osservi anzitutto che, per $P_{12} = 1$, si hanno superficie non appartenenti alla famiglia delle rigate, e perciò dovrà essere, intanto [9],

$$p_a \geqslant 1 ,$$

cioè

$$p_a = -1 \quad \text{o} \quad p_a = 0 \quad \text{o} \quad p_a = 1 .$$

Ora vediamo che:

a) Una superficie per cui $p_a = -1$, avrà il genere geometrico $p_g = 0$ o $p_g > 0$, e sarà una superficie ellittica.

Pongasi $p_g = 0$. Il calcolo dei plurigeneri delle superficie ellittiche di genere $p_g = 0$ conduce a $P_m > 1$ per $m = 3, 4, \ldots$, se $P_2 > 0$ [10]. In questa ipotesi si ha (almeno) una curva bicanonica C e una curva tricanonica K; e combinando linearmente $3C$ e $2K$, si ottiene un fascio di curve sesticanoniche: $P_6 \geqslant 2$, e, *a fortiori*, $P_{12} > 1$.

Se invece si suppone il bigenere $P_2 = 0$, si distinguono 4 categorie di superficie [11] e per l'ultima è $P_2 = 2$ ($P_{12} > 1$). Le superficie delle tre

---

(6) ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, in « Memorie della Società italiana delle scienze (detta dei XL) », 1906 [queste *Memorie*, vol. II, XXXIX].

(7) ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere uno*, in « Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei IX) », 1896 [queste *Memorie*, vol. I, XVI].

(8) Cfr. ENRIQUES, *Le superficie di genere uno*, in « Rendiconti Accad. Bologna », 13 dicembre 1908 [queste *Memorie*, vol. II, XLVI]; SEVERI, *Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero*, in « Atti Istituto Veneto », 10 gennaio 1909.

(9) CASTELNUOVO, *Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo*, in « Rendiconti Circolo Matematico di Palermo », 1905.

(10) Cfr. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*, in « Rendiconti Circolo Matematico di Palermo », loc. cit.

(11) Loc. cit., § 9.

prime categorie hanno $P_{12} = 1$ soltanto nel caso in cui contengono un fascio ellittico di curve di genere $\pi = 1$, cioè nel caso delle superficie (iperellittiche) in cui le curve pluricanoniche sono d'ordine 0; per $\pi > 1$ risulta sempre $P_{12} > 1$.

Infine, per $p_a = -1$, $p_g > 0$, l'ipotesi $P_{12} = 1$ porterà $p_g = 1$, $P_4 = 1$.

b) In secondo luogo si supponga

$$p_a = 0\,, \qquad P_{12} = 1\,.$$

Non può essere $p_g = 1$, perchè le condizioni $p_g = 1$ e $P_4 = 1$ (conseguenza di $P_{12} = 1$) portano $p_a = -1$ o $p_a = +1$ (¹²) e caratterizzano rispettivamente le famiglie di superficie iperellittiche di Picard o di superficie coi generi 1 sopra menzionate. Si avrà, dunque,

$$p_a = p_g = 0$$

e $P_2 > 0$, poichè le condizioni $p_a = P_2 = 0$ caratterizzano le superficie razionali (¹³); ma, essendo $P_{12} = 1$, si deduce $P_2 = 1$, $P_6 = 1$: quindi (¹⁴) $P_3 = 0$, e si ricade nel tipo della sestica sopra nominato.

c) Finalmente, se $p_g = 1$, la $P_{12} = 1$ porta $P_2 = 1$, e quindi si hanno superficie con tutti i generi uguali ad 1.

4. – *La condizione*

$$P_{12} > 1$$

caratterizza l'insieme delle superficie possedenti infinite curve canoniche o pluricanoniche; ma occorre distinguere due casi, secondochè il genere lineare

$$p^{(1)} > 1$$

oppure

$$p^{(1)} = 1\,.$$

Le superficie per cui

$$p^{(1)} > 1$$

(¹²) ENRIQUES, *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)}=1$", in « Rendiconti Accad. Bologna », 7 dicembre 1906 [queste *Memorie*, vol. II, XLI].

(¹³) CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero*, in « Memorie della Società italiana delle scienze (detta dei XL) », 1896.

(¹⁴) ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, loc. cit.

avranno il genere

$$p_g \geqslant 0\,,$$

il bigenere

$$P_2 \geqslant p^{(1)} \geqslant 2\,,$$

il trigenere

$$P_3 \geqslant 3p^{(1)} - 2 \geqslant 4\,;$$

e i sistemi canonici e pluricanonici saranno, in ogni caso, di grado > 0.

Si deduce che:

Ogni superficie di genere lineare $p^{(1)} > 1$ *può essere trasformata in una superficie (canonica o pluricanonica), le cui sezioni piane o iperpiane sono curve canoniche o pluricanoniche, superficie che ne porge un modello invariante.*

La superficie i canonica riuscirà certo semplice per i assai grande. Ma, se non si fà distinzione tra superficie semplici e multiple [15], si può aggiungere che *esiste sempre un modello costituito da una superficie bicanonica per* $p^{(1)} > 3$, *ed un modello costituito da una superficie tricanonica per* $p^{(1)} = 2, 3$ [16].

Invece per $p^{(1)} = 1$, $P_{12} > 1$, *tutte le curve pluricanoniche sono composte delle curve ellittiche d'un fascio, sicchè non conducono ad un modello invariante della superficie.*

5. – L'esistenza d'una superficie canonica o pluricanonica, modello invariante delle superficie di genere lineare $p^{(1)} > 1$, porta una conseguenza importante in ordine alla classificazione di queste.

Per ogni valore di $p^{(1)} > 1$, si hanno superficie canoniche di un ordine dato $p^{(1)} - 1$, o superficie bicanoniche d'ordine $4(p^{(1)} - 1)$, o tricanoniche d'ordine $9(p^{(1)} - 1)$, a sezioni di genere parimenti dato. Ora, se si tratta di determinare le superficie d'un ordine dato, a sezioni di dato genere, cioè con una curva doppia d'ordine dato, il problema, di natura algebrica, condurrà ad un *numero finito* di famiglie distinte ed irriducibili, ogni famiglia essendo costituita da una serie continua di superficie e di classi proiettivamente (e, quindi, birazionalmente) distinte. Vediamo dunque

---

(15) La determinazione dei casi in cui le superficie canoniche o bicanoniche, ecc., si riducano a superficie multiple, costituisce un problema, che sembra ammettere un piccolo numero di soluzioni, e che additiamo all'attenzione degli studiosi.

(16) Alcune importanti diseguaglianze stabilite dal sig. A. ROSENBLATT (« Comptes rendus » e « Bull. Acad. Cracovie », 1912), permettono di aggiungere che $p_g > 3$; e quindi esiste una superficie canonica, appena $p^{(1)}$ sorpassa un certo limite.

che, *per* $p^{(1)}>1$, *ad ogni valore del genere lineare* $p^{(1)}$ *corrisponde un numero finito di famiglie di superficie, con caratteri interi distinti.*

Questa conclusione non sussiste più per $p^{(1)}=1$. Già, per $P_{12}=1$, le superficie iperellittiche (a, 1) e le superficie coi generi 1 (c) offrono *serie di famiglie dipendenti da un numero intero arbitrario.*

Si considerino ora in generale le *superficie con* $p^{(1)}=1$, $P_{12}>1$; la classificazione di queste superficie, che ci proponiamo di svolgere, condurrà a riconoscere che esse formano una *serie di famiglie in cui entrano due numeri interi arbitrari.*

6. – Abbiamo già notato che le superficie con $P_{12}>1$, $p^{(1)}=1$, posseggono un fascio di curve ellittiche; lo stesso può dirsi delle superficie con $P_{12}=1$ (per cui è sempre $p^{(1)}=1$), fatta eccezione delle superficie coi generi geometrici 1:

$$p_g = P_{12} = 1 \qquad\qquad (p_a = -1,\ +1),$$

cioè dalle superficie a), b) e c) del n. 3.

Più precisamente: *le superficie con* $P_{12}\geqslant 1$, $p^{(1)}=1$, *eccettuati i casi corrispondenti a* $p_gP_{12}=1$, ($p_g=P_{12}=1$), *posseggono un fascio di curve ellittiche di genere* p_g-p_a, *per* $p_a\geqslant 0$, *ed invece un fascio di curve ellittiche di genere* p_g *ed un secondo di genere* 1 *nel caso* $p_a=1$ (17).

Viceversa, le superficie con un fascio di curve ellittiche (non appartenenti alla famiglia delle rigate) hanno $P_{12}\geqslant 1$, $p^{(1)}=1$ e $p_gP_4\neq 1$ oppure $p_gP_4=1$; in quest'ultimo caso sono *superficie particolari* coi generi geometrici 1.

Vogliamo ora classificare le superficie possedenti un fascio di curve ellittiche C.

Un primo carattere di tali superficie, che designeremo col nome di *determinante* d di esse, è il minimo numero di punti in cui una curva K, non composta colle C del fascio, incontra le C, cioè l'*ordine del minimo gruppo di punti costruibili sopra ogni* C del fascio mediante operazioni razionali ed operazioni irrazionali non dipendenti dal parametro delle C.

Vi sono superficie di genere lineare $p^{(1)}=1$ ($p_gP_{12}\neq 1$), *per cui il determinante ha un valore intero arbitrario*:

$$d = 1,\ 2,\ 3\ \ldots$$

(17) Cfr. ENRIQUES, *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)}=1$", in « Rendiconti Accad. Bologna », dicembre 1906 [cfr. (12)].

Ciò risulta già dalla costruzione delle superficie di genere $p_a = -1$. Questi esempi provano che «l'ordine d'un gruppo di punti, costruibile sopra una curva ellittica non può generalmente essere abbassato al disotto dell'ordine della curva, *senza introdurre irrazionalità* dipendenti dai coefficienti dell'equazione della curva» ([18]).

Si possono costruire altri esempi di superficie per cui $p^{(1)} = 1$, e d assume un valore arbitrariamente alto.

Si consideri per es. un cono cubico F_3 e le sezioni di esso coi piani per una retta a. Sopra una generica di queste cubiche si può determinare un gruppo di 9 punti base per un fascio di curve d'ordine $3n$ con 9 punti n-pli (fascio di HALPHEN); tale costruzione dipende dalla divisione dell'argomento delle funzioni ellittiche appartenenti alla cubica, e perciò riesce razionale rispetto al parametro del piano per a. Si deduce la costruzione razionale in ogni piano, per a, di una curva d'ordine $3n$ con 9 punti n-pli, variabili su 9 rette distinte.

Codesta curva descrive in generale una superficie non riducibile alla famiglia delle rigate, per cui il genere lineare $p^{(1)} = 1$ e il determinante $d = n$. Si riconosce, infatti, che il determinante non può essere $< n$ se il fascio delle C_{3n} contiene (come avverrà generalmente) delle cubiche contate n volte.

7. – *Ad ogni superficie F^d con un fascio di curve ellittiche $C (p^{(1)} = 1)$, di determinante d, si può far corrispondere una superficie di determinante* 1 *la quale possegga un fascio* (*dello stesso genere*) *di curve birazionalmente identiche alle C.*

A tale scopo basta infatti costruire la superficie F' i cui punti corrispondono alle serie g_n^{n-1} appartenenti alle C di F^d, codeste serie venendo prese come «elementi» di una varietà ∞^2.

Tale costruzione è stata già indicata nella mia citata Nota *Sulla superficie algebrica con un fascio di curve ellittiche.*

Fra le superficie F^d, F', intercede una *corrispondenza algebrica* $[d, d]$, in cui si corrispondono le curve ellittiche birazionalmente identiche.

Infatti si considerino su F^d, F', due generiche curve ellittiche omologhe C, K, e: su F^d una curva L secante la C in un gruppo G di d punti; su F' la curva L' unisecante K nel punto che rappresenta la g_d^{d-1} di C, definita da G_d. Se a questo punto di K si fa corrispondere uno, P, fra i d punti di G_d, resta determinata razionalmente fra K e C *una corrispondenza* biunivoca, perchè ogni punto di C, associato al gruppo

([18]) Cfr. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche con un fascio di curve ellittiche*, in «Rendiconti Accad. Lincei», 7 gennaio 1912 [questo volume, L].

dei $d-1$ punti G_d-P, dà un gruppo di d punti, a cui corrisponde — per costruzione — un punto di K.

In tal guisa si hanno appunto d corrispondenze biunivoche fra K, C, le quali non possono essere razionalmente staccate al variare del parametro da cui dipendono le curve K e C nei rispettivi fasci. Si ha dunque, fra K, C e fra F', F^d, una corrispondenza algebrica $[d, d]$.

Sono in generale curve di coincidenza di questa corrispondenza sulla F' le curve K dotate d'un punto doppio; sulla F^d sono parimenti curve di coincidenza le C dotate d'un punto doppio (corrispondenti alle nominate K), ma anche le curve C che si riducono a curve *ellittiche multiple*, curve da contarsi un certo numero s di volte, dove s è un divisore di d. Cosí restano fissate anche le curve di diramazione della corrispondenza $[d, d]$ fra F', F^d; e si possono quindi dedurre i caratteri della seconda superficie da quelli della prima.

Le superficie $F' \cdot F^d$ di genere lineare $p^{(1)}=1$ hanno il medesimo invariante di ZEUTHEN-SEGRE (corrispondendosi le $C \cdot K$ dotate di punto doppio), e quindi il medesimo genere numerico p_a; esse hanno la stessa irregolarità (che è, per $p_a > -1$, il genere del fascio di curve ellittiche), e perciò lo stesso genere geometrico p_g. Ma i loro plurigeneri non sono necessariamente uguali.

Consideriamo, per semplicità, il caso delle superficie regolari

$$p_a = p_g = p \, .$$

Sulla F' il sistema canonico è costituito dai gruppi di $p-1$ curve ellittiche K, senza parti fisse: quindi

$$P_i = i(p-1)+1 \, .$$

Invece la F^d potrà possedere delle curve ellittiche multiple secondo numeri $s\ (>1)$ divisori di d; ed è facile verificare che ognuna di queste curve, θ, contata $s-1$ volte, costituisce una parte fissa del sistema canonico, da aggiungersi alle $p-1$ curve C variabili: si deduce, quindi,

$$P_i = i(p-1) + \sum \left[\frac{i(s-1)}{s}\right] + 1 \, .$$

Ciò risulta dal fatto che la θ è curva di coincidenza, e non di diramazione, per la corrispondenza $[d, d]$ fra F^d, F' (19); oppure mediante la

(19) SEVERI, *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica*, in « Rendiconti Istituto lombardo », ser. II, vol. XXXVI, p. 495.

costruzione del sistema canonico di F^d, a partire da una rete contenente il fascio (C) ([20]).

La curiosa circostanza che i plurigeneri possano così assumere diversi valori in confronto al genere, è stata già segnalata nello studio dei piani doppi di genere lineare $p^{(1)} = 1$, che costituiscono le superficie regolari di determinante 2 ([21]).

([20]) ENRIQUES, *Intorno ai fondamenti della Geometria sopra le superficie algebriche,* in « Atti Accad. Torino », (1901) [queste *Memorie,* vol. II, XXXII].

([21]) ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)}=1$, in « Rendiconti Accad. Lincei », (1898) [queste *Memorie,* vol. I, XXII].

NOTA II.

« Rend. Acc. Linc. », s. 5ª, vol. XXIII (1914),

pp. 291-297

8. – La costruzione delle superficie con un fascio di curve ellittiche C, di determinante 1, si desume dall'analisi fatta nella mia Nota citata, del gennaio 1912.

Tipo di codeste superficie di determinante 1 è un cono doppio di genere $p_g - p_a$ (per $p_a \geqslant 0$), avente una curva di diramazione che interseca le generatrici in tre punti variabili.

Nel caso delle *superficie regolari*, a cui possiamo riferirci per semplicità di discorso, si ha dunque come tipo *un tipo doppio con curva di diramazione d'ordine* $2n$, *dotata d'un punto* $(2n-3)$-plo.

Appare così (accanto al determinante d, che nel nostro caso è preso $=1$) *un secondo carattere intero delle superficie con* $p^{(1)}=1$ $(p_g P_{12} > 1)$, cioè il numero n, *che può ricevere qualsiasi valore*

$$n = 4, 5, \ldots$$

(per $n = 3$ si ha una superficie coi generi

$$p_a = p_g = P_2 = \ldots = 1;$$

per $n = 2$, una superficie razionale).

Se si assume ad arbitrio nel piano una curva di diramazione K_{2n} di ordine $2n$, con un punto $(2n-3)$-plo, O, si ha un piano doppio che ha, *in generale*, i caratteri seguenti:

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} p^{(1)} = 1\,, \\ p = p_a = p_g = n - 2\,. \end{cases}$$

Ma i generi geometrici si abbassano in corrispondenza a punti tripli di K_{2n} infinitamente vicini ad O, o a punti quadrupli di K_{2n} non vicini ad O.

Quindi si possono avere per K_{2n} le singolarità seguenti:

$$(\beta)\qquad \left\{\begin{array}{l} \text{un punto 4-plo distinto da } O, \text{ che porta} \\[1ex] \qquad\qquad p = p_a = p_g = n - 3; \end{array}\right.$$

oppure

$$(\gamma)\qquad \left\{\begin{array}{l} \sigma = 1, 2, \ldots \left(\sigma \leqslant \left[\dfrac{2n-3}{3}\right]\right) \text{ punti tripli infinitamente vicini ad } O, \\[1ex] \text{che portano} \qquad p = p_a = p_g = n - 2 - \sigma\,. \end{array}\right.$$

Se la K_{2n} possiede altre singolarità, il suo ordine può essere abbassato con una trasformazione birazionale del piano.

In conclusione: *le superficie regolari con* $p^{(1)} = 1$, $p_g P_{12} > 1$, *di determinante* 1, *formano un'infinità numerabile di famiglie di piani doppi, la cui curva di diramazione ha l'ordine minimo*

$$2n = 8, 10, \ldots$$

Ad ogni valore di n corrispondono $[(2n-3)/2] + 2$ *famiglie di superficie, per cui*

$$p = p_a = p_g = n - 2\,, \qquad n - 3\,, \qquad \ldots, \qquad n - 2 - \left[\frac{2n-3}{3}\right]$$

$$P_i = i(p-1) + 1;$$

vi sono due famiglie distinte per $p = n - 3$.

Le famiglie suindicate si possono caratterizzare come segue:

famiglia α): $p = n = 2$; *piano doppio privo di curve eccezionali*, con curva di diramazione K_{2n} d'ordine $2n$, dotata di punto $(2n-3)$-plo;

famiglia β): $p = n - 3$; *quadrica doppia priva di curve eccezionali*, con curva di diramazione, K_{2n}, d'ordine $2n$, composta di una generatrice r e d'una curva K_{2n-1} d'ordine $2n - 1$, trisecante le generatrici dell'altro sistema;

famiglia γ):

$$\left(p = n - 2 - \sigma, \quad \sigma = 1, 2, \ldots \left[\frac{2n-3}{3}\right]\right);$$

cono doppio, d'ordine $\sigma+1$ *in* $S_{\sigma+2}$, *privo di curve eccezionali*, con curva di diramazione K_{2n} d'ordine $2n$, trisecante le generatrici.

9. – È facile determinare la *base* delle superficie F' delle famiglie α), β), γ). Anzitutto osserviamo che *in generale non vi sono, nel fascio di curve ellittiche C, curve spezzate*. Curve C spezzate si presenteranno infatti quando la K_{2n} possieda un punto doppio o quando vi sia una tangente in O che tocca altrove K_{2n}; circostanze che non si avverano per la *più generale* superficie di alcuna delle famiglie suddette.

Ora si consideri sopra F' una curva qualsiasi χ, secante in $\nu > 1$ punti le C. Sopra F' esiste già — per ipotesi — una curva L, unisecante la C, corrispondente, sul piano doppio, al punto $(2n-3)$-plo di K_{2n}. Si può quindi (1) costruire su F' una curva L_1 che seghi le C in *un* punto il quale, sommato con l'intersezione di L contata $V-1$ volte, dia un gruppo equivalente all'intersezione di χ; si avrà dunque, per un noto criterio di equivalenza (2),

$$L_1+(\nu-1)L=\chi\,.$$

Si deduce, di qui, che *la base di una superficie* $F'(p^{(1)}=1,\ p_g P_{12}>1)$ *di determinante* 1, *è costituita dal fascio di curve ellittiche C e da curve unisecanti le C.*

Ora si cerchi di determinare sul piano doppio, con una K_{2n} di diramazione, immagine di F', una curva K_m d'ordine m, passante $m-1$ volte per il punto $(2n-3)$-plo di K_{2n}, la quale rappresenti una curva di F' unisecante le C. Il calcolo di costanti che a tale scopo ho svolto nella citata Nota del gennaio 1912, è affetto di un errore che deve correggersi nel senso qui indicato; si correggerà quindi l'enunciato che ne consegue, che pure viene appresso riferito nella forma rettificata.

Le K_m con O $(m-1)$-plo dipendono linearmente da

$$2m$$

costanti. Affinchè una K_m (d'ordine dispari) rappresenti *due* unisecanti le C su F', occorre che i

$$2n+3(m-1)$$

punti intersezioni di essa con K_{2n} si riducano a

$$n+\frac{3(m-1)}{2}$$

(1) Enriques, Nota citata, « Lincei », gennaio 1912.

(2) Severi, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* (n. 6), « Annali di Mat. », 1905.

contatti; ed occorre, altresì che gli $m-1$ punti di K_m infinitamente vicini ad O si riducano a

$$\frac{m-1}{2}$$

coppie di punti coincidenti.

Si hanno dunque

$$n+2(m-1)$$

condizioni da soddisfare coi $2m$ parametri della K_m, il che è, *in generale*, impossibile. Affinchè esista una K_m rispondente al problema, bisogna [nel caso α)] che la K_{2n} soddisfi a

$$p=n-2$$

condizioni

Se la K_{2n} ha un punto 4-plo A fuori di O, le K_m per A dipendono da

$$2m-1$$

costanti e le condizioni richieste sono 2 di meno. Si hanno dunque, nel caso β),

$$p=n-3$$

condizioni per l'esistenza di K_m

Se la K_{2n} ha σ punti tripli infinitamente vicini ad O, le K_m per essi dipendono da

$$2m-\sigma$$

costanti. I punti d'intersezione con K_{2n}, fuori di O, sono

$$2n+3(m-1-\sigma)$$

da ridursi a

$$n+3\,\frac{(m-1-\sigma)}{2}$$

contatti; e i punti infinitamente vicini ad O, oltre i punti tripli, sono

$$m-1-\sigma$$

da ridursi a

$$\frac{m-1-\sigma}{2}$$

coppie di punti coincidenti. Quindi le condizioni per l'esistenza della K_m richiesta, sono, nel caso γ),

$$n+2(m-1-\sigma)-(2m-\sigma)=n-2-\sigma=p\,.$$

Si conclude che:

Sulle superficie F' la base è in generale costituita dal fascio di curve ellittiche C e dalla loro unisecante; affinchè esista un'altra curva unisecante la C, indipendente dalla prima, la superficie deve soddisfare a p condizioni. Queste condizioni caratterizzano le superficie con un gruppo discontinuo di trasformazioni birazionali in se stesse ([3]).

Una superficie F^d di determinante F^d avrà pure in generale il numero base uguale a 2; e le *condizioni* perchè la base sia più ampia in guisa che esista un *gruppo discontinuo* di trasformazioni ([4]), si riducono alle condizioni analoghe per la superficie di determinante 1, F', che corrisponde a F^d (cfr. Nota I).

Così, per es., le superficie d'ordine $n>3$, con retta $(n-3)$-pla, sono superficie con $p^{(1)}=1$, possedenti un fascio di cubiche (determinante 3), le quali non ammettono in generale un gruppo discontinuo di trasformazioni in se stesse.

10. – Calcoliamo ora il numero M dei moduli appartenenti alle famiglie α), β), γ) di superficie regolari $F'(n\,8)$.

α) $(p=n-2)$. Una K_{2n} con un punto $(2n-3)$-plo fisso dipende da

$$8n-3=\frac{2n(2n+3)}{2}-\frac{(2n-3)(2n-2)}{2}$$

costanti. Essendoci ∞^6 omografie piane che lasciano fermo il punto suddetto, si otterranno

$$M=8n-9=8p+7$$

moduli.

([3]) Cfr. Enriques, *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali*, « Rendic. Lincei », (1906) [queste *Memorie*, vol. II, XL].

([4]) Loc. cit.

β) ($p = n - 3$). Le K_{2n} piane, aventi un punto $(2n-2)$-plo A e un punto 4-plo B, dipendono da

$$8n - 13 = \frac{2n(2n+3)}{2} - \frac{(2n-3)(2n-2)}{2} - 10$$

costanti. Tenendo conto che ci sono ∞^6 trasformazioni quadratiche lascianti invariato il sistema delle coniche per A e B, si deduce

$$M = 8n - 19 = 8p + 5 .$$

γ) ($p = n - 2 - \sigma$). Le K_{2n} con un punto $(2n-3)$-plo e σ punti tripli infinitamente vicini, dipendono da

$$8n - 3 - 6\sigma$$

costanti. Bisogna defalcare l'infinità delle trasformazioni proiettive del cono razionale normale d'ordine $\sigma + 1$ in $S_{\sigma+2}$, che è

$$\sigma + 6 .$$

Si ottiene quindi

$$M = 8n - 7\sigma - 9 ,$$

cioè

$$M = 8p + \sigma + 7 .$$

Questi numeri danno luogo ad alcune osservazioni.

Le superficie regolari di genere superficiale $p_a = p_g = p$, e di genere lineare $p^{(1)}$ ($P_{12} > 0$), contengono, in generale ([5]),

$$M = 9p - 2p^{(1)} + 12 + \Theta$$

moduli, dove, *in ogni caso*,

$$\Theta \geqslant 0 .$$

Ora, per le superficie α) si trova

$$M = 8p - 2p^{(1)} + 9 , \qquad (p^{(1)} = 1),$$

([5]) Enriques, « Rendic. Acc. Lincei », giugno 1908.

per le β)

$$M = 8p - 2p^{(1)} + 7 ,$$

per le γ)

$$M = 8p - 2p^{(1)} + \sigma + 9 .$$

Accade dunque che nei casi α), β) e nel caso γ) per $\sigma \leqslant p + 2$, il numero dei moduli da cui dipendono le superficie F' risulta inferiore a quello che viene indicato dalla formula generale:

La contraddizione apparente si risolve osservando che le superficie F' appartengono ad una più ampia famiglia di superficie con $p^{(1)} = 1$, *di determinante* 2, *aventi il medesimo genere* p; entro questa famiglia, le F' si distinguono per una *particolarità aritmetica* che diminuisce il numero dei moduli.

Infatti, il piano doppio con K_{2n} di diramazione dotata d'un punto $(2n-3)$-plo, è un caso particolare del piano doppio con K_{2n}, di diramazione dotata di un punto $(2n-4)$-plo. I moduli di queste ultime superfici F^2 risultano

$$M = 10n - 12 = 10p + 8 ,$$

cioè

$$(\alpha) \qquad M = 10p - 2p^{(1)} + 10 .$$

Similmente, il piano doppio con K_{2n} di diramazione dotata d'un punto $(2n-3)$-plo e d'un punto 4-plo è caso particolare del piano doppio con K_{2n} di diramazione dotata d'un punto $(2n-4)$-plo e d'un punto 4-plo, il quale contiene

$$M = 10n - 22 = 10p + 8 ,$$

cioè

$$(\beta) \qquad M = 10p - 2p^{(1)} + 10$$

moduli.

Onde risulta che, nei casi α) e β),

$$M = 10p - 2p^{(1)} + 10 \geqslant 9p - 2p^{(1)} + 12$$

se

$$p > 1 .$$

Per $p=1$ manca *un* modulo, e ciò corrisponde al fatto che le nostre superficie coi generi $p=P_2=1$, contenenti un fascio di curve ellittiche, fan parte di una più ampia famiglia di superficie cogli stessi generi, che non contengono fasci di curve ellittiche: tali sono, nel caso α), i piani doppi con sestica K_6 di diramazione affatto generale; e nel caso β) le superficie del 4° ordine, che solo in casi particolari si riducono a quadriche doppie con curva K_8 di diramazione.

Resta infine da considerare il caso γ) per

$$\sigma < p+3\,,$$

cioè per

$$\sigma \leqslant p+2 \qquad\qquad (p=n-2-\sigma),$$

$$\sigma \leqslant \frac{n-2}{2}+1\,.$$

E per spiegare la circostanza segnalata, basta notare che, in questo caso, il piano doppio con K_{2n} di diramazione dotata di un punto O $(2n-3)$-plo e σ punti tripli infinitamente vicini, è un *caso particolare* di quello con curva di diramazione K_{2n} dotata di un punto $(2n-4)$-plo e di σ punti quadrupli; piano doppio che si riduce ad avere una curva di diramazione d'ordine più basso, e che contiene un maggior numero di moduli.

LVI.

SUL TEOREMA D'INVARIANZA DELLA SERIE CANONICA g_{2p-2}^{p-1} APPARTENENTE AD UNA CURVA ALGEBRICA DI GENERE p

«Memorie dell'Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna», to. I (1914),

pp. 81-85

L'invarianza della serie canonica, g_{2p-2}^{p-1}, appartenente ad una curva algebrica C_p di genere p (invarianza rispetto a trasformazioni birazionali) può essere dimostrata nel modo più semplice, partendo dal concetto delle serie lineari complete e delle operazioni sopra di esse, ove si stabiliscano le seguenti proposizioni:

1) Ogni g_n^1 su C_p possiede un gruppo di $2n + 2p - 2$ punti doppi, gruppo che può essere designato come *jacobiano* di g_n^1.

2) Se due g_n^1 sono equivalenti, cioè contenute in una stessa g_n^r completa, i loro gruppi jacobiani sono equivalenti. Esiste quindi una serie completa $g_{2n+2p-2} = (g_n^r)_j$ che contiene tutti i gruppi jacobiani delle g_n^1 appartenenti a g_n^r e che può denominarsi *jacobiana* (o *aggiunta di rango* 2) della g_n^r:

3) Se ad una g_n^1 si somma un gruppo di m punti fissi, G_m, la serie

$$G_m + g_n^1,$$

ha come jacobiano il gruppo

$$2G_m + G_{2n+2p-2},$$

G^2_{n+2p-2} designando lo jacobiano di g_n^1

Da ciò segue la *relazione fondamentale* tra serie complete, che si può esprimere simbolicamente scrivendo:

$$(g_n + g_m)_j = |(g_n)_j + 2g_m| = |2g_n + (g_m)_j|.$$

E si deduce che la serie completa

$$g_{2p-2} = |(g_n)_j - 2g_n|,$$

se esiste, è *indipendente* dalla g_n. È il teorema d'invarianza della serie canonica.

Questa trattazione del teorema fondamentale della teoria delle curve algebriche è stata esposta in un mio corso tenuto nell'Università di Bologna l'anno 1897-98 (Cfr. il Programma pubblicato nel fasc. di Aprile 1899 del *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche*) (*). L'estensione alle superficie ha formato argomento della mia Nota « Intorno ai fondamenti della Geometria sopra le superficie algebriche » (*Atti R. Acc. di Torino* 1901) (**).

Nel citato corso del 1897-98 la dimostrazione delle proposizioni 1, 2, 3, venne data nella forma che si presenta più naturale ed immediata quando si considerano le curve rispetto alle trasformazioni birazionali, cioè riducendosi al caso in cui le g_n^1 sieno segate da rette e facendo ricorso alla teoria delle polari. Il medesimo è fatto per le superficie nella Nota dell'Accademia di Torino.

Quest'anno sono ritornato nei miei corsi sulle curve algebriche, ed ho voluto svolgere la teoria delle funzioni razionali (o serie lineari) appartenenti ad una C_p, prima ed indipendentemente dall'uso di trasformazioni.

Indico qui le osservazioni cui sono stato condotto, per l'interesse didattico che possono presentare.

Tutta la teoria delle g_n^r su una C_p si può svolgere molto semplicemente senza ricorrere a trasformazioni. Le proposizioni 1), 2), 3), si possono dimostrare nel modo che qui viene rapidamente accennato.

Sieno φ, ψ due polinomi d'ordine s aggiunti alla curva f d'ordine m dotata di punti multipli ordinari d'ordine $r_1, r_2 \ldots$; i punti doppi della serie lineare

$$\frac{\varphi(xy)}{\psi(xy)} = K$$

sopra

$$f(xy) = 0,$$

(*) [Queste *Memorie*, vol. II, XXVIII].
(**) [Queste *Memorie*, vol. II, XXXII].

si ottengono eliminando K fra le equazioni

$$\varphi(xy) = K\psi(xy) ,$$

e

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}} = K\left[\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}\right].$$

Si vede così che essi sono le intersezioni di

$$f(xy) = 0 ,$$

colla jacobiana

$$J(\varphi\psi f) = \begin{vmatrix} \varphi & \psi & f \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 ,$$

resultato che ha anche una evidente giustificazione geometrica.

Si deduce quindi che se $\varphi = 0$ e $\psi = 0$ hanno t punti fissi su $f = 0$

$$\left(\text{cioè se la serie } \frac{\varphi}{\psi} = K \text{ è una } g_n^1 \text{ dove } n = ms - \sum r(r-1) - t\right),$$

codesti t punti si distaccano due volte, e si prova che:

1) lo jacobiano di una g_n^1 su C_p consta di $2n + 2p - 2$ punti;

2) lo jacobiano di

$$G_m + g_n^1 ,$$

si ottiene aggiungendo $2G_m$ allo jacobiano di g_n^1.

La deduzione di queste proposizioni richiede soltanto un'avvertenza.

Essendo φ, ψ, f d'ordine s, s, n, la curva jacobiana

$$J(\varphi\psi f) = \begin{vmatrix} \varphi & \psi & f \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 ,$$

è di ordine

$$2s + n - 2\,,$$

ed ha come multiplo d'ordine

$$3r - 4\,,$$

ogni punto r-plo per f ed $(r-1)$-plo per φ, ψ; invece il gruppo jacobiano della serie g_n^1, segata dalle aggiunte $\lambda\varphi + \mu\psi = 0$, appartiene alla serie segata su $f = 0$ dalle curve d'ordine

$$2s + n - 3\,,$$

che passano colla molteplicità

$$3r - 3\,,$$

per ogni punto r-plo di f.

Vi è dunque una riduzione da fare, che si giustifica semplicemente fondandosi sulla osservazione fondamentale che segue:

Se φ_s, ψ_s, f_n sono tre forme (omogenee) degli ordini s, s, n, si ha identicamente

$$\begin{vmatrix} \varphi_s & \psi_s & \frac{n}{s} f_n \\ \frac{\partial\varphi_s}{\partial x} & \frac{\partial\psi_s}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi_s}{\partial y} & \frac{\partial\psi_s}{\partial y} & \frac{\partial f_n}{\partial y} \end{vmatrix} = 0\,.$$

L'osservazione enunciata si dimostra applicando il teorema d'EULERO per cui

$$\frac{1}{s}\left(\frac{\partial\varphi_s}{\partial x}x + \frac{\partial\varphi_s}{\partial y}y\right) = \varphi_s$$

$$\frac{1}{s}\left(\frac{\partial\psi_s}{\partial x}x + \frac{\partial\psi_s}{\partial y}y\right) = \psi_s$$

$$\frac{1}{s}\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}x + \frac{\partial f_n}{\partial y}y\right) = \frac{n}{s}f_n\,.$$

Dovendosi fare sistema delle equazioni

$$f = 0 \,, \qquad J(\varphi\psi f) = 0 \,,$$

si sostituirà ad J

$$\bar{J} = J - \left(1 - \frac{n}{s}\right) \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \varphi & \psi & \frac{n}{s} f_n \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} ,$$

e si riconoscerà che l'insieme dei termini d'ordine più alto, $2s + n - 2$, si annulla in $\bar{J}$ identicamente.

In modo del tutto analogo, se il punto $x = y = 0$ è r-plo per f e $(r - 1)$-*plo* per φ, ψ, si sostituirà a $J(\varphi\psi f)$

$$\bar{\bar{J}} = \begin{vmatrix} \varphi & \psi & \frac{r}{r-1} f \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} ,$$

e si verificherà subito che nello sviluppo di questo determinante si annulla identicamente l'insieme dei termini d'ordine più basso $2r - 4$.

Per dimostrare la proposizione enunciata innanzi col numero 3) basta ora verificare che « un punto fisso per la g_n^1 appartiene come punto doppio al gruppo jacobiano ». E se il punto fisso è portato nell'origine $x = y = 0$ basta verificare che nello sviluppo di J si annulla identicamente l'insieme dei termini di più basso grado, cioè di grado 1, in x, y, che è un determinente del tipo

$$J(\varphi_1 \psi_1 f_1) \,,$$

dove φ_1, ψ_1, f_1, sono forme di 1° grado.

Resta da stabilire la proposizione 2) che: se due g_n^1 sono equivalenti i loro gruppi jacobiani sono equivalenti.

Perciò si può limitarsi a considerare due g_n^1 contenute in una stessa g_n^2, e rappresentate da

$$\frac{\varphi}{\psi} = \text{cost},$$

$$\frac{\theta}{\psi} = \text{cost},$$

con φ, ψ, o curve aggiunte di uno stesso ordine s.

I rispettivi gruppi jacobiani appartengono allora alla serie

$$J(\lambda\varphi + \mu\theta, \psi, f) = \lambda J(\varphi\psi f) + \mu J(\theta\psi f) = 0 .$$

LVII.

DIE ALGEBRAISCHEN FLÄCHEN VOM GESICHTSPUNKTE DER BIRATIONALEN TRANSFORMATIONEN AUS

Von GUIDO CASTELNUOVO und FEDERICO ENRIQUES

« Encyklopädie d. mathematischen Wissenschaften », III, 2, Heft 6, pp. 674-768

INHALTSÜBERSICHT

I. - *Birationale Transformationen und lineare Kurvensysteme auf einer Fläche.*

II. - *Die Theorie der Invarianten.*

III. - *Über die Ausdehnung des Theorems von* Riemann-Roch *und über die nicht-linearen kontinuierlichen Systeme von Kurven, welche einer Fläche angehören.*

IV. - *Die Theorie der Flächen in Beziehung auf die Integrale, welche mit den Flächen verknüpft sind.*

V. - *Über gewisse Familien bemerkenswerter Flächen und über die Klassifikation der algebraischen Flächen.*

LITERATUR

Abhandlungen, Berichte und Gesamtdarstellungen der Fundamente der Theorie.

M. Noether, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechends algebraischer Gebilde,* « Math. Ann. », 2 (1870), p. 293; 8 (1875), p. 495 = Noether A und B.

E. Picard, *Sur les intégrales de différentielles totales algébriques de première espèce,* « Journ. de Math. », (s. 4) 1 (1885), p. 281 = Picard A.

— *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables,* « Journ. de Math. », (s. 4) 5 (1889), p. 135 = Picard B.

Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes,* Paris, Gauthiers-Villars, 1 (1897); 2 (1906) = Picard-Simart.

F. Enriques, *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche,* « Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino », (s. 2) 44 (1893), p. 171 [queste *Memorie,* vol. I, v] = Enriques R.

— *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche,* « Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei 40) », (s. 3) 10 (1896), p. 1 [queste *Memorie,* vol. I, xiii] = Enriques I.

— *Intorno ai fondamenti della Geometria sopra le superficie algebriche,* « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », 37 (1901), p. 19 [queste *Memorie,* vol. II, xxxii] = Enriques F.

G. Castelnuovo, *Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica,* « Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei 40) », (s. 3) 10 (1896), p. 82 = Castelnuovo R.

— *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie*, « Annali di Matematica », (s. 2) 25 (1897), p. 235 = CASTELNUOVO P.

G. CASTELNUOVO et F. ENRIQUES, *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques*, « Math. Ann. », 48 (1897), p. 241 [queste *Memorie*, vol. I, XVII] = CASTELNUOVO-ENRIQUES R.

— *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*, « Ann. di Mat. », (s. 3) 6 (1900), p. 165 [queste *Memorie*, vol. II, XXXIII] = CASTELNUOVO-ENRIQUES Q.

— *Sur quelques résultats nouveaux dans la théorie des surfaces algébriques*. Note 5 zu PICARD-SIMART, Bd. 2, S. 485 = CASTELNUOVO-ENRIQUES N.

F. SEVERI, *Uno sguardo d'insieme alla geometria sopra una superficie algebrica*, « Atti del R° Istituto Veneto di Scienze », ecc. 68, 2. Teil (1909), p. 829 = SEVERI S.

U. AMALDI, *Sullo sviluppo della Geometria in Italia*, « Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze », 5 (1911), p. 415.

A. ROSENBLATT, *Les progrès de la théorie des surfaces algébriques* (*Bericht mit bibliographischen Notizen in polnischer Sprache*), « Prace Matematyczno-Fizyczne », 23 (1912), p. 51.

E. F. BAKER, *On some recent advances in the theory of algebraic surfaces*, « Proceedings of the Mathematical Society », (s. 2) 12 (1912), S. 1.

H. W. E. JUNG, *Zur Theorie der Kurvenscharen auf einer algebraischen Fläche*, « J. f. Math. », 138 (1910), p. 77 = JUNG T. (Darlegung der Theorie, welche aus arithmetischen Gesichtspunkten für die algebraischen Kurven von K. HENSEL und G. LANDSBERG entwickelt worden ist, und Vergleich dieser Theorie mit den Entwicklungen der Geometer. Die Darstellung geht im ganzen mit den ersten 17 Nummern des nachstehenden Referates parallel; das Analogon zu den nicht-linearen Systemen ist nicht behandelt. Verschiedenheiten in bezug auf Fundamental- oder Basiselemente sind dadurch bedingt, daß JUNG inhomogen arbeitet oder jede Variable einzeln homogenisiert. Hier ein kurzes Verzeichnis der einander entsprechenden Grundbegriffe:

Algebraisch-geometrische Theorie	*Arithmetische Theorie*
Irreduzibele Kurve auf F	Primteiler
Beliebige Kurve auf F	Divisor
Lineares Kurvensystem auf F	Divisorenklasse
Gesamtheit der Kurven auf F, die vollständige Schnitte sind	Hauptklasse
Dimension, Grad, adjungiert Systeme, Defekt, charakteristische Schar usw. eines linearen Kurvensystems	ebenso, einer Klasse
Summe und Residualsystem	Produkt und Quotient zweier Klassen).

I. - BIRATIONALE TRANSFORMATIONEN UND LINEARE KURVENSYSTEME AUF EINER FLÄCHE.

1. - Birationale Transformationen.

Die projektive Geometrie (Theorie der Formen oder Mannigfaltigkeiten in Beziehung zu den linearen homogenen Substitutionen zwischen zwei Gruppen von Variablen) hat ihre natürliche Erweiterung in der Theorie der algebraischen Mannigfaltigkeiten in Beziehung zu den birationalen Transformationen gefunden.

Es empfiehlt sich zunächst daran zu erinnern, wodurch diese Transformationen definiert sind.

Seien $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_r$ und $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_s$ zwei Gruppen von Variablen, die man als homogene Punktkoordinaten in zwei linearen Räumen X und Y mit den Dimensionen r und s deutet; und sei z. B. $s \geqslant r$. Setzen wir

$$(1) \qquad \varrho y = f_i(x_0, x_1, \ldots, x_r) \qquad (i = 0, 1, \ldots, s),$$

wo die f algebraische Formen gleichen Grades bezeichnen und ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist; dann hat man zwischen den Räumen X und Y eine *rationale Transformation.* Jedem Punkte allgemeiner Lage x von X entspricht ein Punkt y in Y; während x eine algebraische Kurve oder Fläche oder höhere Mannigfaltigkeit F beschreibt, beschreibt der Punkt y in Y eine algebraische Kurve oder Fläche oder überhaupt eine Mannigfaltigkeit F', welche F entspricht und welche im allgemeinen dieselbe Dimension hat wie F. Jeder Punkt allgemeiner Lage y von F' kann einem oder mehreren oder auch unbegrenzt vielen Punkten von F entsprechen; die ersten beiden Fälle treten ein, wenn die Funktionaldeterminanten $|\partial f_i / \partial x_k|$ für die Punkte von F nicht alle identisch verschwinden. Im ersten Falle kann man mit Hilfe der Gleichungen (1) und der die Mannigfaltigkeit in X definierenden Gleichungen auch die Variablen x durch rationale Funktionen der y ausdrücken, so daß man Relationen der folgenden Form erhält:

$$(2) \qquad \sigma x_k = \varphi_k(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_s) \qquad (k = 0, 1, \ldots, r).$$

Die Gleichungen (1), (2) definieren eine birationale *Korrespondenz* oder *Transformation* zwischen F und F'. Der Spezialfall birationaler Transformationen zwischen zwei Ebenen oder linearen Räumen führt auf die CREMONAschen Transformationen [siehe III C 11 (BERZOLARI)].

2. - Fundamentalelemente.

Wenn eine birationale Transformation durch die Gleichungen (1), (2) zwischen zwei Mannigfaltigkeiten F und F' gegeben ist, so gibt es im allgemeinen Ausnahmen, Fundamentalpunkte der Transformation auf F (oder auf F'), welchen mehrere Punkte entsprechen. Dies sind auf F diejenigen Punkte, für welche gleichzeitig alle f_i verschwinden. Durch genaueres direktes Studium dieser Ausnahmen (oder auch durch Anwendung des Kontinuitätsgesetzes) zeigt man, daß man die auftretenden höheren Ausnahmefälle auf niedrigere reduzieren kann (§ 3), welche sich selbst auf die folgenden Fälle beschränken:

1) wenn die Mannigfaltigkeiten F und F' *Kurven* sind, so entspricht jedem Fundamentalpunkt eine *endliche Anzahl von Punkten*, d. h. man hat ausschließlich *Fundamentalpunkte erster Art.*

2) wenn F und F' *Flächen* sind, so kann man auf F (und entsprechend auf F') eine Kurve von Fundamentalpunkte erster Art haben, von denen jeder einer endlichen Anzahl von Punkten entspricht, und auch eine endliche Anzahl *Fundamentalpunkte zweiter Art*, deren jedem eine *Kurve* von F' entspricht, welche man ebenfalls *fundamental* für die Transformationen nennt.

Die Verallgemeinerung im Falle höherer Mannigfaltigkeiten ergibt sich unmittelbar, hat im übrigen hier kein weiteres Interesse für uns.

3. - Reduktion der Singularitäten.

Die Fundamentalpunkte einer gegebenen birationalen Transformation zwischen F und F' können in singulären Punkten dieser Mannigfaltigkeit liegen. Wenn man die Transformation so wählt, daß dies für F eintritt, so erhält man unter geeigneten Bedingungen auf diese Weise ein *Reduktionsverfahren für die Singularitäten* von F, das man für die Kurven zu studieren unternommen hat [III C 4 (Berzolari) § 12]. Ein analoges Verfahren kann für die Flächen entwickelt werden.

Jede gewöhnliche mehrfache Kurve von der Ordnung i einer Fläche F kann mit Hilfe einer Transformation, welche die gegebene Kurve als Fundamentalkurve hat, in eine einfache Kurve von F' übergeführt werden, welche der Ort von Gruppen von i Punkten ist, die den Punkten der mehrfachen Kurve entsprechen; diese wird also von Fundamentalpunkten erster Art gebildet.

Ein gewöhnlicher isolierter mehrfacher Punkt der Ordnung i $(i > 1)$

der Fläche F kann nicht als ein Fundamentalpunkt erster Art betrachtet werden, wohl aber als ein Punkt zweiter Art, welchem auf der transformierten Fläche F' eine Fundamentalkurve entspricht.

Die Reduktion wird komplizierter, sobald man es mit höheren Singularitäten der Fläche F zu tun hat; einem mehrfachen Punkte kann eine endliche Anzahl einfacher Punkte und einfacher Kurven von F' entsprechen. *In jedem Falle kann man jedoch durch ein sukzessives Reduktionsverfahren eine beliebig gegebene Fläche in eine Fläche überführen, welche keine Singularitäten hat* und welche einem Raum von mindestens fünf Dimensionen angehört (¹).

Projiziert man diese Fläche von einer Geraden oder einem allgemeinen Raum aus auf den S_3, so kann man in jedem Falle zu einer *Fläche* gelangen, *die lediglich eine Doppelkurve und dreifache Punkte besitzt, welche auch für die Doppelkurve dreifach sind.*

4. - Ausgezeichnete Kurven.

Ist eine birationale Transformation zwischen zwei Flächen F und F' gegeben, so können Fundamentalpunkte auf F (und entsprechend auf F') vorhanden sein, welche nicht in die Singularitäten fallen. Dieser Fall hat in der Theorie der Kurven kein Analogon, denn dort ist ein Fundamentalpunkt erster Art von der Ordnung i $(i > 1)$ immer ein mehrfacher Punkt derselben Ordnung. Wenn ein einfacher Punkt der Fläche F für die gegebene Transformation fundamental ist, so handelt es sich immer um einen Fundamentalpunkt zweiter Art, welchem eine rationale Kurve von F' entspricht. Eine derartige rationale Kurve, welche auf einen einfachen Punkt zurückgeführt werden kann, heißt eine *ausgezeichnete Kurve* der Fläche.

M. Noether (²) ist ausgezeichneten Kurven zuerst in der Theorie der wenigstens einseitig rationalen Transformationen begegnet und hat hierauf die folgende Bemerkung begründet:

Ist eine Fläche F_n von der Ordnung n im gewöhnlichen Raum gegeben, welche nur eine Doppelkurve (§ 3) besitzt, und setzt man voraus, daß Flächen φ_{n-4} von der Ordnung $n-4$ einfach durch die Doppelkurve hindurchgehen, so ist jede ausgezeichnete Kurve von F_n eine Basiskurve, welche allen Flächen φ_{n-4} gemeinsam ist.

(¹) Siehe die in § 4 des Artikels III C 6 a (Castelnuovo-Enriques) zitierten Abhandlungen und insbesondere B. Levi, « Ann. di mat. », (s. 2) 26 (1897), p. 219, wo der vollständige Beweis des Theorems zu finden ist. Neuerdings hat F. Severi [« Rend. Acc. Lincei », (s. 5) Bd. 23 Dezember 1914] einen einfachen Beweis dieses Satzes gegeben.

(²) Noether, B, § 9.

Wir werden später auf diese bemerkenswerte Eigenschaft zurückkommen; ihre wichtige Bedeutung entspringt der Rolle, welche die Flächen φ_{n-4} spielen (deren Anzahl das Geschlecht p_g bestimmt) (siehe § 11).

Die Bemerkung von M. NOETHER bildet den Ausgangspunkt für einen Reduktionsprozeß, welchen F. ENRIQUES ([3]) gebildet hat und durch welchen man versucht, eine gegebene Fläche so zu transformieren, daß ihre *sämtlichen* ausgezeichneten Kurven verschwinden. Nach und nach im Jahre 1894 und 1896 ist es F. ENRIQUES gelungen, die Familie der Flächen, für welche diese Elimination möglich ist, zu erweitern. Die vollständige Bestimmung dieser Familien haben jedoch erst CASTELNUOVO und ENRIQUES ([4]) im Jahre 1900 gegeben, und zwar unter der folgenden Form:

Jede algebraische Fläche, welche nicht eine Transformierte eines Zylinders $f(x, y) = 0$ ist, kann derart transformiert werden, daß ihre ausgezeichneten Kurven verschwinden.

Man kann sagen, daß durch dieses Resultat alle Schwierigkeiten überwunden sind, welche aus der Existenz der ausgezeichneten Kurven hervorgehen. Indessen muß man bei der Entwicklung der Theorie den Umstand beachten, daß das eben genannte Eliminationstheorem schon eine ziemlich genaue Kenntnis der Theorie selbst voraussetzt (siehe § 35).

5. - Einteilung der algebraischen Flächen in Klassen.

Hinsichtlich der algebraischen Transformationen lassen sich die Flächen ebenso wie die algebraischen Mannigfaltigkeiten von beliebiger Dimension in Klassen einteilen; nach B. RIEMANN ([5]) sagt man, daß zwei Mannigfaltigkeiten derselben Klasse angehören, wenn man eine birationale Transformation zwischen ihnen aufstellen kann: Die Flächen derselben Klasse können ihrerseits durch die projektiven Charaktere (Ordnung, Dimension des Raumes, in welchem sie enthalten sind ...) unterschieden werden, aber sie haben die in bezug auf die birationalen Transformationen invarianten Eigenschaften miteinander gemein; ebendiese Eigenschaften bilden den Gegenstand der Theorie, welche uns hier beschäftigt und welche man *Geometrie auf der Fläche* nennt.

Vom Gesichtspunkt dieser Theorie aus kann man es als gleichgültig betrachten, welche Fläche der gegebenen Klasse man als ein *projektives*

([3]) ENRIQUES, R, I (Nr. 42).

([4]) CASTELNUOVO-ENRIQUES P, (Nr. 18). Über die Theorie der ausgezeichneten Kurven aus arithmetischen Gesichtspunkten s. H. W. E. JUNG, *Über die ausgezeichneten Kurven...*, « J. f. Math. », 142 (1912), p. 61 ff.

([5]) *Inauguraldissertation*, Göttingen 1851, § 20

Bild der Klasse nimmt; daher kann man aus der Betrachtung jedes spezielle Bild ausschließen, welches Komplikationen nach Art der Singularitäten (§ 3) usw. darbietet. Dies hat zur Folge, daß man, wenn man von einem *Punkte* einer Fläche spricht, im allgemeinen voraussetzen darf, daß es sich um einen einfachen Punkt handelt.

Ist eine Klasse von algebraischen Flächen gegeben, so kann man diese in *Unterklassen* einteilen, indem man in derselben Unterklasse die Flächen zusammenfaßt, zwischen denen man eine birationale Korrespondenz ohne (einfache) Fundamentalpunkte aufstellen kann, derat, daß in bezug auf diese Korrespondenz keine ausgezeichneten Kurven existieren, welche in Punkte verwandelt werden.

Nennt man die numerischen Charaktere oder die Funktionen, welche den Flächen einer und derselben Klasse gemeinsam angehören, *absolute Invarianten*, so kann man die Charaktere oder Funktionen, welche den Flächen einer und derselben Unterklasse gemeinsam angehören, *relative Invarianten* nennen; besitzt z. B. eine Fläche eine endliche Anzahl von ausgezeichneten Kurven, so ist diese Anzahl eine relative Invariante der Fläche.

6. - Lineare Systeme von Kurven auf einer Fläche.

Man nennt ein *System* $|C|$ *von Kurven* auf einer algebraischen Fläche F, welche einem gewöhnlichen Raum oder einem Hyperraum angehört, *linear*, wenn die Kurven C des Systems $|C|$ durch die Flächen oder die Mannigfaltigkeiten eines linearen Systems

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$$

ausgeschnitten werden.

Wenn die f eine und dieselbe feste Kurve von F enthalten, so kann man diese als Bestandteil der Kurven C betrachten oder nicht.

Die Kurven von $|C|$ können als *Niveaukurven* einer rationalen Funktion

$$f = \frac{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_r f_r}{f_0}$$

betrachtet werden (längs welcher f einen festen Wert annimmt), wobei f im allgemeinen für die Punkte der Fläche definiert ist und für irgendwelche Werte der Parameter λ eine und dieselbe Polkurve $f_0 = 0$ hat, welche $|C|$ angehört. Wenn alle Kurven C einen festen Bestandteil K

gemein haben, so ist K eine Kurve der *Unbestimmtheit oder der scheinbaren Diskontinuität* für f; in der Tat verschwinden für die Punkte von K der Zähler und Nenner von f gleichzeitig. Wenn in jedem Punkte von K f nach dem Gesetze der Kontinuität definiert wird, so daß die Unbestimmtheit aufgehoben wird, so entspricht diese Festsetzung der Abtrennung des festen Bestandteils K von allen Kurven C.

Wenn die Kurven C (außer eventuellen festen Bestandteilen) *Basispunkte* mit einander gemein haben, so sind diese Punkte *wesentliche Diskontinuitätspunkte* für die Funktion f.

Wenn die Fläche F keinen Teil einer Fläche (oder Mannigfaltigkeit) $f_i = 0$ bildet, was man immer voraussetzen darf, so ist die Dimension r des linearen Systems

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_r f_r = 0$$

zugleich die Dimension des Systems $|C|$, welches auf F ausgeschnitten wird. Dieses System erhält für $r = 1, 2$ den Namen *lineares Büschel* bzw. *Netz. Durch r Punkte allgemeiner Lage von F geht eine und nur eine Kurve des linearen Systems $|C|$ hindurch.*

Diese Eigenschaft genügt für $r > 1$ die linearen Kurvensysteme zu charakterisieren (6).

Anders verhält es sich für $r = 1$. Hat man auf einer Fläche ein Büschel von Kurven C, d. h. eine Schar von C derart, daß jeder Punkt der Fläche *einer* Kurve C angehört, so kann diese Schar rational sein oder irrational (wobei die C den Punkten einer Kurve vom Geschlecht > 0 zugeordnet werden können): nur in dem ersten Falle bildet die Schar ein lineares Büschel.

Die allgemeine Kurve eines linearen Systems $|C|$ kann irreduzibel oder reduzibel sein. Dementsprechend heißt auch $|C|$ irreduzibel oder reduzibel.

Die allgemeine Kurve eines reduzibelen linearen Systems von der Dimension r wird gebildet:

1) *entweder von einem festen Teil, welcher mit einer variablen Kurve verbunden ist, die ein irreduzibles lineares System der Dimension r durchläuft;*

2) *oder von $s \geqslant r$ Kurven, welche einem und demselben rationalen*

---

(6) ENRIQUES, *Una questione sulla linearità ...*, « Rend. Acc. Lincei », (s. 5) 2 (1893), 2. Semester, S. 3 [queste *Memorie*, vol. I, III]. Der Beweis des Theorems ist mit einigen Vereinfachungen von C. SEGRE wiedergegeben worden: *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, « Ann. di Mat. », (s. 2) 22 (1894), Nr. 27.

oder nicht rationalen Büschel angehören, zu denen noch feste Bestandteile hinzutreten können (7).

Betrachten wir ein lineares System $|C|$ in Beziehung zu birationalen Transformationen der Fläche F. Hat man eine birationale Transformation zwischen F und F', so wird das System $|C|$ in ein lineares System $|C'|$ von F' übergeführt. Allein man hat einige *Festsetzungen* hinsichtlich der Basispunkte und festen Bestandteile von $|C|$ genauer zu prüfen.

Einem Basispunkte von $|C|$ kann eine Fundamentalkurve K von F' entsprechen. Es steht uns frei, K als einen Bestandteil der Kurven C' zu betrachten oder von den C' abzutrennen; aber in dem ersten Falle wird einem irreduziblen System $|C|$ ein reduzibles transformiertes System entsprechen. Die Festsetzung, welche man trifft, muß der Bedingung genügen, daß der Definition des linearen Systems $|C|$ auf F ein invarianter Sinn gegeben wird. Demgemäß muß man unterscheiden:

1) Basispunkte von C, welche man als gegeben betrachtet mit einer ebenfalls gegebenen Multiplizität; es sind die Basispunkte von der Beschaffenheit, daß die entsprechenden Fundamentalkurven den transformierten der C nicht angehören;

2) Basispunkte, welche man als *virtuell nicht existierend* betrachtet; es sind diejenigen, deren entsprechende Fundamentalkurven als feste Bestandteile der Transformierten der C gezählt werden müssen;

3) endliche Basispunkte, welche man als *gegeben* betrachtet mit einer *virtuellen Multiplizität*, welche geringer ist als ihre *effektive Multiplizität* (8).

Diese Vereinbarung hat einen Sinn hinsichtlich der rationalen Funktionen der Punkte von F, von denen die Definition von $|C|$ abhängt. Wir beschränken uns der größeren Einfachheit halber auf die Fälle 1) und 2).

Ist eine Kurve C gegeben, so kann man sich die Aufgabe stellen, die rationalen Funktionen zu bilden, welche C als Polkurve haben, und welche außerdem gegebene wesentliche Diskontinuitätspunkte auf C besitzen; das so definierte lineare System wird in diesen Punkten gege-

(7) Vgl. NOETHER A und B. [Für die ebenen Kurvensysteme E. BERTINI, *Sui sistemi lineari...*, « Rend. Ist. Lombardo di sc. », (s. 2) 15 (1882), p. 24]. ENRIQUES R, Nr. 1; I, Nr. 5. Wenn ein irreduzibles r-fach unendliches lineares System $|C| \infty^{r-1}$ reduzible Kurven enthält, so besitzen diese im allgemeinen einen festen Bestandteil (welcher eine *Fundamentalkurve* von $|C|$ heißt). Die Bestimmung der Ausnahmefälle, welche sich für $r > 2$ darbieten können, führt auf das Theorem von KRONECKER-CASTELNUOVO [vgl. III C 6 a (CASTELNUOVO-ENRIQUES)].

(8) Siehe in betreff der linearen Systeme von ebenen Kurven G. JUNG, *Ricerche sui sistemi lineari di genere qualunque e sulla loro riduzione all'ordine minimo*, « Ann. di mat. », (s. 2) 15, p. 277 und 16, p. 291. G. CASTELNUOVO, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane*, « Mem. della R. Acc. d. sc. di Torino », (s. 2) 42 (1891), p. 3. Für die Systeme auf einer Fläche ENRIQUES I (Nr. 2) und F (Nr. 2); aus arithmetischem Gesichtspunkte H. W. E. JUNG T.

bene Basispunkte haben. Konstruiert man dagegen die rationalen Funktionen f, welche eine und dieselbe Polkurve C besitzen, ohne der Bedingung zu genügen, daß wesentliche Diskontinuitätspunkte von vornherein auf C gegeben sind, so hat man *im allgemeinen* ein lineares Kurvensystem, welches keine Basispunkte besitzt; aber es kann vorkommen, daß die sich ergebenden genannten Funktionen f eine gewisse Anzahl von wesentlichen Diskontinuitätspunkten miteinander gemein haben, die auf C als *virtuell nicht existierend* zu betrachten sind.

Wir beschränken uns für den Augenblick darauf, irreduzible lineare Systeme $|C|$ zu betrachten, für welche sämtliche Basispunkte (wenn solche existieren) als gegeben betrachtet werden müssen mit einer virtuellen Multiplizität, die ihrer effektiven Multiplizität gleich ist. Alsdann hat man die folgenden Charaktere zu betrachten:

1) die Dimension r von $|C|$;

2) das (effektive) Geschlecht π von $|C|$, d. h. das Geschlecht einer allgemeinen Kurve C;

3) den (effektiven) Grad n von $|C|$ d. h. die Anzahl der Schnittpunkte von zwei Kurven C außerhalb der Basispunkte (9).

Wenn $|C|$ Basispunkte hat, welche man als *virtuell nicht-existierend* betrachten will, oder deren *virtuelle Multiplizität kleiner* ist als ihre *effektive Multiplizität, so definiert man das virtuelle Geschlecht und den virtuellen Grad von* $|C|$, indem man diese in Rechnung setzt; so zählt z. B. ein i-facher, für $|C|$ virtuell nicht existierender Punkt für i^2 feste Schnittpunkte. Das virtuelle Geschlecht und der virtuelle Grad von $|C|$, berechnet unter der Voraussetzung, daß i-fache Basispunkte vorhanden sind, welche man als nicht existierend zu betrachten hat, sind gegeben durch

$$\pi + \sum \frac{i(i-1)}{2}, \qquad n + \sum i^2,$$

wo π und n das effektive Geschlecht und den effektiven Grad bezeichnen.

Die Definition des virtuellen Geschlechts und des virtuellen Grades ist auf diese Weise für ein irreduzibles System $|C|$ begründet, das auf F Basispunkte besitzt. Aber wenn man einen dieser Punkte in eine Kurve transformiert, so wird das transformierte System von $|C|$ (in Rücksicht auf die für die Basispunkte getroffene Festsetzung) reduzibel, indem es

(9) Man hat $n \geqslant r-1$, wobei das Minimum für die rationalen Flächen erreicht wird (siehe III C 9 (SEGRE)). Andererseits hat man $r \leqslant 3\pi + 5$, ausgenommen für die Regelflächen vom Geschlecht π und für $\pi = 1$, $r = 9$, (vgl. F. ENRIQUES, *Sulla massima dimensione dei sistemi lineari di curve di dato genere appartenenti ad una superficie algebrica*, « Atti Acc. Torino », 29 (1894), p. 275 [queste *Memorie*, vol. I, VI]). Der Fall $r = 3\pi + 5$ kann sich auch auf den rationalen Flächen darbieten (vgl. G. CASTELNUOVO, *Massima dimensione dei sistemi lineari di curve piane di dato genere*, « Ann. di mat. », (s. 2) 18 (1890), p. 119).

feste Bestandteile enthält. Auf diese Weise erhält man eine Definition des virtuellen Geschlechts und des virtuellen Grades für ein reduzibles lineares System, welches feste ausgezeichnete Bestandteile enthält.

Man kann diese Definitionen auf den Fall eines beliebigen reduziblen Systems ausdehnen.

Das (virtuelle) Geschlecht einer reduziblen Kurve (RIEMANNschen Fläche) kann nach der Formel

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1$$

berechnet werden, wo π_1 und π_2 die Geschlechter von zwei Komponenten bezeichnen, welche i Punkte gemein haben ([10]); hieraus ergibt sich die allgemeine Definition des *virtuellen Geschlechts* eines linearen Systems $|C|$.

Man definiert den virtuellen Grad eines reduzibeln linearen Systems $|C|$, welches auf F durch

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_r f_r = 0$$

ausgeschnitten wird, indem man die Äquivalenz ([11]) der festen Kurven berücksichtigt, welche einen Bestandteil der C ausmachen und welche Basiskurven für das System der (Flächen oder Mannigfaltigkeiten) f sind. Bei den Operationen der Addition und Subtraktion von linearen Systemen auf F und in den Formeln, welche die Charaktere der Systeme verknüpfen, die durch jene Operationen erzeugt sind (siehe § 9), ersetzen das virtuelle Geschlecht und der virtuellen Grad die effektiven Charaktere der irreduziblen Systeme; auf diese Weise hat man die einfachste Definition dieser virtuellen Charaktere nach dem Prinzip der Permanenz ([12]).

7. - Transformation einer Fläche in Beziehung auf gegebene lineare Systeme ([13]).

Ist auf F ein irreduzibles lineares System $|C|$ von der Dimension $r > 2$ und dem Grad n gegeben, so kann man F in eine Fläche F_n von

---

([10]) M. NOETHER, *Über die reduktiblen algebraischen Kurven*, « Acta Math. », 8 (1886), p. 161 (wo aber statt π das numerische Geschlecht $p = \pi - i$ benutzt wird). ENRIQUES, I (Nr. 16). E. PICARD, *Sur les systèmes linéaires de lignes tracées sur une surface algébrique*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », 13, p. 344. PICARD-SIMART 2, p. 105. H. W. E. JUNG T.

([11]) Nach SALMON, CAYLEY, NOETHER, siehe Art. III C 6 a (CASTELNUOVO-ENRIQUES), § 9.

([12]) ENRIQUES I, Nr. 17.

([13]) Die Transformationen, welche wir hier betrachten, finden sich bei M. NOETHER A und B; für die Systeme von ebenen Kurven siehe E. CAPORALI, *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve piane algebriche*, « Collectanea in memoriam Dominici Chelini », Milano, 1881. *Memorie di Geometria*, Napoli (1886). ENRIQUES R und I.

der Ordnung n in einem Raum S_r derart transformieren, daß die Transformierten der Kurven C die ebenen Schnitte ($r = 3$) oder hyperebenen Schnitte ($r > 3$) von F_n werden; man sagt, daß F_n ein projektives Bild des Systems $|C|$ liefert.

Die Fläche F_n reduziert sich auf eine *mehrfache* Fläche (von der Ordnung n/s, welche s-fach zu zählen ist), wenn das System $|C|$ einer Involution J_s von der Ordnung s (> 1) angehört, und zwar derart, daß jeder Punkt A von F einer Gruppe von s Punkte angehört (den konjugierten von A in bezug auf J_s) und jede Kurve C, welche durch A hindurchgeht, ebenfalls diese konjugierten Punkte enthält.

Wenn das System $|C|$ ein Netz ist ($r = 2$), so erhält man die Abbildung der gegebenen Fläche auf eine *mehrfache Ebene von der Ordnung n.*

Jedem Punkte der Ebene entsprechen in allgemeinen n verschiedene Punkte der Fläche; aber es tritt in der Ebene eine *Übergangskurve* auf, welche Ort der Punkte ist, denen je zwei zusammenfallende Punkte entsprechen.

Sind auf F zwei irreduzible lineare Systeme $|C_1|$ und $|C_2|$ gegeben von den Graden n_1 bzw. n_2 (für welche die Summe $r = r_1 + r_2$ der Dimensionen von $|C_1|$ und $|C_2|$ größer als 2 ist), so kann F in eine Fläche F_m von S_r derart transformiert werden, daß die Transformierten der C_1 und C_2 auf F_m bzw. durch die Ebenen oder die Hyperebenen ausgeschnitten werden, welche durch einen gewissen S_{r_2-1} und durch einen S_{r_1-1} hindurchgehen; F_m reduziert sich auf eine *mehrfache* Fläche, wenn $|C_1|$ und $|C_2|$ einer und derselben Involution auf F angehören. Die Ordnung von F_m ist im allgemeinen

$$m = n_1 + n_2 + 2i\,,$$

wo i die Anzahl der Schnittpunkte einer C_1 mit einer C_2 bezeichnet. Die Kurven C von F, welche Bilder der ebenen Schnitte von F_m sind, bilden das *kleinste lineare System, welches die zusammengesetzten Kurven $C_1 + C_2$ enthält* (vgl. § 9).

Zu beachten ist der Spezialfall, in welchem $|C_1|$ ein Büschel und $|C_2|$ ein Netz bilden (das nicht einer und derselben Involution angehört); man kann alsdann F in eine Fläche des gewöhnlichen Raumes transformieren, auf welcher $|C_1|$ durch die Ebenen eines Büschels und $|C_2|$ durch die Ebenen eines Bündels ausgeschnitten ist. Projiziert man die Fläche vom Zentrum des Bündels aus auf eine Ebene, welche nicht durch das Zentrum des Bündels hindurchgeht, so wird man auf eine mehrfache Ebene der Ordnung n_2 geführt.

Man kann analoge Transformationen in bezug auf drei oder mehrere gegebene lineare Systeme auf F aufstellen. Sind daher drei Büschel

$|C_1|$, $|C_2|$, $|C_3|$ gegeben, so kann man im allgemeinen voraussetzen, daß die Fläche derart transformiert ist, daß $|C_1|$, $|C_2|$ und $|C_3|$ durch drei Ebenenbüschel ausgeschnitten sind.

8. - Vollständige lineare Systeme.

Sind auf F zwei lineare Systeme $|C|$ und $|\bar{C}|$ gegeben, von welchen $|\bar{C}|\,|C|$ enthält, so sagt man, daß $|C|$ in $|\bar{C}|$ *gänzlich* enthalten ist, wenn eine allgemeine Kurve C für sich allein eine Kurve von $|\bar{C}|$ bildet, ohne daß man zu ihr andere Kurven hinzuzufügen braucht, und wenn außerdem jeder für $|C|$ gegebene Basispunkt ein gegebener Basispunkt derselben Ordnung für $|\bar{C}|$ ist. Die Tatsache, daß $|C|$ *gänzlich* in $|\bar{C}|$ enthalten ist, ergibt sich so derart begründet, daß sie absolute Invarianz genießt.

Man sagt, daß ein lineares System $|C|$ vollständig ist, wenn es nicht *gänzlich* in einem linearen System höherer Dimension enthalten ist ([14]).

Man hat das Theorem: *Jedes lineare System der Dimension $r \geqslant 0$, welches auf F gegeben ist, ist vollständig, oder es ist gänzlich in einem wohl definierten vollständigem linearen System enthalten* ([15]). Ist $r = 0$, d. h. geht man von einer gegebenen Kurve aus, so muß man auf dieser die Basispunkte des linearen Systems, welches man als gegeben voraussetzt, fixieren. In dem Fall der irreduziblen Systeme von der Dimension $\geqslant 3$, kann das voraufgehende Theorem in der folgenden Form ausgesprochen werden (vgl. § 7):

Jede Fläche der Ordnung n eines gewöhnlichen Raumes oder eines Hyperraumes ist normal, oder sie ist die Projektion einer projektiv bestimmten Normalfläche derselben Ordnung, welche einem höheren Raume angehört ([16]).

([14]) Für die irreduziblen Systeme kommt dies darauf zurück zu sagen, daß $|C|$ nicht in einem umfassenderen System desselben Grades enthalten ist, d. h. daß es vollständig ist in bezug auf den Grad. F. ENRIQUES hat diesen Begriff und auch denjenigen der in bezug auf das Geschlecht vollständigen Systeme eingeführt, welchen man erhält, wenn man von den einfachen Basispunkten absieht. Die allgemeine Definition des Textes für die irreduziblen oder nicht-irreduziblen Systeme findet man bei C. SEGRE, *Introduzione ...*, a. a. O. und bei ENRIQUES I, wo im einzelnen die Annahmen untersucht sind, welche es sich empfiehlt, hinsichtlich der Basispunkte aufzustellen. Siehe ENRIQUES F.

([15]) ENRIQUES R (Nr. 2) I (Nr. 9) und ENRIQUES F (Nr. 3). Der Beweis, welchen das Theorem in dieser letzten Note erhält, ist der allgemeinste und unmittelbarste.

([16]) In dieser Form ist das Theorem zuerst von C. SEGRE aufgestellt worden. *Ricerche sulle rigate ellittiche ...*, « Atti della R. Accad. di sc. Torino », 21 (1886), p. 868; *Recherches générales sur les courbes et les surfaces reglées algébriques*, 2. Teil Nr. 3, « Math. Ann. », 30 (1887), p. 203. Die Betrachtung der Normalflächen, aus welchen man durch Projektion die Flächen des gewöhnlichen Raumes ableitet, findet man in den voraufgehenden Arbeiten von VERONESE, SEGRE, siehe III C 9 (SEGRE).

(Man nennt eine Fläche *normal*, wenn sie nicht als Projektion einer Fläche derselben Ordnung aufgefaßt werden kann, die einem höheren Raume angehört).

9. - Summe und Differenz der linearen Systeme.

Sind auf F zwei lineare Systeme von Kurven $|C_1|$ und $|C_2|$ gegeben, so gehören die zusammengesetzten Kurven $C_1 + C_2$ zu einem und demselben kleinsten linearen System (vgl. § 7), welches man vollständig machen kann; dieses vollständige System $|C| = |C_1 + C_2|$ erhält den Namen *Summe* von zwei gegebenen Systemen ([17]). Speziell kann man von einem *doppelten*, *dreifachen*, ... *System* eines gegebenen Systems sprechen.

Bezeichnet man mit π_1 und π_2 die Geschlechter sowie mit n_1 und n_2 die Gradzahlen von $|C_1|$ und $|C_2|$ und mit i die Anzahl der Schnittpunkte einer C_1 mit einer C_2, so werden das Geschlecht und der Grad von $|C| = |C_1 + C_2|$ durch die folgenden Formeln ausgedrückt:

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1 ,$$

$$n = n_1 + n_2 + 2i .$$

Gehen wir jetzt von dem System $|C|$ aus, und ist C_1 eine Kurve, welche *teilweise* in $|C|$ eingeht, so bilden die Kurven C_2, welche mit C_1 verbunden eine Totalkurve von $|C|$ geben, ein vollständinges lineares System $|C_2|$, das *residual zu* $|C_1|$ *in bezug auf* $|C|$ ist. Wenn also unsere C_1 einem vollständigen System $|C_1|$ der Dimension > 0 angehört, so zeigt man, daß $|C_2|$ außer zu der Ausgangskurve auch zu jeder anderen Kurve von $|C_1|$ (in bezug auf $|C|$) residual ist; auf diese Weise kann man

$$|C_2| = |C - C_1|$$

als ein *Residualsystem zu* $|C_1|$ *in bezug auf* $|C|$ betrachten. Man hat daher das Theorem ([18]).

([17]) ENRIQUES R (Nr. 4), I (Nr. 10, 12) und ENRIQUES F (Nr. 6). Das System, welches sich als Summe zweier irreduziblen linearen Systeme ergibt, ist irreduzibel, ausgenommen den Fall, in welchem es sich um das mehrfache System eines Büschels (vom virtuellen Grad = effektiven Grad = 0) handelt.

([18]) Vgl. ENRIQUES R (Nr. 3), I (Nr. 13) und F (Nr. 7). H. W. E. JUNG T., p. 82 wo die zwei Operationen Multiplikation und Division (von Klassen) genannt sind.

Sind auf F zwei vollständige lineare Systeme $|C|$ und $|C_1|$ gegeben, und enthält das erste teilweise eine Kurve des zweiten, so enthält es auch jede andere Kurve dieses Systems; man hat alsdann ein völlig bestimmtes vollständiges System $|C_2|$ von der Beschaffenheit, daß

$$|C| = |C_1 + C_2|$$

ist. Jedes von zwei Systemen $|C_1|$ und $|C_2|$ ist residual zu dem anderen in bezug auf $|C|$.

10. - Adjungierte und subadjungierte Flächen.

Sei F_n eine Fläche einer gewissen Ordnung n im gewöhnlichen Raume und setzen wir voraus ($n > 3$), daß auf F_n keine anderen Singularitäten vorhanden sind als eine Doppelkurve mit dreifachen Punkten, welche auch für die Fläche dreifach sind. Dann kann man fragen, wie man auf F die vollständigen linearen Systeme konstruiert und folglich die elementaren Operationen der Addition und Subtraktion ausführt. Zu diesem Zweck empfiehlt es sich, den Begriff der zu F_n adjungierten Flächen zu bilden. Man nennt *adjungiert* zu F_n jede Fläche φ, welche (einfach) durch die Doppelkurve von F_n hindurchgeht. Sondert man diese Kurve von dem Durchschnitt von F_n mit φ ab, so hat man: *die adjungierten Flächen zu F_n, von einer vorgegebenen Ordnung, schneiden auf F_n ein vollständiges lineares System aus.*

Hieraus ergibt sich, daß, wenn auf F_n eine Kurve C_1 gegeben ist, das vollständige System $|C_1|$ auf folgende Weise konstruiert werden kann: man betrachtet eine adjungierte Fläche φ_m einer genügend großen Ordnung m, welche durch C_1 hindurchgeht und außerdem F_n (außer in der Doppelkurve) nach einer Kurve C_2 schneidet; das vollständige System $|C_1|$ wird durch die φ_m ausgeschnitten, welche durch C_2 hindurchgehen. Alsdann hängt *das System $|C_1|$, zu welchem man gelangt, weder von der Ordnung m der verwendeten Flächen φ_m, noch von der Wahl der Fläche φ_m ab, die man zuerst durch die Kurve C_1 hindurchgelegt hat.*

Diese Aussage bringt den *Restsatz* von M. NOETHER [19] zum Ausdruck; M. NOETHER begründete ihn (ohne den Begriff des vollständigen

---

[19] NOETHER B. Aus den vorhergehenden Betrachtungen resultiert, daß der Restsatz sich aus zwei verschiedenen Teilen zusammensetzt, d. h. der Relation zwischen zwei Residualsystemen (§ 9) und aus der Eigenschaft der adjungierten Flächen vollständige Systeme auszuschneiden; dieser letzte Satz gehört nicht eigentlich der Geometrie auf der Fläche an, aber er drückt eine Beziehung der Fläche zu dem Raume aus, der sie enthält. S. ENRIQUES I (Nr. 13, 35). CASTELNUOVO-ENRIQUES R (Nr. 12).

Kurvensystems in der obigen Weise zu präzisieren), indem er sich auf das folgende Theorem stützte: geht eine Fläche $\psi = 0$ durch den Durchschnitt von zwei Flächen $f = 0$ und $\varphi = 0$ hindurch, und zwar derart, daß jede Kurve mit den Multiplizitäten i und k für f und φ die Multiplizität $i + k - 1$ für ψ aufweist, so hat man eine Identität

$$\psi = af + b\varphi ,$$

wo a und b in den Koordinaten passend gewählte Polynome sind ([20]).

Man kann die voraufgehenden Resultate verallgemeinern durch Betrachtung einer Fläche F_n mit beliebigen *höheren Singularitäten.* In diesem Falle genügt es an Stelle der φ_m die Flächen zu betrachten, (welche $(i-1)$-fach durch jede mehrfache *Kurve* der Multiplizität i hindurchgehen und) welche auf jeder Ebene allgemeiner Lage eine zu dem Schnitt von F_n adjungierte Kurve ausschneiden ([21]). Es ist sogar erlaubt, den so definierten Flächen in bezug auf die mehrfachen isolierten Punkte oder in bezug auf die mehrfachen Punkte höherer Ordnung, welche der mehrfachen Kurve von F_n angehören, Bedingungen aufzuerlegen. Daher empfiehlt es sich, auf die Entwicklungen Rücksicht zu nehmen, die wir später geben werden.

Handelt es sich lediglich um gewöhnliche mehrfache Punkte, so gibt man im allgemeinen den Namen *subadjungierte* Flächen denjenigen, welche den angegebenen Bedingungen in bezug auf die mehrfachen Kurven von F_n genügen, und man reserviert den Namen *adjungierte* Flächen für diejenigen, welche außerdem $(i - 2)$*mal* durch jeden i-fachen isolierten *Punkt* von F_n hindurchgehen ([22]).

II. - DIE THEORIE DER INVARIANTEN

11. - Invariantentheorie nach M. Noether.

Die Charaktere und die Funktionen (Systeme von Kurven), welche Invarianten für eine gegebene Fläche bilden, sind von M. Noether ([23]) auf die folgende Weise bestimmt.

([20]) Für die Bibliographie, welche diese Frage betrifft, siehe (I B 1 c (Landsberg) §§ 18, 20, 21), (III C 4 (Berzolari) § 23).

([21]) Vgl. Enriques I (Nr. 17).

([22]) Man ersieht daraus § 11), wie man die adjungierten Flächen in bezug auf die außergewöhnlichen mehrfachen Punkte zu definieren hat.

([23]) M. Noether A und B.

Ist F_n *eine Fläche* der *Ordnung* n *mit gewöhnlichen Singularitäten im Raume von drei Dimensionen und betrachtet man die Flächen* φ_{n-4} *der Ordnung* $n-4$, *welche zu* F_n *adjungiert sind, so führt jede birationale*$_{xx}$. *Transformation, welche* F_n *in eine Fläche* F_m^* *von der Ordnung* m *verwandelt, das System der Kurven* K, *welches auf* F_n *durch die* φ_{n-4} *ausgeschnitten wird, in das System* $|K^*|$ *über, das auf der Fläche* F_m^* *durch ihre adjungierten* φ_{m-4}^* *von der Ordnung* $m-4$ *ausgeschnitten wird* ([24]).

Man beachte, daß jede ausgezeichnete Kurve von F_n (oder von F_m^*) einen Bestandteil der festen Kurve von $|K|$ (bzw. von $|K^*|$) bildet (siehe § 4). Wenn eine solche Kurve für die Transformation fundamental ist, so wird sie durch einen Punkt ersetzt, welcher im allgemeinen auf F_m^* beliebig liegt; in speziellen Fällen kann man auch *besondere ausgezeichnete Kurven* haben, welche in einfache Punkte transformiert werden, die den φ_{m-4}^* gemeinsam angehören ([25]).

Man definiert das *kanonische System* auf der Fläche F_n, indem man von $|K|$ die ausgezeichneten Kurven absondert, abgesehen von den besonderen ausgezeichneten Kurven (welche Basispunkten entsprechen, die man als virtuell nicht existierend zu betrachten hat). Auf Grund dieser Definition genießt das kanonische System *absolute Invarianz.* Geht man von einer Fläche F_n ohne ausgezeichnete Kurven aus, so wird das kanonische System gänzlich (außer der Doppelkurve) durch die adjungierten φ_{n-4} ausgeschnitten. Es ist im allgemeinen irreduzibel; aber seine Kurven können auch aus Kurven eines Büschels bestehen (Kurven, welche elliptisch sind, wenn keine Basispunkte vorhanden sind ([26])) oder sogar einen festen Bestandteil enthalten ([27]).

Die Charaktere des kanonischen Systems $|K|$ unserer Fläche liefern folgende Invarianten:

1) das geometrische Flächengeschlecht p_g, d. h. die Dimension von $|K|$ vermehrt um eine Einheit;

2) das lineare Geschlecht (Kurvengeschlecht) $p^{(1)}$, d. h. das virtuelle Geschlecht von $|K|$;

([24]) Dieses fundamentale Resultat, das von A. Clebsch, « Paris C. R. de l'Accad. des sc. », 67 (1868), p. 1238 ausgesprochen worden ist, hat einen algebraischen Beweis durch M. Noether A und B erhalten. Einen geometrischen Beweis hat Enriques R gegeben. Endlich resultiert ein viel einfacherer indirekter Beweis aus den Entwicklungen von § 13.

In betreff der Rolle, welche die Polynome φ_{n-4} für die Bildung der Doppelintegrale erster Gattung spielen, die mit F_n verknüpft sind, siehe § 23.

([25]) Castelnuovo-Enriques R, Nr. 22, 23, 24.

([26]) Noether B, Castelnuovo und Enriques R, Nr. 23, 24.

([27]) Castelnuovo-Enriques R, Nr. 23. Enriques, *Le superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)}=2, 3$, « Rendic. R. Accad. Lincei », (s. 5) 6 (1897) [queste *Memorie*, vol. I, xix, xx] erstes Semester, p. 139, 169.

3) den virtuellen Grad von $|K|$

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1 \text{ (}^{28}\text{)};$$

4) die Zahl p_a: um das Flächengeschlecht auszurechnen, kann man die Anzahl der linear unabhängigen adjungierten φ_{n-4} berechnen, indem man für den Wert $n-4$ die Postulationsformeln (III C 6a (CASTELNUOVO-ENRIQUES) § 9) als gültig voraussetzt. Nehmen wir an, die Fläche F_n besitze lediglich eine Doppelkurve D von einer gewissen Ordnung d und vom Geschlecht π mit $t(\geqslant 0)$ dreifachen Punkten, welche auch für D dreifach sind. Alsdann ergibt sich der Ausdruck

$$p_a = \tfrac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) - (n-4)d + 2t + \pi - 1\,,$$

welcher in den von M. NOETHER angegebenen Beispielen gleich p_g resultiert, abgesehen von dem Falle der irrationalen Regelflächen, in welchem man nach CAYLEY [29] hat:

$$p_a < 0\,.$$

In jedem Falle bildet die Zahl p_a eine *neue Invariante* von F_n [30], welche man das *numerische oder arithmetische Geschlecht der Fläche* nennt.

Hierauf hat man geschlossen, daß stets $p_a \leqslant p_g$ ist (§ 13), und man hat andere (*irreguläre*) Flächen gefunden, welche nicht der Familie der Regelflächen angehören und für die $p_a < p_g$ ist; endlich hat man die Klasse der irregulären Flächen ($p_a < p_g$) vollständig bestimmt, und zwar sowohl vom algebraisch-geometrischen als auch vom transzendenten Gesichtspunkte aus (§ 17 und 27) [31].

---

[28] NOETHER B. Für den Fall der Reduzibilität besteht diese Beziehung immer, vorausgesetzt daß man sie auf die virtuellen Charaktere von $|K|$ bezieht (vgl. § 6).

[29] *On the Deficiency of certain surfaces*, « Math. Ann. », 3 (1871), p. 526.

[30] H. G. ZEUTHEN, *Études géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces, dont les points se correspondent un-à-un*, « Math. Ann. », 4 (1871), p. 21. NOETHER B. Ein neuer Beweis der Invarianz von p_a (unabhängig von allen Beschränkungen hinsichtlich der Singularitäten von F_n) resultiert aus § 13.

[31] Wenn die Fläche F_n mehrfache singuläre Punkte besitzt, so bestimmt man die zu F_n adjungierten φ_{n-4} derart, daß das Theorem der Invarianz des kanonischen Systems immer als befriedigt resultiert (man wird demzufolge die adjungierten Flächen der Ordnung $\gtrless n-4$ durch dasselbe Verhalten bestimmen). Es genügt zu diesem Zweck eine endliche Anzahl von Transformationen von F_n derart anzuwenden, daß die gegebene Singularität aufgelöst wird. Diese Prozeß ist von M. NOETHER angewandt worden, « Gött. Nachr. », 1871, p. 267, (vgl. CASTELNUOVO P, Nr. 16). Er entspricht übrigens der transzendenten Definition, welche man von den φ_{n-4} durch die Bedingung geben kann, daß das Doppelintegral $\iint(\varphi\,dx\,dy)/f'_z$ endlich bleibt, in der Nachbarschaft des singulären Punktes. Siehe PICARD-SIMART 1, p. 189.

Ein indirekter Weg, um ausnahmslos die adjungierten Flächen zu bestimmen, ergibt sich aus der Definition der Kurven, welche sie auf F ausschneiden, wie ENRIQUES I entwickelt hat (s. diesen Artikel § 13). Der Fall, in welchem die Singularität eines mehrfachen Punktes durch den Schnitt einer Ebene allgemeiner Lage bestimmt ist, die durch den Punkt hindurchgeht, gibt zu einer sehr einfachen Aussage Veranlassung (ENRIQUES R, (II, 1)).

Bemerkung. – Die Charaktere p_a oder p_g und $p^{(1)}$ einer Fläche sind voneinander unabhängig. So kann sein $p^{(1)} = 1$ und p_g beliebig; alsdann sind die kanonischen Kurven aus elliptischen Kurven eines Büschels zusammengesetzt. Setzt man dagegen voraus, daß das kanonische System irreduzibel ist, so hat man nach NOETHER (31')

$$p^{(1)} \geqslant 2p_g - 3;$$

andererseits findet man in jedem Falle nach A. ROSENBLATT (31'')

$$p^{(1)} \leqslant 16p_a + 27 .$$

Wenn das Minimum von $p^{(1)}$ *erreicht wird, so sind die kanonischen Kurven hyperelliptisch* (*und vice versa*); *sie schneiden einander paarweise in* — $(p^{(1)} - 1)/2 = p_g - 2$ *Paaren Ronjugierter Punkte*; wenn daher $p_g > 2$ ist, so kann man die Fläche in eine andere Fläche transformieren, die eine Gleichung der folgenden Form hat:

$$z^2 = f(x, y) \ (^{31'}) .$$

Die kanonischen Kurven, welche durch einen Punkt hindurchgehen, gehen dann notwendig durch einen weiteren konjugierten Punkt hindurch. Diese Eigenschaft gehört allgemein den Flächen an, deren Gleichung sich auf die Form

$$z^2 = f(x, y) ,$$

bringen läßt (*Doppelebenen*); unter diesen kann man diejenigen charakterisieren, für welche die kanonischen Kurven hyperelliptisch sind; das ist der Fall, wenn das Polynom f auf den Grad 6 hinsichtlich x oder auf den Grad 8 oder 10 hinsichtlich beider Variablen x, y reduziert werden kann (32).

Es gibt andere Fälle, in welchen die kanonischen Kurven, welche durch einen Punkt hindurchgehen, notwendig einen weiteren Punkt enthalten; so z. B. wenn die Fläche ein Büschel hyperelliptischer Kurven

(31') NOETHER B.

(31'') *Sur quelques inégalités dans la théorie des surfaces algébriques,* « Paris C. R. de l'Accad. des sc, », 254, p. 1494, Januar 1912. *Sur certaines classes de surfaces algébriques irrégulières ...,* « Bull. de l'Accad. des sc. de Cracovie », Juli 1912.

(32) ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche,* « Rendic. Accad. Lincei », (s. 5) 5, 1896, p. 191 [queste *Memorie,* vol. I, XIV].

enthält (33) oder, wenn sie die Paare von Punkten einer Kurve vom Geschlecht 3 darstellt (34). Im allgemeinen jedoch, für $p_g > 3$, $p^{(1)} > 2p_g - 3$, gehen die (irreduziblen) kanonischen Kurven, welche durch einen Punkt hindurchgehen, nicht notwendig durch weitere Punkte der Fläche hindurch; alsdann hat man $p^{(1)} \geqslant 3p_g - 6$ (35). Man kann dann die Fläche in eine (kanonische) Fläche Φ im Raum von $p_g - 1$ Dimensionen transformieren, deren ebene oder hyperebene Schnitte die kanonischen Kurven sind.

Die kanonische Fläche spielt in der Theorie der Flächen die gleiche Rolle wie die kanonische Kurve in der Theorie der Kurven (III C 4 (Berzolari) (319); III C 9 (Segre)). Alle invarianten Eigenschaften hinsichtlich birationaler Transformationen gehen in projektive Eigenschaften der kanonischen Fläche über (36).

12. - Zu einem linearen System adjungierte Kurven.

Die Invarianz des kanonischen Systems $|K|$, welches auf F_n durch die adjungierten Flächen φ_{n-4} ausgeschnitten wird, kann auch auf folgendem Wege erfaßt werden:

Bezeichnet man mit C die ebenen Schnitte von F_n, so erscheint das System $|K|$ zunächst nur als ein *kovariantes System von* $|C|$ in derselben Hinsicht wie die Systeme, welche auf F_n durch die adjungierten Flächen von der Ordnung $m = n - 3$, $n - 2, \ldots$ (oder $= n - 5$, $n - 6, \ldots$) ausgeschnitten werden, nämlich bezüglich der Adjunktion. Das Theorem der Invarianz sagt dann aus, daß unter den kovarianten Systemen der betrachteten Schar eines vorhanden ist (es entspricht dem Fall $m = n - 4$), welches nicht von der Wahl des Systems $|C|$ abhängt, von welchem man bei seiner Konstruktion ausgeht.

(33) Vgl. L. Godeaux, *Sur les surfaces algébriques dont les courbes canoniques sont elliptiques doubles*, « Math. Ann. », 72 (1912), p. 426. Addition ibid. 74 (1913), p. 309. *Sur les surfaces contenant un faisceau irrationnel de courbes hyperelliptiques* ..., « Sitzungsb. der böhm. Ges. der Wiss. », 1913 und « Revista Acad. », Madrid, 1913. A. Rosenblatt, *Sur les surfaces irrégulières dont les genres satisfont à l'inégalité* $p_g \geqslant 2(p_a + 2)$, « Rend. Circ. Mat. Palermo », 35 (1913), p. 237. *Sur les surfaces algébriques qui possèdent un faisceau irrationnel de courbes de genre deux*, « Prac. Mat. Fisic. », 26 (1913), p. 1.

(34) Vgl. G. Humbert, *Sur une surface du sixième ordre...*, « Paris C. R. de l'Accad. des sc. », 120 (1895), p. 365, 425.

(35) Und man kann auch den Fall $p^{(1)} = 3p_g - 6$ charakterisieren. G. Castelnuovo, *Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie*, « Rend. Istituto Lombardo », (s. 2) 24, p. 307.

(36) In den Ausnahmefällen $p_g = 1, 2, 3$, oder in denjenigen Fällen, in welchen die kanonische Fläche sich auf eine mehrfache Fläche reduziert, hat man vorausgesetzt daß $p^{(1)} > 1$ ist, Veranlassung, die kanonische Fläche durch andere (bikanonische usw.) Flächen zu ersetzen, welche eine analoge Eigenschaft besitzen, s. § 13 und 46.

Diese Bemerkung führt zu einer allgemeinen Untersuchung der zu einem gegebenen linearen System kovarianten Systeme, einer Untersuchung, aus der man eine allgemeine Invariantentheorie einer Fläche herleiten kann (§ 13).

Unter den Systemen, welche auf F_n durch die adjungierten φ_m ausgeschnitten werden, hat man zuerst das System $|C'|$ betrachtet, welches durch die φ_{n-3} ausgeschnitten wird; man nennt dieses das zum System $|C|$ der ebenen Schnitte adjungierte System.

Auf die Betrachtung des adjungierten Systems wird man auch durch die Theorie der linearen Systeme der ebenen Kurven geführt.

Ist in der Ebene ein lineares System von Kurven C der Ordnung m gegeben, so kann man die Kurven C' der Ordnung $m - 3$ betrachten, welche zu den C adjungiert sind, d. h. die Kurven, welche $(i - 1)$-mal durch jeden Basispunkt der Ordnung i von C (III C 4 (Berzolari) § 36) hindurchgehen. Das System $|C'|$ ist ein invariantes System von $|C|$ in bezug auf die birationalen (Cremonaschen) Transformationen der Ebene ([37]), wenigstens wenn man geeignete Festsetzungen hinsichtlich der ausgezeichneten Fundamentalkurven macht. Man betrachtet nun eine rationale Fläche F_n (von der Ordnung n gleich dem Grad von $|C|$) als derart auf die Ebene abgebildet, daß den ebenen Schnitten von F_n die (als irreduzible vorausgesetzten) Kurven C entsprechen. Die zu $|C|$ adjungierten Kurven C' werden auf F durch die adjungierten Flächen der Ordnung $n - 3$ ausgeschnitten ([38]).

Nunmehr handelt es sich darum, das invariable Band zwischen den adjungierten Kurven C' und dem auf der Fläche F gegebenen System $|C|$ zu bestimmen.

Hierauf gelangt man auf die einfachste und allgemeinste Weise durch die Betrachtung der Jacobi*schen Kurven.*

([37]) M. Noether, *Rationale Ausführung der Operationen,* vgl. ([31']) « Math. Ann. », 23 (1883). Die Betrachtung der sukzessiven adjungierten Systeme gibt Veranlassung zu einer sehr fruchtbaren Methode, zuerst verwendet in der Note von A. Brill und M. Noether, *Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie,* « Gött. Nachr. », 1873, p. 116, dann von S. Kantor angewandt für das Studium der zyklischen Transformationen der Ebene, *Sur une théorie des courbes et des surfaces admettant des correspondances univoques,* « Paris C. R. », 100 (1885), p. 343. Darauf hat G. Castelnuovo (1891) aus derselben Methode Nutzen gezogen für das Studium der linearen Systeme von ebenen Kurven (*Ricerche generali ...,* zitiert in § 8). F. Enriques hat sich dieser Methode bedient, um die kontinuierlichen Gruppen von birationalen Transformationen der Ebene zu bestimmen. S. « Rend. Acc. Lincei », (s. 5) 2, 1. Sem. (1893), p. 468 [queste *Memorie,* vol. I, I].

([38]) Enriques R. (III 5). G. Humbert, *Sur la théorie générale des surfaces unicursales,* « Math. Ann. », 45, p. 428. Die Flächen der Ordnung $n - 3$, welche den Flächen mit ebenenhyperelliptischen Schnitten oder vom Geschlecht 3 unteradjungiert sind, sind betrachtet worden von G. Castelnuovo, « Rendic. Circolo Mat. Palermo », 4 (1890), p. 73 und « Atti Acc. sc. Torino », 25 (1891), p. 695.

Betrachten wir ein beliebiges Netz von Kurven C, welches in einem linearen System $|C|$ enthalten ist; dann wird es eine Kurve C_j geben, welche der Ort der Doppelpunkte für die C des Netzes ist: d. i. die JACOBIsche Kurve des Netzes. Wenn also die Dimension r von $|C|>2$ ist, so gibt es in $|C|$ ∞^{3r-6} Netze, und ihre JACOBIschen Kurven gehören einem und demselben vollständigen linearen System $|C_j|$ an, welches man als das *Jacobische System* von C definiert. Das adjungierte System $|C'|$ ist alsdann definiert durch die Gleichung

$$|C'|=|C_j-2C| \; (^{39}) .$$

Jeder Basispunkt von $|C|$ mit der Multiplizität i hat für $|C'|$ die Multiplizität $i-1$.

Aus der gegebenen Definition folgt, daß jede zu einem irreduziblen linearen System $|C|$ von der Dimension $r \geqslant 2$ adjungierte Kurve C' die folgenden Eigenschaften hat;

1) C' schneidet auf der allgemeinen Kurve C eine kanonische Gruppe aus;

2) wenn K eine *Fundamentalkurve* für $|C|$ ist (derart, daß $|C-K|$ ∞^{r-1} ist), so schneidet C' auf der allgemeinen Kurve von $|C-K|$ eine Gruppe aus, welche der Summenschar aus der kanonischen Schar und der durch K ausgeschnittenen Gruppe angehört [40].

Die Operation, welche aus einem System $|C|$ sein adjungiertes System $|C'|$ hervorgehen läßt, hat eine *fundamentale Eigenschaft*; wir wollen diese Eigenschaft aussprechen, indem wir uns auf den einfachsten Fall beziehen in welchem es sich um Systeme handelt, die keine Basispunkte besitzen:

Sind $|C|$ *und* $|L|$ *zwei lineare Systeme ohne Basispunkte auf der*

---

[39] ENRIQUES F. Eine Modifikation dieses Verfahrens besteht darin, $|C'|$ zu bestimmen, indem man von der JACOBIschen Kurve zweier Büschel ausgeht, welche in $|C|$, $|K|$ enthalten sind, d. h. von dem Ort der Berührungspunkte der Kurven C und K, welche einander berühren. Bezeichnet man mit $|(C, K)_j|$ das vollständige lineare System, welchem diese Kurven angehören, so hat man

$$|C'|=|(C,K)_j-C-2K|.$$

Vgl. F. SEVERI, *Osservazione* ... zitiert in § 6. Zu bemerken ist der Gebrauch, welchen SEVERI in diesem Beweis vom Aquivalenzkriterium (§ 21) gemacht hat, indem er so den Beweis von ENRIQUES dafür ersetzte, daß die JACOBIschen Kurven der Netze, welche in $|C|$ enthalten sind, einem und demselben linearen System angehören.

[40] ENRIQUES R. und I. Die Eigenschaften 1. und 2. genügen sogar, um die adjungierten Kurven C' unter einigen Beschränkungen zu bestimmen. Die Bedingung 1. genügt schon, um ein lineares Kurvensystem zu bestimmen, das subadjungiert zu $|C|$ heißt; man leitet daraus im allgemeinen das adjungierte System ab, indem man die Fundamentalkurven abtrennt, um sie in passender Weise zu zählen.

Fläche F, so hat man die Relation:

$$|C'+L|=|C+L'|=|(C+L)'| \text{ (41)} .$$

13. - Invariantentheorie nach F. Enriques.

Diese fundamentale Eigenschaft der adjungierten Kurven darf als eine allgemeinere Form des Theorems der Invarianz des kanonischen Systems betrachtet werden, indem es sich auch auf Flächen vom Geschlecht $p_g=0$ erstreckt. Nehmen wir der größeren Einfachheit halber an, $|C|$ habe keine Basispunkte auf der Fläche F. Dann leitet man hieraus die Definition der folgenden Invarianten ab (42):

1) Wenn $|C'|\,|C|$ enthält, so hat man

$$|C'-C|=|L'-L|;$$

das System $|C'-C|$ hängt von der Wahl des Systems $|C|$ auf F nicht ab. Es ist das kanonische System, dessen Invarianz und fundamentale Eigenschaften hinsichtlich der Kurven von F auf diesem Wege in der einfachsten Art begründet sind.

2) Wenn $|C'|\,|C|$ nicht enthält, so kann es trotzdem eintreten, daß ein passendes Multiplum $|iC'|$ von $|C'|\,|iC|$ enthält. In jedem Falle erhält man ebenfalls

$$|iC'-iC|=|iL'-iL| \text{ (43)} .$$

Betrachtet man das System $|C''|$, welches zu $|C'|$ adjungiert ist (zweites adjungiertes System zu $|C|$) usw., so erkennt man unmittelbar, daß

$$|C^{(i)}-C|=|iC'-iC|$$

ist.

---

(41) Enriques I und F. Die Fundamentaleigenschaft gestattet die zu einem Büschel oder sogar zu *einer* Kurve (System von der Dimension 0) adjungierten Kurven zu bestimmen. Wenn man von den Eigenschaften 1. und 2. ausgeht, welche oben im Text angegeben sind, so gestattet sie auch eine ganz allgemeine Definition aufzustellen, welche Enriques (in Enriques I) auseinandergesetzt hat, ohne zuvor die Eigenschaft des Jacobischen Systems aufgedeckt zu haben.

(42) Enriques I.

(43) Ein erstes Beispill dieses Umstandes für $i=2$ hat Enriques I (Nr. 39) aufgestellt. Ein anderes Beispiel ist durch G. Castelnuovo gegeben worden, *Sulle superficie di genere zero* (Nr. 15), « Mem. Soc. It. sc. (detta dei 40) », (s. 3) 10 (1896), p. 103. In der weiteren Entwicklung der Theorie hat man neue Beispiele auch für $i>2$ aufgestellt (s. § 38 u. f.).

Dieses invariante System hat den Namen *i-kanonisches* (bikanonisches für $i = 2$) System erhalten. Seine Dimension vermehrt um eine Einheit liefert eine *absolute Invariante* der Fläche, welche man das Mehrgeschlecht (43') der Ordnung i nennt oder das i-Geschlecht P_i (man hat $P_1 = p_g$) (44).

3) Bezeichnet man mit π und n das Geschlecht und den Grad des Systems $|C|$ und mit π', n' die entsprechenden Charaktere von $|C'|$, so erlauben uns die fundamentalen Eigenschaften der adjungierten Kurven die folgenden Relationen aufzustellen:

$$\begin{cases} \pi' = \omega + 3(\pi - 1) - n\,; \\ n' = \omega - 1 + 4(\pi - 1) - n\,, \end{cases}$$

wo ω unabhängig von der Wahl von $|C|$ resultiert.

Die Zahl ω bildet also eine *Invariante* der Fläche, und zwar eine *relative Invariante*, die um eine Einheit wächst für jede Transformation dieser Fläche, welche eine ausgezeichnete Kurve verschwinden läßt. Fügt man zu der Zahl ω die Anzahl der ausgezeichneten Kurven der Fläche hinzu (vorausgesetzt, daß sie endlich ist, § 4) oder bezieht man sich auf eine transformierte Fläche ohne ausgezeichnete Kurve, so erhält man eine *absolute Invariante*, welche man mit $p^{(1)}$ bezeichnet und das *virtuelle lineare Geschlecht* nennt (45). Wenn $p_g > 0$ ist, so ist $p^{(1)}$ das (virtuelle) Geschlecht des kanonischen Systems, aber die oben gegebene Definition von $p^{(1)}$ läßt sich auch auf den Fall $p_g = 0$ ausdehnen, vorausgesetzt, daß die Fläche nicht der Familie der Regelflächen angehört (§ 35) (46).

(43') Oder das mehrfache Geschlecht (JUNG T., p. 94).

(44) Der Nutzen der Betrachtung des Doppelgeschlechts und der Mehrgeschlechter ist zuerst durch die genannten Untersuchungen von CASTELNUOVO (1896) über die Rationalitätsbedingungen einer Fläche, n weiterer Folge durch die Bestimmung der Familie der Regeflächen und allgemeiner der Flächen vom Geschlecht $p_g = 0$ zutage getreten (s. § 38). Aber selbts für $p_g > 0$ hat man Veranlassung, die mehrkanonischen Systeme zu verwenden, um ein Bild der Fläche zu konstruieren, welches diese Kurven zu ebenen oder hyperebenen Schnitten hat, wobei die invarianten Eigenschaften der Fläche sich als projektive Eigenschaften übertragen (s. § 46).

(45) ENRIQUES I (Nr. 41). CASTELNUOVO-ENRIQUES Q (Nr. 5).

(46) Man kann die Definition von $p^{(1)}$ derart verallgemeinern, daß man auch diesen Fall umfassen kann. Das hat G. CASTELNUOVO getan, *Sul genere lineare di una superficie e sulla classificazione a cui esso dà luogo,* « Rend. Acc. Lincei », (s. 5) 6 (1897), p. 372, 406, und zwar auf verschiedene Weisen:

1) durch Betrachtung des *größten Wertes* von ω für alle Transformierten der gegebenen Fläche F (oder hinsichtlich der linearen Kurvensysteme, welche ihnen entsprechen);

2) durch Betrachtung des *größten Wertes* von ω hinsichtlich der Transformierten von F, für welche $n \leqslant 2\pi - 2$ ist, wenn man mit π und n das Geschlecht und die Ordnung der ebenen Schnitte bezeichnet.

Nimmt man die zweite Definition von $p^{(1)}$ an, so findet man, daß *für die Familie der Regelflächen* $p^{(1)} \leqslant 0$ ist, während für jede andere Fläche, welche dieser Familie nicht angehört, $p^{(1)} > 0$

4) Die Definition des arithmetischen Geschlechts p_a kann auch in Beziehung zu dem Fundamentaltheorem über die adjungierten Kurven begründet werden, und zwar auf folgende Weise:

Versucht man die Dimension r' des Systems $|C'|$ zu berechnen, welches mit einer Kurve oder einem irreduziblen System $|C|$ vom Geschlecht π verbunden ist, so findet man

$$p_g + \pi - 1 \geqslant r' \geqslant p_a + \pi - 1 \,,$$

Man hat sogar

$$r' = p_a + \pi - 1$$

für jedes irreduzible lineare System $|C|$ von der Dimension $\geqslant 1$: die Differenz $p_g - p_a$, d. h. die Irregularität der Fläche, ist der Defekt der (kanonischen) Schar, welche durch die C' auf einer allgemeinen Kurve C ausgeschnitten wird ([47]).

Die Zahl p_a ist eine *absolute Invariante* der Fläche, welche sich von dem numerischen Geschlecht nicht unterscheidet, das von NOETHER (§ 11) definiert worden ist. In der Tat, sei $|C|$ das System der *ebenen* Schnitte der Fläche F und bezeichnet man mit n die Ordnung von F, so werden die Systeme

$$|C'|, \;\; |(2C)'| = |C + C'|, \; \ldots, \;\; |(rC')| = |(r-1)C + C'|$$

---

ist (nach der ersten Definition ist $p^{(1)} = 10$ für die Ebene und $p^{(1)} = -8(\pi - 1) + 1$ für die Regelflächen vom Geschlecht π). Aber die Bestimmung der angegebenen Maximalwerte führt uns praktisch auf die Untersuchung der Bedingung dafür, daß eine Fläche der Familie der Regelflächen angehört, eine Aufgabe, welche so aufs einfachste durch den Kalkül der Mehrgeschlechter gelöst wird (§ 38). Hieraus ergibt sich die Wichtigkeit, welche die relative Invariante ω in dem Studium von Flächen gewinnt, von denen man nicht von vornherein weiß, ob sie der Familie der Regelflächen angehören oder nicht. G. CASTELNUOVO-ENRIQUES Q.

([47]) Der erste Teil des Theorems ($r' \geqslant p_a + \pi - 1$) ergibt sich aus der fundamentalen Eigenschaft der adjungierten Kurven und gestattet $p_g - p_a$ zu definieren als Maximaldefekt der durch $|C'|$ auf der allgemeinen Kurve C ausgeschnittenen Schar, vgl. ENRIQUES I (Nr. 40). Es ist sogar leicht (ENRIQUES I, 1896), zu erkennen, daß man hat $r' = p_a + \pi - 1$ (was man ausdrückt, wenn man sagt, daß $|C'|$ *regulär* ist) für die Systeme $|C|$, welche auf der Fläche F durch die Flächen einer hinreichend großen Ordnung ausgeschnitten sind. Die *Regularität* des adjungierten Systems hat für die Systeme der ebenen Schnitte E. PICARD begründet *Sur quelques questions se rattachant à la connexion lineaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables independantes*, « J. f. Math. (Crelle) », 129 (1905), p. 275 und PICARD-SIMART 2, Cap. 13, Nr. 16 (p. 437), der sich transzendenter Betrachtungen bedient hat. F. SEVERI ist dazu gelangt, einen geometrischen Beweis unter den allgemeinsten Bedingungen des Textes zu geben, und zwar dadurch, daß er sich auf ein Theorem von ENRIQUES über die nicht-linearen kontinuierlichen Scharen von Kurven stützte (§ 18). Siehe SEVERI, *Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica*, « Rend. R. Acc. dei Lincei », (s. 5) 17, 2. Semester (1908), p. 465.

Nach dem genannten Theorem im Text hat man die funktionale Bedeutung der Differenz $p_g - p_a$; andere Definitionen gehen aus den §§ 18, 28 hervor.

auf F durch die adjungierten Flächen

$$\varphi_{n-3}, \varphi_{n-2}, \dots, \varphi_{n-4+r}$$

beziehungsweise ausgeschnitten. Die Anzahl N_{n-4+r} der linear unabhängigen φ_{n-4+r} läßt sich als Funktion von r, n und vom Geschlecht π der ebenen Schnitte C ausdrücken. Wenn r die Reihe $r = 1, 2, \dots$ durchläuft, so durchläuft N_{n-4+r} eine arithmetische Progression der dritten Ordnung, welche übereinstimmt mit den Postulationsformeln von NOETHER (48).

Die *Regularität des adjungierten Systems* (Theorem von PICARD) sichert uns, daß die Postulationsformeln zur Berechnung der Zahl der φ_{n-3} immer gültig sind. Dem ist nicht mehr so für die Anzahl der φ_{n-4}; ist die Fläche irregulär, so findet man, indem man die Progression der Zahlen N_{n-4+r} fortsetzt, für $r = 0$ eine virtuelle Anzahl $N_{n-4} = p_a$, welche kleiner ist als die wirkliche Anzahl p_g der linear unabhängigen φ_{n-4}:

Man kann dieses Resultat, welches sich auf die Dimension des adjungierten Systems bezieht, zur Berechnung der Mehrgeschlechter einer Fläche verwenden. In der Tat: ist ein kanonisches System $|C|$ vorgelegt, so ergeben sich die mehrkanonischen Systeme von $|C|$ durch sukzessive Adjunktion:

$$|2C| = |C'|, \quad |3C| = |(2C)'|, \dots$$

Hieraus folgt, daß man *im allgemeinen die Relation* hat:

$$P_i = p_a + \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)} - 1) + 1$$

und wenigstens

$$P_i \geqslant p_a + \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)} - 1 + 1) \text{ (49)}.$$

(48) Vgl. ENRIQUES I (Nr. 37). CASTELNUOVO B (Nr. 7).

(49) CASTELNUOVO-ENRIQUES Q (Nr. 5). Für $p^{(1)} = 1$ (die kanonischen Kurven sind reduzibel) kann das Doppelgeschlecht P_2 in der Tat $p_a + p^{(1)}$ überschreiten, ja sogar $p_g + p^{(1)}$ (vgl. § 45). Die obige Ungleichung hört auf zu bestehen, für $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 1$, wenn keine eigentliche sogenannte kanonische Kurve existiert (von der Ordnung > 0). In diesem Falle hat man $P_i = 1$ (vgl. § 42). Für $p_a = 0$ besteht dieselbe Ungleichung, wenn die Fläche keine ausgezeichneten Kurven besitzt (d. h. wenn man die Familien der Regelflächen ausnimmt).

14. - Über einige bemerkenswerte Ausdrücke numerischer Invarianten.

In der Theorie der Invarianten, welche wir auseinandergesetzt haben, hat man die Verschiedenheit der Bedeutung der Charaktere zu beachten: eines *geometrischen* Charakters derart, wie p_g (*welcher die Existenz von Funktionen ausdrückt*, die mit der Fläche verknüpft sind) und von *numerischen* Charakteren, derart wie p_a, ω oder $p^{(1)}$. Die letzteren können mit Hilfe gewisser Charaktere definiert werden, welche zu einem beliebigen auf der Fläche gegebenen linearen System gehören.

Betrachten wir zuerst ein irreduzibles lineares Büschel von Kurven C vom Geschlecht π mit n Basispunkten: dann gibt es im allgemeinen eine gewisse Anzahl δ von Kurven des Büschels vom Geschlecht $\pi - 1$ mit einem Doppelpunkte, und man kann den folgenden Ausdruck bilden:

$$I = \delta - n - 4\pi .$$

Dieser Ausdruck hängt nicht von der Wahl des Büschels $|C|$ *ab und bildet folglich eine relative Invariante von* F. Man nennt I die ZEUTHEN-SEGREsche Invariante der Fläche (50). Übrigens hat man

$$I = 12p_a - \omega + 9 \ (^{51}) ,$$

was die absolute Invariante p_a durch die Summe der beiden relativen Invarianten $\omega + I$ zu berechnen erlaubt.

Sei nunmehr auf F ein irreduzibles Netz von Kurven $|C|$ vom Geschlecht π und vom Grad n ohne Basispunkte gegeben.

Man hat Veranlassung zu betrachten:

1) die Anzahl χ der Kurven C mit einem Rückkehrpunkt;

2) die Anzahl Δ der Kurven C mit zwei Doppelpunkten;

3) die Anzahl τ der Büschel von Kurven C, welche zwei Berührungspunkte haben;

4) die Anzahl ι der Büschel von Kurven C, welche eine Berührung zweiter Ordnung haben.

---

(50) H. G. ZEUTHEN, die in § 11 zitierte Abhandlung. C. SEGRE, *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche*, « Atti Acc. Torino », 31 (1895), p. 485.

Man kann auch den Ausdruck von I in bezug auf ein irrationales Büschel berechnen, s. CASTELNUOVO-ENRIQUES Q (Nr. 6). (Vgl. H. W. E. JUNG, *Über die* ZEUTHEN-SEGRE*sche Invariante*, « Rend. Circolo Mat. di Palermo », 34 (1912), p. 225).

(51) NOETHER B, vgl. T. BONNESEN, *Sur les séries linéaires triplement infinies de courbes algébriques sur une surface algébrique* (Nr. 6) « Bull. d. l'Acad. de Danemark » (1906), p. 282.

Alsdann hat man die folgenden Formeln:

$$\chi = 24(\pi + p_a)\,,$$

$$\Delta = \tfrac{1}{2}[(n + 4\pi + I)^2 - 3n - 78\pi - I - 72p_a + 2]\,,$$

$$\tau = 2[(n + \pi)^2 - 17\pi - 5n + 2I - 18p_a + 6]\,,$$

$$\iota = 3(n + 6\pi - I + 8p_a - 2) \text{ (}^{52}\text{)}\,.$$

15. - Algebraische Korrespondenzen zwischen zwei Flächen.

Hat man zwischen zwei Flächen F und F^* (welche man ohne ausgezeichnete Kurven annehme) eine rationale Transformation in dem Sinne, daß jedem Punkt von F $n(>1)$ Punkte von F^* entsprechen: dann wird es im allgemeinen auf F eine (*Übergangs-* oder *Verzweigungs-*) Kurve K geben, Ort der Punkte, welchen Gruppen von n Punkten von F^* mit einer Koinzidenz entsprechen; der Ort dieser Koinzidenzen bildet eine Kurve K^* auf F^*. *Die Transformation* $[1, n]$ *läßt den kanonischen Kurven von* F (*vorausgesetzt vom Geschlecht* $p_g > 0$) *Kurven entsprechen, welche zu der Koinzidenzkurve* K^* *hinzuaddiert, kanonische Kurven auf* F^* *bilden* (⁵³). Nennt man p_a, $p^{(1)}$, P_a, $P^{(1)}$ die Geschlechter von F bzw. F^*, so folgt hieraus

$$P^{(1)} = n(p^{(1)} - 1) + \tau + \tfrac{3}{2}\delta\,,$$

$$24(P_a + 1) = 24n(p_a + 1) + 6\tau + 3\delta - 2\sigma - 6\,,$$

(⁵²) Vgl. H. G. ZEUTHEN; a. a. O. NOETHER B; F. SEVERI, *Il genere aritmetico e il genere lineare*, « Atti Acc. Torino », 37 (1902), p. 625.

In dem Aufsatz von SEVERI ist die Formel $\chi = 24(\pi + p_a)$ als Definition von p_a genommen, indem auf elementare Weise bewiesen wird, daß $\chi/24 - \pi$ nicht von dem Netz abhängt. Indem SEVERI von dieser Definition ausgeht, begründet er auch die Formel $I = 12p_a - \omega + 9$. Hieraus folgt, daß das p_a so definiert ist wie dasjenige der §§ 11 und 13. Man hat analoge andere Formeln zu denjenigen des Textes, welche p_a, ω oder I in den Charakteren eines linearen Systems der Dimension 3 oder 4 verbinden. Außer den genannten Arbeiten von ZEUTHEN und NOETHER siehe insbesondere M. PANNELLI, *Sui sistemi lineari triplamente infiniti ...*, « Rend. Circolo Mat. Palermo », 20 (1905), p. 36; T. BONNESEN a. a. O.; L. GODEAUX, *Sur les systèmes linéaires quadruplement infinies*, « Bull. Acc. de Cracovie » (1912), p. 479. Es ist zu bemerken, daß die Systeme von der Dimension > 2 nicht auf neue Invarianten führen, welche von p_a und ω unabhängig sind.

(⁵³) ENRIQUES R. (6, 1); vgl. F. SEVERI, *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica*, « Rend. Ist. Lomb. », (s. 2) 36, p. 495; P. PAINLEVÉ, *Mémoire sur les équations différentielles ...*, chap. 2, § 9, « Ann. de l'Éc. Normale Sup. », (p. 3) 18 (1891), p. 136, hat auch das kanonische System in bezug auf die Transformationen zwischen zwei Flächen betrachtet, ohne die Rolle der Verzweigungskurve zu erklären.

wo τ das Geschlecht der Übergangskurve K bezeichnet, δ die Anzahl der Schnittpunkte dieser Kurve mit den kanonischen Kurven von F und σ die Anzahl der Punkte von F, welchen auf F^* drei koinzidierende Punkte entsprechen. In diesen Formeln nimmt man an, daß K keine mehrfachen Bestandteile enthält, und daß auch keine Fundamentalpunkte auf F existieren, welchen Kurven auf F^* entsprechen ([54]).

Das Theorem betreffend die rationalen Transformationen $[1, n]$ zwischen zwei Flächen F und F^*, das wir soeben angeführt haben, kann auf den Fall algebraischer Korrespondenzen $[m, n]$ ausgedehnt werden. Folgt man dem Gedanken, welcher der Formel von ZEUTHEN für die Kurven ([55]) zugrunde liegt, so genügt es in der Tat eine Hilfsfläche ψ zu betrachten, welche die Paare von entsprechenden Punkten auf F^* und F darstellt; ψ ist in Korrespondenz $[n, 1]$ mit F und $[m, 1]$ mit F^*. Man erhält so das folgende Theorem:

Wenn zwischen den Flächen F und F^* (vom Geschlecht $p_g > 0$) eine algebraische Korrespondenz $[m, n]$ besteht, so gibt die Transformierte einer kanonischen Kurve von F, vermehrt um die Koinzidenzkurve auf F^*, eine Kurve des linearen Systems, welches durch eine n-kanonische Kurve von F^*, vermehrt um die Übergangskurve, welche derselben Fläche angehört, bestimmt ist.

Hieraus folgen die Relationen zwischen den Invarianten von zwei Flächen ([56]).

Eine Korrespondenz $[1, n]$ zwischen zwei Flächen könnte nur eine *endliche Anzahl von Verzweigungspunkten* haben. Dieser Fall bietet sich dar in der Theorie der hyperelliptischen Flächen (§ 40) und für die Flächen vom Geschlecht 1 (§ 42). Durch Verallgemeinerung der für diese Fälle begründeten Resultate ist es L. GODEAUX ([57]) gelungen, zu beweisen, daß *die Involution der Ordnung n, welche der zweiten Fläche angehört, durch eine Gruppe derselben Ordnung von birationalen Transformationen erzeugt ist.*

Endlich erwähnen wir noch das folgende Resultat ([58]):

([54]) Die erste Formel ist von ENRIQUES R (a. a. O.) aufgestellt worden. Die zweite von F. SEVERI a. a. O. In dieser letzten Arbeit geht man von den Relationen zwischen den relativen Invarianten und I aus. Man findet hier auch die Modifikationen, welche einzuführen sind, wenn Fundamentalpunkte vorhanden sind.

([55]) Siehe C. SEGRE, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, « Ann. di mat. », (s. 2) 22, p. 41 (Nr. 40-41).

([56]) SEVERI a. a. O. Der Fall, in welchem man eine Korrespondenz zwischen den Punkten einer und derselben Fläche betrachtet, führt auf eine Formel, welche die Anzahl der Koinzidenzpunkte ausdrückt und welche von H. G. ZEUTHEN aufgestellt worden ist, *Le principe de correspondance pour une surface algébrique*, « Paris C. R. », 143 (1906), p. 491, 535.

([57]) *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis ...*, « Rend. Acc. Lincei », (s. 5) 23, 1. Sem. (1914), p. 408.

([58]) L. GODEAUX, *Sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces algébriques ...*, « Atti Acc. Torino », 48 (1912), p. 77.

Wenn zwischen zwei Flächen F und F^* von denselben Geschlechtern $p_a(> 0)$ und $p^{(1)}$ eine Korrespondenz $[1, n]$ besteht, wo n eine Primzahl und $p_g > 1$, $P_g > 1$ ist, so ist $p^{(1)} = 1$; die geometrischen Geschlechter p_g, P_g von F und F^* sind ebenfalls gleich, und die Involution von der Ordnung n, welche der zweiten Fläche angehört, ist durch eine Gruppe von birationalen Transformationen dieser Fläche erzeugt.

III. - ÜBER DIE AUSDEHNUNG DES THEOREMS VON RIEMANN-ROCH UND ÜBER DIE NICHT-LINEAREN KONTINUIERLICHEN SYSTEME VON KURVEN, WELCHE EINER FLÄCHE ANGEHÖREN

16. - Die charakterische Schar eines linearen Systems.

Sei $|C|$ ein irreduzibles lineares System vom Grade n und von der Dimension $r \geqslant 1$, welches einer Fläche F angehört.

Dann kann man die lineare Schar g_n^{r-1} betrachten, welche auf einer allgemeinen Kurve C durch die anderen Kurven des Systems ausgeschnitten wird; diese g_n^{r-1} wird die charakteristische Schar von $|C|$ genannt ([59]).

Für die vollständigen linearen Systeme ebener Kurven weiß man, daß die charakteristische Schar vollständig ist ([60]). Die gleiche Eigenschaft erstreckt sich nicht auf Regelflächen; in der Tat gehört eine Normalregelfläche von der Ordnung n und vom Geschlecht $p > 0$ mit Nichtspezialschnitten einem Raum S_{n-2p+1} von $n - 2p + 1$ Dimensionen an ([61]); das linerare System der Hyperebenenschnitte hat also eine charakteristische Schar, welche nicht vollständig ist, und deren Defekt genau p ist.

Was kann man allgemein über die charakteristische Schar eines voll-

---

([59]) Diese Schar hat zunächst M. NOETHER betrachtet, *Extension du théorème de* RIEMANN-ROCH *aux surfaces algébriques*, « Paris C. R. Acad. de Paris », 103 (1886), p. 736. Seine Wichtigkeit für das Studium der linearen Systeme von ebenen Kurven ist durch die Untersuchungen von C. SEGRE zutage getreten, *Sui sistemi lineari*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », 1 (1887), p. 217; G. CASTELNUOVO, *Ricerche generali ...*, « Memorie Torino », 1891 ([8]).

([60]) G. CASTELNUOVO, *Ricerche generali ...* a. a. O. ([59]).

([61]) C. SEGRE, *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algebriques*, 2. Teil, « Math. Ann. », 34, p. 1.

ständigen linearen Systems, welches einer beliebigen Fläche angehört, aussagen?

F. ENRIQUES (62) hat zuerst diese Frage in dem Falle einer *regulären Fläche* ($p_a = p_g$) untersucht und unter Hinzufügung einiger invarianten Beschränkungen, welche nach G. CASTELNUOVO (63) immer als erfüllt resultieren, bewiesen, daß die charakteristische Schar eines vollständigen linearen Systems vollständig ist.

Darauf ist G. CASTELNUOVO (64) durch eine eigehendere Untersuchung dieser Frage zu dem folgenden allgemeinen Resultat gelangt:

Jedes vollständige irreduzible lineare System $|C|$, *welches einer Fläche vom numerischen Geschlecht* p_a *und vom geometrischen Geschlecht* p_g ($\geqslant p_a$) *angehört, hat eine charakteristische Schar, deren Defekt*

$$\leqslant p_g - p_a$$

ist.

Die Differenz $p_g - p_a$ *kann also definiert werden als das Maximum des Defekts der charakteristischen Schar; wobei dieses Maximum erreicht wird entsprechend den Systemen* $|C|$, *welche gewissen Bedingungen genügen.* Hieraus folgt eine neue Definition von $p_g - p_a$, welche derjenigen von § 13 analog ist.

17. - Ausdehnung des Riemann-Rochschen Theorems.

In der Theorie der algebraischen Kurven liefert das Theorem von RIEMANN-ROCH die Dimension der vollständigen linearen Schar, welche durch eine Punktgruppe bestimmt ist, oder — wenn man lieber will — die Anzahl der linear unabhängigen rationalen Funktionen, welche einem gegebenen Körper bei gegebenen Polen angehören.

Eine analoge Frage kann man für die vollständigen linearen Systeme stellen, welche einer Fläche F angehören. Und zwar handelt es sich darum, die Dimension r eines linearen Systems $|C|$ als Funktion ihrer Charaktere π und n zu berechnen.

Wenn $|C|$ irreduzibel ist, so hat M. NOETHER (65) unter der Vor-

---

(62) ENRIQUES R.

(63) CASTELNUOVO R.

(64) CASTELNUOVO P. - Den Beweis hat F. SEVERI vereinfacht, *Sulla deficienza della serie caratteristica,* « Rendic. Lincei », 12, p. 5, 2. Sem. (1903), p. 250. Einen anderen Beweis desselben Theorems erhält man aus § 17.

(65) *Extension du théorème de* RIEMANN-ROCH *aux surfaces algébriques,* « Paris C.R. Acad. Sciences », 103 (1886) a. a. O. (59).

aussetzung regulärer Flächen ($p_a = p_g = p$), die Relation aufgestellt

$$r \geqslant p + n - \pi + 1 - i,$$

wo $i (\geqslant 0)$ den *Index der Spezialität* von $|C|$ bezeichnet (und $i-1$ die Dimension des Residualsystems von $|C|$ in bezug auf das kanonische System von F ist). Diese Formel ergibt sich aus der Betrachtung von zwei residualen Spezialscharen, welche einer allgemeinen C angehören, nämlich der charakteristischen Schar g_n^{r-1} (welche durch die anderen Kurven des Systems ausgeschnitten wird) und derjenigen, welche auf C durch die kanonischen Kurven von F ausgeschnitten wird, wobei man voraussetzt, daß die erste Schar vollständig ist. Es ist in § 16 angegeben worden, daß diese Annahme für $p_a = p_g$ erfüllt ist, daß aber dem nicht mehr so ist für $p_a < p_g$, und daß man einen Defekt $\leqslant p_g - p_a$ hat. Hieraus ergibt sich, daß in der obigen Ungleichung p durch p_a ersetzt werden muß. Das geht schon aus der Ausdehnung des *Theorems von* RIEMANN-ROCH *für die adjungierten Systeme* ($i = 0$) hervor, welche durch die Definition des numerischen Geschlechts von F. ENRIQUES (§ 13) begründet ist; denn die Dimension von $|C'|$ ist

$$r' = p_a + \pi - 1 = p_a + n' - \pi' + 1,$$

wo n' und π' die Charaktere von $|C'|$ bezeichnen.

Die Untersuchung von CASTELNUOVO betreffend die charakteristische Schar (§ 16) gestattet das Theorem für jedes lineare System auf einer Fläche zu begründen. *Bezeichnet man demzufolge mit π und n das Geschlecht und den Grad von $|C|$, mit i seinen Index der Spezialität, so ist die Dimension von $|C|$*

$$r = p_a + n - \pi + 1 - i + \sigma,$$

wo $\sigma \geqslant 0$ ist ([66]).

Man nennt σ den Überschuß von $|C|$, und es gibt tatsächlich auf jeder Fläche überschüssige Systeme ($\sigma > 0$); es genügt z. B., daß $|C|$ Fundamentalkurven vom Geschlecht > 0 ([67]) besitzt.

([66]) CASTELNUOVO P. Der Beweis dieses Satzes kann sehr einfach geführt werden durch Betrachtungen, welche auf das Theorem bezüglich der Form $Af + B\varphi$ gegründet sind. Siehe F. SEVERI, *Sul teorema di Riemann-Roch* ..., « Atti Accad. Torino », 40 (1905), p. 766; H. W. E. JUNG, *Der Riemann-Rochsche Satz* ..., « Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. », 18 (1909), p. 267 und Berichtigung dazu, « Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. », 19 (1910), p. 172.

([67]) Vgl. ENRIQUES R (V 2, 3). Wenn $i > 0$ ist, so kann man auch leicht die Charaktere des Residualsystems von $|C|$ in bezug auf das kanonische System berechnen (ENRIQUES R, IV, 3).

Nach G. CASTELNUOVO nennt man *regulär* jedes System $|C|$, für welches

$$i = 0 , \qquad \sigma = 0$$

ist; das ist der Fall für die adjungierten Systeme (§ 13).

Die Ausdehnung des Theorems von RIEMANN-ROCH kann auch für die reduziblen Systeme begründet werden (68) und man gelangt zu folgendem Resultat, welches von F. SEVERI (69) auf eine genauere Art bewiesen worden ist. *Wenn die virtuellen Charaktere π, n, i einer irreduziblen oder reduziblen Kurve auf einer Fläche vom Geschlecht p_a der Ungleichung genügen*

$$p_a + n - \pi + 1 - i \geqslant 0 ,$$

so gehört die Kurve einem vollständigen linearen System an von der Dimension

$$r = p_a + n - \pi + 1 - i + \sigma \qquad (\sigma \geqslant 0) .$$

18. - Kontinuierliche nicht-lineare Kurvensysteme.

Man hat Grund, kontinuierliche nicht-lineare Systeme von Kurven C zu betrachten, welche einer algebraischen Fläche F angehören. Entwickeln wir zunächst Überlegungen, welche durch die Analogie mit der Geometrie auf einer Kurve nahegelegt sind.

Jede Gruppe von n Punkten G_n auf einer Kurve f gehört einer Schar ∞^n von analogen G_n an, und diese Schar ist nicht-linear, wenn die Kurve vom Geschlecht > 0 ist.

Betrachten wir analog eine Kurve C einer gewissen Ordnung n und von einem (virtuellen) Geschlecht π, welche auf einer Fläche F gelegen ist, dann kann man ein *algebraisch-vollständiges* System $\{C\}$ von Kurven derselben Ordnung bestimmen, welches C enthält. Wird es *im allgemeinen* ein lineares System sein?

Ehe wir an die Beantwortung dieser Frage gehen, konstatieren wir, daß ein System $\{C\}$ nicht linear zu sein braucht. Das einfachste Beispiel wird von den Flächen gebildet, welche ein *irrationales Kurvenbüschel* enthalten; die Familie dieser Flächen schließt die Regelflächen ein.

---

(68) CASTELNUOVO-ENRIQUES Q (Nr. 3). Allgemeiner findet das Theorem auf Systeme von Kurven Anwendung, welche durch Subtraktion definiert sind. Vgl. F. SEVERI, *Sulle curve algebriche virtuali ...*, « Rendic. Ist. Lombardo », (2) 38, p. 859.

(69) *Sul teorema di* RIEMANN-ROCH, a. a. O. Für die Bedeutung des Überschusses σ vgl. ENRIQUES R (IV, 2), C. ROSATI, « Atti Istituto Veneto », 69, 2. Teil, p. 529.

Nun kann man für das System $\{C\}$ das Geschlecht und den virtuellen Grad bestimmen. Man braucht nur die Überlegungen zu wiederholen, welche für die linearen Systeme angestellt waren (§ 6). Wenn $\{C\}$ von ∞^r irreduziblen Kurven ($r > 1$) gebildet wird, so kann man auch die *charakteristische Schar* von $\{C\}$ definieren, und zwar nach F. Severi [70] auf die folgende Weise.

Wir betrachten die ∞^{r-1} Kurven von $\{C\}$, welche einer allgemeinen Kurve C unendlich benachbart sind. Sie werden auf C eine lineare Schar g_n^{r-1} ausschneiden, welche gerade die charakteristische Schar ist, wenn $\{C\}$ linear ist. Diese g_n^{r-1} nennt man auch im allgemeineren Falle die charakteristische Schar von $\{C\}$ auf C.

Unter diesen Voraussetzungen kehren wir zu der oben aufgeworfenen Frage zurück, welche die Existenz vom vollständigen nichtlinearen Kurvensystem auf einer Fläche betrifft.

Zuerst hat G. Castelnuovo [71] eine Bemerkung aufgestellt, welche sich auf Flächen bezieht, die ein irrationales Kurvenbüschel enthalten: Auf einer solchen Fläche finden sich lineare Systeme von Kurven $|C|$, für welche die charakteristische Schar nicht vollständig ist [72]. Hieraus folgert man: *die Flächen, welche ein irrationales Büschel von Kurven besitzen, sind irregulär* ($p_a < p_g$). Noch umfassender hat man bewiesen [73], daß *jede Fläche, welche eine Schar von Kurven enthält, die nicht in einem linearen System enthalten ist, eine irreguläre Fläche ist.*

Dieser Flächenfamilie gehören alle die irregulären Flächen an, zu welchen man bisher durch verschiedene Verfahren gelangt ist. Wir erwähnen z. B. die Flächen, welche (Punkt für Paar) das System der Punktpaare darstellen, deren Punkte je zwei verschiedenen Kurven angehören [74], Flächen deren invariante Charaktere vollständig bestimmt worden sind [75]. Diese Bemerkung hat dazu geführt, zu vermuten, daß der oben angeführte Satz umkehrbar ist. Es ist in der Tat so: *Auf jeder*

---

(70) *Osservazioni sui sistemi continui di curve ...*, « Atti Accad. Torino », 39 (1904), p. 490.

(71) Castelnuovo R. Nr. 10.

(72) Ein einfacher Beweis findet sich bei Severi a. a. O.

(73) F. Enriques, *Una proprietà delle serie continue di curve ...*, « Rendic. Circolo Mat. Palermo », 13 (1899), p. 95 [queste *Memorie*, vol. II, XXVI]. Vgl. Severi a. a. O.

(74) G. Humbert, *Sur une surface du sixième ordre ...*, « Paris C. R. de l'Acad. de Sciences », 120 (1895), p. 365, 425. « Journal de Liouville », (5) 2 (1896), p. 263. Vgl. L. Remy, « Journal de Liouville », (6) 4 (1908), p. 1. « Annales de l'École Normale Sup. », (3) 26 (1909), p. 193.

(75) A. Maroni, *Sulle superficie algebriche possedenti due fasci di curve algebriche unisecantisi*, « Atti Accad. Torino », 38 (1903), p. 149. M. de Franchis, *Sulle varietà ∞^2 delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica*, « Rendic. Circolo Mat. Palermo », 17 (1903), p. 104. *Sulle corrispondenze algebriche fra due curve*, « Rendic. Accad. Lincei », 12 (5), 1. Sem. (1903), p. 304. F. Severi, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica*, « Atti Accad. Torino », 38 (1903), p. 185. *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica ...*, « Mem. Accad. Torino », 54 (2) (1903), p. 1. Für den Fall der Flächen, welche mehr als zwei Büschel

irregulären Fläche findet man algebraische Systeme von Kurven, welche nicht in linearen Systemen enthalten sind ([76]).

Die Existenz von nicht-linearen vollständigen Systemen ist also eine *charakteristische Eigenschaft der irregulären Flächen.*

Die Frage, auf welche wir durch die Analogie mit den Kurven geführt sind, erhält so eine bestimmte Antwort. Ist das algebraischvollständige System, in dem eine Kurve oder ein System von Kurven auf einer Fläche F enthalten ist, linear? Ja, wenn die Fläche regulär ist ($p_g = p_a$). Nein, wenn sie irregulär ist ($p_g > p_a$). Was von diesem Gesichtspunkt aus durch Analogie dem Geschlecht einer Kurve entspricht, ist nicht das Geschlecht (p_a oder p_g) der Fläche F, sondern seine *Irregularität*, d. h. die Differenz $p_g - p_a$.

Man kann weitergehen und präziser die Rolle dieser Differenz $p_g - p_a$ bestimmen, indem man die Dimension der algebraisch-vollständigen Schar berechnet, welche ein auf F gegebenes lineares System enthält.

Man hat das folgende Theorem ([77]): *Für jedes algebraisch-vollständige System von Kurven, welches einer Fläche von den Geschlechtern p_a, p_g ($\geqslant p_a$) angehört, ist die charakteristische Schar vollständig; demzufolge ist jedes reguläre lineare System vom Geschlecht π, vom Grad n und von der Dimension $p_a + n - \pi + 1$ in einem vollständigen nichtlinearen System der Dimension $p_g + n - \pi + 1$ enthalten, welches sich also zusammensetzt aus $\infty^{p_g - p_a}$ nicht-äquivalenten linearen Systemen.*

Unterwirft man die Kurven der Schar $p_a + n - \pi + 1$ linearen Bedingungen, so erhält man ein System $\infty^{p_g - p_a}$ *von nicht-äquivalenten Kurven*, d. h. von Kurven, von denen zwei beliebige nicht einem und demselben linearen System angehören. Aber man wird nicht auf der Fläche ein System von der Dimension $p_g - p_a + 1$ mit derselben Eigenschaft konstruieren können ([78]).

---

von einmal sich schneidenden Kurven enthalten, siehe U. AMALDI, *Determinazione delle superficie algebriche, su cui esistono più di due fasci di curve algebriche unisecantisi*, « Rendic. Accad. Lincei », (p. 5) 11, 2. Sem. (1902), p. 217. Vgl. A. COMESSATTI, *Sui piani tripli ciclici irregolari*, « Rendic. Circolo Mat. Palermo », 31 (1911), p. 369.

([76]) F. ENRIQUES, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari*, « Rendic. Accad. Bologna », 9 (1904), p. 5 [queste *Memorie*, vol. II, XXXV].

([77]) ENRIQUES a. a. O. Einen anderen Beweis desselben Theorems (der übrigens auf dasselbe der Analysis situs entlehnte Prinzip begründet ist) hat *F.* SEVERI gegeben, *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non-lineari ...*, « Rendic. Circolo Mat. Palermo », 20 (1905), p. 93.

([78]) Dies resultiert zunächst aus dem Theorem von G. CASTELNUOVO über den Defekt der charakteristischen Schar eines linearen Systems (§ 15). Aber unabhängig von diesem Theorem bildet der Prozeß von ENRIQUES (angewandt auf die adjungierten Systeme) eine Schar, welche aus $\infty^{p_g - p_a}$ nicht-äquivalenten Systemen zusammengesetzt ist, und welcher das System angehört, das durch die adjungierten Flächen einer beliebig großen Ordnung ausgeschnitten wird. Man folgert hieraus einfach das allgemeine Resultat des Textes und sogar einen sehr einfachen Beweis des genannten Theorems und demnach die Ausdehnung des Theorems von RIEMANN-ROCH; s. SEVERI ([66]) (Nr. 5).

Ist auf F eine beliebige Kurve C gegeben, so kann es sein, daß sie einem System von nicht-äquivalenten Kurven von der Dimension $< p_g - p_a$ angehört; aber wenn man ihre Charaktere π, n, i (welche in § 17 genannt sind) betrachtet, so kann man leicht entscheiden, ob sie einem System von nicht-äquivalenten Kurven von der Dimension $p_g - p_a$ angehört; es genügt hierzu, daß

$$p_a + n - \pi + 1 - i \geqslant 0$$

ist ([79]).

19. - Die Mannigfaltigkeit von Picard, welche mit einer irregulären Fläche verknüpft ist.

Betrachten wir auf einer irregulären Fläche F von den Geschlechtern p_a, p_g, ein kontinuierliches System $\{C\}$, welches aus $\infty^{p_g - p_a}$ nicht-äquivalenten linearen Systemen zusammengesetzt ist. Bezeichnet man mit $|C|$, $|C_1|$, $|C_2|$ drei lineare Systeme, welche $\{C\}$ angehören, so erkennt man, daß

$$|\bar{C}| = |C + C_1 - C_2|$$

ebenfalls $\{C\}$ angehört. Man sieht also, daß die *Operation* $+ C_1 - C_2$ jedes System von $\{C\}$ in ein anderes System von $\{C\}$ transformiert. Betrachtet man nun die linearen Systeme $|C|$ von $\{C\}$ als die Elemente (Punkte) einer Mannigfaltigkeit V von $p_g - p_a$ Dimensionen, so sieht man, daß V *eine Gruppe von* $\infty^{p_g - p_a}$ *permutablen Transformationen zuläßt*; *es ist die Mannigfaltigkeit von* PICARD, welche mit der Fläche F verknüpft ist ([80]). Jedem System $\{C\}$ von F, das aus $\infty^{p_g - p_a}$ nicht-äquivalenten linearen Systemen zusammengesetzt ist, entspricht übrigens die gleiche Mannigfaltigkeit von PICARD; denn bezeichnet man mit $\{K\}$ ein anderes analoges System, und mit $|K_1|$, $|K_2|$ zwei lineare Systeme desselben so hat man ebenfalls

$$|\bar{C}| = |C + K_1 - K_2|.$$

([79]) Dieses Resultat, zu welchem F. ENRIQUES auf Grund der Ausdehnung des Theorems von RIEMANN-ROCH gelangt ist, ist auf ziemlich einfache Weise direkt bewiesen von F. SEVERI in der in § 15 genannten Abhandlung *Sul teorema di* RIEMANN-ROCH ... Der Beweis findet sich hier weiter vereinfacht auf Grund der Bemerkung der vorhergehenden Anmerkung.

([80]) G. CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare*, « Rendic. Accad. Lincei », (5) 14, 1. Sem. 1905, p. 546, 593, 655.

Nach einem Theorem, welches von E. PICARD (s. § 39) für die Flächen aufgestellt worden ist, und welches auf Mannigfaltigkeiten von beliebigen Dimensionen ausgedehnt werden kann (PAINLEVÉ), lassen sich die Koordinaten eines allgemeinen Punktes der Mannigfaltigkeit V mit Hilfe von $2(p_g - p_a)$-fach periodischen ABELschen Funktionen von $p_g - p_a$ Variablen ausdrücken. Hieraus folgt, daß *die $p_g - p_a$ Parameter, von denen die Elemente eines Systems $\infty^{p_g - p_a}$ von nicht-äquivalenten Kurven auf F abhängen, derart eigenführt werden können, daß die Koeffizienten der Gleichungen der genannten Kurven Abelsche Funktionen dieser Parameter sind. Die Tabelle der Perioden hängt nicht von der Wahl des betrachteten Systems auf F ab* ([81]) (siehe § 28).

20. - Flächen, welche ein irrationales Büschel von Kurven und Ungleichheit zwischen p_a und p_g besitzen.

Im Jahre 1900 hat G. CASTELNUOVO an F. ENRIQUES ([82]) eine Konstruktion mitgeteilt, nach welcher man, wenn ein System nicht-äquivalenter Kurven auf einer Fläche vom Geschlecht $p_g = 0$ gegeben ist, zu einem irrationalen Büschel geführt wird, und im Jahre 1904 hat F. ENRIQUES ([83]) (mit Hilfe des Resultats von § 17) daraus gefolgert, daß *jede Fläche vom Geschlecht $p_g = 0$, $p_a < 0$ ein irrationales Kurvenbüschel enthält*, so daß man auf diese Weise zu der vollständigen Bestimmung dieser Flächenfamilie gelangt (siehe § 38).

Unter allgemeineren Bedingungen kann man auch die Existenz eines irrationalen Kurvenbüschels auf einer irregulären Fläche nachweisen, indem man zeigt, daß es einfache mit der Fläche verknüpfte Integrale erster Gattung gibt, welche Funktionen voneinander sind ([84]) (siehe § 26).

Man erkennt so ([85]), daß, *wenn $p_g \geqslant 2(p_a + 2)$ ist, die Fläche ein irrationales Kurvenbüschel besitzt.*

([81]) G. CASTELNUOVO a. a. O.

([82]) *Sur les surfaces algébriques admettant des integrales de differentielles totales de première espèce*, « Annales de Toulouse », (p. 2) 2, p. 77 [queste *Memorie*, vol. II, XXXI].

([83]) *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*, « Rendic. Palermo », 20, p. 1 [queste *Memorie*, vol. II, XXXVI]. Der Beweis der Existenz eines irrationalen Büschels für $p_g = 0$, $p_a < 0$, der gemäß dem Wege von CASTELNUOVO die Anwendung der Integrale voraussetzt, welche mit der Fläche verknüpft sind, ist geometrisch geführt worden von F. SEVERI, *Sulle superficie e varietà algebriche irregolari di genere geometrico nullo*, « Rendic. Accad. Lincei », (5) 20, 1. Sem. 1911, p. 537.

([84]) M. DE FRANCHIS, *Sulle superficie algebriche le quali contengono un fascio irrazionale di curve*, « Rendic. Circolo Mat. Palermo », 20 (1905), p. 49.

([85]) G. CASTELNUOVO, *Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo*, « Rendic. Circolo Mat. Palermo », 20 (1905), p. 55. Vgl. A. ROSENBLATT, *Sur les surfaces irrégulières, dont les genres satisfon tà l'inégalité $p_g \geqslant 2(p_a + 2)$*, « Rendic. Circolo Mat. di Palermo », 35 (1913), p. 237.

A. ROSENBLATT ([86]) hat durch eine eigenhendere Untersuchung gezeigt, daß, wenn $p_g > 2(p_a + 2)$ ist, die Fläche der *Familie der Regelflächen* angehört oder ein *Büschel von elliptischen Kurven* besitzt derart, daß $p^{(1)} = 1$ ist. Hieraus folgt, daß *für* $p^{(1)} > 1$ *die Ungleichung besteht,* $p_g \leqslant 2(p_a + 2)$. *Das Maximum von* p_a *in bezug auf* p_g *wird nur für die Fläche erreicht, welche die Paare von Punkten von zwei Kurven von den Geschlechtern* $p_a + 2$, *und* 2 *darstellt* ([87]).

21. - Kurven und Systeme von äquivalenten Kurven auf einer Fläche.

Sind auf einer Fläche zwei Kurven C_1 und C_2 von derselben Ordnung gegeben, so entsteht die Frage, wie man erkennen kann, ob sie *äquivalent* sind, d. h. ob sie einem und demselben linearen (System und folglich) Büschel angehören?

Auf diese Frage antwortet F. SEVERI durch die folgenden Äquivalenzkriterien: *Wenn die zwei Kurven* C_1 *und* C_2 *äquivalente* (einer und derselben linearen Schar angehörende) *Gruppen auf der allgemeinen Kurve eines linearen Büschels ausschneiden, so sind* C_1 *und* C_2 *äquivalent:* $C_1 \equiv C_2$ ([88]).

Wenn die Kurven C_1 *und* C_2, *welche einem und demselben kontinuierlichen System angehören, äquivalente Gruppen von Punkte auf der allgemeinen Kurve eines* ∞^1-*Systems* $\{K\}$ *ausschneiden, welches nicht ein Büschel ist, so schließt man ebenfalls, daß* C_1 *und* C_2 *äquivalent sind.*

Wenn man nicht im voraus weiß, ob C_1 und C_2 einem und demselben kontinuierlichen System angehören, und wenn das System $\{K\}$ vom Index $\nu > 1$ ist, d. h. wenn es ν Kurven K durch einen Punkt gibt, so schließt man nur auf die Äquivalenz der Multipla νC_1 und νC_2 ([89]).

Neben dem Theorem von SEVERI empfiehlt es sich, an ein anderes

---

([86]) ROSENBLATT a. a. O. (Anm. ([85])).

([87]) ROSENBLATT a. a. O.

([88]) SEVERI, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* (Nr. 6), « Annali di Mat. », (3) 12 (1905), p. 55. Wenn dieselbe Bedingung in bezug auf die Kurven eines irrationalen Büschels $\{K\}$ erfüllt ist, so hat man

$$C_1 + K_1 + \ldots + K_t \equiv C_2 + \overline{K}_1 + \ldots + \overline{K}_t ,$$

wo $K_1 \ldots K_t$; $\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_t$ zwei Gruppen von Kurven K sind.

([89]) F. SEVERI, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica,* « Atti Istituto Veneto », 65, Teil 2 (1906), p. 629. *Alcune relazioni di equivalenza tra gruppi di punti di una curva algebrica o tra curve di una superficie,* ebendort 70 (1911), p. 70. Für die Aquivalenzkriterien vom transzendenten Gesichtspunkt aus vgl. § 30. Ein nicht-lineares rationales System von Kurven ist immer in einem linearen System enthalten, vgl. F. ENRIQUES, *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche,* « Rendic. Circolo Mat. Palermo », 10 (1896), p. 30 [queste *Memorie,* vol. I, xv].

Kriterium zu erinnern, das zu beurteilen erlaubt, ob ein kontinuierliches System $\{C\}$ in einem linearen System von Kurven derselben Ordnung enthalten ist.

Dieses Kriterium ist analog einem Theorem, das von G. CASTELNUOVO hinsichtlich der Scharen von Gruppen von Punkte auf einer Kurve aufgestellt worden ist ([90]). Man kann es in der folgenden Form aussprechen ([91]).

Hat man auf einer Fläche ein System ∞^1 von irreduziblen Kurven C vom Geschlecht π, vom Grad n und vom Index ν, welches keine Basispunkte und keine variablen mehrfachen Punkte besitzt, so gibt es im allgemeinen

$$N \leqslant \nu(n + 4\pi + I)$$

Kurven C mit einem Doppelpunkte, wo I die ZEUTHEN-SEGREsche Invariante der Fläche bezeichnet. *Damit die Kurven äquivalent sind, ist notwendig und hinreichend, daß N den größten Wert erlangt*:

$$N = \nu(n + 4\pi + I) .$$

22. - Moduln einer Klasse von algebraischen Flächen.

Ebenso wie es für die Kurven eintritt, hängt jede Klasse von Flächen nicht nur von gewissen ganzen Charakteren ab, derart wie die Geschelechter p_a, p_g, $p^{(1)}$, ... (vgl. § 13), sondern auch von einer gewissen Anzahl von Parametern, welche kontinuierlich variabel sind und welche man die Moduln der Klasse nennt. Unter einigen Voraussetzungen hat M. NOETHER ([92]), indem er sich auf seine Formeln der Postulation stützt, eine Formel gegeben, welche dazu dient, die Moduln zu berechnen, von denen eine Klasse von regulären Flächen vom Geschlecht

$$p_g = p_a = p > 3 ,$$

abhängt; es ist die folgende Formel:

$$M = 10p - 2p^{(1)} + 12 .$$

([90]) *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica*, « Rendic. Accad. Lincei », (5) 15, 1. Sem. (1906), p. 337. Vgl. F. SEVERI, « Atti Accad. Torino », 48 (1913), p. 660.

([91]) R. TORELLI, *Sui sistemi algebrici di curve ...*, « Atti Accad. Torino », 42 (1906), p. 86. (Vgl. C. ROSATI, « Rendic. Accad. Lincei », (5) 16, 1. Sem. 1907, p. 952).

([92]) *Anzahl der Moduln einer Klasse algebraischer Flächen*, « Sitzungsberichte der Akad. zu Berlin », 1. Sem. 1888, p. 123.

F. ENRIQUES [93] fand durch ein ganz allgemeines Verfahren, daß eine Klasse von Flächen von den Geschlechtern p_a, p_g, $p^{(1)}$ (welche nicht der Familie der Regelflächen angehören) von

$$M = 10p_a - p_g - 2p^{(1)} + 12 + \Theta .$$

Moduln abhängt, welche für die Flächen einer Familie mit denselben ganzen Charakteren kontinuierlich veränderlich sind. Die Zahl

$$\Theta \geqslant 0 ,$$

bezeichnet dabei einen geometrischen Charakter der Flächenklasse, welcher sich in Beziehung zu den Kuspidalpunkten (pinch-points) der Doppelkurve definiert findet. Man hat übrigens

$$\Theta = p + \Theta', \qquad \text{wo} \qquad \Theta' \geqslant 0 ,$$

ist, für

$$p_g = p_a = p > 3 ,$$

sodaß *die Formel von Noether jedenfalls ein Minimum von M ausdrückt.*

Die allgemeinere Formel von F. ENRIQUES gestattet im besonderen die Anzahl der Moduln zu berechnen, von denen eine Klasse von Flächen von den Geschlechtern

$$p_a = p_g = p^{(1)} = P_2 = 1 ,$$

abhängt. Man findet

$$\Theta = 0 , \qquad M = 19 ,$$

und es ergibt sich hieraus die Bestimmung der verschiedenen Arten dieser Flächen (§ 42).

Die Berechnung der Moduln, welche einer Flächenfamilie angehören, kann auch auf die Abbildung auf eine mehrfache Ebene begründet werden. Durch Vergleichung der so erhaltenen Resultate mit denjenigen, zu welchen man durch die Betrachtung der Gesamtheit der Flächen geführt wird, die eine gewisse Doppelkurve besitzen, hat F. ENRIQUES ein Theorem

---

(93) « Rendic. Accad. Lincei », 17 (5), 1. Sem. 1908, p. 690 [queste *Memorie*, vol. II, XLV].

gefolgert, welches die Existenzbedingungen ([94]) einer mehrfachen Ebene betrifft:

Ist eine ebene Kurve C von einer gewissen geraden Ordnung $2m$ mit einer gewissen Anzahl von Doppel- und von Rückkehrpunkten die Verzweigungskurve einer mehrfachen Ebene der Ordnung n, so ist jede andere Kurve von derselben Ordnung und mit denselben Singularitäten wie C, welche einem kontinuierlichen durch die Kurve C in ihrer Ebene bestimmten System angehört, ebenfalls die Verzweigungskurve einer mehrfachen Ebene der Ordnung n.

Die Kurven C von gegebener Ordnung mit einer gewissen Anzahl von Doppel- und Rückkehrpunkten gruppieren sich im allgemeinen in eine endliche Anzahl kontinuierlicher Systeme der Ebene; die Existenzbedingungen einer n-fachen Ebene mit C als Verzweigungskurve hängen demnach von dem kontinuierlichen System ab, dem C angehört, und nicht von der Kurve, welche man in diesem wählt; diese Bedingungen ergeben sich übrigens aus einer Untersuchung, welche gewisse Gruppen von Substitutionen betrifft, die dort eine fundamentale Rolle spielen.

IV. - DIE THEORIE DER FLÄCHEN IN BEZIEHUNG AUF DIE INTEGRALE, WELCHE MIT DEN FLÄCHEN VERKNÜPFT SIND.

23. - Integrale, welche mit einer Fläche verknüpft sind.

Man erhält neue Charaktere einer Fläche, welche gegenüber den birationalen Transformationen invariant sind, wenn man die Integrale von algebraischen Differentialen betrachtet, die mit der Fläche verknüpft sind. Es handelt sich um die Ausdehnung der klassischen Theorie, welche RIEMANN und CLEBSCH für die algebraischen Funktionen einer Variablen gebildet haben.

Erinnern wir uns zunächst daran, daß vom Gesichtspunkte der *Analysis situs* eine Fläche $f(x, y, z) = 0$ ein reelles Kontinuum von vier Dimensionen ist, dessen Punkte in umkehrbar eindeutiger und kontinuierlicher Weise die komplexen Lösungen von $f = 0$ darstellen. In diesem RIEMANNschen Kontinuum kann man Kontinua von ein, zwei oder drei Dimensionen konstruieren; wenn diese Kontinua geschlossen sind, so

---

([94]) *Sui moduli d'una classe di superficie algebriche e sul teorema d'esistenza per le funzioni algebriche di due variabili*, « Atti Accad. Torino », 47 (1912), p. 300 [questo volume, LII].

heißen sie Zykeln von einer Dimension (oder lineare), von zwei und drei Dimensionen. Die Anzahl der unabhängigen Zykeln, vermehrt um eine Einheit, bildet den Zusammenhang von einer Dimension (oder linearen) p_1, von zwei Dimensionen p_2 oder von drei Dimensionen p_3; man hat übrigens nach E. BETTI $p_1 = p_3$ (siehe III A B 3 (DEHN-HEEGAARD) § 3).

Wir führen jetzt die beiden Arten von Integralen ein, welche mit der Fläche $f = 0$ verknüpft sind, die wir immer mit gewöhnlichen Singularitäten voraussetzen (§ 3). M. NOETHER [95] hat zuerst die Doppelintegrale

$$U = \iint F(xyz)\, dx\, dy$$

betrachtet, wo F eine rationale Funktion von x, y, z ist, welche durch die Relation $f(x, y, z) = 0$ verbunden sind, und wobei das Integral sich über ein Kontinuum von zwei Dimensionen der RIEMANNschen Mannigfaltigkeit erstreckt; man muß x, y, z als Funktionen von zwei reellen Parametern betrachten, welche die Punkte dieses Kontinuums bestimmen. Der Wert des Integrals ändert sich nicht, wenn man das Kontinuum kontinuierlich transformiert, indem man den Rand desselben festhält und singuläre Punkte von F vermeidet [96]. Der Wert, den U auf einem Zykel von zwei Dimensionen annimmt, ist eine Periode von U.

E. PICARD [97] hat hierauf die einfachen Integrale oder von totalen Differentialen eingeführt

$$J = \int (P\, dx + Q\, dy)\ ,$$

wo P und Q rationale Funktionen von x, y, z sind, welche der Integrabilitätsbedingung genügen, wenn man z als Funktion von x, y betrachtet; das Integral erstreckt sich über ein Gebiet von einer Dimension oder einen Weg, welcher von einem Punkte (x_0, y_0, z_0) zu einem Punkte (x, y, z) führt.

Der Wert von J ändert sich nicht, wenn man den Integrationsweg kontinuierlich ändert, indem man seine Endpunkte festhält und die singulären Punkte von P und Q vermeidet. Ist der Weg geschlossen (Zykel von einer Dimension), so liefert der genannte Wert eine Periode des einfachen Integrals. Hieraus folgt, wenn (x_0, y_0, z_0) fest ist, daß J eine Funk-

(95) NOETHER A (1870).

(96) H. POINCARÉ, *Sur les fonctions de deux variables*, « Acta Math. », 2 (1893), p. 97.

(97) *Sur les intégrales de différentielles totales algébriques de première espèce*, « Paris C. R. Acad. des Sciences », 99 (1884), p. 961.

tion des veränderlichen Punktes (x, y, z) auf der Fläche $f = 0$ ist, eine Funktion, welche bis auf Multipla der Perioden bestimmt ist.

Eine weitere Klassifikation der Doppelintegrale wie der einfachen hängt von den Singularitäten ab, welche die genannten Integrale darbieten.

24. - Doppelintegrale erster Gattung.

Mann nennt das Doppelintegral U von der ersten Gattung, wenn es einen endlichen und bestimmten Wert hat, was auch immer das Integrationsgebiet sei. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür besteht darin, daß das Integral U von der Form

$$U = \iint P(x, y, z) \frac{dx\,dy}{f'_z}$$

ist, wo P ein solches Polynom der Ordnung $n - 4$ ist (wenn n den Grad von f bezeichnet), daß die Fläche $P = 0$ eine Adjungierte zu $f = 0$ wird, und wo $f'_z = \partial f / \partial z$ ist.

Die Doppelintegrale erster Gattung gehen durch eine birationale. Transformation der Fläche in andere Integrale derselben Gattung über. Die Anzahl dieser linear unabhängigen Integrale ist gleich dem geometrischen Geschlechte p_g der Fläche, welches auch so auf eine invariante Art definiert erscheint ([98]).

25. - Klassifikation der einfachen Integrale.

E. Picard ([99]), welchem man die Untersuchung der einfachen Integrale einer Fläche verdankt (die man auch Integrale von Picard nennt), untersucht die Singularitäten, welche diese Integrale aufweisen können. Ein einfaches Integral kann in den Punkten von gewissen algebraischen Kurven der Fläche unendlich werden.

Bilden wir in dem Riemannschen Kontinuum einen linearen Zykel, welcher unendlich klein ist und einen Punkt dieser Kurven (= Riemannschen Flächen) umgibt. Wenn der Wert des Integrals, entlang dem

([98]) Noether A. und B. hat als erster ähnliche Integrale betrachtet, für welche er den invarianten Charakter bewiesen hat. Daß jedes Integral erster Gattung in der angegebenen Form dargestellt werden kann, ist von Picard-Simart 1, p. 177 gezeigt worden.

([99]) Picard A, B. Picard-Simart 1 (Kap. V, VI).

Zykel genommen, 0 ist, so ist die Kurve *Polkurve* für das Integral; andernfalls hat man eine *logarithmische Kurve*, für welche der genannte Wert (konstant in jedem Punkte der Kurve) *die logarithmische* (auch polare genannt) *Periode* liefert.

Man nennt ein einfaches Integral von der *ersten Gattung*, wenn es in jedem Punkte der Fläche endlich ist.

Das Integral ist von der *zweiten Gattung*, wenn es nur Polkurven zuläßt, d. h. wenn seine Perioden 0 sind längs jedem Zykel, welcher auf einen Punkt reduziert werden kann. Endlich hat man ein Integral von der *dritten Gattung*, wenn man logarithmische Kurven ins Auge fassen muß. Die Klassifikation ist invariant gegenüber den birationalen Transformationen der Fläche.

Ein einfaches Integral der Fläche $f(x, y, z) = 0$ bestimmt auf einer algebraischen Kurve der Fläche, insbesondere auf dem ebenen Schnitt $y = \bar{y}$, ein ABELsches Integral, welches im allgemeinen von derselben Gattung ist. Aber man kann nicht im allgemeinen von einem ABELschen Integral der ebenen Kurve $f(x, \bar{y}, z) = 0$ zu einem einfachen Integral der Fläche übergehen. Die Perioden des ABELschen Integrals (z. B. der zweiten Gattung) hängen in der Tat von $\bar{y}$ ab; sie genügen einer linearen homogenen Differentialgleichung E, welche von der Ordnung 2π ist, wo π das Geschlecht der ebenen Kurve bezeichnet, und deren Koeffizienten Polynome in y sind.

Diese Gleichung E, welche L. FUCHS bemerkt hat ([100]), spielt eine fundamentale Rolle in der Theorie von PICARD, indem sie erlaubt, festzustellen, ob die Fläche einfache Integrale zweiter (oder im besonderen erster) Gattung besitzt, und sie zu konstruieren (siehe § 27). Die Gleichung E ([101]) hat feste kritische Punkte, welche regulär im Sinne von FUCHS sind (s. II B 5 (HILB)). Sie ändert sich, wenn man von einem Integral zu einem anderen übergeht, aber ihre Gruppe bleibt invariant; es ist die Gruppe der Substitutionen, welche auf den 2π Zykeln der RIEMANNschen Fläche $y = \bar{y}$ entstehen, wenn man die komplexe Variable $\bar{y}$ variiert. Die kritischen Punkte von E fallen in die Berührungspunkte der Fläche f mit den Tangentialebenen $y =$ const.; wird angenommen, daß die Fläche nur gewöhnliche Singularitäten besitzt (im Sinne von § 3) und daß die Koordinatenachsen eine allgemeine Lage in bezug auf die Fläche haben, so haben die Integrale, betrachtet als Funktionen von y, ein reguläres Verhalten in jedem anderen Punkte, selbst im Unendlichen.

PICARD *hat die fundamentalen Substitutionen der Gruppe angegeben,*

([100]) CRELLES, « Journal », 71, p. 91; 73, p. 324.

([101]) PICARD A, B. PICARD-SIMART 1, p. 93; 2, p. 421.

welche zu der Gleichung E gehören; bezeichnet man mit $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2\pi}$ die zu vertauschenden Zykel und gebraucht man das Symbol $\sim$, um die Homologie zu bezeichnen ([102]), so haben diese Substitutionen die Form:

$$\begin{aligned} \sigma_1' &\sim \sigma_1 + \sigma_2 \\ \sigma_2' &\sim \sigma_2 \\ &\cdots\cdots \\ \sigma_{2\pi}' &\sim \sigma_{2\pi} . \end{aligned}$$

26. - Einfache Integrale erster Gattung.

E. Picard ([103]) hat beweisen, daß ein einfaches Integral der ersten Gattung der Fläche $f(x, y, z) = 0$ von der Ordnung n immer in der Form

$$J = \int \frac{B\,dx - A\,dy}{f_z'}$$

geschrieben werden kann, wo A und B zwei Polynome vom Grade $n - 2$ in x, y, z sind, von denen das erste nur den Grad $n - 3$ in y, z und das zweite den Grad $n - 3$ in x, z hat.

Die Integrabilitätsbedingung reduziert sich auf die Existenz eines dritten Polynoms C, welches den Grad $n - 2$ in x, y, z hat, aber nur den Grad $n - 3$ in x, y, so daß die Identität besteht:

$$A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) f$$

für willkürliche Werte von x, y und z.

Hieraus folgt, daß die Polynome A, B, C die Form haben

$$A = x\varphi + A_1 , \qquad B = y\varphi + B_1 , \qquad C = z\varphi + C_1 ,$$

wo φ, A_1, B_1, C_1, Polynome vom Grade $n - 3$ in x, y, z sind, von denen das erste außerdem homogen ist.

([102]) H. Poincaré nennt zwei Zykel homolog, wenn der eine in den anderen durch eine kontinuierliche Deformation übergeführt werden kann, bei der man einen Punkt festhält (s. III A B 3 (Dehn-Heegaard)).

([103]) Picard A, Picard-Simart 1, Kap. V.

Damit J in den mehrfachen Punkten von f endlich sei, ist noch nötig, daß die Flächen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ zu der Fläche $f = 0$ entlang jeder mehrfachen Kurve adjungiert sind, und durch jeden isolierten Punkt, welcher für f ein gewöhnlicher mehrfacher von der Ordnung k ist, mit der Multiplizität $k - 1$ hindurchgehen ([104]).

Setzt man voraus, daß f keinen isolierten mehrfachen Punkt besitzt, so sieht man also, daß die Existenz eines einfachen Integrals erster Gattung die Existenz von drei adjungierten Flächen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ von der Ordnung $n - 2$ mit sich bringt, welche die unendlich ferne Ebene nach einer und derselben Kurve der Ordnung $n - 3$ ($\varphi = 0$) und außerdem nach den unendlich fernen Geraden der Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ schneiden, und zwar derart, daß noch $A = 0$ durch die Berührungspunkte von $f = 0$ mit den Tangentialeben $x =$ const. hindurchgeht; und analog für $B = 0$, $C = 0$.

Diese Bedingungen, welche man auch auf andere elegante Formen bringen kann ([105]), gestatten zu bestätigen, daß *eine allgemeine Fläche ihrer Ordnung keine einfachen Integrale erster Gattung besitzt* ([106]), welche sich nicht auf Konstante reduzieren, was andererseits auch aus § 27 hervorgeht.

Dieselben Bedingungen liefern eine analytische Methode, welche geeignet ist, die Flächen einer gegebenen Ordnung zu bestimmen, die einfache Integrale erster Gattung besitzen. So kann man die Flächen der vierten ([107]) und der fünften ([108]) Ordnung bestimmen, welche derartige Integrale besitzen.

Die genannten Bedingungen von PICARD führen die Frage, die mit der Fläche $f(x, y, z) = 0$ verknüpften einfachen Integrale erster Gattung zu bilden, auf die Bestimmung von drei Polynomen zurück, welche einer

---

([104]) Für viele Einzelheiten in bezug auf diesen Gegenstand siehe M. NOETHER, *Über die totalen algebraischen Differentialausdrücke erster Gattung*, « Erlanger Berichte », 1886, Heft 18, p. 11. « Math. Ann. », 29 (1887), p. 329.

([105]) Vgl. PICARD-SIMART 1, p. 119.

([106]) In betreff des Einflusses der singulären Punkte auf die Existenz der einfachen Integrale erster Gattung siehe PICARD-SIMART 1, p. 120. A. BERRY, *A generalisation of a theorem of M. Picard ...*, « Acta Math. », 27 (1903), p. 157.

([107]) Vgl. H. POINCARÉ, « Paris C. R. », 99, p. 1145. PICARD-SIMART 1, p. 136; 2, p. 523. A. BERRY, *On quartics surfaces ...*, « Cambridge Phil. Trans. », 18 (1900), p. 324. M. DE FRANCHIS, *Le superficie irrazionali di 4° ordine ...*, « Rendic. Circolo Mat. Palermo », 14 (1900), p. 33, wo die Klassifikation auf geometrischem Wege vervollständigt ist. H. LACAZE, *Sur la connexion linéaire de quelques surfaces ...*, « Annales de Toulouse », (p. 2) 3 (1901), p. 151.

([108]) A. BERRY, *On certain quintic surfaces ...*, « Cambridge Phil. Transactions », 19 (1902), p. 249; 20 (1904), p. 74. M. DE FRANCHIS, *Le superficie più volte irregolari di 5° ordine con punti tripli*, « Rendic. Lincei », (5) 15 (1906), p. 217. *Le superficie irregolari del 5° ordine con infinite coniche*, « Rendic. Lincei », (5) 15, p. 284. (Vgl. E. TOGLIATTI, « Rendic. Lincei », 26 (1912), p. 5, wo die Klassifikation vervollständigt ist. DE FRANCHIS, « Rendic. Circolo Mat. Palermo », 35 (1913), p. 47).

Gleichung mit partiellen Derivierten genügen; gerade durch die Integration dieser Gleichung gelangt z. B. BERRY zu den oben auseinandergesetzten Anwendungen.

Die allgemeine Aufgabe nun, die einfachen Integrale erster Gattung zu konstruieren, welche mit der Fläche f der Ordnung n verknüpft sind, ist durch das folgende Theorem von F. SEVERI (109) gelöst.

Ist eine Fläche A von der Ordnung $n-2$ gegeben, welche zu f adjungiert ist, und durch die unendlich-ferne Gerade der Ebenen $y = \text{const.}$ sowie durch die Berührungspunkte dieser Ebenen mit f hindurchgeht, so kann man zu A eine andere adjungierte Fläche B von derselben Ordnung hinzugesellen, derart, daß das Integral

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z},$$

welches mit f verknüpft ist, von der ersten Gattung wird.

Man erhält so *die rationale Konstruktion* der zu einer Fläche gehörenden einfachen Integrale erster Gattung, in Analogie zu der Konstruktion mittels der adjungierten Kurven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche bei ebenen Kurven n^{ter} Ordnung zu deren ABELschen Integralen erster Gattung führt.

Das voraufgehende Resultat kann vom invarianten Gesichtspunkt aus in der folgende Form ausgesprochen werden:

Sei $|K|$ ein lineares Büschel von irreduziblen Kurven auf der Fläche $f=0$ und $|K'|$ das adjungierte System zu dem Büschel, so ist die Anzahl der unabhängigen Kurven von $|K+K'|$, welche durch die Basispunkte und durch die isolierten Doppelpunkte der Kurven des Büschels hindurchgehen, gleich der Anzahl der verschiedenen einfachen Integrale der ersten Gattung, welche die Fläche besitzt (110).

---

(109) *Sur les intégrales simples de la première espèce attachées à une surface algébrique,* « Paris C. R. », 152 (1911), p. 1079. Das Theorem des Textes folgt aus dem folgenden Lemma. Betrachtet man das Integral

$$J = \int \frac{A\,dx}{f'_z},$$

wo A eine Kurve der Ordnung $n-3$ bedeutet, welche zu dem Schnitt von f mit einer Ebene allgemeiner Lage $y = \text{const.}$ adjungiert ist; so besteht die Bedingung dafür, daß die Perioden von J nicht von y abhängen, darin, daß J nicht von der dritten Gattung wird für irgendeinen speziellen Wert von y.

(110) Aus §§ 26 und 28 folgt eine neue funktionale Bedeutung der Irregularität $p_g - p_a$, indem diese Zahl durch die Anzahl der unabhängigen Kurven von $|K+K'|$ gegeben wird, die den angegebenen Bedingungen genügen.

Sobald man zwei Integrale der ersten Gattung:

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z}, \qquad \int \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z}$$

kennt, welche nicht voneinander abhängige Funktionen sind, so kann man ein Doppelintegral erster Gattung bilden. Man zeigt in der Tat ([111]), daß

$$\frac{AB_1 - A_1B}{f'_z}$$

ein Polynom vom Grade $n-4$ ist, das zu der Fläche f adjungiert ist.

Hat man dagegen *zwei einfache Integrale erster Gattung, von denen das eine eine Funktion des anderen ist, so hat* M. DE FRANCHIS ([112]) *bewiesen, daß die Fläche ein irrationales Kurvenbüschel enthält.*

27. - Einfache Integrale zweiter Gattung.

E. PICARD ([113]) hat das Problem gestellt und gelöst, die Anzahl der mit einer Fläche $f(x, y, z) = 0$ verknüpften Integrale zweiter Gattung zu berechnen, welche als voneinander verschieden betrachtet werden müssen; da die rationalen Funktionen der Punkte der Fläche (§ 6) Integrale zweiter Gattung bilden, muß man zwei Integrale als *verschieden* betrachten, wenn keine lineare Kombination derselben existiert, welche sich auf eine rationale Funktion reduziert.

Greifen wir die *fundamentale Gleichung E* von § 25 wieder auf. Für *eine allgemeine Fläche ihrer Ordnung ist E irreduzibel*, alle linearen Zykel reduzieren sich auf 0-Zykel ([114]) ($p_1 = 1$), *es gibt keine anderen einfachen*

([111]) PICARD A, PICARD-SIMART 1, p. 137. Vgl. M. NOETHER, *Über die totalen ...*, a. a. O. F. SEVERI, *Relazioni tra gl'integrali semplici e gl'integrali multipli di prima specie di una varietà algebrica*, « Annali di Mat. », (p. 3) 20 (1913), p. 201.

([112]) *Sulle superficie algebriche le quali contengono un fascio irrazionale di curve*, « Rendic. Palermo », 20 (1905), p. 49. (Vgl. G. CASTELNUOVO, *Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo*, a. a. O. in § 19). Das Verfahren von DE FRANCHIS ist durch den Autor zur Bestimmung der Flächen $z^2 = f(x, y)$ verwandt worden, welche Integrale von PICARD besitzen, siehe *I piani doppi dotati di due o più differenziali totali di prima specie*, « Rendic. Lincei », (5), 13, 1. Sem. (1904), p. 688. (Vgl. « Circolo Mat. di Palermo », 20 (1905), p. 331). In betreff der Fläche $z^3 = f(x, y)$ siehe A. COMESSATTI, *Sui piani tripli ciclici irregolari*, « Rendic. Circolo Mat. Palermo », 31 (1911), p. 369.

([113]) PICARD B, PICARD-SIMART 1, p. 160.

([114]) In der Tat, wenn die Zykel ineinander überführbar sind, so kann man sie alle auf einen und denselben Zykel zurückführen, welcher in einer Tangentialebene $y = \text{const.}$ sich auf die Umgebung des Berührungspunktes reduziert.

Integrale zweiter Gattung, als die rationalen Funktionen, noch folglich Integrale erster Gattung, welche sich nicht auf eine Konstante reduzieren (siehe § 26).

Man kann nicht umgekehrt behaupten, daß $p_1 > 1$ ist, wenn E reduzibel ist. Aber wenn der lineare Zusammenhang $p_1 > 1$ ist, so ist die Gleichung E sicher reduzibel, und *f besitzt $r = p_1 - 1$ linear unabhängige Integrale, welche sich auf rationale Funktionen von y*, ja sogar auf Polynome in *y reduzieren*, wenn der Koeffizient von dx, der unter dem Integral steht, den ebenen Schnitt im Unendlichen zur Polkurve hat ([114a]).

Die Gleichung E, befreit von den r rationalen Integralen, reduziert sich auf eine Gleichung E_0 von der Ordnung $2\pi - r$, welcher die ABELschen Integrale der Kurve der Ebene $y = \text{const.}$ genügen, die nicht rationale Funktionen von y sind.

Die Anzahl der verschiedenen einfachen Integrale der zweiten Gattung ist gleich dem linearen Zusammenhang p_1, vermindert um eine Einheit, d. h. gleich der Anzahl ihrer Perioden; diese können also willkürlich gewählt werden.

So erhält E. PICARD die Ausdehnung eines wohlbekannten Theorems von B. RIEMANN über die Abelschen mit einer algebraischen Kurve verknüpften Integrale auf Flächen.

Zu der von PICARD entwickelten Theorie der einfachen Integrale zweiter Gattung hat F. SEVERI ([115]) eine Untersuchung hinzugefügt, welche die Polkurve dieser Integrale betrifft.

Durch Subtraktion von rationalen Funktionen kann man sich auf den Fall beschränken, in welchem das gegebene Integral

$$J = \int (P\,dx + Q\,dy)$$

eine Polkurve C erster Ordnung besitzt, die irreduzibel ist. Auf der Kurve $y = \text{const.}$ wird J ein Abelsches Integral zweiter Gattung, welches hinsichtlich der Schnittpunkte von C (Pole) bestimmte Residuen hat. Diese Residuen können als die Werte einer rationalen Funktion der Punkte von C betrachtet werden: es handelt sich um die Funktion, welche SEVERI rationale Residualfunktion von J auf C nennt. *Die Pole der Residualfunktion nun bleiben fest, wenn man das Integral J unter denjenigen variiert, welche dieselbe Polkurve C besitzen.* Die Gruppe der Nullpunkte besitzt einen festen und einen variablen Bestandteil, der durch die Punkte von C gebildet wird, in welchen J sich wie ein Integral erster Gattung

([114a]) PICARD-SIMART 2, p. 389.

([115]) *Sulle superficie che posseggono integrali di* PICARD *della seconda specie*, « Rendic. Accad. Lincei », (5) 13, 2. Sem. 1904, p. 253; « Math. Ann. », 61 (1905), p. 20.

verhält. Diese letzteren *Nullgruppen* G_n *gehören der vollständigen Schar an*, welche die *charakteristische* Schar des linearen Systems $|C|$ enthält, das durch C bestimmt ist (wobei die Dimension des Systems > 0 vorausgesetzt wird), aber *eine Gruppe* G_n *auf* C *braucht nicht eine charakteristische Gruppe von* $|C|$ *zu sein* (welche durch eine andere Kurve C ausgeschnitten ist), *wenn* J *sich nicht durch Subtraktion von Integralen erster Gattung auf eine rationale Funktion mit der Polkurve* C *reduziert.*

Bei dieser Veranlassung sei bemerkt, daß, wenn der lineare Zusammenhang $p_1 > 1$ ist, immer einfache Integrale zweiter Gattung existieren, welche sich nicht auf die erste Gattung reduzieren.

28. - Die einfachen Integrale, welche mit einer Fläche verknüpft sind, und die Irregularität dieser Fläche.

In der Untersuchung der hyperelliptischen Flächen (von PICARD), entwickelt von G. HUMBERT (§§ 39, 40), hat es sich gezeigt, daß diese Flächen, welche zwei linear-unabhängige einfache Integrale erster Gattung besitzen, die Irregularität $p_g - p_a = 2$ besitzen.

Andere Beispiele, durch die Flächen geliefert, welche die Paare von Punkten von einer oder von zwei algebraischen Kurven darstellen ([116]), haben die Annahme bestätigt, daß ein Band zwischen der Existenz der einfachen Integrale erster und zweiter Gattung und der Irregularität der Fläche bestehe.

Die Frage, die sich so bietet, ist verknüpft mit derjenigen, *die Flächen, welche einfache Integrale erster oder zweiter Gattung besitzen, vom geometrischen Gesichtspunkte aus zu charakterisieren.*

G. HUMBERT ([117]) hat bei Verallgemeinerung der erwähnten Beispiele bemerkt, daß *jede Fläche, welche ein kontinuierliches System von Kurven besitzt, das nicht einem linearen System angehört, einfache Integrale erster Gattung besitzt.*

F. ENRIQUES ([118]) hat daraus geschlossen, daß die Fläche irregulär ist.

Im Jahre 1901 ist dann F. ENRIQUES ([119]), indem er die Umkehrung

---

([116]) Siehe die Bibliographie von § 18.

([117]) *Sur une propriété d'une classe de surfaces algébriques*, « Paris C. R. », 117 (1893), p.361; *Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques*, « Journal de Math. », (4) 10 (1894), p. 190.

([118]) *Una proprietà delle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica regolare*, « Rendic. Circolo Mat. Palermo », 13 (1899), p. 95 [queste *Memorie*, vol. II, XXVI].

([119]) *Sur les surfaces algébriques admettant des intégrales de différentielles totales de première espèce*, « Ann. de Toulouse », (2) 3, p. 77 [queste *Memorie*, vol. II, XXXI]. Der Beweis ist durch F. SEVERI vereinfacht worden, *Osservazioni sui sistemi continui di curve ...*, « Atti Accad. Torino », 39 (1904), p. 490.

des Theorems von HUMBERT zu beweisen suchte, zu dem folgenden Resultat gelangt: *Jede Fläche, welche q einfache Integrale erster Gattung mit $2q$ Perioden besitzt, enthält ein kontinuierliches System von Kurven, welche nicht einem linearen System angehören, und ist irregulär.*

Im September des Jahres 1904 hat F. SEVERI ([120]) durch das Studium der Residualfunktion in bezug auf die Polkurven der Integrale zweiter Gattung, welche immer einer Fläche von linearem Zusammenhang $p_1 > 1$ angehören (§ 27), bewiesen, daß *jede Fläche, welche einfache Integrale erster Gattung besitzt, irregulär ist.*

Im Dezember 1904 hat F. ENRIQUES ([121]), nachdem er die charakteristische Eigenschaft der irregulären Flächen, kontinuierliche Systeme von Kurven zu enthalten, welche nicht linearen Systemen angehören, gezeigt hatte (§ 18), daraus gefolgert, daß *jede irreguläre Fläche einfache Integrale erster Gattung besitzt.*

Es bilden also die irregulären Flächen und diejenigen Flächen, welche einfache Integrale erster Gattung besitzen, eine und dieselbe Familie.

Dieses Resultat kann weiter präzisiert werden, indem man versucht, eine quantitative Beziehung zwischen der Irregularität $p_g - p_a$ und der Anzahl q der Integrale erster Gattung, welche linear-unabhängig voneinander sind, zu bestimmen. Man kann zu dieser Relation gelangen, indem man sich darauf stützt, daß die kontinuierlichen Systeme, welche man nach ENRIQUES auf einer irregulären Fläche konstruiert, von $\infty^{p_g - p_a}$ nicht-äquivalenten linearen Systemen gebildet sind (§ 18).

Zunächsth at F. SEVERI bewiesen, daß man hat

$$p_1 - 1 - q = p_g - p_a \,,$$

$$q \leqslant p_g - p_a \,,$$

wobei $p_1 - 1$ die Anzahl der von einander verschiedenen einfachen Integrale der zweiten Gattung ist ([122]). Führt man die Untersuchung weiter durch die Betrachtung der Mannigfaltigkeit von PICARD, welche mit der Fläche verknüpft ist (§ 19), oder durch Ausdehnung des ABELschen

---

([120]) *Sulle superficie che posseggono integrali di* PICARD *della seconda specie*, a. a. O.

([121]) Siehe ([76]). Man findet in dieser Abhandlung die Ungleichung

$$p_1 - 1 - q \leqslant p_g - p_a \,,$$

wo $p_1 - 1$ die Anzahl der Integrale zweiter Gattung bedeutet und q diejenige der Integrale erster Gattung.

Zu demselben Resultat gelangt man auch durch die Untersuchung der Gleichung E (§ 25), siehe E. PICARD, « Paris C. R. », 140 (1905), p. 117, PICARD-SIMART 2, p. 417.

([122]) *Sulla differenza fra i numeri degli integrali di Picard ...*, « Atti Accad. Torino », 40, p. 288 (Januar 1905).

Theorems auf die Flächen, so gelangt man nach G. CASTELNUOVO ([123]) und F. SEVERI ([124]) zu der inversen Ungleichung

$$q \geqslant p_g - p_a ,$$

so daß man das folgende Theorem aussprechen kann ([125]):

Die Anzahl der einfachen Integrale erster Gattung, welche mit einer Fläche der Irregularität $p_g - p_a$ *verknüpft sind, ist*

$$q = p_g - p_a .$$

Hieraus folgt, daß *die Anzahl der von einander verschiedenen einfachen Integrale zweiter Gattung*, welche gleich dem linearen Zusammenhang p_1 vermindert um eine Einheit ist (§ 27), durch

$$p_1 - 1 = 2(p_g - p_a)$$

gegeben ist.

Es ergibt sich also *die Anzahl der einfachen Integrale erster Gattung immer gleich der Hälfte derjenigen ihrer Perioden.*

Man beweist auch ([126]), *daß die* ABEL*schen Funktionen, welche aus der Inversion der einfachen mit einer algebraischen Fläche verknüpften Integrale hervorgehen, die allgemeinsten* ABEL*schen Funktionen sind.*

29. - Einfache Normalintegrale.

F. SEVERI ([126]) hat versucht, die Reduktion auf die Normalform, welche RIEMANN für die ABELschen Integrale angegeben hat, auf die einfachen Integrale einer Fläche auszudehnen. Er beweist zunächst, daß man, wenn der lineare Zusammenhang des RIEMANNschen Kontinuums $p_1 = 2q + 1$ ist, immer $2q$ verschiedene lineare Zykel derart konstruieren kann, daß jeder andere lineare Zykel sich kontinuierlich auf die Vereinigung einer ganzen Anzahl dieser Zykel, durchlaufen im einen

([123]) *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare*, « Rendic. Acc. Lincei », (5) 14, 1. Sem., p. 545, 593, 655 (Mai-Juni 1905).

([124]) *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche*, « Annali di Mat. », (3), 12 (August 1905), p. 55.

([125]) H. POINCARÉ, *Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques*, « Annales de l'École Norm. Sup. », (p. 3), 27 (1910) findet durch eine andere Methode aufs neue, daß die Anzahl q gleich der Dimension $p_g - p_a$ des umfassenderen kontinuierlichen Systems ist, welches von nichtäquivalenten Kurven gebildet wird.

([126]) CASTELNUOVO-ENRIQUES, *Sur les intégrales simples de première espèce ...*, « Annales de l'École Norm. Sup. », (3), 22 (1906), p. 339 [queste *Memorie*, vol. II, XXXVIII].

oder im anderen Sinne, reduzieren kann. Man kann außerdem fordern, daß die Zykel sich in zwei Gruppen $\nu_1, \ldots, \nu_q$ und $\nu_{q+1}, \ldots, \nu_{2q}$ teilen, derart daß, wenn man mit

$$\tau_1, \ldots, \tau_q, \tau_{q+1}, \ldots, \tau_{2q} \quad \text{und} \quad \omega_1, \ldots, \omega_q, \omega_{q+1}, \ldots, \omega_{2q}$$

die Perioden bezeichnet, welche zu den *Normal*zykeln von zwei linearen Integralen erster Gattung gehören, sich ergibt

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} d_\lambda(\tau_\lambda \omega_{\lambda+q} - \tau_{\lambda+q}\omega_\lambda) = 0$$

und

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} d_\lambda(\tau'_\lambda \tau''_{\lambda+q} - \tau_{\lambda+q}\tau''_\lambda) > 0 \, ,$$

wo die d_λ ganze Zahlen > 0 sind, und wo gesetzt ist

$$\tau_\lambda = \tau'_\lambda + i\tau''_\lambda \text{ usw.}$$

Die d_λ hängen von der Wahl der Zykel ν ab. Es ergibt sich, daß man (wenn die Normalzykel fixiert sind) beliebig vorgeben kann: entweder die reellen (oder imaginären) Bestandteile der $2q$ Perioden eines einfachen Integrals erster Gattung, oder auch die Perioden hinsichtlich der q Zykel der ersten (oder der zweiten) Gruppe; dieses Integral wird dann bis auf eine Konstante bestimmt.

Das *Integral erster Gattung ist normal*, wenn es die Perioden 0 entlang von $q-1$ Zykeln der ersten Gruppe und die Periode 1 längs dem übrig bleibenden Zykel dieser Gruppe hat. Man erhält auf diese Weise q verschiedene Normalintegrale.

Um ein *Normalintegral zweiter Gattung* zu bestimmen, muß man die (einfache) Polkurve des Integrals vorgeben; man fordert dann weiter, daß die Perioden des Integrals hinsichtlich der Zykel der ersten Gruppe sämtlich $= 0$ sind. Wenn die Polkurve einem regulären System angehört, so kann man auf diese Weise q verschiedene Normalintegrale zweiter Gattung bilden.

Endlich kann man auf analoge Weise den Begriff eines *Normalintegrals dritter Gattung* aufstellen ([128]).

([127]) *Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degli integrali di Picard,* « Rendic. Circ. Mat. Palermo », 21 (1906), p. 257.

([128]) Siehe in Severi, a. a. O., die Beziehungen zwischen den Perioden, welche für die Normalintegrale nicht Null sind.

Schließlich bemerken wir, daß die oben auseinandergesetzte Reduktion SEVERI dazu geführt hat, einen anderen Beweis des Theorems zu geben, daß die Mannigfaltigkeit von PICARD, welche mit einer Fläche verknüpft ist, eine ABELsche ist (§ 19). Die Tabelle der Normalperioden für die einfachen Integrale erster Gattung der Mannigfaltigkeit kann hinsichtlich der Divisoren d_λ von derjenigen, welche zu den Integralen der Fläche gehört, verschieden sein ([129]).

30. - Abelsches Theorem auf den Flächen.

Auf mehrere Arten hat man versucht, das ABELsche Theorem in betreff der algebraischen Kurven auf die Flächen auszudehnen.

Zuerst hat M. NOETHER ([130]), indem er auf die *Doppelintegrale* zurückging, eine Eigenschaft der Schnittpunktgruppen (x_i, y_i, z_i) von zwei variablen Kurven in zwei linearen Büscheln abgeleitet: die Summe der Werte, welche ein Doppelintegral erster Gattung annimmt, wenn (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ... Kontinua von zwei Dimensionen durchlaufen, welche durch die Variation der Büschelparameter bestimmt sind, ist konstant.

Darauf hat F. SEVERI ([131]) sich die Aufgabe gestellt, mit Hilfe der *einfachen Integrale* die Bedingung dafür zu charakterisieren, daß die *Kurven* derselben Ordnung auf einer algebraischen Fläche einem und demselben linearen System angehören, d. h. daß sie *äquivalent* sind.

Er ist zu dem folgenden Theorem gelangt:

Die Bedingung dafür, daß die Kurven C eines kontinuierlichen Systems, welches einer Fläche f angehört, äquivalent sind, besteht darin, daß die Summe der Werte, welche jedes einfache Integral erster Gattung in den gemeisamen Punkten von zwei Kurven C annimmt, konstant ist.

Hat man zwei Kurven C_1, C_2, von denen man nicht weiß, ob sie einem und demselben kontinuierlichen System angehören, deren virtuelle Grade aber gleich der Anzahl ihrer Schnittpunkte sind, so kann man auf analoge Weise erkennen, ob diese Kurven oder jedenfalls zwei gleiche Multipla derselben äquivalent sind, wenn man die Summe der Integrale in den Punkten vergleicht, in welchen C_1 und C_2 durch eine Kurve K getroffen werden, welche in einem kontinuierlichen System veränderlich ist.

([129]) Vgl. F. SEVERI, *Un teorema d'inversione per gl'integrali semplici di prima specie,* « Atti Istituto Veneto », 72, Teil 2 (1913), p. 765.

([130]) NOETHER A, p. 304 (Anmerkung). - PICARD-SIMART 1, p. 190. Einige Anwendungen in HUMBERT, « Journ. de Math. », 5 (ser. 4) (1889), p. 4.

([131]) *Il teorema d'Abel ...,* a. a. O. (siehe ([124])); *Intorno al teorema d'Abel,* a. a. O. (siehe ([127])); vgl. § 21 dieses Art.

Eine *andere Ausdehnung* des ABELschen Theorems mit Hilfe der einfachen Integrale hat F. SEVERI dazu geführt ([132]), *die regulären Involutionen von Punktgruppen auf einer Fläche zu charakterisieren*, d. h. diejenigen, welche in einer Transformation $[1, n]$ (§ 15) einer regulären Fläche entsprechen.

Bilden wir die Summe der Werte, welche jedes einfache Integral erster Gattung in den Punkten einer und derselben Gruppe annimmt, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Involution regulär ist, die, daß die genannten Summen nicht von der gewählten Gruppe abhängen.

31. - Einfache Integrale dritter Gattung.

Wir haben die einfachen Integrale dritter Gattung und die zu ihnen gehörigen logarithmischen Kurven (§ 25) schon definiert.

Zu jeder logarithmischen Kurve gehört eine bestimmte Periode; die Summe dieser Perioden multipliziert mit passend gewählten ganzen Zahlen ist 0.

Ein einfaches Integral dritter Gattung besitzt wenigstens zwei logarithmische Kurven, und man kann immer ein Integral bilden, welches nur zwei logarithmische Kurven besitzt, die einem und demselben algebraischen System angehören. Nunmehr handelt es sich darum zu sehen, ob man, nachdem man *willkürlich* zwei oder mehrere algebraische Kurven auf der Fläche fixiert hat, ein Integral dritter Gattung konstruieren kann, dessen logarithmische Kurven sich unter den gegebenen Kurven befinden.

Auf diese Frage antwortet das folgende Theorem von E. PICARD ([133]): *Auf jeder Fläche kann man ϱ irreduzibele partikuläre algebraische Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_\varrho$ derart ziehen, daß kein einfaches Integral dritter Gattung existiert, welches nur die Gesamtheit oder einen Teil dieser Kurven zu logarithmischen Kurven hat, aber derart, daß ein Integral existiert, welches eine $(\varrho + 1)^{\text{te}}$ beliebige Kurve K der Fläche sowie die Gesamtheit oder einen Teil der Kurven C zu logarithmischen Kurven hat.*

Die Anzahl ϱ ist eine *relative Invariante* und liefert eine absolute Invariante, wenn sie sich auf Flächen ohne ausgezeichnete Kurven bezieht (§ 4).

([132]) *Il teorema d'Abel ...*, a. a. O. Der Fall der *rationalen* Involutionen ist von H. POINCARÉ betrachtet worden, *Sur les intégrales de différentielles totales*, « Paris C. R. », 99 (1884), p. 1145. *Sur une généralisation du théorème d'Abel*, « Paris C. R. », 100 (1885), p. 40.

([133]) *Sur les intégrales de différentielles totales de troisième espèce dans la théorie des surfaces algébriques*, « Annales de l'École Norm. Sup. », (p. 3) 18 (1901); PICARD-SIMART 2, p. 230.

Unter den einfachen Integralen dritter Gattung gibt es algebraisch-logarithmische Kombinationen von der Form

$$\sum A_k \log R_k(x, y, z) + P(x, y, z) ,$$

wo die R und P rationale Funktionen von x, y, z und die A Konstante sind.

Die Flächen, für welche jedes einfache *Integral dritter Gattung sich auf eine algebraisch-logarithmische Kombination reduziert*, sind durch F. SEVERI (134) bestimmt worden. Es sind die *regulären Flächen* ($p_1 = 1$), die hiermit auch vermöge der Integrale dritter Gattung charakterisiert sind.

32. - Über die Basis für die Kurvensysteme einer Fläche.

Das fundamentale Theorem von PICARD bezüglich der einfachen Integrale dritter Gattung hat F. SEVERI (135) gestattet, eine wichtige Frage in betreff der Konstruktion der Systeme von Kurven auf einer Fläche zu lösen; die Invariante ϱ erhält so eine sehr einfache geometrische Interpretation.

Seien $C_1, \ldots, C_h, C_{h+1}, \ldots, C_k$, mehrere Kurven auf einer Fläche f; man sagt, diese Kurven seien algebraisch-abhängig, wenn zwei Kurven

$$\lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_h C_h , \qquad \lambda_{h+1} C_{h+1} + \ldots + \lambda_k C_k$$

einem und demselben algebraischen System angehören (wo die λ ganze positive Zahlen bezeichnen).

Die Bedingung dafür, daß $C_1, \ldots, C_k$ algebraisch-unabhängig sind, kann mit Hilfe der Matrix von $k + 1$ Kolonnen und von k Zeilen $|n_{ij} m_i|$ ausgedrückt werden, wo n_{ij} die Anzahl der Schnittpunkte von C_i und C_j, n_{ii} den Grad von C_i, m_i die Ordnung von C_i bezeichnet: $C_1, \ldots, C_k$ *sind unabhängig, wenn* $|n_{ij} m_i| \neq 0$ *ist.*

Nun kann man auf der Fläche f ϱ Kurven ziehen, $C_1, \ldots, C_\varrho$, *welche*

(134) *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica* (§ 5), « Math. Ann. », 62 (1905), p. 194.

(135) *Sulla totalità delle curve ...*, a. a. O. siehe (134). Für den Fall, in welchem die Integrale dritter Gattung sich auf algebraisch-logarithmische Kombinationen reduzieren, vgl. PICARD-SIMART 2, p. 246.

Siehe auch H. POINCARÉ, *Sur les courbes tracées ...*, a. a. O. (in § 28 (125)) und « Sitzungsber. d. Berliner Math.-Ges. », 10 (1910), p. 28.

algebraisch-unabhängig sind, derart, daß jede andere Kurve, die auf der Fläche gezogen wird, algebraisch von diesen abhängt.

Diese ϱ Kurven C bilden auf f eine *Basis* für die Gesamtheit der Kurven, welche f angehören. Alle kontinuierlichen Systeme von Kurven auf f können durch Addition, Subtraktion und *Division* der kontinuierlichen Systeme $\{C_1\} \dots \{C_\varrho\}$ erhalten werden.

Man kann die voraufgehende Untersuchung weiterführen, indem man versucht, eine *Minimalbasis* zu bestimmen, mittels der man alle kontinuierlichen Kurvensysteme auf f durch Addition und Subtraktion, *ohne Division* konstruieren kann.

F. SEVERI ([136]) beweist, daß eine derartige Minimalbasis immer existiert. Man hat also den Satz: *alle kontinuierlichen Kurvensysteme, welche einer Fläche angehören, können durch Addition und Subtraktion erhalten werden, indem man von einer endlichen Anzahl*

$$\varrho + \sigma - 1 \quad \text{oder} \quad (\text{für } \varrho = 1) \qquad \sigma + 1 \qquad (\sigma \geqslant 1)$$

von Systemen ausgeht.

Die Zahl σ hat die folgende Bedeutung: ein kontinuierliches System, welches der Fläche angehört, kann im allgemeinen als Äquimultiplum verschiedener nicht äquivalenter Systeme erhalten werden; die Anzahl dieser verschiedenen Systeme mit einem und demselben Multiplum kann ein gewisses Maximum nicht überschreiten, welches genau gleich σ ist ([137]).

Für die allgemeine Fläche der Ordnung n ohne Singularitäten ist die Basiszahl $\varrho = 1$ und $\sigma = 1$, indem alle Kurven auf der Fläche vollständige Schnitte und folglich alle Kurvensysteme Multipla des Systems der ebenen Schnitte sind ([138]).

Die Betrachtung der Basis gestattet die Anzahl der Schnittpunkte von zwei Kurven auf f mit Hilfe der Anzahlen der Schnittpunkte der Basiskurven untereinander und der Gradzahlen dieser Kurven linear

---

([136]) *La base minima pour la totalité des courbes algébriques tracées sur une surface algébrique* « Annales de l'École Norm. », 25 (1908), p. 3. Man wird im allgemeinen die Kurvensysteme von nicht bestimmen können, indem man nur durch Summation vorgeht und von einer endlichen Anzahl von Systemen ausgeht, und zwar nicht einmal auf einer regulären Fläche; vgl. F. ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno* (Nr. 21), « Memorie Soc. it. delle Scienze (detta dei 40) », (3) 14 (1907), p. 327 [queste *Memorie*, vol. II, XXXIX].

([137]) In betreff der Eigenschaften der Division siehe auch F. SEVERI, *Complementi alle teoria della base ...*, « Rendic. Circ. Mat. Palermo », 30 (1910), p. 265. In dieser Abhandlung findet man auch, daß die Bestimmung der Kurven vom positiven Grad, welche f angehören, sich auf die Lösung in ganzen Zahlen *einer fundamentalen quadratischen Form* in ϱ Variablen zurückführen läßt, welche mit f verknüpft ist, wobei die Lösungen außerdem zwei Ungleichungen genügen müssen.

([138]) M. NOETHER, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven*, § 11. « Abhandlungen der Akademie zu Berlin », 1882.

auszudrücken; man hat auf diese Weise eine *Ausdehnung des Theorems von Bezout* ([139]).

Wir schließen diese Nummer, indem wir auf das Problem hinweisen, die Basiszahl ϱ zu bestimmen, welche einer algebraischen Fläche angehört, ein schwieriges Problem, welches nur in speziellen Fällen gelöst ist ([140]).

33. - Doppelintegrale zweiter Gattung.

Wir kehren jetzt zu den Doppelintegralen

$$U = \iint R(x, y, z)\, dx\, dy$$

zurück, wo R eine rationale Funktion von x, y, z ist, welche durch die Relation $f(x, y, z) = 0$ verbunden sind.

In dem Kontinuum von RIEMANN von vier Dimensionen fixieren wir einen beliebigen Punkte A und ein genügend kleines Kontinuum σ von zwei Dimensionen, welches den Punkt A enthält. Wenn der Wert von U, über σ erstreckt, endlich ist, oder auch, wenn man zwei rationale Funktionen (abhängig von A) M, N derart finden kann, daß die Differenz

$$U - \iint \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy\ ,$$

über σ erstreckt, bei jeder Wahl von σ und für jeden Punkt A endlich ist, so sagt man, daß U ein *Doppelintegral zweiter Gattung* ist ([141]).

([139]) F. SEVERI, *Sulla totalità ...*, a. a. O.

([140]) Vgl. PICARD-SIMART 2, Kap. 9. F. SEVERI (1903) für die Flächen, welche die Paare von Punkten einer oder zweier algebraischer Kurven darstellen (s. die in § 18 ([75]), zitierte Abhandlung). (Vgl. L. REMY, « Paris C. R. », 147, 2. Sem. (1908), p. 783, 961, 1270; « Annales de l'École Norm. », (3) 26 (1909), p. 259; M. DE FRANCHIS, « Rendic. Circ. Mat. Palermo », 28 (1909), p. 152. Für die Flächen von der vierten Ordnung: A. MARONI, « Rendic. Ist. Lombardo », (2) 38, p. 193; F. SEVERI, *La base minima ...*, *Complementi ...*, a. a. O.

Für die Basis der Kummerschen Flächen siehe die unter § 40 ([186]), genannte Abhandlung von G. HUMBERT. Für die Basis der hyperelliptischen Flächen (§ 40) siehe BAGNERA und DE FRANCHIS ([187]) (III), « Rendic. Circ. Mat. Palermo », 30 (1910), p. 185. Für die Flächen vom Geschlecht 1 hat SEVERI allgemein bewiesen, daß die Basisanzahl $\varrho = 1$ (in § 42 ([212]), genannte Abhandlung). Für die Basis der Flächen vom Geschlecht 0 und vom Doppelgeschlecht 1 siehe G. FANO (s. die § 41 ([264]), genannte Abhandlung). Die Basiszahl der Flächen vom linearen Geschlecht $p^{(1)} = 1$, $P_{12} > 1$ ist im allgemeinen nach ENRIQUES $\varrho = 2$ (vgl. § 45).

([141]) E. PICARD, « Paris C. R. », 125, 126, 127, 128, 129, 134.

Sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques, « Journ.

Man kann die Definition auch in der folgenden Form geben: *Ein Doppelintegral ist von der zweiten Gattung, wenn alle seine Residuen 0 sind,* d. h. wenn der Wert des Integrals, erstreckt über jeden Zykel von 2 Dimensionen, der auf einen Punkt reduziert werden kann, Null ist.

Unter den Doppelintegralen zweiter Gattung sind die Integrale erster Gattung einbegriffen.

PICARD [142] beweist, daß jedes Integral zweiter Gattung durch Subtraktion eines passend gewählten Integrals von der Form

$$\iint \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy$$

(wo M und N rationale Funktionen von x, y, z sind) auf den Typus

$$\iint \frac{P(x, y, z)}{f'_z}\, dx dy$$

zurückgeführt werden kann, wo P ein zu f adjungiertes Polynom von begrenztem Grad ist.

Er schließt hieraus, daß *die Fläche eine endliche Anzahl ϱ_0 von verschiedenen Doppelintegralen zweiter Gattung besitzt,* wenn man mehrere Integrale verschieden nennt, für welche sich keine lineare Kombination auf die Form

$$\iint \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy$$

reduziert; *die Anzahl ϱ_0 ist eine absolute Invariante der Fläche* [143]. Um ϱ_0 zu bestimmen, ist es wesentlich die Bedingungen aufzustellen, welche erfüllt sein müssen, damit ein Doppelintegral sich in der speziellen oben erwähnten Form schreiben läßt, d. h. die Bedingungen dafür, daß eine

---

de Math. », (5), 5 (1899), p. 5.

Sur les périodes des intégrales doubles ..., « Annales de l'École Normale Sup. », (3) 19 (1902), p. 65.

Sur quelques points fondamentaux dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables, « Acta Math », 26 (1902), p. 273.

Sur les relations entre la théorie des intégrales doubles de seconde espèce et celle des intégrales de différentielle totale, « Annales de l'École Norm. Sup. », (3) 20 (1903), p. 519.

Sur la formule générale donnant le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce ..., « Annales de l'École Normale Sup. », (3) 22 (1905), p. 69. PICARD-SIMART 2, Kap. VII, VIII, X, XI, XII.

(142) PICARD-SIMART 2, Kap. VII.

(143) a. a. O.

Identität existiert von der Form

$$\frac{P(x, y, z)}{f'_z} = \frac{\partial M(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial N(x, y, z)}{\partial y} .$$

Es handelt sich da um ein Problem, bei dem die Betrachtung von ϱ algebraischen Kurven der Fläche ins Mittel tritt, welche eine Basis bilden ([144]).

Auf diese Weise gelangt PICARD in den oben erwähnten Abhandlungen von 1903 und 1905 zu der fundamentalen Relation zwischen den beiden Invarianten ϱ und ϱ_0:

$$\varrho_0 = \mu - m - 4\pi + 2p_1 - \varrho ,$$

wo m die Ordnung, μ die Klasse der Fläche, π das Geschlecht eines ebenen Schnittes allgemeiner Lage und $p_1 - 1$ die Anzahl der verschiedenen einfachen Integrale zweiter Gattung ist. Führt man die Invariante I von ZEUTHEN-SEGRE (§ 14) und die Irregularität $p_g - p_a$ ein, so kann die absolute Invariante ϱ_0 durch die Formel ausgedrückt werden:

$$\varrho_0 = I + 4(p_g - p_a) - \varrho + 2 .$$

In dem Beweise dieser Formel figuriert auch die Anzahl der unabhängigen Zykel von zwei Dimensionen, welche zu den Perioden der Doppelintegrale Veranlassung geben. Um einen Zykel zu konstruieren, welcher im Endlichen gelegen ist, genügt es, von einem linearen Zykel der RIEMANNschen Fläche $f(x, y, z) = 0$, $y = \bar{y}$ (konst.) auszugehen und y entlang einem geschlossenen Weg derart variieren zu lassen, daß der lineare Zykel die Anfangslage wieder einnimmt. Wenn $\omega(y)$ die Periode des ABELschen Integrals $\int R(x, y, z)\,dx$ entlang dem linearen Zykel auf der genannten RIEMANNschen Fläche und C der durch y beschriebene Weg ist, so wird eine Periode des Doppelintegrals $\iint R(x, y, z)\;dx\,dy$ durch $\int_C \omega(y)\,dy$ gegeben sein.

PICARD ([144a]) beweist, daß *die Anzahl der verschiedenen* (zu im Endlichen gelegenen Zykeln gehörigen) *Perioden eines Doppelintegrals zweiter Gattung* $\varrho_0 + \varrho - 1$ ist. Wenn man diese Perioden willkürlich festlegt,

([144]) Vgl. § 31.

([144a]) PICARD-SIMART 2, p. 406; vgl. SEVERI, *Rezension über* PICARD-SIMART, « Bollettino di Bibliografia e Storia delle Mat. », 1907.

so wird ein Doppelintegral zweiter Gattung bestimmt. Aber unter den auf diese Weise gewonnenen Integralen sind die Integrale vom Typus

$$\iint \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx\, dy$$

inbegriffen. Will man von diesen abstrahieren, so muß man von der Zahl der Perioden $\varrho - 1$ abtrennen.

Die Anzahl der Zykel von zwei Dimensionen, d. h. der *bidimensionale Zusammenhang* p_2, ist auch durch H. POINCARÉ gegeben worden ([145]).

V. - ÜBER GEWISSE FAMILIEN BEMERKENSWERTER FLÄCHEN UND ÜBER DIE KLASSIFIKATION DER ALGEBRAISCHEN FLÄCHEN

Die allgemeine Theorie der Invarianten einer algebraischen Fläche zeigt, sowohl vom algebraischen als auch vom transzendenten Gesichtspunkt aus ihre Fruchtbarkeit durch ihre konkreten Anwendungen auf die Klassifikation der Flächen, wobei sich vor allem gewisse Familien bemerkenswerter Flächen darbieten. Das Studium dieser Familien bildet mehr als ein besonderes Kapitel der Theorie; es hat ein allgemeines Interesse vom Gesichtspunkt der Entwickelung der Methoden und der Probleme, auf welche es geführt hat; aber besonders gibt es uns Auskunft über die tiefe Bedeutung gewisser Umstände, wie das Nullwerden der Geschlechter einer Fläche, die Unmöglichkeit, die ausgezeichneten Kurven zum Verschwinden zu bringen, die Existenz von Transformationsgruppen usw. Endlich zeigt das allgemeine Theorem über die Klassifikation der algebraischen Flächen, mit dem dieses Kapitel und zugleich dieser Artikel schließt, die besondere Stellung, welche den Flächen vom linearen Geschlecht $p^{(1)} = 1$ gegenüber den Flächenfamilien mit $p^{(1)} > 1$ zukommt.

([145]) *Sur les périodes des intégrales doubles,* « Journ. de Math. », (6) 2 (1906), p. 177; J. W. ALEXANDER, « Rend. Acc. Lincei », 23, 2. Sem. 1914 (s. 5), p. 55.

34. - Flächen mit einem Büschel rationaler Kurven.

Man sagt, daß eine Fläche $f(x, y, z) = 0$ *rational* ist, wenn man eine birationale Korrespondenz zwischen der Fläche und einer Ebene (u, v) aufstellen kann, d. h. wenn man zwei Parameter u, v, welche rationale Funktionen von x, y, z sind, derart einführen kann, daß die Gleichung $f = 0$ gelöst wird durch rationale Funktionen

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \varphi_1(u, v) \\ y = \varphi_2(u, v) \\ z = \varphi_3(u, v) \end{cases}$$ [146].

Die Formeln (1) geben alsdann eine Abbildung der Fläche auf die Ebene, welche alle Kurvensysteme auf der Fläche leicht zu bestimmen gestattet.

Die ersten Untersuchungen, welche die rationalen Flächen betreffen, beziehen sich auf spezielle Flächen, von denen man die Abbildung auf eine Ebene aufgestellt und studiert hat, wie die allgemeinen Flächen zweiter und dritter Ordnung, die Flächen vierter Ordnung mit einer Doppelkurve usw. (siehe III C 2 (Staude) und III C 8 (W. Fr. Meyer)).

Diese Resultate gehören der projektiven Geometrie an, aber sie eröffnen den Weg zu höheren Untersuchungen vom algebraischen Gesichtspunkte aus.

In erster Linie ist zunächst eines allgemeinen Theorems von M. Noether zu gedenken.

Sei eine Fläche $f(x, y, z) = 0$ gegeben, welche ein lineares Büschel rationaler Kurven $u(x, y, z) =$ konst. enthält. Nach Annahme kann das System der Gleichungen $f = 0$, $u =$ konst. gelöst werden, indem man x, y, z gleich rationalen Funktionen eines Parameters v setzt:

$$x = \varphi_1(v) , \qquad y = \varphi_2(v) , \qquad z = \varphi_3(v) .$$

Es kann zunächst scheinen, daß, wenn man u variieren läßt, die obigen Formeln eine eindeutig umkehrbare und folglich birationale Abbildung der Fläche f auf die Ebene (u, v) geben. Dem ist jedoch nicht so. In der Tat hängen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ im allgemeinen von *irrationalen* Operationen

(146) In betreff einiger allgemeiner Bemerkungen, welche die Lösung der Gleichung $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ betreffen, vgl. F. Enriques, *Sur les problèmes, qui se rapportent à la résolution des équations algébriques renfermant plusieurs inconnues*, « Math. Ann. », 51 (1897), p. 134 [queste *Memorie*, vol. II, xxv].

ab, welche auf u (ebenso wie auf die Koeffizienten von f) ausgeübt sind. Durch eine eingehende Untersuchung dieser Irrationalitäten hat M. NOETHER ([147]) bewiesen:

1) daß die obengenannte Irrationalität sich auf eine Quadratwurzel über eine rationale Funktion von u zurückführen läßt, oder — in geometrischer Form — daß die Fläche f derart transformiert werden kann, daß die rationalen Kurven $u =$ konst. Kegelschnitte $y' =$ konst. werden;

2) daß man immer die algebraische von u abhängige Irrationalität durch eine arithmetische Irrationalität ersetzen kann, welche lediglich von den Koeffizienten von f abhängt. Dieses letztere Resultat ergibt sich vom geometrischen Gesichtspunkt klar auf die folgende Art: Ist eine Fläche f gegeben, welche ein lineares Büschel von Kegelschnitten $y' =$ konst. enthält, so hat NOETHER auf f eine *einmal schneidende* Kurve C konstruiert, welche nämlich die Kegelschnitte in je einem Punkte schneidet. Es genügt alsdann, jeden Kegelschnitt vom Schnittpunkt mit C aus zu projizieren, und man erhält auf diese Weise eine Abbildung von f, z. B. auf die Ebene $z = 0$.

Hieraus ergibt sich das Theorem ([147]):

Jede algebraische Fläche f, welche ein lineares Büschel von rationalen Kurven enthält, ist rational und kann derart auf eine Ebene abgebildet werden, daß den genannten Kurven die Geraden durch einen Punkt entsprechen.

Die Untersuchung von NOETHER kann, soweit sie den ersten Schritt der Transformation betrifft, auch auf Flächen f angewandt werden, welche ein *irrationales Büschel* von rationalen Kurven enthalten; man wird dazu geführt, diese Kurven in Kegelschnitte zu transformieren. Wird es möglich sein, weiter zu gehen und die Kegelschnitte in Gerade überzuführen?

Diese Transformation hängt von der Konstruktion einer die Kegelschnitte des Büschels einmal schneidenden Kurve ab. Nun gestattet eine eingehende Untersuchung, auf die Existenz einer solchen einmal schneidenden Kurve selbst dann zu schließen, wenn das Geschlecht des Kegelschnittbüschels > 0 ist.

Man hat so das folgende allgemeine Theorem ([148]):

Jede Fläche, welche ein Büschel (vom Geschlecht $\pi \geqslant 0$) von rationalen Kurven enthält, kann in eine Linienfläche transformiert werden oder, wenn

([147]) M. NOETHER, *Über Flächen, welche Scharen rationaler Kurven besitzen,* « Math. Annalen », 3 (1870), p. 161.

([148]) F. ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali,* « Rendic. Accad. Lincei », (5) 7 (1898), 2. Sem., p. 281, 344 [queste *Memorie,* vol. I, XXIII, XXIV]; « Math. Ann. », 52 (1899), p. 449 [queste *Memorie,* vol. II, XXVII].

man lieber will, in einen Zylinder vom Geschlecht π:

$$f(x, y) = 0 .$$

35. - Doppelebenen von Clebsch-Noether.

Wie wir bemerkt haben, wird die Transformation, welcher NOETHER die Fläche mit einem linearen Büschel rationaler Kurven unterwirft, in zwei Schritten ausgeführt; nach dem ersten Schritt hat man eine Fläche, welche ein Büschel von Kegelschnitten enthält, und die man daher durch eine Gleichung von der Form

$$z^2 = f(x, y)$$

darstellen kann, wo f ein Polynom der Ordnung 2 hinsichtlich x ist.

Betrachten wir nun allgemeiner eine Fläche

$$z^2 = f(x, y) ,$$

wo f ein beliebiges Polynom ist. Die Frage, zu erkennen, ob diese Fläche rational ist, führt uns dazu, die Abbildung derselben Fläche auf die Doppelebene

$$\{x, y, \sqrt{f(x, y)}\}$$

zu betrachten.

Nach A. CLEBSCH ([149]) sagt man, daß eine Fläche auf eine Doppelebene abgebildet ist, wenn jedem Punkte der Fläche *ein* Punkt der Ebene derart entspricht, daß jedem Punkte der Ebene *zwei* (im allgemeinen verschiedene) Punkte der Fläche entsprechen. Der Ort der Punkte der Ebene, welchen zwei zusammenfallende Punkte entsprechen, bildet eine Kurve gerader Ordnung, welche die Übergangskurve der Doppelebene heißt (§ 15). Die Rolle dieser Kurve ist festgelegt durch die Bemerkung, daß zwei Flächen, welche auf eine Doppelebene mit derselben Übergangskurve abgebildet sind, birational identisch sind.

Gibt man nun eine ebene Kurve gerader Ordnung $f(x, y) = 0$ (oder eine Kurve ungerader Ordnung, zu welcher man die unendliche ferne

---

([149]) *Über den Zusammenhang einer Klasse von Flächenabbildungen mit der Zweiteilung der Abelschen Funktionen*, « Math. Ann. », 3 (1870), p. 45.

Geradė hinzufügt), so definiert man die Doppelebene

$$\{x, y, \sqrt{f(x, y)}\}$$

mit dieser Kurve als Übergangskurve und gleichzeitig die Klasse der Flächen, welche ihr entspricht: der Typus dieser Klasse ist die Fläche $z^2 = f(x, y)$.

Es ist hierbei hinzuzufügen, daß:

1) wenn man die Kurve f einer birationalen Transformation der Ebene x, y unterwirft, die Klasse der durch die Doppelebene dargestellten Flächen sich nicht ändert;

2) daß ebenso vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus die Doppelebene $\{x, y, \sqrt{f(x, y)}\}$ sich nicht ändert, wenn man zu der Kurve $f = 0$ Kurven hinzufügt, welche zweimal gezählt sind, d. h. wenn man f durch $\varphi^2 f$ ersetzt. Umgekehrt kann man, wenn f quadratische Faktoren enthält, sie unterdrücken.

Es handelt sich jetzt darum, die Bedingungen dafür zu bestimmen, daß eine Doppelebene $\{x, y, \sqrt{f(x, y)}\}$ rational ist. Man wird diejenigen Typen von, hinsichtlich der birationalen Transformationen der Ebene irreduziblen übergangskurven f zu bestimmen haben, welche rationalen Doppelebenen entsprechen.

Betrachten wir zunächst mit CLEBSCH die ersten Fälle, welche sich für die Übergangskurve f darbieten, je nachdem ihre Ordnung

$$2n = 2, 4$$

ist. In dem ersten Falle erhält man die Doppelebene durch Projektion einer Fläche zweiten Grades auf die Ebene. Der Fall der allgemeinen Kurve f_4 von der Ordnung 4 bietet mehr Interesse. CLEBSCH beginnt dessen Untersuchung, indem er ein Theorem von HESSE ([150]) in Erinnerung bringt, nach welchem man ein Polynom f_4 in der Form einer Determinante vierter Ordnung, und zwar auf 36 verschiedene Arten schreiben kann. Nach HESSE (a. a. O. § 8) entspricht jeder dieser Arten ein ∞^3. System von kubischen Kurven, welche f_4 in sechs Punkten berühren. Die Bestimmung dieser Systeme hängt, nach CLEBSCH (Crelles Journal 63, p. 211) von der Zweiteilung der ABELschen Funktionen vom Geschlechte drei ab, welche mit f_4 verknüpft sind. In jedem der Systeme von kubischen Kurven gibt es nun acht ∞^2-Scharen von kubischen Kurven mit Doppelpunkt: Mittels Zuordnung irgend einer dieser Scharen zu den Geraden

([150]) *Über Determinanten und ihre Anwendung ...*, « Crelle », 49 (1855), p. 243.

der Ebene (X, Y) werden die Geraden der Doppelebene (x, y) durch eine rationale Transformation

$$x = \psi_1(X, Y)\,, \qquad y = \psi_2(X, Y)\,,$$

welche jedem Punkte (x, y) *zwei* Punkte der einfachen Ebene (X, Y) entsprechen läßt, in ein lineares Netz von kubischen Kurven mit sieben Basispunkten dieser Ebene übergeführt.

Durch diese Transformation [1, 2] wird f_4 in ein Quadrat $\overline{f}^2$ übergeführt, und folglich erscheint die Doppelebene $\{x, y, \sqrt{f_4(x, y)}\}$ (d. h. die Fläche $z^2 = f_4(x, y)$) auf die einfache Ebene (X, Y) abgebildet. Die *Doppelebene* $\{x, y, \sqrt{f_4}\}$, *welcher einer allgemeinen Übergangskurve vierter Ordnung entspricht, ist also rational.*

Dies ist das Theorem von CLEBSCH, zu welchem man einfacher von der Seite der Geometrie aus gelangt, indem man die Doppelebene als Projektion einer kubischen Fläche von einem ihrer Punkte aus betrachtet. ([151])

Außer der Doppelebene, deren Übergangskurve von der vierten Ordnung in den x, y ist, und außer dem Typus, welcher der Schar der Doppelebenen $\{x, y, \sqrt{f(x, y)}\}$ entspricht, wo f von der Ordnung 2 in bezug auf x ist, gibt es eine andere rationale Doppelebene, welche M. NOETHER ([152]) entdeckt hat. Man kann sie vom geometrischen Gesichtspunkte aus einfach charakterisieren, indem man sagt, daß *ihre Übergangskurve f von der Ordnung* 6 *ist und zwei unendlich-benachbarte dreifache Punkte besitzt. Diese Doppelebene ist im allgemeinen rational* und kann sich durch Spezialisierung von f auf die Abbildung einer Regelfläche vom Geschlecht 1 oder 2 reduzieren.

Gibt es andere rationale Doppelebenen außer den eben bestimmten drei Typen? Gewisse feinere Überlegungen haben NOETHER (a. a. O.) dazu geführt, es als höchstwahrscheinlich zu bezeichnen, daß keine existieren. In der Tat kann dieser Schluß in sehr einfacher und strenger Weise begründet werden, indem man jedoch einen anderen Weg einschlägt ([153]).

([151]) Vgl. GEISER, *Über die Doppeltangenten einer ebenen Kurve vierten Grades,* « Math. Ann. », 1 (1868), p. 129. Die Doppelebene bleibt rational, wenn die Kurve f_4 doppelte oder mehrfache Punkte erhält, außer in dem Fall, in welchem sie sich auf eine Gruppe von 4 Geraden durch einen Punkt reduziert (Doppelebene, welche einem Kegel von Geschlecht 1 entspricht). Der Fall, in welchem f_4 einen Doppelpunkt besitzt, ist insbesondere von CLEBSCH betrachtet worden a. a. O., welcher davon auf die Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden Anwendung macht. Es ist dies der erste Fall der Familie, welche von NOETHER betrachtet worden ist (s. § 34).

([152]) *Über die ein-zweideutigen Ebenentransformationen,* « Sitzungsber. d. phys.-med. Sozietät zu Erlangen », 10 (1878).

([153]) G. CASTELNUOVO und F. ENRIQUES, *Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi,* Dabei schließt man: *die Bedingung dafür, daß eine Doppelebene rational ist, besteht darin, daß ihre Übergangskurve durch eine birationale Transformation der Ebene in einen der folgenden Typen übergeführt werden kann*:

1) *Kurve von der Ordnung* $2n \geqslant 2$ *mit einem* $(2n-2)$*-fachen Punkte*;

2) *Kurve von der vierten Ordnung*;

3) *Kurve von der sechsten Ordnung mit zwei unendlich-benachbarten dreifachen Punkten* ([154]).

Das Verfahren von CASTELNUOVO und ENRIQUES, welches den einfachsten Beweis des Theorems gibt, gestattet hinzuzufügen ([155]): *die Bedingungen dafür, daß eine ebene Kurve f von der Ordnung* $2n$ *mit gewöhnlichen mehrfachen Punkten auf einem der Typen* 1., 2., 3. *gebracht werden kann, besteht darin, daß keine Kurven von der Ordnung* $2n-3r$, $r>1$ *vorhanden sind, welche* $2i-r$ *mal durch jeden* $2i$*-fachen oder* $(2i+1)$*-fachen Punkt von f hindurchgehen.*

Dieselben Bedingungen lassen sich hinsichtlich der Fläche.

$$z^2 = f(x, y)\ ,$$

dahin aussprechen, daß ihre Geschlechter $p, P_2, P_3 \ldots$ verschwinden.

36. - Die Rationalität einer Fläche als Folge der Existenz eines gewissen Kurvensystems auf der Fläche.

Die vorstehenden Resultate zeigen, daß die Rationalität einer Fläche im allgemeinen daraus gefolgert werden kann, daß die Fläche ein lineares Büschel von rationalen Kurven (§ 34) oder auch ein Netz vom Grade 2 von elliptischen Kurven (Doppelebene von CLEBSCH) enthält usw.

Man kann allgemeinere Theoreme aufstellen, in welchen die Rationalität einer Fläche daraus geschlossen wird, daß die Fläche ein lineares Kurvensystem von gegebenen Charakteren enthält, welche gewissen Ungleichungen genügen. Speziell werden diese Theoreme sich auf Flächen beziehen, welche im Raum (oder in einem Hyperraum) projektiv defi-

---

« Rendic. Circ. Mat. Palermo », 14 (1900), p. 290 [queste *Memorie*, vol. II, XXX].

Den drei Typen von rationalen Doppelebenen entsprechen die drei Typen von ebenen Involutionen, welche von E. BERTINI gefunden worden sind, *Deduzione delle trasformazioni piane doppie dai tipi fondamentali delle involutorie*, « Rendic. Istituto Lombardo », (2) 22 (1889), p. 771.

([154]) Auf den dritten Typus führt auch die Untersuchung der rationalen Flächen vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt. Siehe M. NOETHER, *Über eine Klasse von auf die einfache Ebene abbildbaren Doppelebenen*, « Math. Ann. », 33 (1889), p. 525; *Über die rationalen Flächen vierter Ordnung*, ibid., p. 546.

([155]) CASTELNUOVO-ENRIQUES a. a. O.

niert sind und deren *ebene Schnitte* (oder deren hyperebene Schnitte) das Geschlecht 1, 2, 3 haben oder hyperelliptisch sind ([156]).

Alle auf diese Art von Fragen bezüglichen Resultate sind in dem folgenden allgemeinen Theorem enthalten:

Ist auf einer Fläche ein lineares Kurvensystem $|C|$ *vom Geschlecht* π, *vom Grad* n *und von der Dimension* r *gegeben, so ist die Fläche rational oder kann in eine Regelfläche transformiert werden, wenn man hat*

$$n > 2\pi - 2$$

oder

$$r > \pi \ ([157]).$$

37. - Rationalität der ebenen Involutionen.

Das letztgenannte Theorem enthält insbesondere die Antwort auf eine allgemeine Frage, welche die Definition der rationalen Flächen selbst betrifft, und welche von G. CASTELNUOVO im Oktober 1893 gestellt worden war ([158]).

([156]) Die Untersuchung der Flächen mit ebenen Schnitten von gegebenem Geschlecht π ist im Jahre 1878 durch ein Theorem von E. PICARD begonnen worden, *Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales*; vgl. III C 6 a (CASTELNUOVO-ENRIQUES) § 22.

Im Jahre 1893 hat F. ENRIQUES (indem er sich auf die Rationalität der ebenen Involutionen stützte, welche von G. CASTELNUOVO aufgedeckt ist — siehe § 37 —) bewiesen, daß eine Fläche mit hyperelliptischen Schnitten vom Geschlecht $\pi > 1$ eine Regelfläche ist oder aber ein lineares Büschel von Kegelschnitten enthält und rational ist; vgl. III C 6 a (CASTELNUOVO-ENRIQUES) § 22; (« Rendic. Accad. Lincei », (5) 2 (1893), 2. Sem., p. 281 [queste *Memorie*, vol. I, IV]; « Math. Ann. », 46, p. 179 [queste *Memorie*, vol. I, X]).

Dann hat G. CASTELNUOVO (« Rendic. Lincei », (5) 3 (1894), 1. Sem., p. 59) dieses Theorem auf den Fall $\pi = 1$ ausgedehnt, indem er bewies, daß eine Fläche mit elliptischen Schnitten die Projektion einer Fläche der Ordnung n von S_n ist (vgl. III C 6 a (CASTELNUOVO-ENRIQUES) § 22).

Der Fall, in welchem man auf einer Fläche ein Netz von elliptischen oder hyperelliptischen Kurven hat, ist von G. CASTELNUOVO studiert worden (« Rendic. Lincei », (5) 3 (1894), 1. Sem., p. 473). Endlich haben CASTELNUOVO-ENRIQUES in der in § 35 genannten Abhandlung des Circolo di Palermo das weitergehende Theorem gegeben, das die Flächen betrifft, welche ein Büschel von elliptischen oder hyperelliptischen Kurven mit Basispunkten enthalten. Für einige Verallgemeinerungen siehe L. GODEAUX, « Ann. Acad. do Porto », 7 (1912).

([157]) CASTELNUOVO-ENRIQUES Q (Nr. 17) sind durch Betrachtung der sukzessiven adjungierten Systeme $|C'|$, $|C''|$... zu diesem Theorem gelangt. Die Reihe schließt bei einem System vom Geschlecht 0, 1, 2 oder bei einem System vom Geschlecht π und einer Dimension $r \geqslant 3\pi + 5$, ein Fall, in welchem man das Verfahren anwenden kann, welches zur Bestimmung der Maximalschar der Dimension hinsichtlich des Geschlechtes dient (siehe die Anmerkung ([9]) in § 6). G. SCORZA, *Le superficie a curve sezioni di genere tre*, « Annali di Mat. », (3) 16 (1909-10), p. 255; 17, p. 281 hat aus dem im Text genannten Theorem die Untersuchung der Flächen mit ebenen Schnitten vom Geschlecht 3 hergeleitet.

([158]) *Sulla razionalità delle involuzioni piane*, « Rendic. Lincei », (5) 2 (1893), 2. Sem., p.205; « Math. Ann. », 44. p. 125.

Seien φ_1, φ_2, φ_3 drei rationale Funktionen von zwei Parametern u, v und setzen wir

$$(1) \qquad x = \varphi_1(u, v)\,, \qquad y = \varphi_2(u, v)\,, \qquad z = \varphi_3(u, v)\,,$$

so wird man durch Elimination von u und v aus diesen Gleichungen eine Gleichung $f(x, y, z) = 0$ erhalten. Die auf diese Weise bestimmte Fläche f wird nach der Definition von § 34 rational sein, wenn die Gleichungen (1) mittels der zu befriedigenden Bedingung $f(x, y, z) = 0$ rational in bezug auf u und v gelöst werden können, (was im allgemeinen eintritt, wenn die Funktionen φ_1, φ_2, φ_3 ohne besondere Abhängigkeit angenommen sind).

Wenn dem nicht so ist, so wird die Fläche f auf die Ebene (u, v) derart abgebildet, daß jedem Punkte der Ebene *ein* Punkt von f, aber jedem Punkt von f eine Gruppe von $n > 1$ Punkten der Ebene entspricht; diese Gruppe gehört einer Schar ∞^2 an, welche man eine *Involution* I_n nennt (siehe § 15) und welche die folgende Eigenschaft hat: jeder Punkt der Ebene gehört *einer* Gruppe der Involution an.

Es ist leicht, ebene Involutionen zu konstruieren; es genügt dazu eine rationale Substitution in bezug auf U und V auszuüben

$$U = \psi_1(u, v)\,, \qquad V = \psi_2(u, v)\,,$$

welche im allgemeinen zu einer Transformation $[1, n]$, wo $n > 1$ ist, Veranlassung gibt; die Gruppen von n Punkten $(u_1, v_1) \dots (u_n, v_n)$ entsprechen einem und demselben Punkte (U, V) und definieren eine Involution I_n.

Eine auf diese Weise bestimmte Involution ist nun *rational*, denn eine Fläche $f(x, y, z) = 0$, deren Punkte umkehrbar eindeutig den Gruppen dieser Involution entsprechen, ist Punkt für Punkt eindeutig auf die Ebene mit den Parametern U, V abgebildet; die Formeln (1), welche in bezug auf u und v nicht rational gelöst werden können, verwandeln sich in analoge Formeln, welche in bezug auf U und V rational lösbar sind.

Es ergibt sich jetzt die Frage, ob jede ebene Involution mittels einer Transformation $[1, n]$ der Ebene konstruiert werden kann, d. h. ob sie rational ist. Man weiß, daß die entsprechende Frage in betreff der Involutionen auf der Geraden durch Lüroth ([159]) eine bejahende Antwort gefunden hat. Ebenso hat man nach Castelnuovo a. a. O.:

([159]) *Beweis eines Satzes über rationale Kurven*, « Math. Ann. », 9 (1875), p. 163.

Die ebenen Involutionen sind rational ([160]), *d. h. wenn die Koordinaten des Punktes einer Fläche durch rationale Funktionen von* 2 *Parametern ausgedrückt werden können, so ist die Fläche rational.*

Man könnte meinen, daß die Theoreme von LÜROTH und CASTELNUOVO in einem allgemeinen Theorem enthalten sind, welches die rationale Lösung der Gleichungen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ betrifft, ein Theorem, das man leicht durch algebraische Betrachtungen aufstellen könnte. Dem ist nicht so, da diese Resultate sich nicht auf den Fall $n > 3$ ausdehnen lassen: *es gibt im Raum nicht-rationale Involutionen* (vgl. § 48) ([161]).

38. - Die rationalen und die Regelflächen, nach den Werten des Geschlechts und der Mehrgeschlechter charakterisiert.

Die Theoreme der §§ 34, 35 nehmen eine höhere Bedeutung an, dank dem Reduktionsverfahren, welches man dadurch erhält, daß man, von einem gegebenen linearen System $|C|$ auf einer Fläche f ausgehend, seine sukzessiven Adjungierten konstruiert:

$$|C'|, \quad |C''| \ldots$$

Wenn die Fläche rational ist, so schließt diese Reihe, und man kommt auf ein letztes System vom Geschlecht 0, 1. Die Untersuchung dieses Systems hat bemerkenswerte Fragen der ebenen Geometrie zu lösen gestattet ([162]).

([160]) Wenn die Fläche f auf eine ebene Involution J_n abgebildet ist, so entsprechen den Geraden der Ebene auf f rationale Kurven mit einer gewissen Anzahl δ von Doppelpunkten, welche sich paarweise in mindestens 2δ Punkten schneiden; man erschließt daraus auf f ein lineares System von Kurven vom Geschlecht δ und vom Grad $> 2\delta$. Von diesem System ausgehend hat CASTELNUOVO durch das Verfahren der sukzessiven Adjungierten sein Theorem begründet.

Dieselbe Methode erstreckt sich auf den Fall der Involutionen auf einer Regelfläche; das Theorem von § 36 hat zu dem folgenden Resultat geführt:

Jede Fläche, deren Koordinaten rationale Funktionen eines Parameters u *sowie zweier Parameter* v *und* ω *sind, welche durch eine Relation* $\varphi(v, \omega) = 0$ *verbunden sind, kann birational in eine Fläche* $f(x, y, z) = 0$ *transformiert werden (wo* f *vom Geschlecht* $\geqslant 0$ *ist).* CASTELNUOVO-ENRIQUES Q (Nr. 17).

([161]) F. ENRIQUES, *Sopra una involuzione non razionale dello spazio*, « Rendic. Accad. Lincei », (5), 21, 1. Sem. (1912), p. 81 [questo volume, LI].

([162]) Namentlich: 1) die Klassifikation der zyklischen Involutionen in der Ebene. Vgl. S. KANTOR, *Sur une théorie des courbes et des surfaces admettant des correspondances univoques*, « Paris. C. R. », Februar 1885. *Premiers fondements pour une théorie des transformations périodiques* (4. Teil), « Atti Accad. Napoli », (2) 4 (1891), p. 1; G. CASTELNUOVO a. a. O.;

2) Die Bestimmung der kontinuierlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene, vgl. F. ENRIQUES, *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane nel piano*, « Rendic.

Weiß man umgekehrt, daß die Reihe $|C|$, $|C'|$, $|C''|, \ldots$ abbricht und daß das letzte System passende Bedingungen befriedigt, so schließt man daraus, daß die Fläche rational ist. Auf diese Weise ist CASTELNUOVO dazu gekommen, die Rationalität der ebenen Involutionen zu begründen. Bei Weiterführung seiner Untersuchungen ist CASTELNUOVO in dem Fall einer regulären Fläche vom Geschlecht $p_a = p_g = 0$ und auch vom Doppelgeschlecht $P_2 = 0$ (vgl. § 13) zu demselben Schluß gelangt.

Man hat also das Theorem ([163]):

Die Bedingungen für die Rationalität einer Fläche lassen sich dahin aussprechen, daß das numerische Geschlecht und das Doppelgeschlecht Null werden: $p_a = P_2 = 0$.

Der Reduktionsprozeß der sukzessiv adjungierten Systeme kann unter allgemeineren Bedingungen angewandt werden, vorausgesetzt, daß die Reihe $|C|$, $|C'|, \ldots$ begrenzt ist. CASTELNUOVO und ENRIQUES haben bewiesen, daß dieser Fall nur für die Flächen der Familie der Regelflächen eintritt ([164]).

Für diese Flächen nun verschwinden alle geometrischen Geschlechter (d. h. das Geschlecht und die Mehrgeschlechter)

$$p_g, P_2, P_3, \ldots,$$

während das numerische Geschlecht $p_a \leqslant 0$ ist. Werden diese Bedingungen genügen, um festzustellen, daß eine Fläche der Familie der Regelflächen angehört? Die vertieftere Untersuchung der irregulären Flächen vom Geschlecht $p_g = 0$ (siehe § 39) hat dazu geführt, diese Frage zu bejahen. Auf diese Weise erhält man das folgende Theorem ([165]):

Die Bedingungen dafür, daß eine Fläche der Familie der rationalen oder der Regelflächen angehört (oder dafür, daß sie sich in einen Zylinder $f(x, y) = 0$ vom Geschlecht $\geqslant 0$ transformieren läßt), *lassen sich dahin aussprechen, daß*

Acc. Lincei » (5) 2, 1. Sem. (1893), p. 468 [queste *Memorie*, vol. I, I].

Dieselbe Untersuchung hat zur *Klassifikation der arithmetischen Irrationalitäten geführt, von denen die Parameterdarstellung einer rationalen Fläche abhängt.* Vgl. ENRIQUES, *Sulle irrazionalità ...*, « Rendic. Acc. Lincei », (5) 4 (1895), Dezember [queste *Memorie*, vol. I, IX], « Math. Ann. », 49, p. 1 [queste *Memorie*, vol. I, XVIII].

Man hat daraus auch die *Klassifikation der rationalen Flächen vom Gesichtspunkt der Realität hergeleitet,* welche in engen Analogien mit der vorhergehenden steht s. A. COMESSATTI, *Sulle superficie razionali reali,* « Rendic. Lincei », (5), 20, 2. Sem., p. 597; « Math. Ann. », 73 (1912), p. 1.

([163]) G. CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero,* « Mem. Soc. It. delle Scienze (dei XL) », (3), 10 (1896), p. 103.

([164]) CASTELNUOVO-ENRIQUES Q. Aus diesem Umstand erklären sich die Theoreme von § 36, 4 und andere Resultate, welche wir weiterhin zu erwähnen Gelegenheit haben werden.

([165]) F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero,* « Rendic. Circ. Mat. Palermo », 20 (1905), p. 1 [queste *Memorie*, vol. II, XXXVI].

man die Geschlechter der Ordnung 4, 6 *gleich* 0 *setzt.*

$$P_4 = 0\,, \qquad P_6 = 0 \qquad\qquad (\text{oder } P_{12} = 0)\,.$$

In dem Fall $p_a = -1$ hat man Flächen mit

$$p_g = P_2 = P_3 = P_4 = 0\,, \qquad\qquad P_6 > 0,$$

oder mit

$$p_g = P_2 = P_3 = P_6 = 0\,, \qquad\qquad P_4 > 0,$$

welche natürlich nicht der Familie der Regelflächen angehören.

Aber für

$$p_a < -1\,, \qquad p_g = 0$$

gibt es nur Regelflächen (Zylinder vom Geschlecht $\pi = -p_a$). G. CASTELNUOVO ([166]) hat sogar die Bemerkung hinzugefügt, daß die Bedingung $p_g = 0$ aus $p_a < -1$ folgt, so daß:

jede Fläche vom numerischen Geschlecht $p_a < -1$ *in eine Regelfläche transformiert werden kann.*

39. - Flächen, welche eine kontinuierliche Schar automorpher birationaler Transformationen gestatten.

Die Untersuchung der Flächen, welche eine kontinuierliche Schar von automorphen birationalen Transformationen gestatten, geht von den Untersuchungen von E. PICARD aus ([167]). Die gegebene Schar wird *algebraisch* oder in einer algebraischen Schar von Transformationen derselben Ordnung enthalten sein. Man hat den Fall zu unterscheiden, in welchem es sich um *eine endliche Gruppe* (im Sinne von S. LIE) handelt, d. h. eine Gruppe, welche von einer endlichen Anzahl von Parametern abhängt, und den Fall einer *Schar, welche nicht eine endliche Gruppe erzeugt.* PICARD hat die Rolle der einfachen Integrale, welche mit der Fläche verknüpft sind, klar gelegt; er hat die ersten fundamentalen Eigenschaften der Flächen aufgestellt, welche eine Gruppe ∞^1 zulassen, und besonders den wichtigsten Fall der (hyperelliptischen) Flächen auf-

---

([166]) *Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo,* « Rendic. Circ. Mat. Palermo », 20 (1905), p. 55.

([167]) PICARD A, B. PICARD-SIMART 2, Kap. 14.

gedeckt und charakterisiert, welche eine Gruppe ∞^2 von vertauschbaren Transformationen gestatten.

Die Untersuchungen von PICARD über diesen Gegenstand sind von P. PAINLEVÉ ([168]), CASTELNUOVO-ENRIQUES ([169]) und ENRIQUES fortgeführt worden.

Es resultiert daraus eine Theorie, welche die Flächen zu klassifizieren gestattet, die eine kontinuierliche algebraische Schar von Transformationen zulassen, und zwar auf die folgende Weise:

a) die Schar bildet eine endliche Gruppe von der Dimension $r \geqslant 1$:

1) $r = 1$. Die Trajektorien der Gruppe sind vom Geschlecht 0 oder 1 (PICARD a. a. O.). In dem ersten Falle kann die Fläche in eine *Regelfläche* ([170]); in dem zweiten in eine *elliptische* Fläche (vom Geschlecht $p_a = -1$, $p_g \geqslant 0$) übergeführt werden, deren Koordinaten durch algebraische Funktionen eines Parameters und durch elliptische Funktionen eines anderen ausgedrückt werden ([171]). Man kann diese Parameterdarstellung genauer bestimmen und die Typen von elliptischen Flächen aufstellen; dieses Problem hängt von ABELschen Gleichungen für die Teilung der Perioden der elliptischen Funktionen ab; dabei tritt eine ganze Zahl n auf, welche man die *Determinante* der elliptischen Flächen nennt. Die wirkliche Konstruktion der Formeln ist im einzelnen für die (elliptischen) Flächen von den Geschlechtern $p_a = -1$, $p_g = 0$ und für die ersten Werte der Determinante n entwickelt worden ([172])

2) $r = 2$. Wenn die Gruppe ∞^2 nicht von vertauschbaren Transformationen gebildet ist, so gibt es in derselben algebraische Gruppen ∞^1, und man wird auf den Fall 1) zurückgeführt. Aber man kann genauer erkennen, daß die Fläche rational ist oder auf eine Regelfläche zurückgeführt werden kann ([173]).

Wenn die Gruppe ∞^2 von vertauschbaren Transformationen gebildet ist, so gibt es zwei einfache Integrale, und durch Umkerhrung dieser werden die Koordinaten der Punkte der Fläche durch *vierfachperiodische Funktionen von zwei Parametern u, v* ausgedrückt ([174]). Umgekehrt läßt jede *hyperelliptische Fläche* (vom Rang 1), deren Punkte *umkehrbar eindeutig* den Wertepaaren u, v entsprechen, welche hinsichtlich der Perioden inkongruent sind, eine Gruppe ∞^2 von vertauschbaren birationalen

([168]) « Paris C. R. », 121 (1895), p. 318.

([169]) « Paris C. R. », 121 (1895), p. 242 [queste *Memorie*, vol. I, XI].

([170]) P. PAINLEVÉ, *Leçons sur la théorie analytique des équations differentielles*, Stockholm 1895, p. 270.

([171]) PAINLEVÉ, a. a. O., p. 282.

([172]) F. ENRIQUES, « Circolo Palermo », 1905 in der in der Anm. ([165]) zitierten Abhandlung. Das Geschlecht p_g und die Mehrgeschlechter dieser Flächen können beliebig hohe Werte haben.

([173]) CASTELNUOVO-ENRIQUES, « Paris C. R. », a. a. O.

([174]) PICARD a. a. O.; vgl. « Rendic. Circ. Palermo », 9 (1895), p. 244.

Transformationen zu ([175]). Nach der allgemeinen Theorie der ABELschen Funktionen von WEIERSTRAß, POINCARÉ, PICARD und besonders nach der Abhandlung von P. APPELL über die Funktionen vom Geschlecht 2 ([176]) Können die *primitiven Perioden* eines Systems von hyperelljptischen Funktionen auf die *Normaltabelle* zurückgeführt werden:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g' \end{matrix},$$

wo δ eine ganze Zahl ist, welche in dem Fall allgemeiner Moduln bestimmt ist und welche man den *Divisor* der hyperelliptischen Funktionen oder der durch diese dargestellten Fläche nennt.

Für $\delta = 1$ läßt sich jede hyperelliptische Fläche, deren Punkte eindeutig umkehrbar den inkongruenten Werten der Parameter u, v entsprechen, birational auf eine JACOBIschen Fläche zurückführen, welche die Punktepaare einer Kurve vom Geschlecht 2 darstellt; für $\delta > 1$ hat man eine rationale Transformierte einer JACOBIschen Fläche, d. h. eine Involution von der Ordnung δ auf derselben ([177]). Dies sind die Typen der hyperelliptischen Flächen vom *Range* 1 oder von PICARD, welche eine Gruppe ∞^2 von vertauschbaren Transformationen gestatten ([178]); und es sind weiter andere hyperelliptische Flächen (vom Range > 1) zu betrachten, von denen diese rationale Transformierte sind.

Die hyperelliptischen Flächen von PICARD sind nun durch das folgende Theorem charakterisiert:

Jede Fläche von der Ordnung n und vom Geschlecht $p_g = 1$, welche zwei einfache Integrale besitzt und welche durch ihre Adjungierte von der Ordnung $n-4$ nicht außerhalb ausgezeichneter oder mehrfacher Kurven geschnitten wird, ist eine hyperelliptische Flache (vom Rang 1) ([179]).

3) $r = 3$. *Jede Fläche, welche eine Gruppe von birationalen Transformationen von der Dimension* 3 *zuläßt, ist rational oder kann auf eine Regelfläche vom Geschlecht > 0 zurückgeführt werden* ([180]).

([175]) Es ist das eine Folge aus dem *Additionstheorem* von K. WEIERSTRASS; siehe P. PAINLEVÉ, « Acta Mathematica », 27 (1903), p. 1.

([176]) « Journ. de Math. », (4) 7 (1891), p. 157, vgl. P. PAINLEVÉ, « Paris. C. R. », 134 (1902), p. 808.

([177]) F. ENRIQUES et F. SEVERI, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques*, « Acta Math. » 32, p. 283; 33, p. 321 (Nr. 6) [queste *Memorie*, vol. II, XLVII].

([178]) Die Konstruktion der projektiv-definierten Typen für $\delta = 1$ findet sich in der Abhandlung von G. HUMBERT, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques*, « Journ. de Math. », (s. 4) 9 (1893), p. 29, 361, der eine eingehende Untersuchung der hyperelliptischen Flächen und der auf ihnen gezogenen algebraischen Kurven angestellt hat. Für $\delta > 1$ vgl. ENRIQUES-SEVERI a. a. O. (§ 30).

([179]) Vgl. PICARD A., B. PICARD-SIMART 2, p. 453.

([180]) CASTELNUOVO-ENRIQUES, « Paris C. R. », a. a. O.

b) Jede Fläche, welche eine kontinuierliche Schar von Transformationen gestattet, die nicht eine endliche Gruppe erzeugt, ist rational oder kann auf eine Regelfläche vom Geschlecht > 0 zurückgeführt werden ([181]).

Fassen wir zusammen, so führt die Untersuchung der Flächen, welche eine kontinuierliche Schar von automorphen Transformationen gestatten, auf *rationale oder Regelflächen* und auf *elliptische und hyperelliptische Flächen.*

Man kann diese Familien von Flächen nach den Werten der Geschlechter charakterisieren.

Läßt man zunächst die rationalen Flächen beiseite, so hat man $p_a < 0$. Erinnern wir uns, daß man für $p_a < -1$ auf Regelflächen vom Geschlecht $-p_a (> 1)$ geführt wird (§ 38), so braucht man nur noch die Voraussetzung $p_a = -1$ zu betrachten. Eine eingehendere Untersuchung zeigt, daß diese Flächen für $p_g \neq 1$ *elliptisch* sind. Für $p_g = 1$ sind sie ebenfalls *elliptisch*, wenn eine eigentlich-kanonische Kurve (d. h. von einer Ordnung > 0) existiert. Der Fall $p_g = 1$ bei Nichtexistenz einer eigentlich-kanonischen Kurve entspricht nach dem Theorem von PICARD den *hyperelliptischen* Flächen. Nach ENRIQUES kann man hinzufügen, daß die Flächen von den Geschlechtern

$$p_a = -1\,, \qquad p_g = 1\,,$$

welche nicht eine im eigentlichen Sinne kanonische Kurve enthalten, durch $P_4 = 1$ charakterisiert sind (man hat $P_4 > 1$, wenn es eine kanonische Kurve von der Ordnung > 0 gibt) ([182]). Demzufolge gelangt man zu folgendem Theorem ([183]):

Die nicht-rationalen Flächen, welche eine kontinuierliche Schar von automorphen birationalen Transformationen gestatten, sind durch die Ungleichung $p_a < 0$ charakterisiert.

Die bisher auseinandergesetzten Resultate und diejenigen von § 38 können in der folgenden Tabelle ([184]) zusammengefaßt werden.

([181]) CASTELNUOVO-ENRIQUES, Q (Nr. 19).

([182]) Die Existenz einer vertauschbaren Gruppe ∞^2 für die Flächen mit $p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$, kann auch auf Grund eines geometrischen Beweises, ohne die PICARDschen Bedingungen vorauszuschicken, festgestellt werden. Über diesen Gegenstand siehe F. SEVERI, *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo permutabile a due parametri ...*, « Atti Istituto Veneto », 47, Teil 2 (1907), p. 409.

([183]) F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in se stesse,* « Rendic. Palermo », 20 (1905), p. 61 [queste *Memorie,* vol. II, XXXVII].

([184]) F. ENRIQUES a. a. O.

	$p_a < -1$	$p_a = -1$	$p_a = 0$
$P_4 + P_6 = 0$ ($P_4 = P_6 = 0$)	Regelflächen vom Geschlecht $-p_a$	elliptische Regelflächen	rationale Flächen
$P_4 + P_6 > 0$ $p_g P_4 \neq 1$	der Fall ist unmöglich	elliptische Flächen, welche *eine* Gruppe ∞^1 besitzen	
$P_4 + P_6 > 0$ $p_g P_4 = 1$ ($p_g = P_4 = 1$)	der Fall ist unmöglich	hyperelliptische Flächen, welche eine Gruppe ∞^2 von vertauschbaren Transformationen gestatten	

40. - Hyperelliptische Flächen.

Man nennt im allgemeinen jede Fläche $f(x, y, z) = 0$ hyperelliptisch, wenn sie eine Parameterstellung durch vierfach-periodische Funktionen von u, v gestattet; sei es daß einem Punkte von f *ein* Paar (u, v) modulo der primitiven Perioden entspricht, oder daß $r > 1$ inkongruente Paare (u, v) demselben Punkte von f entsprechen. In der Tat gibt es neben den hyperelliptischen Flächen vom Range 1, d. h. Flächen von PICARD, welche eine Gruppe ∞^2 von vertauschbaren Transformationen gestatten, hyperelliptische Flächen vom Range $r > 1$. Dazu genügt es, drei *gerade* hyperelliptische Funktionen von (u, v) hinsichtlich der Perioden

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h' & g' \end{matrix}$$

zu betrachten; man erhält eine hyperelliptische Fläche *vom Range* 2, welche sich auf eine Fläche der vierten Ordnung mit 16 Doppelpunkten zurückführen läßt (*Kummersche Fläche*) ([185]).

([185]) Für die projektive Theorie dieser Flächen siehe III C 8 (W. FR. MEYER). Der hyperelliptische Charakter dieser Fläche ist von F. KLEIN gezeigt worden, *Über gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen*, « Math. Ann. », 5 (1872), p. 278. Eine eingehende Untersuchung der KUMMERschen Fläche ist von G. HUMBERT ausgeführt worden, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques*, « Journ de Math. », (4) 9 (1893), p. 29, 361. (Vgl. HUMBERT, *Sur les surfaces de Kummer elliptiques*, « American Journal », 16 (1894), p. 221).

Das allgemeine Problem, alle hyperelliptischen Flächen vom Range $r > 1$ zu bestimmen, kann einerseits durch die Untersuchungen von F. ENRIQUES und F. SEVERI ([186]), andrerseits durch diejenigen von G. BAGNERA und M. DE FRANCHIS ([187]) als gelöst betrachtet werden.

Eine hyperelliptische Fläche vom Range $r > 1$ entspricht einer Involution I_r der Ordnung r, welche einer Fläche von PICARD angehört. Wenn I_r eine unendliche Anzahl von Koinzidenzpunkten besitzt, so läßt sich die Fläche f auf eine rationale Fläche oder eine elliptische Regelfläche zurückführen (*ausgearteter Fall*). Es handelt sich da um eine Folge aus dem Theorem von § 36 oder aus denjenigen der §§ 15 und 38, zu welcher die erwähnten Autoren übereinstimmend gelangen.

Die Bestimmung der hyperelliptischen Flächen, die Fälle der Ausartung ausgeschlossen, hängt von dem folgenden fundamentalen Theorem ab, das man ENRIQUES-SEVERI verdankt ([188]):

Sei $f(x, y, z) = 0$ eine nicht ausgeartete hyperelliptische Fläche derart, daß jedem Punkt (x, y, z) $r > 1$ Paare von Parametern

$$(u_1, v_1), \ (u_2, v_2), \ \ldots, \ (u_r, v_r)$$

entsprechen, welche modulo der Perioden inkongruent sind; in diesem Falle lassen sich u_i, v_i (für $i = 2, \ldots, r$) *durch u_1, v_1 mittels $r - 1$ linearen Substitutionen ausdrücken:*

$$u_i = a_i u_1 + b_i v_1 + e_i$$

$$v_i = c_i u_1 + d_i v_1 + f_i \,,$$

wo die a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i konstant sind.

Mit anderen Worten, eine hyperelliptische Fläche vom Range $r > 1$ (ausgeschlossen die Fälle der Ausartung) entspricht einer *Involution*,

---

([186]) ENRIQUES-SEVERI (I), *Intorno alle superficie iperellittiche*, « Rendic. Acc. Lincei », (5) 16, 1. Sem. (7. April 1907), p. 443 [queste *Memorie*, vol. II, XLII]; (II) *Mémoire sur le surfaces hyperelliptiques*, « Acta Math. », 32, p. 283; 33, p. 321 [queste *Memorie*, vol. II, XLVII]; (III) *Intorno alle superficie iperellittiche irregolari*, « Rendic. Acc. Lincei », (5) 17, 1. Sem. (1908), p. 4 [queste *Memorie*, vol. II, XLIII].

([187]) BAGNERA-DE FRANCHIS (I), *Sopra le superficie algebriche che hanno le coordinate del punto generico esprimibili con funzioni meromorfe quadruplamente periodiche ...*, « Rendic. Acc. Lincei », (5), 16, 1. Sem. (7. und 21. April 1907), p. 492, 596; (II) *Le Superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche ...*, « Mem. Soc. it. delle Scienze (dei XL) », (3) 15 (1908), p. 251; (III) *Le nombre* ϱ de M. PICARD *pour les surfaces hyperelliptiques et pour les surfaces irrégulières de genre zéro*, « Rendic. Circ. Mat. Palermo », 30 (1910), p. 185. (Siehe auch « Atti del IV Congresso Int. dei Matematici Roma », 2 (1909), p. 249).

([188]) ENRIQUES-SEVERI (I) Nr. 3, (II) Nr. 39-44. BAGNERA und DE FRANCHIS haben dasselbe Theorem unter einer Beschränkung erwiesen, die auf dem von ihnen befolgten Wege nicht leicht eliminiert werden zu können scheint.

welche durch eine endliche Gruppe von birationalen Transformationen auf einer Fläche von Picard erzeugt ist.

Eine erste Folge aus diesem Theorem ist diese ([189]):

Für allgemeine Moduln gibt es keine anderen hyperelliptischen Flächen von einem Range $r > 1$ *als die Flächen von Range* 2, *welche sich auf die Kummersche Fläche* ($\delta = 1$) *und* (für $\delta > 1$) *auf verallgemeinerte Kummersche Flächen zurückführen lassen,* d. h. auf Flächen von der Ordnung 4δ mit 16 Doppelpunkten und 16 singulären Hyperebenen im Raume $S_{2\delta+1}$ (welche man übrigens auf eine geringere Ordnung, im besonderen auf die Ordnung 4 reduzieren kann) ([190]).

Für spezielle Werte der Moduln wird man auf die Aufgabe geführt, die endlichen Transformationsgruppen zu bestimmen, welche einer Jacobischen oder Picardschen Fläche angehören können. Eine erste Reihe von Typen bietet sich zunächst entsprechend den irreduziblen Kurven vom Geschlecht 2 dar, welche automorphe Transformationen gestatten ([191]); diese Typen geben Veranlassung zu bemerkenswerten projektiven Bildern, die durch Konfigurationen von Punkten und singulären Hyperebenen charakterisiert sind, derart, wie Enriques-Severi sie gezeigt haben ([192]).

Die allgemeine Klassifikation der endlichen Gruppen, welche einer

---

([189]) Enriques-Severi (I) Nr. 5, (II) Nr. 45. Bagnera-de Franchis (II) Nr. 38.

([190]) Die ersten Beispiele von hyperelliptischen Flächen vom Range 2 und vom Divisor $\delta > 1$ sind von E. Traynard betrachtet worden, « Paris C. R. », 138, p. 339; 139, p. 718; 140 (1904-05), p. 218; 913. Vgl. *Sur les fonctions théta de deux variables et les surfaces hyperelliptiques,* « Annales de l'École Normale », (3) 24 (1907), p. 77. L. Remy, « Paris C. R. », 142 (1906), p. 768.

([191]) Die Kurven sind klassifiziert worden von O. Bolza, *On binary sextics with linear transformations into themselves,* « American Journal », 10 (1888), p. 47.

([192]) Enriques-Severi (I), (II). Zu bemerken ist die Fläche von der Ordnung 6 mit 9 biplanaren Doppelpunkten von S_4; welche in Beziehung zu der Konfiguration steht, der C. Segre und G. Castelnuovo beim Studium der kubischen Mannigfaltigkeiten von S_4 begegnet sind (siehe III C 9 (Segre)).

Das Verfahren, durch welches Enriques-Severi dazu gelangen, die im Text erwähnte Eigenschaft zu erkennen, kann einfach erklärt werden, indem man sich auf den Fall der Kummerschen Fläche $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ bezieht. Man betrachtet ein Rosenhainsches *Tetraeder,* das man der Einfachheit halber durch $x_1x_2x_3x_4 = 0$ dargestellt voraussetzt.

Setzt man

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = x_2, \qquad y_3 = x_3, \qquad y_4 = \frac{\sqrt{x_1x_2x_3x_4}}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4},$$

so ist für die so erhaltene Fläche

$$p_a = -1, \qquad p_g = 1,$$

und sie besitzt keine kanonische Kurve von der Ordnung > 0 ($P_4 = 1$), sie ist also hyperelliptisch vom Range 1.

PICARDschen Fläche zugehören können, erfordert, wenn man Fälle in Rechnung ziehen will, welche nicht den Kurven vom Geschlechte 2 (von BOLZA) mit automorphen birationalen Transformationen entsprechen, eine feine arithmetische Untersuchung, welche von BAGNERA-DE FRANCHIS ausgeführt worden ist ([193]).

Die regulären Flächen, auf welche man so geführt wird, sind von den Geschlechtern $p_a = p_g = P_2 = \dots = 1$ (siehe § 42), oder von den Geschlechtern $p_a = p_g = P_3 = \dots = 0$, $P_2 = P_4 = \dots = 1$ (siehe § 43), wobei dieser letzte Fall sich auch entsprechend den reduziblen Kurven vom Geschlechte 2 darbietet: *jede reguläre hyperelliptische Fläche kann auf eine Doppelebene abgebildet werden*

$$\{x, y, \sqrt{f(x, y)}\} \quad ({}^{194}) .$$

Die Untersuchung der endlichen Gruppen, welche einer PICARDschen Fläche angehören, führt auch auf 7 Typen von irregulären hyperelliptischen Flächen; dies sind elliptische Flächen von den Geschlechtern $p_a = -1$, $p_g = 0$, welche 2 Büschel von elliptischen Kurven enthalten ([195]).

Man kann diese Flächen durch die Werte der Mehrgeschlechter definieren und gelangt zu folgendem Theorem ([196]):

Die irregulären hyperelliptischen Flächen sind dadurch charakterisiert, daß ihr numerisches Geschlecht $p_a = -1$ und ihre geometrischen Geschlechter (oder Mehrgeschlechter) $p_g (= P_1)$, $P_2, \dots = 0$ oder $= 1$ sind: $P_i(P_i - 1) = 0$.

Es gibt hyperelliptische Flächen vom Range 1 für $p_g = P_i = 1$ (§ 42) und elliptische Flächen, welche als hyperelliptische Flächen vom Range $r > 1$, für $p_g = 0$ betrachtet werden können.

Die folgende Tabelle faßt die Klassifikation der irregulären hyperelliptischen Flächen zusammen (δ bezeichnet dabei den kleinsten Divisor, welcher einem passend gewählten linearen System auf der Fläche ent-

---

([193]) BAGNERA-DE FRANCHIS (II).

([194]) BAGNERA-DE FRANCHIS (II). Für die Flächen vom Geschlecht 0 und Doppelgeschlecht 1 siehe die Bestimmung der drei charakteristischen Formen von f in Nr. 36 der erwähnten Abhandlung. Alle regulären hyperelliptischen Flächen vom Geschlecht 1 können in Flächen der Ordnung 4 oder in Doppelebenen

$$\{x, y, \sqrt{f(x, y)}\}$$

übergeführt werden, wo f von der Ordnung 6 ist. Für das Studium dieser Doppelebenen siehe ENRIQUES-SEVERI (II), BAGNERA-DE FRANCHIS a. a. O.

([195]) BAGNERA-DE FRANCHIS (I), (II), « Paris C. R. », 145, p. 747, siehe auch ENRIQUES-SEVERI (II) Nr. 54-57, (III) Nr. 2.

([196]) ENRIQUES-SEVERI (III).

spricht, $n = r\delta$ die Determinante der elliptischen Fläche):

$$1)\quad r=2\ \begin{Bmatrix} \delta=1 & n=2 \\ \delta=2 & n=4 \end{Bmatrix}\ p_g=0\,,\quad P_2=P_4=1$$

$$2)\quad r=3\ \begin{Bmatrix} \delta=1 & n=3 \\ \delta=3 & n=9 \end{Bmatrix}\ P_8=0\,,\quad P_3=1$$

$$3)\quad r=4\ \begin{Bmatrix} \delta=1 & n=4 \\ \delta=2 & n=8 \end{Bmatrix}\ P_6=P_{10}=0\,,\quad P_4=1$$

$$4)\quad r=6\ \{\delta=1 \quad n=6\}\ P_2=P_3=P_{14}=0\,,\quad P_6=1$$

$$5)\quad r=1\ \{\delta \text{ beliebig}\}\ p_g=P_4=1 \quad (^{197})\,.$$

Das Studium der Parameterdarstellung einer hyperelliptischen Fläche führt auch auf interessante Fragen, welche die Natur der ABELschen Funktionen betreffen. In dieser Untersuchung hat G. HUMBERT ([198]) neben den klassichen *Thêta*-Funktionen gewisse *besondere Zwischenfunktionen* verwandt, welche durch P. APPELL und H. POINCARÉ eingeführt sind.

BAGNERA und DE FRANCHIS ([199]) haben das für die Theorie der ABELschen Funktionen fundamentale Theorem bewiesen, nach welchem für eine mittels Zwischenfunktionen gegebene Parameterdarstellung eine Vertauschung der Parameter derart vorgenommen werden kann, daß man zu Thêta-Funktionen geführt wird ([200]).

41. - Flächen, welche eine unendliche diskontinuierliche Schar von automorphen birationalen Transformationen gestatten.

Für eine Fläche kann man im Gegensatz zu dem, was für eine Kurve gilt, eine unbegrenzte diskontinuierliche Schar von birationalen Trans-

([197]) ENRIQUES-SEVERI (III) Nr. 4.

([198]) *Sur les fonctions abéliennes singulières,* « Journ. de Math. », (5) 5, p. 234; 6, p. 279; 7, p. 97; 9, p. 43; 10, p. 209 (1899-1904).

([199]) BAGNERA-DE FRANCHIS (III).

([200]) Durch Verallgemeinerung der ABELschen Funktionen gelangt man zu gewissen Flächen, deren Koordinaten sich durch Funktionen von zwei Variablen ausdrücken lassen, Funktionen, welche in bezug auf eine Gruppe von linearen Substitutionen invariant sind. Siehe E. PICARD, *Sur les fonctions hyperabéliennes,* « Journ. de Math. », (4), 1 (1885), p. 87. *Sur les fonctions hyperfuchsiennes ...,* « Annales de l'École Norm. Sup. », (3) 2 (1885), p. 357. « Bulletin de la Soc. Math. de France », 15 (1887), p. 148. *Sur une classe de groupes discontinues de substitutions linéaires et sur les fonctions de deux variables ...,* « Acta Math. », 1 (1882), p. 297. PICARD-SIMART 2, Note 1, p. 465, Note 4, p. 479.

formationen haben, ohne daß eine kontinuierliche Schar von Transformationen existiert. Auf diese Tatsache hat zum ersten Male G. HUMBERT hingewiesen, indem er ein der Theorie der KUMMERschen Flächen entlehntes Beispiel angegeben hat ([201]). Ein zweites Beispiel hat dann kurz nachher P. PAINLEVÉ gegeben ([202]), und zwar die Fläche vom Geschlecht $p_a = p_g = 1$, welche durch die elliptischen Funktionen

$$x = \wp(u)\,, \qquad y = \wp(v)\,, \qquad z = \frac{\wp'(u)}{\wp'(v)}$$

dargestellt wird und für welche jeder Punkt zwei Paaren (u, v) $(-u, -v)$ entspricht.

F. ENRIQUES hat nun das folgende allgemeine Theorem aufgestellt ([203]): *Eine Fläche, welche eine diskontinuierliche unendliche Schar (und nicht eine kontinuierliche Gruppe) von birationalen Transformationen gestattet, besitzt im allgemeinen ein Büschel von elliptischen Kurven; eine Ausnahme kann nur der Fall $p_a = P_2 = 1$ machen* ([204]).

Umgekehrt gestattet eine Fläche, welche ein Büschel von elliptischen Kurven C besitzt, eine unendliche diskontinuierliche Schar von Transformationen, wenn zwei Kurven K_1, K_2 existieren, welche die C nach Gruppen von Punkten schneiden, deren Multipla nicht äquivalent sind. Die Existenz derartiger Kurven K_1, K_2 zieht eine gewisse Anzahl (> 0 von Bedingungen) nach sich, welchen im allgemeinen nicht genügt wird und welche man auf Grund eines von ENRIQUES angegebenen Verfahrens bestimmen kann (siehe § 45).

Die Untersuchung der diskontinuierlichen unendlichen Gruppe von birationalen Transformationen, welche einer Fläche angehört, ist von F. SEVERI fortgeführt worden ([205]), der bewiesen hat, daß diese Gruppe (eine reguläre Fläche vorausgesetzt) isomorph ist mit einer Gruppe von Modulsubstitutionen der fundamentalen quadratischen Form, welche der Fläche in der Theorie der Basis (§ 32) entspricht; die Beschränkung, daß die Fläche regulär sein soll, kann unterdrückt werden ([206]).

([201]) « Paris C. R. », 124, 30. Januar 1897.

([202]) « Paris C. R. », 124, 14. Februar 1897. Vgl. PICARD et SIMART 2, p. 462.

([203]) *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali,* « Rendic. R. Acc. Lincei », (5), 15, 2. Sem. (1906), p. 665 [queste *Memorie,* vol. II, XL].

([204]) Die Ausnahme ist vorhanden. Das geht aus einem Beispiel hervor, welches G. FANO konstruiert hat, *Sopra alcune superficie del 4° ordine rappresentabili sul piano doppio,* « Rendic. Istituto Lombardo », (2) 39 (1906), p. 1071. Vgl. F. SEVERI, *Complementi alla teoria della base,* « Rendic. Circ. Mat. Palermo », 30 (1910), p. 265.

([205]) *Complementi* a. a. O.

([206]) Vgl. L. GODEAUX, *Sur les transformations des surfaces algébriques laissant invariant un système continu de courbes,* « Rendic. Acc. Lincei », (5) 21, 1. Sem. (1912), p. 398.

Endlich hat L. GODEAUX ([207]) bewiesen, daß, *wenn eine Fläche* (die nicht der Familie der Regelflächen angehört), *eine unendliche Schar von automorphen birationalen Transformationen gestattet, welche ein kontinuierliches System von Kurven invariant läßt, diese Schar in einer kontinuierlichen Gruppe enthalten ist, ausgenommen den Fall, daß das kontinuierliche System aus elliptischen Kurven eines Büschels zusammengesezt ist.*

42. - Flächen vom Geschlecht 1.

Sei $f(x, y, z) = 0$ eine Fläche einer gewissen Ordnung n und vom Geschlecht $p_g = 1$, dann gibt es eine Fläche φ von der Ordnung $n - 4$, die zu f adjungiert ist, und zwar können sich zwei Fälle darbieten:

1) entweder wird f von φ nicht außer der Doppelkurve und außer den ausgezeichneten Kurven geschnitten, d. h. es gibt keine eigentlich-kanonische Kurven von der Ordnung > 0;

2) oder φ schneidet f außer der Doppelkurve und den ausgezeichneten Kurven entlang einer eigentlichen kanonischen Kurve von einer Ordnung > 0 und einem Geschlecht $p^{(1)} \geqslant 1$.

Die beiden Fälle können nach den folgeden Kriterien unterschieden werden:

Eine Fläche vom Geschlecht $p_g = 1$ *besitzt keine eigentlich-kanonische Kurve, wenn* $P_4 = 1$ *ist, was zur Folge hat* $p_a = -1$ *oder* $p_a = +1$, *während alle Mehrgeschlechter* $P_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *werden*; *wenn im Gegenteil eine Fläche vom Geschlecht* $p_g = 1$ *eine eigentlich-kanonische Kurve von der Ordnung* > 0 *besitzt, so ist für sie* $P_4 > 1$ ([208]). *Eine reguläre Fläche vom Geschlecht* $p_a = p_g = 1$ *besitzt keine eigentlich-kanonische Kurve, wenn* $P_2 = 1$ *ist, was zur Folge hat* $P_3 = P_4 = \ldots = 1$. *Der Fall, in welchem eine kanonische Kurve von der Ordnung* > 0 *vorhanden ist, entspricht* $P_2 > 1$. ([209]).

Die Flächen mit $p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$ sind die in § 39 betrachteten hyperelliptischen Flächen. Betrachten wir die regulären Flächen von den Geschlechtern 1, welche durch $p_a = P_2 = 1$ charakterisiert sind.

Setzt man voraus, daß die ausgezeichneten Kurven eliminiert sind, so hat man die folgenden Eigenschaften.

([207]) a. a. O. In betreff anderer Beispiele von Flächen mit einer unendlichen Schar von Transformationen siehe A. ROSENBLATT, *Sur certaines classes de surfaces algébr ques irrégulières et sur les transformations birationelles de ces surfaces en elles mêmes*, « Bulletin Acad. Sciences Cracovie », Juli 1912.

([208]) F. ENRIQUES, *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 1$, « Rendic. R. Acc. di Bologna », 9. Dezember 1906, p. 11 [queste *Memorie*, vol. II, XLI].

([209]) F. ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere uno* (Nr. 5), « Memorie della Società Italiana delle Scienze detta (dei XL) », (3) 10 (1896), p. 201 [queste *Memorie*, vol. I, XVI].

Jedes vollständige lineare System ohne Basispunkte, welches auf einer Fläche gezogen ist, hat ein Geschlecht π, einen Grad n und eine Dimension r derart, daß

$$n = 2\pi - 2\,, \qquad r = \pi$$

ist, während das System sein eingenes adjungiertes ist ([210]).

Insbesondere hat jede reguläre Fläche vom Geschlecht 1, welche normal einem Hyperraum S_r angehört und keine ausgezeichneten Kurven besitzt, zu hyperebenen Schnitten kanonische Kurven vom Geschlecht $\pi = r$ und von der Ordnung $n = 2\pi - 2$.

Für die ersten Werte von $\pi : \pi = 3, 4 \ldots$, gibt es in der Tat Flächen vom Geschlecht 1, und zwar:

1) die allgemeine Fläche 4. Ordnung im S_3

$$(\pi = r = 3, \qquad n = 4);$$

2) die Fläche 6. Ordnung in einem S_4, welche der Durchschnitt zweier Mannigfaltigkeiten zweiter und dritter Ordnung ist

$$(\pi = r = 4, \qquad n = 6);$$

und andere Typen, welche man leicht in einem S_5 usw. konstruiert.

Man erhält so birational verschiedene Familien von Flächen vom Geschlecht 1 ([211]). Jede Fläche hängt von 19 willkürlichen Moduln ab. Nunmehr stellt sich ein Existenzproblem:

Kann man in der Tat Typen von irreduziblen Flächen vom Geschlecht 1 konstruieren, welche beliebigen Werten von π entsprechen? Die Antwort ist bejahend; F. ENRIQUES und F. SEVERI sind zu diesem Resultat gleichzeitig gelangt ([212]):

Es gibt eine abzählbar unendliche Menge von irreduziblen Flächenfamilie vom Geschlecht 1, *entsprechend sämtlichen Werten von*

$$\pi = 2, 3, 4, \ldots,$$

wobei jede Fläche von 19 *willkürlichen Moduln abhängt.*

([210]) ENRIQUES R (III 6).

([211]) ENRIQUES R, a. a. O.

([212]) F. ENRIQUES, *Le superficie di genere uno*, « Rendic. R. Accad. di Bologna », 13. Dezember 1908, p. 25 [queste *Memorie*, vol. II, XLVI]; F. SEVERI, *Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero*, « Atti del R. Istituto Veneto », 68, 2. Teil, p. 249 (10. Januar 1909).

Für $\pi = 2$ reduziert sich die Fläche auf eine Doppelebene mit einer Verzweigungskurve der Ordnung 6

$$z^2 = f_6(x, y) \, .$$

Es ist angezeigt, *die Doppelebenen vom Geschlecht* 1 *zu klassifizieren, indem man die Typen bestimmt,* auf welche man ihre Übergangskurve durch eine birationale Transformation der Ebene zurückführen kann; man findet 4 Familien, welche den folgenden Übergangskurven entsprechen ([213]):

1) die allgemeine Kurve 6. Ordnung,
2) die Kurve 8. Ordnung mit zwei mehrfachen Punkten 4. Ordnung,
3) die Kurve 10. Ordnung mit einem mehrfachen Punkte 7. Ordnung und zwei jenem unendlich benachbarten dreifachen Punkten,
4) die Kurve von der Ordnung 12 mit einem mehrfachen Punkte der Ordnung 9 und drei jenem unendlich benachbarten dreifachen Punkten.

Die Typen 2, 3, 4 enthalten eine Anzahl < 19 von Moduln.

Um die Untersuchung zu vervollständigen, welche die Flächen von den Geschlechtern 1 betriff, empfiehlt es sich, einige Worte über die rationalen Transformationen zwischen zwei solchen Flächen hinzuzufügen. Man hat das folgende Theorem:

Wenn zwischen zwei Flächen F, F' von den Geschlechtern 1 *eine rationale Korrespondenz* $[n, 1]$ *besteht, deren Inverse $n > 1$ Lösungen hat, so ist die Involution I_n auf F, welche durch die den Punkten von F' entsprechenden Gruppen gebildet ist, durch eine Gruppe* (*von der Ordnung n*) *von birationalen Transformationen erzeugt* ([214]).

Dieses Theorem gestattet die Involutionen zu bestimmen, welche den Flächen von den Geschlechtern 1 zugehören: man findet, daß n nur die Werte 2, 3, 4, 6, 8, 12 annehmen kann ([215]).

43. - Reguläre Flächen vom Geschlecht 0 und vom Doppelgeschlecht 1.

Sei $f(x, y, z) = 0$ eine reguläre Fläche einer gewissen Ordnung n und vom Geschlecht $p_a = p_g = 0$. Alsdann hat man entweder $P_2 = 0$, und die Fläche ist rational (§ 38), oder $P_2 > 0$. Betrachten wir näher die Voraussetzung $P_2 = 1 (p_a = p_g = 0)$; alsdann hat man eine Fläche φ von der Ordnung $2n - 8$, welche zu f biadjungiert ist, und es können sich zwei Fälle darbieten:

([213]) F. ENRIQUES, *Sui piani doppi ...*, a. a. O.

([214]) F. ENRIQUES, *Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno*, « Rendic. R. Accad. di Bologna », 13. März 1910, p. 71 [queste *Memorie*, vol. II, XLVIII].

([215]) L. GODEAUX, *Mémoire sur les involutions de genres un appartenant à une surface de genres un*, « Bulletin de l'Acad. R. de Belgique », n° 4 (1913), p. 310; « Annales de l'École Normale Sup. » (1914).

1) entweder wird f von φ außer der Doppelkurve und den ausgezeichneten Kurven nicht geschnitten, d. h. es gibt keine eigentlich-bikanonische Kurve von der Ordnung > 0;

2) oder φ schneidet f nach einer eigentlich-bikanonischen Kurve von der Ordnung > 0.

Nun kann man beweisen ([216]): *die Fläche* $(p_a = p_g = 0,\ P_2 = 1)$ *enthält keine bikanonische Kurve, wenn* $P_3 = 0$ *ist, was zur Folge hat* $P_3 = P_5 = \ldots = 0$, $P_2 = P_4 = P_6 = \ldots = 1$.

Dagegen hat man eine bikanonische Kurve von der Ordnung > 0, *wenn* $(p_a = p_g = 0,\ P_2 = 1)$, $P_3 > 0$ *ist, was zur Folge hat* $P_6 > 1$.

Die Familie der Flächen $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$ hat bemerkenswerte Eigenschaften. Auf einer Fläche dieser Familie gehört, wenn sie keine ausgezeichnete Kurve besitzt, jede Kurve vom virtuellen Geschlecht $\pi > 1$ einem linearen System von der Dimension $\pi - 1$ und vom Grad $2\pi - 2$ an, welches adjungiert ist zu seinem Adjungierten.

Im anderen Falle teilen sich die elliptischen Kurven in 2 Kategorien: isolierte elliptische Kurven und Kurven, welche Büscheln angehören (es gibt auf der Fläche eine abzählbar-unendliche Menge derartiger Büschel).

Jede Fläche von den Geschlechtern $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$ *läßt sich durch eine birationale Transformation auf eine Fläche der Ordnung* 6 *zurückführen, welche doppelt durch die Kanten eines Tetraeders hindurchgeht* ([217]). Es handelt sich hier um die Fläche, welche als erstes Beispiel einer nicht rationalen Fläche vom Geschlecht $p_a = p_g = 0$ sich dargeboten hat ([218]).

Zu der Klasse der Flächen, welche oben charakterisiert ist, gehört die Fläche, welche das Bild der Kongruenz der Geraden ist, die ∞^1 Flächen zweiten Grades eines linearen Systems ∞^3 ohne Basispunkte angehören ([219]).

Die Untersuchung der rationalen Transformationen $[n, 1]$ zwischen den Flächen von den Geschlechtern $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$, führt zu ähnlichen Resultaten wie in der vorhergehenden Nummer. Man findet $n = 2, 3, 4, 6$ ([220]).

([216]) F. ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, « Memorie della Società it. delle Scienze (detta dei XL) », (3) 14 (1906), p. 327 [queste *Memorie*, vol. II, XXXIX].

([217]) F. ENRIQUES, *Sopra le superficie ...*, a. a. O.

([218]) ENRIQUES (I) Nr. 39. Dieselbe Fläche kann als eine Doppelfläche vom Geschlecht 1 betrachtet werden. Vgl. F. ENRIQUES, « Rendic. R. Accad. di Bologna », 12. Januar 1908 [queste *Memorie*, vol. II, XLIV]. In betreff der Ausartungen des Tetraeders siehe G. FANO, *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno e loro casi particolari*, « Rendic. Circ. Mat. Palermo », 29 (1909), p. 98.

([219]) G. FANO, *Nuove ricerche sulle congruenze di rette del 3° ordine prive di linea singolare*, « Memorie Acc. Torino », (2) 51 (1900), p. 1.

([220]) L. GODEAUX, *Sur les involutions appartenant à une surface de genre* $p_a = p_g = 0$, $P_4 = 1$, « Bulletin de la Soc. Math. de France », 41 (1913), p. 178. « Bulletin de l'Acad. roumaine », 2 (1913), p. 65.

44. - Flächen mit einer kanonischen oder mehrkanonischen Kurve der Ordnung 0.

Die in §§ 42, 43 betrachteten Flächen sind die einzigen regulären Flächen, welche eine kanonische oder mehrkanonische Kurve der Ordnung 0 besitzen.

Es gibt aber auch irreguläre Flächen ($p_a = -1$, $p_g = 0, 1$), welche dieselbe Eigenschaft besitzen, und zwar sind dieses die irregulären hyperelliptischen Flächen vom Range 1 und vom Range > 1 (§§ 39, 40). Alle diese Flächen, vorausgesetzt, daß man die ausgezeichneten Kurven eliminiert hat, haben die folgende Eigenschaft:

Jedes System von Kurven auf der Fläche von virtuellem Geschlecht π hat den Grad $n = 2\pi - 2$.

Diese Flächen können in ihrer Gesamtheit durch die Bedingung $P_{12} = 1$ charakterisiert werden ([221]).

Jede Fläche, welche eigentlich-mehrkanonische Kurven von einer Ordnung > 0 besitzt, hat also eine unendliche Schar von 12-kanonischen Kurven:

$$P_{12} > 1;$$

die Bedingung $P_{12} = 0$ entspricht der Familien der Regelflächen (§ 38).

45. - Flächen vom linearen Geschlecht $p^{(1)} = 1$.

Jede Fläche vom linearen Geschlecht $p^{(1)} = 1$ und $P_{12} > 0$ besitzt ein Büschel von elliptischen Kurven vom Geschlecht $p_g - p_a$ oder ein Büschel vom Geschlecht p_g und ein zweites Büschel vom Geschlecht 1 in dem Fall $p_a = -1$ ([222]).

Für $P_{12} = 1$ besitzt eine Fläche vom linearen Geschlecht $p^{(1)} = 1$ ebenfalls (mindestens) ein Büschel von elliptischen Kurven, ausgenommen die Flächen mit allgemeinen Moduln von den Geschlechtern

$$p_g = 1\,, \qquad p_a = -1 \qquad \text{oder} \qquad +1$$

(§§ 39, 42).

([221]) F. Enriques, *Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare* $p^{(1)} = 1$, « Rendic. Accad. Lincei », (5) 23 (1914), 1. Sem., p. 206, 291 [questo volume, LV].

([222]) F. Enriques a. a. O. in § 42, Anm. ([208]), « Rendic. Bologna » (1906).

Das Studium der Flächen vom linearen Geschlecht $p^{(1)}=1$, welche ein Büschel von elliptischen Kurven C enthalten, hat nun zu folgenden Resultaten geführt (223):

1) den genannten Flächen (F^d) gehört ein invarianter Charakter d zu, welchen man ihre *Determinante* nennt und welcher die Minimalzahl der Punkte bezeichnet, die man rational auf einer Kurve C konstruiren kann. Die determinante d kann in der Tat einen willkürlichen Wert haben:

$$d=1, 2, 3, \ldots;$$

2) ist eine *Fläche* F^d *gegeben* mit der Determinante $d>1$, so kann *man ihr eine Fläche von der Determinante* 1 *assoziieren*, F', welche ein Büschel von elliptischen Kurven enthält, die mit den Kurven C von F^d aequivalent sind. Zwischen F^d und F' besteht eine Korrespondenz $[d, d]$.

Die beiden Flächen haben *dieselben Geschlechter* p_a, p_g, aber im allgemeinen nicht dieselben Mehrgeschlechter P_i von der Ordnung $i>1$. Setzt man der Einfachheit halber $p_a=p_g=p$ (reguläre Flächen) voraus, so hat man für F'

$$P_i=i(p-1)+1$$

und für F^d

$$P_i=i(p-1)+1+\sum\frac{(s-1)i}{s},$$

wo die Summe $\sum$ sich auf alle elliptischen Kurven erstreckt, welche mehrfach von der Ordnung s (Teiler von d) dem Büschel der C angehören.

3) *Man kann alle Flächen* F' *mittels Doppelkegeln mit einer Übergangskurve konstruieren, welche die Erzeugenden in drei Punkten trifft.* Die Konstruktion, welche im einzelnen für den Fall der regulären Flächen entwickelt worden ist, führt dazu, diese Flächen vollständig zu klassifizieren.

Hieraus folgt, *daß die Flächen vom linearen Geschlecht* $p^{(1)}=1$ *zu*

(223) F. Enriques, *Sulla classificazione ...*, a. a. O. (in § 44, Anm. (221)) (1914). Siehe auch Enriques, *Sulle superficie algebriche con un fascio di curve ellittiche*, « Rendic. Lincei », (5) 21, 1. Sem. (1912), p. 14 [questo volume, L]; *Intorno alle superficie ...*, « Rendic. » Bologna, (1906) a. a. O. [cfr. (208)]; *Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)}=1$, « Rendic. Lincei », (5) 7, 1. Sem. (1898), p. 234, 253 [queste *Memorie*, vol. I, XXII].

einer abzählbar-unendlichen Menge von Familien führen, in welche zwei willkürliche ganze Zahlen eintreten.

4) Man erkennt, daß eine Fläche F^d, welche ein Büschel von elliptischen Kurven C enthält, im allgemeinen keine weiteren reduziblen Kurven C besitzt, außer den mehrfachen elliptischen Kurven. Unter diesen Bedingungen wird die *Basis* der Fläche im allgemeinen *durch ein System von Kurven L_d gebildet, welche die C in d Punkten schneiden, sowie durch das Büschel der C.* Beschränkt man sich der Einfachheit halber auf den Fall $p_a = p_g = p$, so findet man *p Bedingungen dafür, daß die Fläche ein zweites Kurvensystem enthält, verschieden von L_d, welches die C in d Punkten schneidet,* ein System, das zu der Basis der Fläche hinzuzufügen ist. Diese p Bedingungen charakterisieren die Flächen F^d, welche eine diskontinuierliche Schar von automorphen birationalen Transformationen besitzen (§ 41).

46. - Über die Klassifikation der algebraischen Flächen.

Die in diesem Kapitel aufgestellten Resultate bezüglich der speziellen Flächen, welche den kleinsten Werten der Geschlechter entsprechen, haben eine allgemeine Bedeutung hinsichtlich der Klassifikation der algebraischen Flächen. Es genügt daran zu erinnern, daß für $P_{12} > 0$ und $p^{(1)} > 1 (p_a \geqslant 0)$ die Fläche hat:

$$P_2 \geqslant p^{(1)} \geqslant 2\,,$$

$$P_3 \geqslant 3p^{(1)} - 2 \geqslant 4\,,$$

so daß man ein projektiv invariantes Bild erhält, das durch eine kanonische oder bikanonische oder trikanonische Fläche einer gegebenen Ordnung (§ 13) geliefert wird.

Hieraus folgt:

Für jeden Wert von $p^{(1)} > 1$ gibt es eine endliche Anzahl von Flächenfamilien, vom linearen Geschlecht $p^{(1)} (P_{12} > 0)$; jede Familie enthält eine kontinuierliche-unendliche Anzahl von Klassen, welche von einer endlichen Anzahl von Moduln abhängen ([224]) (§ 22).

([224]) Die ersten Fälle, welche sich darbieten, für $p^{(1)} = 2, 3$, sind klassifiziert worden durch F. Enriques, *Le superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 2, 3$, « Rendic. Lincei », (5) 6 (1897), 1. Sem., p. 139, 169 [queste *Memorie*, vol. I, XIX, XX].

Dieses Resultat erstreckt sich nicht auf Flächen vom linearen Geschlecht $p^{(1)} = 1 (P_{12} > 0)$ oder auf Regelflächen, für welche $P_{12} = 0$ ist. Im besonderen für $p^{(1)} = 1 (P_{12} > 0)$ haben wir erkannt, daß es eine abzählbar-unendliche Menge von Familien gibt, in die zwei willkürliche Größen eintreten.

Man sieht also, daß die bemerkenswerten Flächen, die wir in diesem Kapitel klassifiziert haben, durch die Tatsache ein allgemeines Interesse haben, daß sie eine *singuläre Stellung* in der Klassifikation der Flächen einnehmen.

Wir schließen das Kapitel mit einer Tabelle, welche die bezüglich der Klassifikation der algebraischen Flächen bisher erlangten Resultate umfaßt:

$$\begin{array}{c} P_{12} = 0 \text{ Regelflächen} \\ (p^{(1)} \leqq 0) \end{array} \begin{cases} p_a = 0 \text{ rationale Flächen} \\ \qquad (p_a = P_2 = 0); \\ p_a = -1, \text{ elliptische Regelflächen} \\ \qquad (p_a = -1, \quad P_4 = P_6 = 0); \\ p_a < -1 \text{ Regelflächen vom Geschlecht } -p_a > 1. \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} P_{12} = 1 \\ (p^{(1)} = 1) \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \text{Kurven-} \\ \text{systeme} \\ \text{vom Ge-} \\ \text{schlecht } \pi \\ \text{und Grad} \\ n = 2\pi - 2 \end{array} \right\} \begin{cases} p_g = 1 & \begin{cases} p_a = 1, \text{ eine unendliche Menge von Familien, welche von einer willkürlichen ganzen Zahl abhängt:} \\ \qquad (p_a = P_4 = 1); \\ p_a = -1, \text{ hyperelliptische Flächen vom Range 1 und vom Divisor} \\ \qquad \delta = 1, 2, \ldots \end{cases} \\ p_g = 0 & \begin{cases} p_a = 0, \text{ Flächen sechster Ordnung, welche doppelt durch die Kanten des Tetraeders hindurchgehen:} \\ \qquad (p_a = P_3 = 0, \quad P_2 = 1); \\ p_a = -1, \text{ irreguläre hyperelliptische Flächen vom Range} > 1 \quad \begin{cases} P_2 = 0{,}1 \\ P_3 = 0{,}1 \\ P_4 = 0{,}1 \\ P_6 = 0{,}1. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$P_{12} > 1$

- $p^{(1)} = 1$
  - $p_a = -1$, elliptische Flächen, welche ein Büschel vom Geschlecht p_g von elliptischen Kurven besitzen und von einer willkürlichen ganzen Zahl abhängen;
  - $p_a \geqslant 0$, Flächen, welche ein Büschel vom Geschlecht $p_g - p_a$ von elliptischen Kurven besitzen: zwei willkürliche ganzzahlige Charaktere.
- $p^{(1)} > 1$
  - Flächen, welche ein invariantes Bild besitzen (kanonische oder mehrkanonische Flächen): eine endliche Anzahl von Familien für jeden Wert von $p^{(1)}$.

IV. - EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER DIE ALGEBRAISCHEN MANNIGFALTIGKEITEN VON DREI DIMENSIONEN.

47. - Über die Invarianten einer algebraischen Mannigfaltigkeit.

Die meisten Eigenschaften der Flächen hinsichtlich der birationalen Transformationen lassen sich auf Mannigfaltigkeiten von mehr Dimensionen übertragen. Daher scheint es angebracht, hier einem kurzen Überblick über die betreffenden Hauptergebnisse zu geben. Dabei genügt es, sich auf die Mannigfaltigkeiten von 3 Dimensionen M_3^n von der Ordnung n in einem Raum S_4

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \quad (x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ nicht-homogene Veränderliche})$$

zu beschränken, um die Analogien und die Unterschiede hinsichtlich der Flächentheorie kennen zu lernen.

Zunächst definiert man ganz analog die linearen Systeme von Flächen, welche M_3^n angehören, sowie den Begriff des vollständigen Systems. Mit Hilfe des Theorems von NOETHER $Af + B\varphi$ beweist man, daß jedes vollständige System auf M_3^n durch ein System von Mannigfaltigkeiten ausgeschnitten werden kann, welches zu M_3^n adjungiert ist, d. h. bezüglich $i-1$, $i-2$ oder $i-3$ mal durch jede Fläche, Kurve oder Punkt, welche i-fach für M_3^n sind, hindurchgeht ([225]).

Unter diesen adjungierten Mannigfaltigkeiten hat man insbesondere die Mannigfaltigkeiten Φ^{n-5} von der Ordnung $n-5$ zu betrachten. Denn diese schneiden auf M_3^n (außer mehrfachen Flächen und gewissen ausgezeichneten festen Flächen ([226]), von denen man sich in den meisten Fällen mit Hilfe einer geeigneten birationalen Transformation frei machen kann) das *kanonische lineare System* aus, das gegenüber den birationalen Transformationen absolut invariant ist.

Nach NOETHER (a. a. O.) gestattet die Betrachtung der Charaktere des kanonischen Systems eine Reihe von invarianten Charakteren der Mannigfaltigkeit zu bestimmen.

Und zwar hat man:

1) das dreidimensionale Geschlecht p von M_3^n, d. h. die Anzahl der linear unabhängigen kanonischen Flächen (oder der Φ^{n-5}); (man hat 2 Definitionen von p zu betrachten, welche auf 2 verschiedene Zahlen führen: das *geometrische Geschlecht* p_g und das *arithmetische Geschlecht* p_a);

2) das Flächengeschlecht $p^{(1)}$, d. h. ($p_g > 0$) das Flächengeschlecht der kanonischen Flächen (man erhält im allgemeinen ein *geometrisches* Flächengeschlecht $p_g^{(1)}$ und ein *arithmetisches* $p_a^{(1)}$);

3) das Kurvengeschlecht $p^{(2)}$ der kanonischen Flächen;

3) das Geschlecht $p^{(3)}$ der Schnittkurven zweier kanonischer Flächen;

5) den Grad $p^{(4)}$ des kanonischen Systems, d. h. die Anzahl der Schnittpunkte dreier kanonischer Flächen.

Das auf einer kanonische Fläche φ durch die übrigen Flächen desselben Systems $|\varphi|$ ausgeschnittene (charakteristische) lineare Kurvensystem ist die Hälfte des kanonischen Systems von φ; auf Grund der Relation zwischen dem Geschlecht und dem Grad des kanonischen Systems von § 11 erhält man daher die Formeln:

$$p^{(1)} - 1 = 4p^{(1)} \tag{1}$$

$$2p^{(3)} - 2 = 3p^{(1)}\,. \tag{2}$$

Außerdem hat M. NOETHER die Bermekung gemacht, daß in allen

([225]) NOETHER A und B; F. SEVERI « Rend. Acc. Lincei », (5) 11, 1. Sem. (1902), p. 105; « Atti Acc. d. Sc. Torino », 41 (1905-1906), p. 205; « Rend. Circ. Mat. di Palermo », 28 (1909), p. 33,

([226]) Nach NOETHER B hat man 2 Kategorien ausgezeichneter Flächen zu unterscheiden, die aus Fundamental-Punkten und -Kurven einer Mannigfaltigkeit M_3' hervorgehen, welche mit M_3 durch eine birationale Transformation verknüpft ist:

1) die ***ausgezeichneten Flächen der ersten Kategorie***; sie entsprechen einfachen Kurven oder Doppelpunkten, die den adjungierten Φ^{n-5} einfach angehören;

2) die ***ausgezeichneten Flächen der zweiten Kategorie***; sie entsprechen einfachen Punkten, welche als feste Bestandteile des durch die Φ^{n-5} ausgeschnittenen Systems doppelt zählen.

von ihm betrachteten Beispielen auch die Relation:

$$2p = p^{(1)} - p^{(3)} + p^{(2)} + 4 \,, \tag{3}$$

besteht; diese Relation, welche unter allgemeineren Voraussetzungen von F. SEVERI ([227]) bewiesen worden ist, folgt übrigens aus der Bemerkung, daß das charakteristische lineare System $|C|$, welches auf einer kanonischen Fläche φ durch die übrigen Flächen φ ausgeschnitten wird, hinsichtlich des kanonischen Systems von φ autoresidual ist; es genügt, das auf Flächen ausgedehnte Theorem von RIEMANN-ROCH anzuwenden unter der Voraussetzung, daß $|C|$ regulär ist (§ 17). Daraus erkennt man, daß *das Band zwischen der Dimension und den anderen Charakteren des kanonischen Systems*, welches für die M_3 durch die Formel (3) ausgedrückt ist, *auf das Ungerade der Anzahl der Dimensionen von M_3 hinweist* (SEVERI a. a. *O.*); es besteht eine Analogie zu den Kurven, wo die Dimension der kanonischen Schar g^{p-1}_{2p-2} gleich der Hälfte des Grades ist, aber es besteht keine Analogie zu den Flächen, wo die beiden Geschlechter vollkommen unabhängig voneinander sind.

In betreff der oben eingeführten Charaktere kann man die folgenden Bemerkungen machen. Zunächst kann die Invariantentheorie einer Mannigfaltigkeit M_3 auf die Betrachtung der Flächen begründet werden, welche einem in M_3 enthaltenen linearen Flächensystem adjungiert sind. Die zu einem System $|F|$ auf M_3 adjungierten Flächen F' führt man ein, indem man von der JACOBIschen Fläche eines in $|F|$ enthaltenen dreifach-unendlichen linearen Systems ausgeht und einem Wege folgt, welcher dem von ENRIQUES für den Fall der Flächen eingeschlagenen Wege ganz analog ist; man gelangt so zu der durch folgende Formel ausgedrückten fundamental Eigenschaft

$$|(F+\psi)'| = |F'+\psi| = |F+\psi'|\,.$$

Sieht man von Ausnahmeflächen ab, so ist das kanonische System von M_3 definiert durch

$$|\varphi| = |F'-F| = |\psi'-\psi|\,.$$

Nun kann man mit Hilfe der Charaktere von $|F|$ und $|F'|$ analog dem Verfahren von § 13 die relativen Invarianten Ω_0, Ω_1, Ω_2 einführen,

---

([227]) *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche,* « Rend. Circ. Mat. di Palermo », 28 (1909), p. 33.

die sich bzw. auf $p^{(2)}$, $p^{(3)}$, $p^{(1)}$ reduzieren, falls man es, von Ausnahmeflächen abgesehen, mit einer M_3 vom Geschlecht $p > 0$ zu tun hat, die aber selbst in dem Falle, in welchem $|F' - F|$ nicht existiert, noch definiert sind.

Die Ausdrücke für die relativen Invarianten Ω_0, Ω_1, Ω_2 sind auf dem angegebenen Wege von M. PANNELLI ([228]) gebildet worden, der die Art, in welcher sich diese Charaktere durch birationale Transformationen ändern, unter Einführung der ausgezeichneten Flächen erster oder zweiter Kategorie im einzelnen studiert und die Formel

$$2\Omega_1 - 2 = 3\Omega_0$$

aufgestellt hat, die eine Verallgemeinerung der oben erwähnten Formel (2) von Noether ist.

M. PANNELLI hat noch einen anderen Ausdruck gebildet, von welchem er zeigt, daß er einer absoluten Invariante entspricht und

$$\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4$$

äquivalent ist. F. SEVERI ([227]) hat gezeigt, daß diese Invariante PANNELLIS sich auf das Doppelte des numerischen Geschlechts p_a reduziert, so daß man die Formel hat:

$$2p_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4\,,$$

die eine Verallgemeinerung von (3) ist.

Man hat auch das Verfahren, welches zur Einführung der Invariante J von ZEUTHEN-SEGRE einer Fläche führt (§ 14), auf die Mannigfaltigkeiten auszudehnen versucht. C. SEGRE ([229]) selbst hat die relative Invariante $J_0 = \delta - 2\pi - 2i_0$ definiert, wo δ die Anzahl der Flächen eines (M_3 angehörenden) Büschels bedeutet, welche einen Doppelpunkt besitzen, während π das Geschlecht der Basiskurve des Büschels, i_0 die ZEUTHEN-SEGREsche Invariante der genannten Flächen ist. Endlich hat M. PANNELLI ([230]) mit Hilfe der Charaktere der Flächen eines beliebigen M_3 angehörenden Netzes und der JACOBIschen Kurve des Netzes eine weitere relative Invariante J_1 gebildet, die mit J_0 und dem

([228]) *Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica ...*, « Rend. Acc. Lincei », (5) 15, 1. Sem. (1906), p. 483; *Sopra gli invarianti di una varietà algebrica ...*, ibid., p. 620.

([229]) a. a. O. ([5]).

([230]) « Atti del IV Congresso int. dei Mat. », 2 (1909), p. 374; « Rend. Circ. Mat. di Palermo », 32 (1911), p. 1.

arithmetischen Geschlecht p_a durch die Relation

$$48p_a - 54 = 2J_1 - J_0$$

verbunden ist.

Man hat auch

$$12(2\Omega_2 - \Omega_0) = 2J_1 - J_0 - 18\ ,$$

was man mit der Relation NOETHERS von § 14 zwischen den Charakteren J, ω und p_a einer Fläche vergleichen kann.

Kehren wir nun zu den Invarianten zurück, welche ihren Ursprung der genannten Abhandlung von M. NOETHER verdanken. Wir haben schon auf den Umstand hingewiesen, daß jedes der Geschlechter zu 2 oder 3 Dimensionen von M_3 zwei Charaktere liefert: eine geometrische und eine arithmetische Invariante. Demnach hat man 2 Irregularitäten zu betrachten: eine *erste* oder *dreidimensionale Irregularität* $(p_g - p_a)$ und eine *zweite* oder *Flächenirregularität* $(p_g^{(1)} - p_a^{(1)})$.

In der Theorie der Flächen ist die Irregularität der Defekt der auf einer Kurve eines linearen Systems $|C|$ durch das adjungierte System $|C'|$ ausgeschnittenen Schar. *Für eine Mannigfaltigkeit M_3 ist der analoge Defekt des Kurvensystems, der auf einer Fläche eines linearen Systems $|F|$ durch das adjungierte System $|F'|$ ausgeschnitten wird, (unter gewissen Beschränkungen) gleich der Summe der beiden Irregularitäten* (F. SEVERI (227)).

Die zweite Irregularität kann man auch mit Hilfe des folgenden Theorems definieren (231): *jede M_3 angehörende algebraische Fläche, welche in einem linearen System von der Dimension $\geqslant 2$ variiert werden kann* (und deren variable Schnittkurven irreduzibel sind), *besitzt eine konstante Irregularität, welche gleich $p_g^{(1)} - p_a^{(1)}$ ist* (wenn auch die Schnittkurve zweier kanonischen Flächen irreduzibel ist).

Es empfiehlt sich, diese Resultate zu dem Begriff des kontinuierlichen vollständigen (algebraischen) Systems von Flächen in M_3 in Beziehung zu setzen. Man gelangt zu diesem System ebenso wie zu dem charakteristischen System von (Schnitt-)Kurven, zu welchem jenes Veranlassung gibt, auf ganz dieselbe Weise wie in der Flächengeometrie (§ 18) und erweitert sodann das Theorem von F. ENRIQUES, nach welchem das charakteristische System eines vollständigen kontinuierlichen Systems vollständig ist (F. SEVERI (227)).

---

(231) CASTELNUOVO-ENRIQUES, *Sur les intégrales simples de première espèce ...*, « Annales de l'École Norm. Sup. », (3) 22 (1906), p. 339 [queste *Memorie*, vol. II, XXXVIII].

Die Existenz eines nicht in einem linearen System enthaltenen kontinuierlichen Flächensystems ist mit der zweiten Irregularität von M_3 verknüpft. Und zwar gilt der Satz: *Eine Mannigfaltigkeit M_3, deren zweite Irregularität $p_g^{(1)} - p_a^{(1)} > 0$ ist, enthält immer* (unter der oben ausgesprochenen Voraussetzung) *$(p_g^{(1)} - p_a^{(1)})$-fach unendliche kontinuierliche Systeme von Flächen, unter denen sich keine ∞^1 befinden, die einem und demselben linearen System angehören* (CASTELNUOVO-ENRIQUES (231); F. SEVERI (227)).

Andrerseits ist die Existenz des kontinuierlichen Systems mit der Existenz einfacher Integrale erster Gattung verknüpft:

$$\int A_1\,dx_1 + A_2\,dx_2 + A_3\,dx_3$$

(wo die A_i rationale Funktionen von x_1, x_2, x_3, x_4 sind), Integrale, die man auf dem E. PICARDschen Wege eingeführt hat (§§ 23, 25). *Die Mannigfaltigkeit M_3 besitzt* (unter der genannten Beschränkung) $p_g^{(1)} - p_a^{(1)}$ *voneinander unabhängige einfache Integrale erster Gattung* mit $2(p_g^{(1)} - p_a^{(1)})$ *Perioden* (CASTELNUOVO-ENRIQUES (231); vgl. F. SEVERI (227)). Diese Zahlen beziehen sich auch auf jede Fläche von M_3, welche einem linearen System von der Dimension $\geqslant 2$ angehört, dessen charakteristische Kurven irreduzibel sind. Das RIEMANNsche Kontinuum von 6 Dimensionen, welches die M_3 darstellt, besitzt $2(p_g^{(1)} - p_a^{(1)})$ verschiedene lineare Zykel, es hat mithin den linearen Zusammenhang

$$2(p_g^{(1)} - p_a^{(1)}) + 1\,.$$

Zu der Mannigfaltigkeit M_3 gehören auch Doppelintegrale:

$$\iint A_1\,dx_2\,dx_3 + A_2\,dx_3\,dx_1 + A_3\,dx_1\,dx_2$$

und dreifache Integrale

$$\iiint A\,dx_1\,dx_2\,dx_3$$

(wo die A rationale Funktionen von x_1, x_2, x_3, x_4 sind).

Ein dreifaches Integral ist von der ersten Gattung (überall endlich), wenn $A = P/f'_{x_4}$ ist, wo P ein adjungiertes Polynom von der Ordnung $n - 5$ ist.

Die Anzahl der voneinander verschiedenen dreifachen Integrale erster Gattung ist das geometrische Geschlecht p_g von M_3 (NOETHER A).

F. SEVERI [227] hat *die Doppelintegrale erster Gattung* studiert und gezeigt, daß die Anzahl dieser Integrale, soweit sie voneinander verschieden sind, *die Summe der beiden Irregularitäten*

$$p_g - p_a + p_g^{(1)} - p_a^{(1)}$$

von M_3 nicht übertreffen kann; man weiß noch nicht, ob das Resultat dahin präzisiert werden darf, daß Gleichheit gilt, aber man kennt Mannigfaltigkeiten M_3, für welche die Gleichheit besteht.

Endlich ist von F. SEVERI [232] das Theorem von E. PICARD (§ 26) auf die höheren Mannigfaltigkeiten ausgedehnt worden, welches Doppelintegrale erster Gattung rational zu konstruieren gestattet, wenn man 2 oder mehrere einfache Integrale erster Gattung kennt.

48. - Einige die rationalen Mannigfaltigkeiten betreffende Fragen.

Die Probleme, auf welche sich die im V. Kapitel mitgeteilten Resultate beziehen, führen beim Übergang von Flächen zu Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen zu wesentlich neuen Schwierigkeiten.

Durch eine Untersuchung der linearen Systeme von Flächen, welche einer Mannigfaltigkeit M_3 von der 4. Ordnung angehören, hat zuerst G. FANO [233] bewiesen, daß die allgemeine M_3^4 nicht Punkt für Punkt auf den Raum S_3 abgebildet werden kann; dasselbe gilt für die Mannigfaltigkeit M_3^6, welche der Durchschnitt einer kubischen Mannigfaltigkeit M_4^3 mit einer quadratischen M_4^2 in S_5 ist, d. h. der Bildmannigfaltigkeit des Linienkomplexes dritten Grades in S_3.

Diese Resultate beantworten gewisse von den Geometern lange Zeit verfolgte Versuche im negativen Sinne; ihr Interesse besteht darin, daß die genannten Mannigfaltigkeiten vom Raum S_3 durch den Wert des geometrischen oder numerischen Geschlechts oder auch einiger Mehr-

---

(232) *Relazioni tra gli integrali semplici e gli integrali multipli ...*, « Annali di Mat. », (3) 20 (1913), p. 201. A. COMESSATTI, *Sulle varietà algebriche ...*, « Rend. Acc. Lincei », (5) 22, 2. Sem. (1913), p. 270, 316 betrachtet den Fall, in welchem die einfachen Integrale nicht voneinander unabhängig sind aus dem Gesichtspunkte der Funktionentheorie und gelangt zu einer Charakterisierung der Mannigfaltigkeiten, deren Geschlechter p_g und p_a sowie Irregularität $p_g^{(1)} - p_a^{(1)}$ gewissen Ungleichungen genügen. Man vergleiche diese Resultate mit den früher von F. SEVERI gegebenen Theoremen, welche insbesondere den Fall $p_g = 0$ betreffen, *Sulle superficie e varietà ...*, « Rend. Acc. Lincei », (5) 20, 1. Sem. (1911), p. 537.

(233) « Atti della R. Accad. d. Scienze di Torino », 43 (1908), p. 973.

geschlechter nicht unterschieden werden können; alle diese Charaktere sind Null, sobald ein lineares System von Flächen $|F|$ auf M_3 eine begrenzte Schar adjungierter Systeme zur Folge hat, und wenn gleichzeitig die beiden Irregularitäten der Mannigfaltigkeit Null sind.

Man kann die Frage aufwerfen, ob die genannten Mannigfaltigkeiten M_3 zur Kategorie der rationalen Mannigfaltigkeiten im weiteren Sinne gehören, ob sie also eine rationale Parameterdarstellung zulassen, bei der die Parameter nicht rationale Funktionen der Koordinaten der Punkte von M_3 sind, d. h. — geometrisch gesprochen — ob sie durch Involutionen des Raumes S_3 dargestellt werden können. F. ENRIQUES ([234]) hat auf diese Frage für die M_3^6 eine bejahende Antwort gegeben. Hieraus folgt, *daß es im Raum S_3 Involutionen J_n gibt, deren Gruppen den Punkten desselben Raumes nicht ein-eindeutig zugeordnet sind* (vgl. § 37).

Dieses Resultat zeigt hinlänglich, wie wesentlich die Theorie der rationalen M_3 von der Theorie der Flächen verschieden ist.

Die folgenden Bemerkungen lassen diesen Unterschied noch mehr hervortreten.

Durch das Studium der numerischen Irrationalitäten, welche in die Parameterdarstellung einer rationalen Fläche eingehen (vgl. § 38), wird man zu einer Klassifikation der Mannigfaltigkeiten M_3 geführt, welche ein lineares System rationaler Flächen enthalten ([235]).

Solcher M_3 gibt es mehrere Typen, welche rational im weiteren Sinne des Wortes sind, d. h. durch Involutionen von S_3 dargestellt werden können. Aber einer der allgemeinsten Typen wird von denjenigen M_3 gebildet, welche ein Kongruenz vom Index 1 rationaler Kurven enthalten; solche M_3 führen auf den Fall der M_3 von der *Ordnung n mit einer $(n-2)$-fachen Geraden* und einer Kongruenz von Kegelschnitten C.

Diese M_3 sind aber *im allgemeinen* (selbst in dem weiteren Sinne des Wortes) *nicht rational*; die *Bedingung* dafür, daß sie eine rationale Parameterdarstellung zulassen, besteht darin, *daß auf M_3 eine rationale Fläche* existiert, die nicht durch ein Büschel von Kegelschnitten C gebildet ist, d. h. welche die C in einer endlichen Anzahl von Punkten schneidet ([236]). Man erkennt, daß diese Bedingung im allgemeinen für die M_3 mit einer $(n-2)$-fachen Geraden nicht erfüllt ist, indem man die M_3 auf einen Doppelraum

$$u^2 = f_{2m}(xyz)$$

([234]) *Sopra un'involuzione non razionale dello spazio*, « Rend. Acc. Lincei », (5) 1. Sem. (1912), p. 81 [questo volume, LI].

([235]) F. ENRIQUES, « Lincei », a. a. O.; « Math. Ann. », 49, p. 1 [cfr. ([162]), 2)].

([236]) F. ENRIQUES, « Annali di Mat. », 20 (s. 3), p. 109 [questo volume, LIV].

mit einer Übergangsfläche $f_{2m} = 0$ von der Ordnung $2m$ mit einem $(2m - 2)$-fachen Punkte abbildet.

Beim Zurückgehen auf Gebilde von 2 Dimensionen ist also zu konstatieren, daß die Klasse der Transformierten der Ebene (rationalen Flächen) in zwei Familien von Flächen zerfällt: die ebenen Involutionen und die Flächen mit einem linearen Büschel von Kegelschnitten finden ihre Verallgemeinerung in zwei Klassen von M_3, welche aber weder in den Raum S_3 noch ineinander übergeführt werden können. Damit ist eine Probe der neuen Schwierigkeiten gegeben, welche den erwarten, der das allgemeine Problem der Klassifikation der M_3 in Angriff nehmen will.

LVIII.

SULLE INTERSEZIONI DI DUE VARIETÀ ALGEBRICHE

« Rend. dell'Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », vol. XIX (1915), pp. 90-92

1. – Credo interessante di riesumare quella che sembra essere la prima dimostrazione del teorema « una superficie d'ordine m e una curva d'ordine n hanno, in generale, $m\,n$ punti comuni ». Risale al 1831 ed è dovuta a PONCELET; si trova al § 241 della memoria « Analyse des transversales » inserita nel *Giornale di Crelle* t. VIII, e riprodotta nella 2ª edizione del « Traité des propriétés projectives » (1866, t. II, pag. 224). Codesta dimostrazione non meritava di essere dimenticata dai geometri, poichè essa è invero più diretta e più semplice e — come mostreremo — più atta ad essere generalizzata, in confronto alle due dimostrazioni posteriori del teorema, che vengono sole ricordate, cioè alla dimostrazione di FOURET (1) basata sul principio di corrispondenza (come l'analoga di CHASLES per due curve piane) e alla dimostrazione di HALPHEN (2) basata sulla rappresentazione monoidale delle curve gobbe (3).

Sieno C una curva d'ordine n e f una superficie d'ordine m. PONCELET ragiona come segue: si assume un piano generico α e una direzione per es. perpendicolare al piano; sopra ogni retta avente la direzione suddetta e incidente a C si riportino in grandezza e segno le distanze fra i punti di C e le intersezioni con f; per tal modo si definisce una *curva derivata*, K', d'ordine $m\,n$, le cui intersezioni con α corrispondono a quelle di f e C.

---

(1) « Bulletin de la Soc. Math. » (5 Marzo - 9 Luglio 1873).

(2) ibidem, 25 Giugno 1873.

(3) Della dimostrazione di PONCELET non si trova traccia nel *Trattato di Geometria a tre dimensioni* del SALMON e neppure nei *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie* del CREMONA (n. 21), ove il teorema è stabilito — in sostanza — basandosi su considerazioni di continuità.

Traduciamo questa dimostrazione in forma proiettiva. Preso un punto O fuori di C si ha un cono proiettante, φ, dell'ordine n, che sega f secondo una curva K. L'ordine di K, che vale $m\,n$, si deduce dal teorema di BÉZOUT sulle intersezioni di due curve piane che qui può ammettersi noto, oppure — in modo diretto — segando K con un piano per O. Ora si tratta di cercare le intersezioni di C e K sul cono φ; a tale scopo conviene eseguire una trasformazione sopra il cono che muti C in una sezione piana C' (scelta arbitrariamente purchè non passi per O). E la trasformazione si pone fissando su ogni generatrice una proiettività che abbia O come punto unito e le intersezioni con C e C' come punti omologhi; basta aggiungere la condizione suppletiva che si tratti d'una proiettività parabolica (o — se si preferisce — involutoria ecc.). La curva K' che, nell'indicata trasformazione, corrisponde a K è, come K, d'ordine $m\,n$, giacchè non passa per O ed è segata in tanti punti da un piano per O; da ciò segue il teorema.

Per prevenire possibili obiezioni conviene osservare che la proiettività determinata sulla generatrice generica di φ non degenera mai, neppure sulle corde di C, che sono generatrici doppie del cono, sulle quali si hanno *due* proiettività.

2. – La dimostrazione sopra riferita si estende al caso di due varietà qualunque e porge così la più semplice dimostrazione del *teorema fondamentale*: *due varietà V_r^m, V_{n-r}^p di S_n hanno in generale mp punti comuni.*

Questo teorema ha ricevuto — com'è noto — due dimostrazioni: una di HALPHEN ([4]), completata da NOETHER ([5]), che si basa sull'estensione della rappresentazione monoidale, e l'altra di PIERI ([6]) basata sul principio di corrispondenza generalizzato.

La nostra dimostrazione si svolge induttivamente come segue.

Pongasi stabilito il teorema per una V_r^m e una V_{n-1-r}^p di S_{n-1}, si avrà quindi che il cono V_{r+1}^m proiettante V_r^m da un punto generico O sega V_{n-r}^p secondo una curva K d'ordine mp. Si debbono determinare — sul detto cono — le intersezioni di K con V_r^m e per questo si eseguirà una trasformazione del cono che muti quest'ultima varietà in una sezione iperpiana. Tale trasformazione si definisce come nel caso di $r=1$, $n=3$, spiegato innanzi. La curva K' omologa a K non passa per O e riesce d'ordine mp, donde segue il teorema.

([4]) l. c.

([5]) « Math. Annalen », Bd. 11, p. 570 (1877).

([6]) « Giornale di Mat. Napoli », 26 (I), p. 251 (1888).

LIX.

SULLA TEORIA DELLE SINGOLARITÀ DELLE CURVE ALGEBRICHE

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XXV (1° sem., 1916),

pp. 607-613

1. – Nella teoria delle singolarità delle curve algebriche è fondamentale la decomposizione della singolarità ottenuta dal Nöther mediante trasformazioni quadratiche, per la quale una singolarità qualsiasi viene ad esser concepita come riunione di punti multipli infinitamente vicini, cui s'aggiungono dei punti di diramazione semplici. La fecondità di questo concetto conferisce alla teoria noetheriana una decisa superiorità sulle rivali teorie di Smith e di Halphen, che riescono ugualmente a sciogliere i problemi fondamentali d'intersezione, basandosi sugli sviluppi in serie di Puiseux. Così i progressi ulteriori che la dottrina delle singolarità ha conseguito (ad esempio per opera di Bertini, Segre ecc.) appaiono perfezionamenti e svolgimenti dell'indirizzo che assume come punto di partenza la trasformazione quadratica.

Ora l'istrumento della trasformazione, per quanto semplice e appropriato, introduce qualcosa di estraneo nello studio della singolarità: ciò che conferisce una effettiva esistenza ai punti infinitamente vicini, legittimando il passaggio al limite che è simboleggiato da questo concetto, è la proprietà che essi contano come i punti propri — secondo la loro molteplicità — nel computo delle intersezioni di due curve e parimente nel computo delle condizioni di passaggio per curve d'ordine abbastanza elevato.

Questa veduta ci ha guidato a ricercare una *definizione diretta dei punti infinitamente vicini*, conducendoci ad un nuovo svolgimento della teoria delle singolarità delle curve, sia dal *punto di vista algebrico-aritmetico*, sia da quello del *calcolo differenziale*. Una esposizione diffusa della teoria così disegnata si troverà nel secondo volume delle nostre *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni*, redatto con la valida collaborazione del dottor OSCAR CHISINI; qui ci proponiamo di indicare rapidamente i concetti fondamentali della trattazione e i principali resultati che ne conseguono.

2. – Osserviamo anzitutto che, nel caso di singolarità costituite di rami lineari, una definizione diretta dei punti infinitamente vicini che la compongono viene porta semplicemente dai contatti dei singoli rami; ma, nel caso dei rami superlineari, occorre considerare, oltre tali contatti, anche i punti multipli successivi appartenenti ad un ramo. La determinazione di questi è stata raggiunta dal NÖTHER mediante trasformazioni quadratiche, nella Nota *Les combinaisons caracteristiques dans la transformation d'un point singulier* (1); ma per il nostro scopo deve essere nuovamente guadagnata, riprendendo l'analisi di HALPHEN relativa alle intersezioni di due rami.

Si abbiano i due rami d'ordine ν, μ:

$$y = ax + bx^{(\nu+\nu')/\nu} + cx^{(\nu+\nu'+\nu'')/\nu} + \ldots \tag{1}$$

$$z = ax + b'x^{(\mu+\mu')/\mu} + c'x^{(\mu+\mu'+\mu'')/\mu} + \ldots \tag{2}$$

$$(b \neq 0\,, \qquad c \neq 0\ldots\,, \qquad b' \neq 0\,, \qquad c' \neq 0\ldots)\,,$$

dei quali si cerca il numero delle intersezioni assorbite nell'origine. Consideriamo i ν valori di $y : y_1\, y_2 \ldots y_\nu$; e i μ valori di $z : z_1\, z_2 \ldots z_\mu$, e formiamo lo sviluppo in serie del prodotto

$$\pi(y_i - z_k)\,,$$

che riesce razionale in x. Il numero che si ricerca vien dato dal minimo esponente a cui figura la x in codesto sviluppo. Si trova così che, per

$$b \neq b',$$

il numero delle intersezioni dei due rami (1) e (2) è uguale al più piccolo dei due numeri

$$\mu\nu + \mu\nu'\,, \qquad \mu\nu + \mu'\nu\,.$$

Questa formula vale anche nel caso $b = b'$, salvo che sia contemporanea-

(1) « Circolo matematico di Palermo », tomo IV, p. 89 (1890).

mente

$$\mu\nu' = \mu'\nu\,, \qquad \text{cioè} \qquad \frac{\nu'}{\nu} = \frac{\mu'}{\mu}\,;$$

ma, se

$$b = b'\,, \qquad \frac{\nu'}{\nu} = \frac{\mu'}{\mu}\,, \qquad c \neq c'\,,$$

il numero delle intersezioni dei due rami cresce, su $\mu\nu' + \mu'\nu$, del più piccolo fra i due numeri

$$\bar{\mu}\nu'' \qquad \text{e} \qquad \bar{\nu}\mu''\,,$$

designando $\bar{\mu}$ e $\bar{\nu}$ i massimi comuni divisori di μ, μ' e ν, ν' rispettivamente.

Per $c = c'$,

$$\bar{\mu}\nu'' = \bar{\nu}\mu''\,, \qquad \text{cioè} \qquad \frac{\nu''}{\nu} = \frac{\mu''}{\mu}\,,$$

si procede analogamente.

Fermiamoci, per semplicità, sul primo caso: $b \neq b'$. Sviluppiamo ν'/ν e μ'/μ in frazione continua, e supponiamo che si abbia

$$\frac{\nu'}{\nu} = h + \cfrac{1}{h_1 + \cfrac{1}{h_2 + \cdots + \cfrac{1}{h_i + \cfrac{1}{h_{i+1} + \cdots + \cfrac{1}{h_s}}}}}\,,$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = h + \cfrac{1}{h_1 + \cfrac{1}{h_2 + \cdots + \cfrac{1}{h_i + \cfrac{1}{k_{i+1} + \cdots + \cfrac{1}{k_r}}}}}\,;$$

$$\nu' = h\nu + \nu_1\,, \qquad \nu = h_1\nu_1 + \nu_2 \ldots \nu_{s-1} = h_s\nu_s \qquad (\nu_s = \bar{\nu})\,,$$

$$\mu' = h\mu + \mu_1\,, \qquad \mu = h_1\mu_1 + \mu_2 \ldots \mu_{r-1} = k_r\mu_r \qquad (\mu_r = \bar{\mu})\,,$$

con

$$k_{i+1} > h_{i+1} .$$

Allora si riconosce che il più piccolo dei due numeri $\mu\nu'$ e $\mu'\nu$ equivale alla somma

$$h\mu\nu + h_1\mu_1\nu_1 + \ldots + h_i\mu_i\nu_i + k_{i+1}\mu_{i+1}\nu_{i+1} + \mu_{i+2}\nu_{i+1} .$$

Questo risultato si lascia interpretare dicendo che i due rami hanno a comune, oltre l'origine

h punti di molteplicità ν per (1), e μ per (2);

h_4 punti di molteplicità ν_1 per (1), e μ_1 per (2);

. . . . , ...

e finalmente k_{i+1} punti di molteplicità ν_{i+1} per (1), e μ_{i+1} per (2); ed un punto di molteplicità ν_{i+1} per (1), e μ_{i+1} per (2).

Così, tenendo fermo il ramo (1) e facendo variare (2) i valori aritmetici di μ e μ', si è condotti a definire i punti multipli successivi del ramo (1) dipendenti dal termine $bx^{(\nu+\nu')/\nu}$ della serie di PUISEUX che lo rappresenta: *il ramo d'ordine* ν, *rappresentato dalla* (1), *possiede un gruppo di punti multipli successivi all'origine, in corrispondenza al primo termine della serie successiva ad* ax, *e precisamente* h *punti* ν*–pli*, h_1 *punti* ν_1*–pli*..... h_s *punti di molteplicità* $\nu_s = \bar{\nu} =$ m. c. d. (ν, ν').

In modo analogo, proseguendo la discussione, si è condotti a riconoscere l'esistenza di punti multipli successivi del ramo, in corrispondenza al termine seguente della serie, e così di seguito: *la determinazione dei punti multipli del ramo* (1) *dipende dal procedimento di divisioni successive per la ricerca del massimo comune divisore fra i numeri* ν, ν', ν'' ..... *cioè fra gli esponenti della variabile* $x^{1/\nu}$ *nella serie* (1); è ovvio che questo procedimento conduce all'unità, poichè altrimenti il ramo (1) sarebbe d'ordine > 1.

3. Ora la definizione dei punti successivi d'un ramo pone in evidenza la distinzione fondamentale fra *punti liberi*, che corrispondono ad una coordinata suscettibile di variare (col ramo) in modo continuo, e *punti satelliti*, susseguenti a qualche punto libero e corrispondenti, non già ad un parametro-coordinata, ma ad un elemento aritmetico dello sviluppo in frazione continua di ν'/ν o di $\nu''/\bar{\nu}$, ...

Punti satelliti si trovano soltanto sui rami superlineari; ed il passaggio d'una curva per tali punti costituisce anzi la circostanza caratteristica onde hanno origine i rami superlineari di essa. Per uno studio approfondito dei rami, in rapporto a codesti punti, si può far uso opportunamente d'uno schema grafico, che qui non ci fermeremo a descrivere, ma su cui vorremmo tuttavia attirare l'attenzione del lettore, rimandando, per ogni chiarimento, alle citate *Lezioni* di prossima pubblicazione.

Dopo avere definito i punti successivi d'un ramo, e riconosciuto il significato della loro molteplicità in rapporto alle intersezioni di due rami, si ottiene la definizione dei punti multipli d'una curva, sommando per ciascun punto le molteplicità dei rami di essa che vi passano. Allora la struttura della singolarità verrà pienamente rappresentata, con una opportuna sovrapposizione degli schemi grafici dei singoli rami, da un diagramma, che può essere denominato *albero della singolarità*; il quale pone in evidenza le molteplicità e le posizioni dei punti infinitamente vicini che costituiscono la singolarità, in ispecie la distinzione fra i punti liberi e i punti satelliti e i diversi aggruppamenti di questi.

La conoscenza di tali molteplicità e posizioni vale a determinare la separazione dei rami, giacchè il passaggio di f per punti satelliti traduce in altra forma la circostanza che ai punti condensati nella singolarità si aggiungono anche i punti di diramazione. Perciò è lecito dire che *una qualsiasi singolarità è definita completamente dalle molteplicitá della curva in un gruppo di punti infinitamente vicini, tenuto conto delle posizioni di questi.*

4. La teoria, così disegnata dal punto di vista aritmetico, deve essere completata con lo studio delle *condizioni differenziali che caratterizzano il passaggio d'una curva per punti infinitamente vicini, e le relative molteplicità* ([2]). Qui in particolare si fornirà la prova diretta che i punti improprii di molteplicità r impongono, come i punti proprii, $r(r+1)/2$ condizioni lineari ai coefficienti d'una curva f che debba contenerli.

Per scrivere le accennate condizioni differenziali, caratterizzanti i punti — semplici o multipli — infinitamente vicini all'origine, occorre anzitutto possedere l'*espressione generale delle derivate successive d'una funzione composta* $f(x, y)$, ove $x=\varphi(t)$ e $y=\psi(t)$. Le formule di cui si discorre costituiscono una generalizzazione di quelle adoperate dallo

---

([2]) Il concetto di tali condizioni fu da noi accennato, e svolto in rapporto a casi particolari, fino dalle nostre lezioni dell'anno 1897-98 (cfr. il Programma pubblicato nel fascicolo di aprile 1889 del « Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche ») [queste *Memorie*, vol. II, XXVIII].

STOLZ ([3]) nel problema della separazione dei rami, limitatamente al caso dei rami lineari. Ma, anzichè proseguire il procedimento dello STOLZ, noi siamo pervenuti allo scopo trattando questa questione di calcolo differenziale in rapporto alla teoria generale delle operazioni: questa via ha il vantaggio di mostrare in qualche modo *a priori* la natura delle formule ricercate; lo sviluppo dei calcoli riesce necessario soltanto per la determinazione dei coefficienti numerici che vi figurano.

Or dunque osserviamo che la derivata n-ma della funzione composta $f(x, y(x))$ nasce applicando ad f la potenza n-ma dell'operazione indicata dal simbolo

$$\Delta_n = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'} + \ldots + y^{(n)} \frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}\right);$$

le operazioni che figurano come addendi entro il simbolo Δ_n non sono permutabili, ma dànno luogo ad una quasi-permutabilità: cioè sono permutabili a meno d'un fattore numerico che dipende dall'espressione a cui si suppongono applicate. Da queste proprietà segue che lo sviluppo di $\Delta_n^n f$ — o, ugualmente, di $\Delta_n^m f$ (con $m > n$) — si può ottenere mediante le formule che valgono ad esprimere la potenza d'un polinomio, salvo a modificare opportunamente i coefficienti numerici che in questo sviluppo figurano. Analoghe formule si otterranno per le derivate successive di f, ove x e y sieno funzioni di un parametro t.

Ciò posto, si possono scrivere facilmente le condizioni differenziali che caratterizzano i punti multipli infinitamente vicini d'una curva f. Se il punto proprio $O = (ab)$ deve avere per f la molteplicità r, si hanno, come osservò già il DE GUA, le $r(r+1)/2$ condizioni

$$\frac{\partial_i f}{\partial x^h \partial y^k} = 0\,, \qquad i = h + k < r \qquad\qquad (x = a_1 y = b)$$

che si possono anche scrivere

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} f = \Delta_0^0 f = 0\,, \qquad \dfrac{\partial}{\partial y} f = 0\,, \ldots \dfrac{\partial^{r-1}}{\partial y^{r-1}} f = 0\,, \\[2ex] \Delta_0 f = \dfrac{\partial}{\partial x} f = 0\,, \qquad \dfrac{\partial}{\partial y} \Delta_0 f = 0\,, \ldots \dfrac{\partial^{r-2}}{\partial y^{r-2}} \Delta_0 f = 0\,, \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex] \Delta_0^{r-1} f = \dfrac{\partial^{r-1}}{\partial x^{r-1}} f = 0\,. \end{array}\right.$$

([3]) « Math. Annalen », Bd. VIII, p. 415 (1875).

Le condizioni perchè la f possegga un punto di molteplicità s nel punto O_1, vicino ad O nella direzione y, si lasciano esprimere in modo affatto analogo, venendo date da

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \Delta_1^r f = 0\,, & \dfrac{\partial}{\partial y'} \Delta_1^r f = 0\,, & \ldots & \dfrac{\partial^{s-1}}{\partial y'^{s-2}} \Delta_1^r f = 0\,, \\ \Delta_1^{r+1} f = 0\,, & \dfrac{\partial}{\partial y'} \Delta_1^{r+1} f = 0\,, & \ldots & \dfrac{\partial^{s-2}}{\partial y'^{s-2}} \Delta_1^{r+1} f = 0\,, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta_1^{r+s-1} f = 0\,. & & & \end{array} \right.$$

Così analogamente si scrivono le condizioni perchè la f possegga dati punti multipli succedentisi sopra rami lineari, cioè punti multipli (o semplici) liberi, determinati mediante coordinate che sono derivate successive della funzione implicita $y(x)$.

In qual modo si esprimerà il passaggio e la molteplicità di f per punti satelliti di qualche punto libero, cioè le singolarità elementari onde risulta la singolarità di f nel caso di rami superlineari? Si tratti, per esempio, di caratterizzare il *passaggio di f per punti satelliti del punto s-plo O_1*: questo passaggio *viene caratterizzato dalle molteplicità della radice y' per le equazioni* $\Delta_1^r f = 0$, $\Delta_1^{r+1} f = 0$, ..., $\Delta_1^{r+s-1} f = 0$, quando la prima molteplicità sia $> s$. Così, per esempio, se la y' è radice multipla d'ordine $2s$ per $\Delta_1^r f = 0$, d'ordine $2s - 2$ per $\Delta_1^{r+1} f = 0$, ... e d'ordine 2 per $\Delta_1^{r+s-1} = 0$, la f (avente già in O la molteplicità r) passerà per O_1 con la molteplicità s, e ancora con la molteplicità s per il primo punto satellite di O_1 che viene definito sui rami di second'ordine per OO_1.

In generale, per determinare le molteplicità della curva f nei punti satelliti di O_1, si figureranno coi punti di coordinate intere $(i\ l)$, sopra successive linee orizzontali, le condizioni $\dfrac{\partial^l}{\partial y'^l} \Delta_1^{r+i} f = 0$, che designano la molteplicità della radice y' per l'equazione $\Delta_1^{r+i} f = 0$, e quindi si separeranno in tanti gruppi triangolari le condizioni che rispondono ai diversi punti satelliti di O_1. Questa separazione si compie facilmente mediante un opportuno *diagramma*; e, operando con questo, si vede nascere l'*albero della singolarità*, a cui si è poc'anzi accennato.

Aggiungeremo che l'indicato diagramma sta in una semplice relazione col noto *diagramma di Newton* che serve alla separazione dei rami mercè il calcolo degli ordini d'infinitesimo: e così questo classico metodo appare in una nuova luce, venendo *collegato ad un procedimento più espressivo che porge l'analisi completa della singolarità negli elementi che la costituiscono.*

5. Il carattere riassuntivo di questa Nota non ci consente di trattenerci sulle applicazioni della teoria qui rapidamente abbozzata. Tuttavia vogliamo accennare ad un problema che non sembra essere stato trattato per lo innanzi in una forma generale. S'imponga ad una curva f, d'ordine abbastanza elevato, di passare — con certe molteplicità virtuali assegnate — per dati punti infinitamente succedentisi sopra un ramo superlineare; allora accade che le molteplicità effettive della f risultino diverse dalle virtuali, almeno quando non sieno soddisfatte certe condizioni di disuguaglianza. Il nostro problema ha per oggetto di *determinare le molteplicità effettive di f in funzione delle suddette molteplicità virtuali.*

Della risoluzione di codesto problema si può indicare un'applicazione interessante, cioè il calcolo delle *molteplicità effettive delle curve polari* nei punti infinitamente vicini che costituiscono una singolarità di f.

LX.

SULLA TEORIA DELLE OMOGRAFIE IPERSPAZIALI

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XXVI (1º sem., 1917),

pp. 629-631

È noto che la teoria delle omografie in un S_n dipende dal sistema delle equazioni che dànno i punti uniti, equazioni ove entra fra le incognite — accanto alle coordinate di codesti punti — anche un fattore di proporzionalità, ϱ:

$$(1)\qquad \begin{cases} \varrho x_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \ldots + a_{0n}x_n\,. \\ \varrho x_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n\,. \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \varrho x_n = a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n\,. \end{cases}$$

La via classica per lo studio di queste equazioni procede da WEIERSTRASS, e vi si muovono i lavori di SEGRE e PREDELLA, la trattazione colle operazioni distributive di PINCHERLE, ecc. Essa consiste nell'eliminare le x_i, formando dunque la resultante caratteristica

$$D(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{00}-\varrho & a_{01} & \ldots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11}-\varrho & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{nn}-\varrho \end{vmatrix} = 0\,;$$

alle $n+1$ radici, in generale semplici e distinte della $D(\varrho)=0$, rispondono $n+1$ punti uniti dell'omografia. Ma le varie circostanze particolari delle omografie tengono, non solo alla molteplicità delle radici di $D(\varrho)=0$, bensì anche al grado d'indeterminazione corrispondente del sistema (1), sicchè si è condotti a classificare le omografie in base alle molteplicità che le radici di $D(\varrho) = 0$ hanno per le equazioni ottenute annullando i minori del determinante $D(\varrho)$.

Nelle mie lezioni di quest'anno, mi è occorso di svolgere le teoria delle omografie secondo un punto di vista che si allontana dalla teoria classica così disegnata, e di cui i peculiari caratteri si riassumono:

1) nella possibilità di una semplice trattazione sintetica, parallela allo sviluppo analitico;

2) e nella definizione precisa degli spazi di punti uniti infinitamente vicini, nel senso che questa locuzione riceve dalla teoria delle singolarità (delle curve, superficie ecc.).

Il nuovo ordinamento della teoria delle omografie, senza avere la pretesa di surrogare l'ordinamento classico, può dunque almeno completarlo; in ogni caso esso mi par degno di ritenere, per un momento, l'attenzione della nostra illustre Accademia. Il cenno che ne darò in questa Nota sarà brevissimo; lascerà da parte tutti gli sviluppi, rimettendo ciò ad un'esposizione più diffusa che troverà luogo nel secondo volume delle mie *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni*, redatto in collaborazione col dott. CHISINI.

L'idea direttiva della teoria che qui si disegna consiste in questo: in luogo di eliminare le x_i dalle (1), si può eliminare il fattore di proporzionalità ϱ, e allora si ottengono le equazioni dei punti uniti sotto la forma:

$$(2) \quad \begin{cases} (a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \ldots + a_{0n}x_n)\, x_1 = (a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)\, x_0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \ldots + a_{0n}x_n)\, x_n = (a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n)x_0\,. \end{cases}$$

Le (2) rappresentano n quadriche Q^2_{n-1} di S_n, passanti per lo S_{n-1} di equazioni: $x_0 = 0$, $a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \ldots + a_{0n}x_n = 0$. La determinazione dei punti di un'omografia di S_n si ottiene così generalizzando una nota costruzione dei punti uniti delle omografie piane. Infatti si assumano in un iperpiano, π, di S_n, nS_{n-2}: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, e si considerino gli S_{n-2} omologhi: $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$, nell'iperpiano π' che corrisponde a π: i fasci d'iperpiani proiettivi α_i e α'_i, generano n quadriche Q^2_{n-1}, passanti per l'intersezione di π e π', e secantisi ulteriormente nei punti uniti della data omografia.

La discussione del sistema di equazioni (2), si compie facilmente in base ad una *proprietà fondamentale* che spetta alle *varietà* (di 1, 2, ... dimensioni) *intersezioni di quadriche Q^2_{n-1} passanti per un S_{n-2}, β*: codeste varietà segano sempre secondo spazi lineari gli S_{n-2}, γ, incidenti a β, che appartengono ad una qualsiasi delle nostre Q^2_{n-1} (giova ricordare che una Q^2_{1-n} contenente un S_{n+2} è un cono proiettante da un S_{n-1} una superficie di 2° ordine, e quindi contenente due sistemi di S_{n-2}).

Risulta dall'anzidetta proprietà fondamentale, anzitutto (con ragionamento induttivo da n a $n+1$) che i punti uniti, intersezioni delle quadriche (2) fuori di β, sono in generale $n+1$; in secondo luogo che, se vi sono varietà continue di punti uniti, queste sono lineari.

Ora, se la nostra omografia possiede un S_h di punti uniti, le varietà V_h, intersezioni di $n-h-1$ fra le nostre Q^2_{n-1}, conterranno S_h come parte; le residue V'_h s'incontreranno generalmente in $n-h$ punti fuori dello S_h. In ogni caso codeste V'_h, soddisferanno ancora alla proprietà fondamentale delle V_h, e, in conseguenza di ciò, avranno a comune sempre varietà lineari; questa conclusione si estende al caso in cui le dette V' abbiano comune una varietà entro lo S_h: si definirà così un S_{h_1} di *punti uniti doppi*, ecc.

Questo rapido cenno è sufficiente a far comprendere la definizione generale degli spazi di punti uniti multipli, di cui si riconosce tosto l'accordo colla definizione di PREDELLA.

Ma vorrei rilevare la precisione che si ottiene nel concetto degli *spazi di punti infinitamente vicini*. Qui tale locuzione s'introduce nel senso proprio che le spetta secondo la teoria generale delle singolarità: infatti *l'esistenza di spazi di punti uniti dell'omografia corrisponde a quella di spazi di contatto o d'osculazione per le quadriche* (2) e quindi per le varietà, V, intersezioni di esse, che sono generate da spazi lineari.

Emerge in pari tempo come nella teoria delle omografie si presenti soltanto il caso di spazi (di punti uniti) infinitamente vicini, che risponde ai *punti infinitamente vicini su rami lineari*, di guisachè ci si riduce infine a caratterizzare le omografie di un S_r, aventi $r+1$ punti infinitamente vicini sopra un ramo lineare; le quali posseggono, come invarianti, delle curve razionali normali di S_r [1].

Può apparire a prima vista strano che non si possano avere omografie con punti uniti infinitamente vicini, all'infuori dei casi in cui questi punti si lasciano definire mediante rami lineari. Ma la ragione di ciò apparisce chiara già dall'esame delle omografie piane: se si fanno avvicinare due punti uniti B e C ad un punto unito A, in direzioni diverse, l'omografia si riduce ad un'omologia speciale di centro A, il cui asse passa per A; altrettanto avviene se si fanno avvicinare ad A i due punti uniti A e C, movendosi sopra un ramo di second'ordine.

---

(1) Già parecchi anni or sono, il sig. FANO ed io avemmo occasione di scambiarci verbalmente questa proposizione, che avevamo indipendentemente osservata, e che può servire di fondamento e d'illustrazione alla riduzione dell'omografia a forma canonica. Una verifica analitica diretta della proposizione anzidetta, fu data dalla sig.ra Maria SOSTEGNI nella sua tesi di laurea presentata all'Università di Bologna nel 1914 (e non pubblicata).

LXI.

QUESTIONI NUMERATIVE E LORO SIGNIFICATO NELLA GEOMETRIA SOPRA LE CURVE ALGEBRICHE

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XXVIII (1º sem., 1919), pp. 370-374

1. – In un corso di Lezioni tenuto all'Università di Bologna, l'anno 1897-98, ho porto una dimostrazione dell'invarianza della serie canonica [1] g_{2p-2}^{p-1} che si fonda sulla considerazione di una certa serie covariante di una g_n^r, cioè della serie (che ho chiamata « jacobiana ») a cui appartengono i gruppi dei punti doppi delle g_n^1 contenute nella g_n^r. Si ha infatti, designando con $|a|$ e $|b|$ due serie diverse, date sulla medesima curva, e con $|a_j|$ e $|b_j|$ le loro jacobiane:

$$|a_j - 2a| = |b_j - 2b|,$$

onde $|a_j - 2a|$ costituisce una serie invariante per la curva data, che è poi (per una curva piana d'ordine m e di genere p) la g_{2p-2}^{p-1} segata dalle curve aggiunte d'ordine $m-3$.

Ora l'idea fondamentale di questa dimostrazione si può estendere in varie guise. Ogni qualvolta si costruisca sulla curva un gruppo di punti covariante di una g_n^2 o g_n^r (ovvero anche di più serie di certe dimensioni) si è condotti a considerare una serie lineare covariante della serie completa che contiene la g_n (ovvero delle serie complete contenenti le date). E diverse considerazioni, sulle quali non mi indugerò in questa Nota, mi hanno indotto a riconoscere un fatto generale che — senza ricercarne qui una dimostrazione — formulerò quale

[1] Cfr. il Programma pubblicato nel « Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche » (Aprile 1899) [queste *Memorie*, vol. II, XXVIII], e (per le superficie) « Atti R. Acc. Torino », 1901 [queste *Memorie*, vol. II, XXXII]. Cfr. pure « Memorie R. Acc. Bologna », 1914 [questo volume, LVI].

Principio euristico. – Le serie lineari che si possono definire sopra una qualsiasi curva di genere p, come covarianti razionali di serie date, si possono formare combinando, per somma e sottrazione, le serie date colla serie canonica g_{2p-2}^{p-1}.

Questo principio porge un metodo per la risoluzione delle questioni numerative, e permette — nei singoli casi — di aggiungere, alla formula cercata, la sua interpretazione funzionale.

Mi limiterò ad indicare alcuni esempi istruttivi. Ed, in particolare, ritroverò per questa via una formula già data da SCHUBERT, SEGRE, CASTELNUOVO, che — per l'uso fattone dal CASTELNUOVO nella dimostrazione del teorema di RIEMANN-ROCH — ha acquistato una importanza fondamentale per lo sviluppo della teoria, secondo l'ordine di concetti di SEGRE ([2]) e CASTELNUOVO ([3]). La maggiore semplicità (oltrechè l'espressività) del metodo che mi porge la detta formula, anche in confronto al metodo che si basa sul principio di corrispondenza sopra le curve (adoperato da SEVERI) risulterà evidente ad ognuno.

2. – Anzitutto la definizione della serie jacobiana di una serie $|a|$ si lascia generalizzare, prendendo in $|a|$ una g_n^{r-1} con $r > 2$, e costruendone il gruppo dei punti r-pli: invero è facile riconoscere che questo gruppo, G, al variare della g_n^{r-1} entro $|a|$ varia in una serie lineare. A tale scopo si può invocare il teorema generale che « una serie razionale di gruppi di punti è sempre contenuto in una serie lineare » o, più semplicemente per questo caso, basta osservare che alle ∞^1 g_n^{r-1} aventi a comune una g_n^{r-2} (e quindi contenute in una g_n^r) corrispondono gruppi G formanti una involuzione lineare, ossia equivalenti.

Ora sommeremo alla data g_n^{r-1} un punto P e troveremo che esso si aggiunge al gruppo dei punti r-pli della g_n^{r-1} contando, nel gruppo analogo della $g_{n+1}^{r-1} = g_n^{r-1} + P$, precisamente per r: si valuterà tale molteplicità, r, che costituisce un carattere differenziale del punto P sulla curva, sostituendo a questa una curva razionale osculatrice. In tal guisa, designando con $|a_r|$ la serie lineare che contiene i gruppi di punti r-pli di $|a|(|a_j| = |a_2|)$ e con $|b_r|$ l'analoga serie covariante di una serie $|b|$ si troverà la relazione fondamentale

$$|(a+b)_r| = |a_r + rb| = |ra + b_r| .$$

([2]) *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, «Annali di Mat.», serie 2ª, tomo XXII.

([3]) *Ricerche di geometria sulle curve algebriche*, «Atti della R. Accademia Torino», tomo XXIV, 1889.

Di qui emerge che la serie $|a_r - ra|$, supposta esistente, è un invariante della curva. Si riconosce di più che essa è multipla della serie canonica, secondo il numero $(r(r-1)/2)$.

A tale scopo si consideri una $g^{r-1}_{(r-1)n}$ composta con una g^1_n, cioè $(r-1)$-pla di questa. I punti r-pli saranno dati dai punti doppi della g^1_n, da contarsi un certo numero x di volte. Siccome x esprime un carattere differenziale, si potrà calcolare sopra la retta, e si troverà

$$x = \frac{r(r-1)}{2}\,.$$

Pertanto, designando ora con $|a|$ la serie completa a cui appartiene la g^1_n, si avrà

$$|\{(r-1)a\}| = |a + r(r-2)a| = \left|\frac{r(r-1)}{2}\,a_2\right|,$$

$$|a - ra| = \left|\frac{r(r-1)}{2}\,(a_2 - 2a)\right| \qquad \text{c. d. d.}$$

Si ha dunque il *significato funzionale della nota formula che assegna il numero dei punti r-pli di una* g^{r-1}_n:

$$N = nr + \frac{r(r-1)}{2}\,(2p-2) = r\{n + (r-1)(p-1)\}\,.$$

3. – In ciò che segue mi limito a trovare la formula numerativa, avvertendo che il procedimento ne reca con sè l'interpretazione.

Si voglia determinare il numero dei gruppi di $r+1$ punti comuni ad una g^1_m e ad una g^r_n, cioè appartenenti ad una G_m della prima serie e ad un G_n della seconda. Il numero N_r cercato si designi, a priori, come funzione di r, n ed m: $N_r = f(r, n, m)$.

Sommando alla g^r_n un punto fisso P, si troverà:

$$f(r, n+1, m) = f(r, n, m) + \binom{m-1}{r}\,.$$

La ricerca del numero dei gruppi, G_{r+1}, di $r+1$ punti, comuni alla data g^1_m e alla g^r_n si riconduce così alla ricerca dei gruppi di $r+1$ punti comuni alla g^1_m stessa e ad una g^r_{rn} contenuta nella serie r-pla della g^r_n data. Assumendo come serie g^r_{rn} una serie composta dei gruppi di una

g_n^1 presi ad r ad r, il problema viene risolto dalla conoscenza delle coppie comuni alla g_m^1 e alla g_n^1 che sono

$$(m-1)(n-1)-p\,.$$

Infatti si otterranno i G_{r+1} associando a ciascuna delle coppie nominate $r-1$ punti del gruppo G_m di g_m^1 che lo contiene.

Avremo dunque:

$$f(r,\, rn,\, m) = \{(n-1)(m-1)-p\}\binom{m-2}{r-1}\,,$$

e di qui coll'uso della formula ricorrente che precede, o — addirittura — mutando n in n/r, si deduce

$$N_r = f(r,\, n,\, m) = \binom{m-1}{r}(n-r) - \binom{m-2}{r-1}p\,.$$

L'interpretazione funzionante della formula viene suggerita dal procedimento che ci ha condotto a stabilirla e non presenta difficoltà.

Nel caso più semplice di $r=2$, e prendendo due g_n^1 contenute in una stessa g_n^2, si ottiene in tal guisa la definizione della serie canonica come differenza della serie cui appartiene il gruppo delle coppie neutre e del multiplo secondo $n-3$ della g_n^2; sicchè, traducendo in linguaggio proiettivo, si ha la *dimostrazione diretta dell'invarianza della serie segata sopra una curva piana d'ordine n dalle curve aggiunte d'ordine $n-3$*. Nondimeno questa dimostrazione diretta è superata in semplicità dalla dimostrazione che si fonda sull'uso della serie jacobiana, specialmente perchè non importa qui fare appello al teorema che una serie razionale è contenuta in una serie lineare.

4. – Ora conviene rilevare che il procedimento, adoperato per trovare il numero dei gruppi di $r+1$ punti comuni ad una g_n^r e ad un'altra involuzione lineare g_m^1, si estende al caso in cui la g_m^1 venga rimpiazzata con un'involuzione irrazionale γ_m^1. Si è anche qui ricondotti al numero delle coppie comuni ad una g_n^1 e alla γ_m^1.

Ma questo numero si lascia calcolare collo stesso metodo usato dal Segre per una g_n^1 e una g_m^1, metodo che — nello sviluppo dell'A. — porge la dimostrazione dell'invarianza del genere e la formula di Zeuthen. Infatti si associno i gruppi della g_n^1 che contengono due punti di un medesimo G_m della γ_m^1; si avrà fra gli elementi della g_u^1 una corrispondenza

$$[n(m-1),\ n(m-1)]$$

con $2n(m-1)$ elementi doppi. Questi elementi doppi corrispondono: ai gruppi G_n aventi una coppia G_2 comune con un G_m di γ_m^1, da contarsi due volte, e ai gruppi della γ_m^1 dotati di un punto doppio, che — per una γ_m^1 di genere π — sono in numero di $\delta = 2p-2-m(2\pi-2)$ (formula di ZEUTHEN). Si deduce che il numero delle coppie G_2 comuni ad una γ_m^1 di genere π e ad una g_n^1 sopra una curva di genere p, vale:

$$(n-1)(m-1)-p+m\pi\,.$$

E da ciò si è condotti alla formula di SCHUBERT che dà il *numero* $N_{r,\pi}$ *dei gruppi di* $r+1$ *punti comuni ad una* g_n^r *e ad una* γ_m^1 *di genere* π. Basta cambiare, nell'espressione di N_r, il p in $p-m\pi$, e si ottiene:

$$N_{r.\pi} = \binom{m-1}{r}(n-r) - \binom{m-2}{r-1}(p-m\pi)\,.$$

5. – La formula che dà il numero dei gruppi di $r+1$ punti comuni ad una g_n^r e ad una g_m^1 è quella appunto da cui CASTELNUOVO ha dedotto un criterio perchè una g_m^s sia contenuta in una g_n^r speciale, criterio che conduce immediatamente al teorema di RIEMANN-ROCH. L'idea fondamentale consiste nell'osservare che l'espressione indicata dalla detta formula non può diventare negativa per due serie g_n^r e g_m^1 che non abbiano infiniti G_{r+1} comuni. E l'osservazione resta ugualmente giustificata rispetto al nostro metodo di deduzione della formula, come per quello adoperato dal SEGRE o dal CASTELNUOVO.

Nelle lezioni di Geometria sopra le curve algebriche, che ho tenuto quest'anno all'Università di Bologna, accanto allo sviluppo della teoria secondo il metodo di BRILL e NOETHER, ho spiegato anche quello che si basa sul metodo accennato, traducendo i ragionamenti iperspaziali in linguaggio invariantivo e semplificandoli in qualche punto. I due sviluppi troveranno posto ugualmente nel terzo volume del mio trattato sulla *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, a cui sto attendendo con la collaborazione del dott. CHISINI.

LXII.

SULLE CURVE CANONICHE DI GENERE p DELLO SPAZIO A $p-1$ DIMENSIONI

« Rend. dell'Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », vol. XXIII (1919), pp. 80-82

1. – Una curva canonica di genere p, d'ordine $2p-2$ nello spazio S_{p-1}, appartiene, come è noto, ad un sistema lineare di quadriche Q, di

$$\frac{(p-1)(p+2)}{2}-(3p-3)$$

dimensioni.

Queste Q determineranno, in generale, la curva canonica C, come curva base del sistema che esse formano. Si vuol qui determinare in modo preciso i casi di eccezione in cui le Q costrette a passare per la C passano di conseguenza per una superficie o varietà di più dimensioni. Così stabiliremo il teorema:

Una curva di genere $p>4$ (non iperellittica) si lascia trasformare, in generale, in una curva canonica dello S_{p-1}, che è determinata come curva comune a $[(p-1)(p+2)]/2-(3p-2)$ quadriche linearmente indipendenti: fanno eccezione i casi in cui la curva contenga una g_3^1 ovvero una g_5^2, la rispettiva curva canonica appartenendo ad una superficie razionale normale dello spazio S_{p-1} (rigata o superficie di Veronese *per $p=6$).*

2. – Osserveremo anzitutto che i casi in cui la curva canonica C contenga una g_3^1 ovvero una g_5^2 costituiscono effettivamente un'eccezione alla sua determinazione come curva base di un sistema di quadriche Q.

Infatti, se vi è una g_3^1, per il teorema di Riemann-Roch, le terne di essa appartengono a rette trisecanti la C: è quindi ovvio che codeste trisecanti debbono appartenere a tutte le Q passanti per la C, di guisa che codeste Q hanno a comune la superficie rigata così generata (che vedremo poi essere la rigata razionale normale dello spazio S_{p-1}).

Ora se la C (non contenente una g^1_3) contiene una g^2_5, ciò porta $p=6$, e i gruppi di 5 punti di questa serie, per il teorema di RIEMANN-ROCH, appartengono a piani; allora in ciascuno di questi piani si ha una conica pei 5 punti che deve necessariamente appartenere a tutte le quadriche Q per la C. Le ∞^2 coniche nominate formeranno una superficie, e non una varietà a 3 dimensioni, poichè si può provare che un punto di una di esse appartiene ad ∞^1 coniche analoghe. Ciò risulta dal fatto che i piani pentasecanti la C, che contengono le dette coniche, sono — entro lo S_5 di C — a due a due incidenti (appartenendo allo stesso sistema di una quadrica Q), e che essi non possono incontrarsi fuori della conica contenuta, senza che risultino tutti immersi nelle stesse ∞^4 quadriche (che è assurdo). Dunque, anche in questo caso, le quadriche Q costrette a passare per C passeranno di conseguenza per una superficie contenente C; la quale si vede facilmente essere la superficie di VERONESE dello S_5, per la circostanza di contenere ∞^2 coniche formanti una rete omaloidica.

3. – Vogliamo ora dimostrare che, se la curva canonica C di S_{p-1} non è interamente determinata dalle quadriche Q che vi passano, essa contiene una g^1_3 ovvero una g^2_5.

La nostra ipotesi porta che le Q passanti per C passino, di conseguenza, per una superficie contenente la C. Ma, poichè le quadriche di S_{p-1} per C son tante quante le quadriche di S_{p-2} per il gruppo dei $2p-2$ punti sezioni di C, dovrà accadere che queste ultime quadriche — costrette a contenere un gruppo di $2p-2$ punti — debbano passare, di conseguenza, per una curva dello stesso spazio. E la sola curva di un S_{p-2} per cui passino tante quadriche è la curva razionale normale, d'ordine $p-2$, perchè un gruppo sezione iperpiana di questa deve presentare alle quadriche del relativo spazio precisamente $p-2$ condizioni.

Segue da ciò che se una curva canonica C dello S_{p-1} non riesce determinata dalle quadriche che vi passano, essa è contenuta in una superficie a sezioni razionali normali, e quindi in una rigata o in una superficie di VERONESE dello S_5 ($p=6$).

Il primo caso porta che le generatrici della rigata sieno trisecanti della C, che così conterrà una g^1_3; il secondo caso porta che le coniche appartenenti alla superficie di VERONESE determinino sulla C una g^2_5.

LXIII.

SUL GRUPPO PROIETTIVO DELLE CURVE ELLITTICHE NORMALI E SU CERTI FASCI SIZIGETICI DI QUESTE CURVE

« Rend. dell'Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », vol. XXIV (1920),

pp. 91-95

1. – È noto che una curva ellittica normale d'ordine n nello spazio ad n dimensioni (C_n^{n-1}) possiede un gruppo G_{n^2} di n^2 trasformazioni proiettive di 1ª specie: questo gruppo, che riesce definito mercè la somma di parti n-esime dei periodi all'argomento delle funzioni ellittiche, è un gruppo abeliano, che si lascia generare da due trasformazioni indipendenti di ordine n. Lo stesso gruppo si può ampliare in un G_{2n^2} per l'aggiunta di n^2 trasformazioni involutorie di 2ª specie; e rispetto al G_{2n^2} resta ugualmente invariato il sistema degli n^2 punti in cui la curva è toccata dagli iperpiani iperosculatori.

Ora sorge la questione: il gruppo G_{n^2}, o il G_{2n^2}, dipende veramente dal modulo della C_n^{n-1} che gli dà origine, e quindi possiede esso medesimo un invariante assoluto? Ovvero infinite curve ellittiche di modulo diverso dan luogo ad uno stesso G_{n^2}, o G_{2n^2}, che però risulta privo d'invarianti assoluti? In questa Nota mi propongo di dimostrare che *il gruppo proiettivo della curva ellittica normale riesce privo d'invarianti assoluti* e così appartiene ad infinite curve ellittiche di moduli diversi, delle quali si può dimostrare che descrivono una certa superficie e su questa formano un fascio, analogo al fascio determinato nel piano da una cubica colla sua hessiana, cui perciò si addice il nome di *fascio sizigetico*. La dimostrazione del teorema fondamentale sopra enunciato si svolge come segue.

Si avverta anzitutto che le omografie cicliche di ordine n delle S_{n-1}, appartenenti al gruppo G_{n^2} di una C_n^{n-1}, sono omografie dotate di n punti uniti e non di una retta di punti uniti: altrimenti vi sarebbe anche un fascio d'iperpiani uniti e quindi una g_n^1 di gruppi invarianti, le cui coincidenze fornirebbero punti uniti ovvero cicli di meno che n punti sopra la curva, ciò che è impossibile. Si noti, in secondo luogo, che due omografie indipendenti del G_{n^2}, diciamo π e T, non essendovi una potenza dell'una che sia potenza dell'altra, non avranno gli stessi n punti uniti, cosicchè i punti uniti di T formeranno un ciclo di π. Ora, volendo costruire il G_{n^2} appartenente ad una C_n^{n-1}, potremo assumere ad arbitrio due omografie cicliche d'ordine n permutabili, tali che i punti uniti dell'una formino un ciclo dell'altra; perciò, dopo avere dato la π, mediante i suoi punti uniti (dai quali riesce definita a meno d'una irrazionalità aritmetica), definiremo la T assegnando un punto generico dello spazio come suo punto unito. Così facendo il G_{n^2} resta pienamente determinato. Ma la stessa costruzione mette in evidenza che il gruppo costruito non possiede invarianti assoluti per la coppia delle omografie generatrici π, T da cui siamo partiti, la quale dipende solo da $n+1$ punti dello S_{n-1}.

Così resta dimostrato che un gruppo proiettivo abeliano G_{n^2}, generato da due omografie indipendenti dello S_{n-1}, quale è il gruppo proiettivo di una C_n^{n-1}, non possiede invarianti assoluti. Dopo ciò è anche facile vedere che è pur privo di invarianti assoluti il gruppo G_{2n^2} contenente, oltre le n^2 trasformazioni di 1ª specie del G_{n^2}, anche le n^2 trasformazioni proiettive involutorie di 2ª specie della C_n^{n-1}. Infatti queste involuzioni, I, sono soggette alla condizione di trasformare le omografie del G_{n^2} nelle loro inverse, ed una tale condizione implica che una I debba lasciare invariato tanto il sistema degli n punti uniti di π, come il sistema degli n punti di T, ciò che vale a definire un *numero finito* di omografie I.

2. – Dal nostro teorema fondamentale si deduce facilmente che una curva ellittica normale C_n^{n-1} appartiene ad una fascio (*sizigetico*) di curve analoghe, tutte invarianti per il medesimo gruppo proiettivo G_{2n^2}. Noi vogliamo vedere come si costruisca il fascio sizigetico per $n=4$. In questo caso la *quartica* C_4^3, che è unica base per un fascio di quadriche, ammette un *tetraedro coniugato* $ABCD$. Consideriamo le ∞^3 quadriche, dello spazio S cui appartiene la quartica, aventi il medesimo tetraedro coniugato. Se queste quadriche vengono assunte come « piani » di uno spazio astratto, Σ, si pone fra Σ e S una trasformazione [1, 8], le cui equazioni possono darsi sotto la forma

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1^2 : x_2^2 : x_3^2 : x_4^2 \,.$$

Ora si può riconoscere che al gruppo proiettivo G_{32} della quartica C_4 di S, risponde in Σ un gruppo diedrico G_4, formato da tre omografie biassiali armoniche i cui assi sono direttrici mutuamente armoniche di una rigata quadrica Φ. Questa rigata ha come generatrice una retta cui risponde la nostra quartica C_4: le altre generatrici di Φ dan luogo al *fascio sizigetico delle quartiche di* S *invarianti per il medesimo gruppo proiettivo* G_{32}: il fascio anzidetto appartiene ad una *superficie del* 4° *ordine*, F, trasformata di Φ:

$$a_1 x_1^4 + a_2 x_2^4 + a_3 x_3^4 + a_4 x_4^4 = 0 .$$

Ora *nel fascio sizigetico di quartiche* si troveranno in generale 24 *quartiche aventi un dato invariante assoluto, ma* 12 *quartiche armoniche e* 8 *quartiche equianarmoniche, nonchè* 6 *quartiche* (dotate di punti doppi) *spezzate ciascuna nei quattro lati di un quadrilatero sghembo.* I gruppi proiettivi G_{64} delle quartiche armoniche e i G_{96} delle quartiche equianarmoniche, saranno contenuti in un medesimo *gruppo proiettivo* G_{768} che lascia invariata la superficie del 4° ordine F e su di essa il nostro fascio sizigetico di quartiche, permutandone le curve.

Si aggiunga che alla superficie F appartiene un secondo *fascio sizigetico di quartiche, associato* al primo, che risponde alla schiera delle direttrici della quadrica Φ: le quartiche di questo fascio sono invarianti per uno stesso *gruppo proiettivo* G'_{32}, *associato* al G_{32}; il G_{32} e il G'_{32}, tra loro permutabili, risultano contenuti in un medesimo G_{128}, che è un sottogruppo del nominato G_{768}, il quale lascia invariato — non solo il primo fascio di quartiche — ma anche il suo associato.

Finalmente il G_{768} si amplia in un *gruppo proiettivo* G_{1535} *che lascia invariata la superficie* F, contenente insieme alle omografie che lasciano invariati i due fasci sizigetici, anche quelle che li scambiano l'uno nell'altro.

Queste brevi indicazioni bastino qui a spiegare i risultati ottenuti, che verranno esposti nel 3° vol. delle « Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni », a cui stiamo attendendo colla collaborazione del Dott. OSCAR CHISINI.

LXIV.

SUL TEOREMA D'ESISTENZA PER LE FUNZIONI ALGEBRICHE

« Rend. dell'Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », vol. XXV (1921), pp. 89-91

Nel terzo volume delle « Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche » a cui attendo colla collaborazione del dott. OSCAR CHISINI, e di cui spero condur presto a termine la pubblicazione, riprendo e completo le osservazioni sul teorema d'esistenza, contenute nella mia Nota « Sui moduli di una classe di superficie algebriche e sul teorema d'esistenza per le funzioni algebriche di due variabili » (Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino vol. 47, 1912) (*). Espongo qui i risultati ottenuti.

Esiste (almeno) *una curva algebrica irreducibile di genere p, rappresentata sopra una retta n-pla con $2n+2p-2$ punti di diramazione assegnati.*

Si verifica prima che le curve così rappresentate, birazionalmente distinte, sono — se esistono — in numero finito, quindi il teorema viene dedotto dal computo dei moduli (com'è accennato nella mia Nota citata) tenuto conto che la serie caratteristica del sistema continuo delle curve di ordine n con un dato numero di punti doppi, porge almeno un massimo per la dimensione del sistema.

Dello stesso sistema si ottiene una dimostrazione diretta come segue. Si premette che la retta n-*pla* con $m = 2n + 2p - 2$ punti di diramazione $A_1, A_2, \dots, A_m$ rappresenta certo una curva effettivamente esistente, almeno per posizioni particolari degli m punti. Ora la costruzione di una curva di genere p e d'ordine $n+h$, C_{n+h}, con un punto h-plo P e con

$$\frac{(n+h-1)(n+h-2)}{2} - \frac{h(h-1)}{2} - p$$

(*) [Questo volume, LII].

punti doppi, la quale debba toccare le m rette PA_i, costituisce un problema algebrico, che — per h assai alto — ammette certo soluzioni, e può rendersi determinato, mediante l'aggiunta di condizioni ulteriori esprimenti — per esempio — il passaggio per dati punti semplici. Occorre dimostrare che, almeno una delle curve C_{n+h}, risolventi il detto problema è *irreducibile*. Ciò si deduce dall'ipotesi che vi sia una C_{n+h} irreducibile, per posizioni particolari dei punti A_i, imperocchè questa irreducibilità significa che il corrispondente gruppo di monodromia della funzione corrispondente alla detta C_{n+h} è transitivo, ed allora, variando con continuità gli A_i, il gruppo resta sempre transitivo.

Questa riduzione per continuità, in relazione al teorema di LÜROTH-CLEBSCH, conduce anche a dimostrare che:

Le classi di curve di genere p formano un sistema continuo.

Inoltre per questa via si è condotti pure a precisare il teorema di esistenza, dimostrando che:

Esiste una funzione algebrica a n rami con dati punti di diramazione, che — in rapporto ad un dato sistema di cappi uscenti da un punto — possiede date trasposizioni (*o sostituzioni*), *il cui prodotto sia l'identità.*

Questo è il contenuto algebrico del Teorema d'esistenza che RIEMANN ha stabilito per via trascendente.

Aggiungo la seguente osservazione, che mi sembra non priva di valore.

Il teorema che « le classi di curve (irreducibili) di genere p formano un unico sistema continuo » ammette una dimostrazione diretta, indipendente dalla riduzione delle riemanniane a fogli al tipo di LÜROTH-CLEBSCH, secondo la via accennata nella mia Nota di Torino del 1912, che — nelle Lezioni — riprendo e sviluppo in forma strettamente rigorosa. Orbene, codesto teorema porge a sua volta una *nuova dimostrazione del teorema di Lüroth-Clebsch*, per cui questo appare tradurre il fatto che « ogni *riemanniana*, irreducibile di genere p, si *può ridurre*, *per deformazione continua*, *ad una iperellittica* dello stesso genere ».

LXV.

IL PRINCIPIO DI DEGENERAZIONE E LA GEOMETRIA SOPRA LE CURVE ALGEBRICHE

« Math. Ann. », Bd. 85 (1922),

pp. 195-199

1. – Il principio di continuità di PONCELET ha, nella teoria delle funzioni algebriche, un'importanza che non deve essere ridotta — come spesso accade — alle sole questioni numerative. A questo criterio fondamentale sono ispirate le « Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche » di cui già ho pubblicato due volumi colla collaborazione del Dr. OSCAR CHISINI (1), e di cui stiamo preparando il terzo, che si riferisce ad argomenti nuovamente svolti nei miei corsi universitari degli anni 1918-19 e 1919-20. Da questo volume traggo la presente Nota.

Già NÖTHER e LINDEMANN ebbero ad osservare che cosa diventino per continuità le proposizioni fondamentali della geometria sopra una curva piana f di genere p, quando questa, variando in dipendenza d'una parametro, acquisti nuovi punti multipli: si tratta qui di un'estensione alle curve non-aggiunte o virtualmente aggiunte dei teoremi relativi alle serie segate dalle ordinarie aggiunte (2). Ma lo scopo di questa nota è — in qualche modo — inverso. Si faccia variare la f, con moduli generali, in guisa che acquisti p punti doppi, e diventi quindi razionale. Allora la geometria sopra la curva di genere p — con moduli generali — si rispecchierà nella teoria delle serie lineari sopra la retta; vogliamo mostrare come si trovino così i teoremi fondamentali di quella geometria, per p

(1) Bologna, Zanichelli.

(2) Cfr. l'Anhang F alle *Vorlesungen über algebraische Geometrie* di F. SEVERI (Leipzig, Teubner, 1921, p. 247).

qualunque. Questa via di dimostrazione ha, in principio, soltanto un *valore euristico*, e non vale la pena d'indugiarsi a trasformarla in un metodo rigoroso di prova. Per contro è interessante vedere come la degenerazione della curva di genere p, in una retta o in una curva di genere $<p$, offra il modo di stabilire rigorosamente alcuni punti delicati della dottrina generale, che non hanno ricevuto — mi sembra — un trattamento soddisfacente, ovvero lo hanno ricevuto soltanto per mezzo degli integrali abeliani.

2. – Osserviamo anzitutto che, per mezzo delle degenerazione anzidetta (acquisto di p nuovi punti doppi), *le g_n^r sopra una curva di genere p si riducono alle g_n^r sopra una retta dotata di p coppie neutre*, cioè presentanti una sola condizione ai gruppi di queste serie che debbano contenerla; le quali coppie — giova notarlo — possono assumersi ad arbitrio. In questo senso possiamo parlare di una *retta con p coppie* come di una *curva di genere virtuale p*.

Ciò posto vediamo come i teoremi fondamentali della geometria sopra una curva si rispecchino semplicemente sopra una retta con p coppie.

1) Sopra la curva di genere p, ogni gruppo di n punti appartiene ad una determinata serie lineare completa g_n^r con $r \geqslant n - p$.

Si tratta di mostrare che sopra la retta « esiste una determinata serie lineare g_n^r con $r = n - p$, contenente un dato gruppo G_n e possedente p coppie neutre $A_{i1}A_{i2}(i = 1, 2, \dots p)$ ».

A tale scopo si osservi che la serie g_n^{n-1} completa, contenente un G_n e rispetto a cui è data una coppia neutra A_1A_2, si costruisce combinando linearmente il G_n con la g_n^{n-2} che possiede — sulla retta — i punti fissi A_1 e A_2: quindi la nostra g_n^r completa con p coppie neutre, resta definita come intersezione di p g_n^{n-1} per cui sarà in generale $r = n - p$ ed in ogni caso $r \geqslant n - p$.

Corollario del teorema 1 sono le proposizioni relative alla somma e sottrazione delle serie, in particolare il teorema del resto, per cui la serie residua di un G_n rispetto ad una g_n^r è la medesima quando si sostituisce al G_m un gruppo equivalente.

2) Ogni g_n^r completa per cui $n > 2p - 2$ ha la dimensione $r = n - p$.

Riportandoci alla retta, si stacchino dalla g_n^r $p - 1$ coppie neutre $A_{i1}A_{i2}$, per es. quelle per cui $i = 2, 3, \dots, p$: con ciò la dimensione della serie residua sarà $r' \geqslant r - (p - 1)$. Ma questa serie residua, d'ordine $n - (2p - 2)$, possiede la coppia neutra $A_{11}A_{12}$ e quindi è di dimensione $r' \leqslant n - (2p - 2) - 1$: combinando le due diseguaglianze si deduce

$$r' \leqslant n - p\,,$$

e quindi, per il teorema 1,

$$r = n - p .$$

(Si noti che il caso $n = 2p - 1$ non fa eccezione nel ragionamento precedente, giacchè la serie residua cui si è condotti non può essere la g_1^1, essendo A_{11} ed A_{12} due punti distinti, ma deve ridursi ad una g_1^0, cioè ad un punto fisso).

3) Esiste una determinata serie completa g_{2p-2}^{p-1}. Questa serie *canonica* si ottiene — sopra la retta — combinando linearmente i p gruppi di $p - 1$ coppie neutre.

Anzitutto si vede che i p gruppi definiti dalle coppie: $2, 3, \ldots, p$; $3, 4, \ldots, p,$; $1, 2, \ldots, p - 1$, sono linearmente indipendenti; infatti i primi $p - 1$ hanno comune la coppia p-ma: $A_{p1} A_{p2}$, che non appartiene all'ultimo gruppo. Resta così dimostrato che i nostri p gruppi definiscono effettivamente una serie g_{2p-2}^{p-1} ed è evidente che questa possiede le coppie $A_{i1} A_{i2}$ come coppie neutre, giacchè ciascuna di queste coppie è fissa per una g_{2p-2}^{p-2} contenuta nella g_{2p-2}^{p-1}.

D'altra parte è chiaro che una serie lineare g_{2p-2}^{p-1} possedente le p coppie neutre $A_{i1} A_{i2}$, contiene i gruppi formati da $p - 1$ di queste coppie (importanti nel loro insieme $p - 1$ condizioni) e quindi coincide con la serie lineare definita da questi gruppi: ciò significa l'unicità della serie g_{2p-2}^{p-1} sopra la retta di genere virtuale p.

4) Ogni g_n^r completa con $r > n - p$ è contenuta nella g_{2p-2}^{p-1} canonica, e precisamente ogni gruppo della g_n^r impone $n - r$ condizioni ai gruppi canonici che debbono contenerlo (*Teorema di* RIEMANN-ROCH).

Riportandoci alla retta togliamo dalla nostra g_n^r r coppie neutre; otteniamo così un gruppo di $n - 2r$ punti che impone ai gruppi canonici $n - 2r$ condizioni; ma le r coppie neutre impongono a questi stessi gruppi r condizioni e perciò un gruppo particolare della g_n^r e quindi — per il teorema del resto — anche un gruppo qualunque di questa serie, impone $n - 2$ condizioni ai gruppi canonici che debbano contenerlo. Per ciò la g_n^r è certo contenuta nella g_{2p-2}^{p-1}, se $n - r \leqslant p - 1$.

3. – La proposizione « *una curva di genere* $p > 2$, *a moduli generali, non possiede trasformazioni birazionali in sè stessa* », si considera di solito come evidente. Ma forse la cosa è evidente solo per $p = 3$ e per le curve piane *generali del proprio ordine*. Ad ogni modo il teorema si dimostra colla degenerazione di una curva di genere p in una retta, poichè sulla retta non esiste alcuna proiettività (non degenere o degenere) la quale lasci invariate tre o più coppie di punti, date ad arbitrio.

Lo stesso teorema si può anche stabilire per un altra via che conduce ad un risultato più significativo.

Se una curva f possiede trasformazioni in sè, ad ogni g_n^1 di f (che non sia invariante) viene *associata* una g_n^1 (almeno), entro cui i gruppi dotati di punto doppio formano gli stessi birapporti. Ora si può chiedere se, sopra una f di genere p con moduli generali, avvenga di trovare g_n^1 associate ad una g_n^1 data, soddisfacenti alle condizioni dette innanzi.

Assumasi, per semplicità di discorso, una g_n^1 non speciale: la f contiene un'infinità di g_n^1 analoghe, dipendente da $2n - p - 2$ parametri; mentre i birapporti indipendenti formati dai $2n + 2p - 2$ gruppi d'una g_n con punto doppio sono $2n + 2p - 5$; perciò non esiste, in generale, su f una g_n^1 per cui codesti birapporti prendano i valori assegnati: anzi la determinazione di una tale g_n^1 dipende da un sistema d'equazioni (superiore al numero delle incognite) che importa $3p - 3$ condizioni di compatibilità, cioè precisamente tante quante sono i moduli, per $p > 1$. Ma se queste condizioni sono una volta soddisfatte, cioè se viene data una g_n^1 su f, non si può escludere a priori che ve ne sieno — di conseguenza — altre, associate, per cui i detti birapporti assumano gli stessi valori: tant'è vero che, per $p = 2$, le g_n^1 vengono appunto associate a coppie. Il conto di costanti dice solo che, già per $p = 2$, non si può avere che un *numero finito* di g_n^1 associate (cogli stessi birapporti).

Ora, se la f di moduli generali, ad es. per $p = 3$, contenesse — sempre — *più* g_n^1 associate, che cosa accadrebbe quando la f stessa si fa degenerare in una f di genere 2, con una coppia neutra (o più)? È chiaro che ad una g_n^1 data, che possegga la detta coppia neutra A_1A_2, dovrebbe essere associata almeno un'altra g_n^1 *colla medesima coppia neutra*: ma ciò è assurdo perchè la coppia A_1A_2 si può far variare per continuità su f, restando sempre neutra per la data g_n^1!

Risulta dunque che *per $p > 2$, sopra una curva di genere p, non esiste in generale una seconda serie g_n^1 i cui gruppi dotati di punto doppio formino eguali birapporti a quelli analoghi di una serie data.*

Così viene rimosso un dubbio critico, che si affaccia nell'enumerazione delle classi di superficie di Riemann ad n fogli, definite da dati punti di diramazione: dove si può chiedere se due funzioni algebriche $x(u)$, $y(v)$, diramate per gli stessi valori di u e v, non possano trasformarsi birazionalmente l'una nell'altra per una sostituzione su x e u, senza che si abbia necessariamente $u = v$, e x funzione razionale di u, $y(u)$.

4. – Insieme alla degenerazione di una curva di genere p in una di genere $p - 1$, conseguente all'acquisto di un nuovo punto doppio, conviene seguire la *degenerazione dei cicli della sua superficie di Rie-*

mann. Da ciò si trae una dimostrazione geometrica del *teorema di Hurwitz sulle corrispondenze* $[m, n]$, cioè che « le corrispondenze appartenenti a curve di moduli generali sono sempre *a valenza* ».

La dimostrazione (che non riferirò qui distesamente) si basa sopra il riconoscimento della « condizione topologica affinchè una serie ∞^1, s_n, di gruppi di n punti, appartenente ad una curva f, sia contenuta in una serie lineare g_n dello stesso ordine »; la qual condizione costituisce il *teorema d'Abel riguardato nel suo significato topologico*.

Si faccia muovere un gruppo G_n di s_n, sopra la superficie riemanniana f, in modo che esso ritorni in se stesso: una tale *circolazione* del G_n dà luogo ad un ciclo o ad una somma di cicli descritta dai punti del gruppo. Se la s_n è contenuta in una g_n lineare, codesta somma è sempre *omologa* ad un ciclo nullo (nel senso di POINCARÉ): quest'asserzione, di cui è facile la prova, costituisce il « teorema d'ABEL topologico ».

Il teorema d'ABEL topologico inverso, « ogni s_n a circolazione nulla è contenuta in una g_n lineare », si può stabilire, come qui accenno, per le curve a moduli generali; il Dr. CHISINI ne offrirà poi una dimostrazione valida per curve qualsiansi.

Io osservo anzitutto che il teorema di cui si discorre si verifica tosto sulle curve di genere $p=1$, giacchè il punto residuo dei gruppi di s_n rispetto ad una fissata g^1_{n+1} resulta necessariamente fisso, potendo altrimenti descrivere un ciclo non nullo. Dopo ciò estendo induttivamente il teorema da p a $p+1$, col metodo di degenerazione. Se, sopra una f di genere $p=2$, si suppone esistere una s_n a circolazione nulla non contenuta in una g_n lineare, si deduce anzitutto (per sottrazione da una g^n_{n+2} fissa) una serie ∞^1, s_2, a circolazione nulla, diversa dalla g^1_n di f e contenente una coppia arbitraria. Ora (essendo la f a moduli generali) si faccia degenerare la curva in una f di genere 1: la detta s_2 (o una parte di essa) dovrà divenire su f una g_2, di cui potrà segnarsi ad arbitrio una coppia, e che — d'altra parte — dovrà ammettere come coppia neutra quella costituita da due punti sovrapposti nel nuovo punto doppio di f: di qui l'assurdo. E analogamente si procederà da $p=2$ a $p=3$ ecc.

Il teorema stabilito permette di definire topologicamente, sopra una riemanniana f, le corrispondenze dotate di valenza γ, positiva o negativa: per es., per γ positivo, occorre che, mentre un punto P descrive un ciclo C, i punti corrispondenti $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ descrivano uno o più cicli la cui somma sia omologa a $-\gamma C$, diguisachè la somma dei cicli descritti dal gruppo

$$G_{n+\gamma} = \gamma P + P'_1 + P'_2 + \ldots + P'_n$$

risulti omologa a zero. Quindi il metodo di degenerazione (da p a $p-1$), mercè un'analisi accurata, permette di dimostrare completamente il citato teorema di HURWITZ: « Le corrispondenze singolari (non dotate di valenza) appartengono soltanto a curve con moduli particolari ». Per studiare tali corrispondenze singolari, il metodo di degenerazione non soccorre più; ma, quando sia dimostrato senza eccezione il teorema di ABEL topologico, si dedurrà ancora topologicamente il resultato — a cui HURWITZ e SEVERI arrivano cogli integrali abeliani — che vi è sempre un *numero finito di corrispondenze indipendenti.*

LXVI.

SUI FONDAMENTI DELL'ARITMETICA E SUL PRINCIPIO DELL'INVARIANZA DEL NUMERO

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XXXII (2º sem., 1923),

pp. 113-117

1. – La critica dei fondamenti dell'Aritmetica istituita da H. GRASSMANN (¹), L. KRONECKER (²) e H. HELMHOLTZ (³), ritenendo la priorità psicologica del numero ordinale sul cardinale, e cercando quindi di definire questo per mezzo di quello, si è imbattuta nella difficoltà di stabilire che « numerando gli elementi d'una classe finita, in un modo qualsiasi, il numero d'ordine dell'ultimo elemento riesce indipendente dal modo della numerazione, cioè dall'ordine in cui vengono presi gli elementi della classe, che si vogliono contare ». E. SCHRÖDER (⁴) per primo ha formulato esplicitamente questo *principio* che ha denominato *dell'invarianza del numero*; KRONECKER lo ha assunto come *postulato* per la classe dei numeri naturali (1, 2, ..., n); ed HELMHOLTZ ha cercato di *dimostrarlo*, deducendolo dalla possibilità di ottenere una qualsiasi sostituzione sopra n lettere come prodotto di trasposizioni. Ma, a ragione, questa dimostrazione non è ritenuta come soddisfacente.

Tuttavia si può arrivare ad una veduta chiara e precisa intorno al problema sollevato dal principio di SCHRÖDER, e fornire una vera dimostrazione di codesto principio, fissando anzitutto i concetti logici di *classe*, *ordine* e *corrispondenza*, che si assumono come presupposti, e che permettono l'introduzione dei numeri ordinali.

---

(1) *Lehrbuch der Arithmetik*, Berlino, 1861.
(2) *Über der Zahlbegriff*, in: « Philosophische Aufsätze », Eduard Zeller gewidmet (Lipsia, 1887).
(3) *Zahlen und Messen*, in citati « Philosophische Aufsätze ».
(4) *Lehrbuch der Arithmetik und der Algebra*, Lipsia, 1873, p. 14.

Questo è appunto lo scopo della presente Nota. In cui rileveremo anche l'uso implicito che si fa del principio dell'invarianza del numero nelle ordinarie dimostrazioni delle proprietà formali delle operazioni.

2. – Conformemente alla veduta generalmente adottata dai critici dell'Aritmetica dopo CANTOR e DEDEKIND, presupponiamo i concetti di *classe* o *gruppo* di oggetti (elementi), di *corrispondenza* e di *ordine*, e i relativi assiomi logici, ormai esaurientemente analizzati. Diciamo che una classe è *ordinata*, se è dato un criterio per cui, presi due elementi qualsiansi di essa, uno di essi *precede* l'altro (e questo all'opposto *segue* quello), per modo che: se A precede B e B precede C, di conseguenza A precede C, e non C ad A.

Un elemento d'una classe ordinata si dirà *primo* (o *ultimo*) se non vi è alcun altro elemento che lo preceda (o risp. lo segua).

Una classe si dirà *perfettamente ordinata* se è ordinata in guisa che « per essa e per ogni classe contenuta in essa *esiste* sempre *un primo* e *un ultimo* elemento ».

Dalla definizione si deduce che « in una classe perfettamente ordinata, ogni elemento che non sia l'ultimo ha un *successivo immediato*, ed ogni elemento, che non sia il primo ha un *precedente immediato* ».

Le classi finite di oggetti che ordiniamo colla numerazione, facendo corrispondere i loro elementi ai numeri $1, 2, \ldots, n$, hanno appunto un ordine perfetto. Reciprocamente le classi perfettamente ordinate sono finite [5], e permettono di *definire per astrazione i numeri ordinali*, come segue.

Se C e C' sono due classi perfettamente ordinate, si può stabilire fra di esse una *corrispondenza ordinata* (cioè tale che ad elementi susseguentisi corrispondano elementi susseguentisi), fissando che si corrispondano i loro primi elementi, e che — essendo A e A' due elementi corrispondenti — si corrispondano anche *il* successivo di A e *il* successivo di A'. La corrispondenza così stabilita si estende ad una almeno delle due classi nella sua interezza, cioè fa corrispondere biunivocamente a questa una classe (*simile*) contenuta nell'altra: infatti se accade, per esempio, che vi sieno elementi di C' cui non risponde alcun elemento di C, vi sarà tra questi elementi un primo, diciamo X'; allora al precedente di X' — diciamo N' — corrisponderà l'ultimo elemento, N, di C, e la classe C riuscirà simile alla classe degli elementi di C' che

(5) L'osservazione del fatto resulta implicitamente dall'analisi dei principî dell'Aritmetica di M. PIERI (« Bollettino dell'Accademia Gioenia di Catania », 1908): per noi la possibilità dell'ordinamento che abbiamo denominato « perfetto », viene assunta come *definizione* delle classi finite (§ 3).

precedono X', e che ha N' come ultimo elemento. Se così non fosse, si avrebbe un elemento di C (susseguente ad N) cui risponderebbe in C' un elemento precedente ad N'.

Ora, la corrispondenza ordinata fra classi perfettamente ordinate, permette di definire in queste gli elementi di *ugual posto*, sotto la condizione che le classi medesime sieno sufficientemente estese, e per esempio nelle classi simili: questa relazione soddisfa invero alle proprietà logiche di un'uguaglianza e permette quindi di definire « *il numero d'ordine dell'elemento d'una classe* perfettamente ordinata, come *concetto astratto dell'elemento d'ugual posto* nelle classi simili (o in classi più estese) ».

3. – *Definiremo* come classe *finita*, ogni classe che può essere perfettamente ordinata. E dimostreremo i seguenti teoremi:

I. – *Se una classe è finita* (cioè ammette un ordinamento perfetto), *in qualunque modo vengano ordinati i suoi elementi si avrà sempre un ordinamento perfetto.*

II. – *Una classe finita non può porsi in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria.*

III. – *Se una classe finita viene ordinata in modi diversi, si ottengono sempre classi ordinate simili, in cui gli ultimi elementi sono d'ugual posto*; in altre parole sussiste *il principio dell'invarianza del numero*: il numero d'ordine dell'ultimo elemento per un ordinamento qualsiasi d'una classe finita, è sempre il medesimo.

4. – Il teorema I si dimostra come segue.

Sia C una classe perfettamente ordinata e C' una classe *equivalente* (cioè tale che possa porsi in corrispondenza biunivoca con C) diversamente ordinata. Dimostriamo anzitutto che esiste in C' un *ultimo* elemento.

A tal uopo si considerino in C quegli elementi, che designeremo genericamente con P, siffatti che: gli elementi precedenti a P nell'ordine di C, abbiano come corrispondenti in C' elementi precedenti rispetto all'elemento P', omologo di P.

Almeno il primo elemento di C è un P.

Ora gli elementi P formeranno entro C un gruppo, perfettamente ordinato, $P_1, P_2, \ldots, P_s$, che avrà un ultimo elemento P_s. Dico che l'elemento P'_s, omologo di P_s in C', è l'ultimo elemento di C'.

La dimostrazione procede per assurdo, come segue.

Se P'_s non è l'ultimo elemento di C', agli elementi di C' che susseguono P'_s rispondono elementi di C, successivi a P_s (altrimenti si contraddirebbe alla proprietà caratteristica dei P), quindi è certo che tra i successivi di P_s in C esistono elementi il cui corrispondente, in C', succede a P_s: e fra codesti elementi vi sarà un primo X, nell'ordine di C.

Orbene ad X corrisponde in C' un X', successivo a P'_s, mentre tutti i precedenti ad X hanno come omologhi elementi di C' che non seguono P'_s: dunque X gode della proprietà degli elementi P, e però costituisce un elemento di questo gruppo, successivo a P_s: ma questa conclusione è assurda, perchè P_s è, per definizione, l'ultimo dei P.

Nello stesso modo (invertendo gli ordini) si prova che C' possiede anche un *primo* elemento.

Ora ogni classe K', contenuta in C', risulta equivalente ad una classe K contenuta in C, e poichè K possiede un ordine perfetto (subordinato da quello di C) si deduce che anche per K' vi è un primo e un ultimo elemento. c.d.d.

5. – Il teorema II si deduce dal teorema I, mediante riduzione all'assurdo, come segue.

Se la classe C è equivalente ad una sua parte propria, C', si consideri un elemento A appartenente a C e non a C', e la serie dei suoi corrispondenti $A'A''$ ... nella corrispondenza data e nelle sue potenze successive. Questa serie (che DEDEKIND chiama « una catena ») è illimitata, cioè ordinata in modo da non possedere ultimo elemento: ciò contraddice al teor. I nell'ipotesi che C ammetta un ordinamento perfetto.

6. – Ora, finalmente, stabiliamo senza difficoltà il teor. III che costituisce il principio dell'invarianza del numero.

Si confrontino due ordini (perfetti) di una classe finita, e quindi due classi perfettamente ordinate equivalenti, C e C'. Se esse non sono simili, sicchè per esempio C' si trovi in corrispondenza ordinata con una parte propria K di C (l'ultimo elemento di K, avendo ugual posto dell'ultimo elemento di C'), si deduce che C è equivalente alla sua parte propria K: in contraddizione al teor. II.

7. – Rileveremo infine che il principio dell'invarianza del numero, viene implicitamente usato nelle dimostrazioni ordinarie delle proprietà formali delle operazioni, e in ispecie delle *proprietà commutativa* e *distributiva del prodotto*.

Invero si suol dimostrare che

$$ab = ba \,,$$

scrivendo

$$ab = a + a + \dots + a_b\,,$$

$$a = 1 + 1 + \dots + 1_a\,,$$

$$b = 1 + 1 + \dots + 1_b\,,$$

$$ab = (1 + 1 + \dots + 1_a) + \dots + (1 + 1 + \dots + 1_a)_b =$$

$$= (1 + 1 + \dots + 1_b) + \dots + (1 + 1 + \dots + 1_b)_a = b + b + \dots + b_a = ba\,.$$

Ora si può dare forma logica a questa dimostrazione, supponendo che a sia «il numero degli elementi d'una classe finita (A)» e b «il numero degli elementi di una classe finita (B)».

La prima classe ammette un ordine (perfetto) $A_1, A_2, \dots, A_a$, e parimenti la seconda ammette un ordine $B_1, B_2, \dots, B_b$. Il prodotto ab, che è *per definizione* la somma di b termini uguali ad a, sarà il numero degli elementi della classe formata dalle coppie A_rB_s, che si presenta così ordinata:

$$A_1B_1,\ A_2B_1,\ \dots,\ A_aB_1;\ A_1B_2,\ A_2B_2,\ \dots,\ A_aB_2;\ \dots;\ A_1B_b,\ A_2B_b,\ \dots,\ A_aB_b,$$

ma questa stessa classe può essere ordinata anche come segue:

$$A_1B_1,\ A_1B_2,\ \dots,\ A_1\,B_b;\ A_2B_1,\ A_2B_2,\ \dots,\ A_2B_b;\ \dots;\ A_aB_1,\ A_aB_2,\ \dots,\ A_aB_b;$$

ed allora appare che il numero dei suoi elementi vale ba.

La proprietà distributiva

$$(a + b)c = ac + bc\,,$$

nasce pure dal confrontare due ordini della classe formata colle coppie di elementi presi dalle classi $(A+B)$ e (C), i cui numeri cardinali sono $a + b$ e c, come viene accennato dalla scrittura seguente:

$$A_1C_1,\ \dots,\ A_aC_1,\ B_1C_1,\ \dots,\ B_bC_1;\ \dots;\ A_1C_c,\ \dots,\ A_aC_c,\ B_1C_c,\ \dots,\ B_bC_c,$$

e

$$A_1C_1 \dots A_aC_1,\ \dots,\ A_1C_c \dots A_aC_c;\ B_1C_1 \dots B_bC_1,\ \dots,\ B_1C_c \dots B_bC_c\,.$$

LXVII.

SULLA COSTRUZIONE DELLE FUNZIONI ALGEBRICHE DI DUE VARIABILI POSSEDENTI UNA DATA CURVA DI DIRAMAZIONE

« Annali di Matematica pura ed applicata », s. 4ª, to. I (1923-1924), pp. 185-198

I. - Introduzione.

In una Nota inserita nei « Comptes rendus » dell'Accademia di Parigi, nel 1912, ho annunciato un teorema d'esistenza per le funzioni algebriche di due variabili; ma, qualche difficoltà d'ordine delicato nello sviluppo della dimostrazione avendomi fatto rimandare la pubblicazione della memoria diffusa che stavo preparando, altre occupazioni sopraggiunte mi hanno distolto fino ad oggi dall'argomento. Lo riprendo ora e preciso il teorema enunciato, fornendone la dimostrazione.

Per intendere lo spirito del problema e il senso del risultato che qui viene stabilito, conviene ricordare che, per proiezione da un punto O (che può essere esterno ovvero appartenente alla superficie con una certa molteplicità) una superficie data, F, viene rappresentata sopra un piano multiplo, d'un certo ordine n, con una certa curva di diramazione C. La C è l'immagine della curva di contatto del cono circoscritto ad F da O, non computando in questo il cono che proietta la curva doppia di F, supposta non cuspidale.

L'ordine m di C si esprime in funzione del genere π delle curve sezioni di F coi piani per O e del numero delle intersezioni di F colle rette per O, che è l'*ordine* n *del piano multiplo*:

$$m = 2n + 2\pi - 2 .$$

Ma la C non è una curva generale dell'ordine m. Anzi in corrispondenza ad una superficie F di moduli generali (dotata di curva doppia passante per O con una certa molteplicità e possedente un certo numero di punti tripli fuori di O), e del resto anche per una F proiettivamente generale nel proprio ordine, essa possiede un certo numero di nodi e di cuspidi: i nodi nascono, in generale, dalle bitangenti di F per O, e le cuspidi delle rette per O aventi un contatto tripunto con F. In funzione di n e π, e del numero dei nodi e delle cuspidi di C, si esprimono con formule note di ZEUTHEN e NÖTHER [1] gl'invarianti aritmetici della superficie F.

Ora sorge la questione d'esistenza: quand'è che una curva piana C, dotata d'un certo numero di nodi e di cuspidi, può assumersi come curva di diramazione d'un piano multiplo n-plo?

Per rispondere, si assuma ad arbitrio una C, d'un certo ordine pari $m = 2n + 2\pi - 2$, e si cerchi di costruire una superficie F rappresentata sopra un piano n-plo che abbia come curva di diramazione C: a tal uopo si costruirà una curva algebrica K, che sia rappresentata sopra una retta n-pla, a, i cui punti di diramazione son dati come intersezioni di a con C, e — facendo variare a in un fascio di rette, entro il piano C — si considererà la superficie descritta da K. Se la K venisse razionalmente determinata in funzione della retta a, il luogo di essa costituirebbe evidentemente la cercata superficie F, riferita ad un piano n-plo che ha come curva di diramazione C. Ma, in generale, la K non verrà determinata razionalmente in funzione di a, anzi il gruppo dei punti di diramazione che viene assunto su a determinerà un numero finito di curve algebriche, ossia di rette n-ple, birazionalmente distinte: le quali si scambieranno l'una nell'altra quando la retta a, variando nel suo fascio, ritorna alla posizione iniziale.

Or dunque l'analisi delle condizioni d'esistenza d'un piano n-plo che debba avere come curva di diramazione una data curva C, conduce

a) ad esaminare come variano e si scambiano fra loro le rette n-ple birazionalmente distinte determinate in corrispondenza ad una retta del piano di C, variabile in un fascio $y = tx$: perciò conviene riferirsi alle corrispondenti superficie di RIEMANN e al piano della variabile complessa che rappresenta il parametro t, nel quale piano occorre considerare i cammini chiusi elementari che rispondono alle tangenti semplici a C appartenenti al nostro fascio, ovvero, alle rette che vanno ai nodi e alle cuspidi di C;

b) quindi ad enunciare le condizioni elementari d'invarianza della nominata retta n-pla;

c) infine a dimostrare che codeste condizioni d'invarianza, oltrechè necessarie, sono anche sufficienti a determinare *razionalmente una* curva variabile K, descrivente la domandata superficie F.

---

(1) Cfr. SEVERI, « Atti R. Accad. Torino », 37 (1902).

L'enunciato preciso del teorema d'esistenza si troverà al § V. Qui vogliamo rilevare esplicitamente un corollario importante, che fu da me avvertito fino dal 1912, cioè il seguente:

Dato nel piano un sistema continuo $\{C\}$ *di curve* C, *d'un certo ordine* $m = 2n + 2\pi - 2$, *dotate d'un certo numero di nodi e di cuspidi, se una* C *é curva di diramazione d'un piano* n*-plo, lo stesso accade per le altre curve del sistema* $\{C\}$.

II. - Condizioni d'invarianza a cui soddisfano le rette n-ple di un piano n-plo.

Pongasi che la curva piana C — d'un certo ordine $m = 2n + 2\pi - 2$, e dotata d'un certo numero di nodi e di cuspidi — sia la curva di diramazione d'un piano multiplo d'ordine n, e così rappresenti una superficie F che potremo ritenere proiettata sul detto piano $z = 0$, dal punto all'infinito dell'asse z. Si consideri nel piano $z = 0$, un fascio generico di rette, e sia quello $y = tx$, che ha per centro l'origine delle coordinate $O = (000)$: dove si ammette in particolare, che l'asse z seghi la superficie F in n punti distinti: $1, 2, \ldots, n$.

Vogliamo studiare come varia la riemanniana R_t, relativa ad una curva K_t, sezione di F con un piano $y = tx$, al variare del parametro t.

Distendiamo i valori complessi della variabile t sopra un piano τ, e consideriamo in questo un valore iniziale: $t = 0$. Avremo corrispondentemente una curva K_0

$$z = f(x_0) = \varphi_0(x) ,$$

che (nel linguaggio della geometria algebrica) deve ritenersi proiettata dal punto O all'infinito dell'asse z sopra una *retta* n-pla $y = 0$, i cui punti di diramazione sono le intersezioni

$$A_1, A_2, \ldots, A_m ,$$

di essa con C.

Ora, distendendo i valori complessi della x sopra un piano di ARGAND-GAUSS, codesta retta n-pla appare come un piano su cui sono segnati l'origine O e gli n punti $A_1, A_2, \ldots. A_m$, e la riemanniana R_0 riesce definita in rapporto ad un certo sistema di cappi

$$l_i = OA_i \qquad (i = 1, 2, \ldots m) ,$$

cui risponderanno certe trasposizioni

$$S_i = (rs) ,$$

scambianti due rami r e s della

$$z = \varphi_0(x) .$$

Ricordiamo che i cappi l possono scegliersi ad arbitrio ed assumersi anche in un ordine arbitrario, dopodichè la conoscenza della K_0 determina il sistema S_i, in confronto ad altri che darebbero luogo a curve birazionalmente diverse; diguisachè — quando occorra — due qualunque dei punti A_i potranno ritenersi corrispondere a cappi contigui, salvo il conseguente mutamento delle S_i.

Moviamoci nel piano τ, partendo da un punto $t = 0$ e descrivendo un giro chiuso, γ, che vi ritorni: allora R_0 si prolungherà nella riemanniana variabile R_t; così vedremo, nel piano della variabile complessa x moversi i punti A_i, e a questo movimento dovremo accompagnare una variazione dei cappi l_i di guisa che essi non vengano mai ad attraversarsi (il cammino di t supponendosi tale che i punti A_i rimangano sempre distinti).

Quando al termine del nostro movimento siamo ritornati al valore iniziale $t = 0$, il gruppo dei punti A_i è ritornato in se stesso, subendo una certa permutazione

$$\Gamma = \begin{pmatrix} A_1 \, A_2 \, \ldots . \, A_m \\ A_{\gamma 1} A_{\gamma 2} \ldots \, A_{\gamma m} \end{pmatrix};$$

contemporaneamente i cappi l_i sono divenuti dei nuovi cappi $l_{\gamma i}$ conservando il loro ordine e le relative sostituzioni S_i, ma l'estremo di l_i non è più A_i bensì A_{γ_i}, e in ogni modo giova tener presente che anche un cappio che ritorni al medesimo estremo può avere cambiato essenzialmente di forma.

Tuttavia si possono riportare i cappi l_{γ_i} agli l_i; durante questa trasformazione i cappi dovranno attraversare dei punti A e quindi verranno mutate le sostituzioni S_i, e in definitiva ai punti A_i corrisponderanno certe nuove sostituzioni

$$S_i^{(\gamma)} .$$

Ora introduciamo l'ipotesi d'esistenza di F. Poichè al cammino chiuso γ risponde una variazione continua della curva K_t, sezione di F, che riporta la K_0 in se stessa, si deduce che: per qualunque cammino γ segnato nel piano della variabile complessa t, le due riemanniane che rispondono ai cappi l_i e rispettivamente alle sostituzioni S_i e $S_i^{(\gamma)}$ sono equivalenti; nel nostro caso ciò importa che le sostituzioni S_i e $S_i^{(\gamma)}$ sieno non soltanto simili (cioè trasformate una dell'altra mediante una sostituzione che rappresenti un cambiamento di nome degli n valori $1, 2, \ldots, n$) bensì identiche, poichè le intersezioni di F con l'asse z sono rimaste ferme durante tutto il movimento.

Riassumeremo la condizione precedente dicendo che: per l'esistenza della superficie F la R_t deve soddisfare ad una *condizione d'invarianza*, la quale importa che *le sostituzioni di R_t relative ai punti A_i restino invariate per qualunque giro γ fatto nel piano τ.*

III. - Riduzione della condizione d'invarianza a condizioni elementari.

Il significato della condizione d'invarianza di R_t, che abbiamo trovata nel precedente paragrafo, può venir precisato riducendo per continuità qualunque giro γ, entro il piano τ, ad una somma di cammini elementari (veri cappi nel detto piano) che racchiudono i punti critici in cui coincidono due punti A.

Questi *punti critici* sono *di tre specie*:

1) punti

$$T_1, T_2, \ldots, T_\mu$$

che rispondono alle tangenti semplici di C per O (la classe μ ha un valore che qui non importa calcolare);

2) punti

$$D_1, D_2, \ldots, D_\delta$$

che rispondono ai δ nodi e alle rette che li proiettano da O; e infine

3) punti

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_\chi$$

che rispondono alle χ cuspidi di C.

Conviene analizzare partitamente quale sia in generale l'effetto che producono sulle sostituzioni di R_0 i giri elementari delle tre specie.

Ma giova premettere un'osservazione comune ai tre casi.

Si consideri un punto critico, $t = t_c$, che sia un T o un D o un Q, e pongasi che in esso confluiscano due punti A_r e A_s. Per l'osservazione fatta innanzi, è sempre lecito ritenere che codesti due punti sieno due punti contigui, che potremo quindi indicare con A_1 e A_2. Però i corrispondenti cappi $l_1 O = A_1$ e $l_2 O = A_2$, possono dar luogo a due circostanze diverse che occorre tener presenti:

a) può accadere che l_1 e l_2, per $t = t_c$, diventino o possan farsi diventare *onestamente vicini*, cioè tendenti a confondersi senza includere alcun altro punto A o attraversare altri cappi;

b) all'opposto può accadere che l_1 e l_2, pure essendo contigui, non possano ritenersi come vicini, in modo da riunirsi in un solo cappio indipendente dai rimanenti.

Le figure 1 e 2 qui annesse illustrano questa circostanza nel caso elementare in cui fra l_1 e l_2 (già resi contigui) verrebbe a frapporsi un cappio l_i.

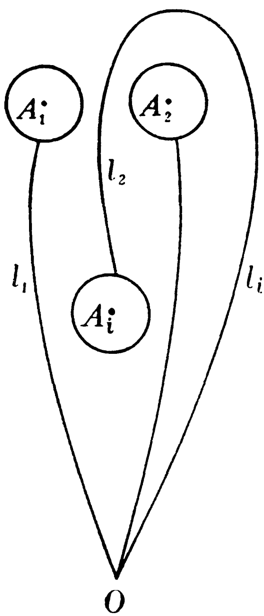


Fig. 1.

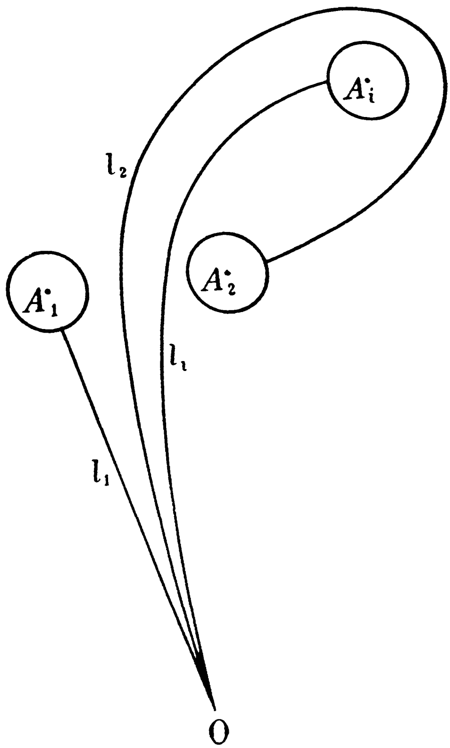


Fig. 2.

Ma, riferendoci per semplicità a questo caso elementare, possiamo dimostrare che, in ogni caso, una conveniente trasformazione dei cappi, permette di ridursi al caso in cui l_1 e l_2 diventino onestamente vicini.

A tal uopo si ricordi che in una riemanniana R, due qualsiansi cappi l_r e l_s si possono rendere contigui facendo uso di due modi di trasfor-

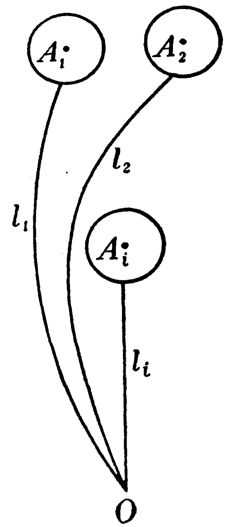


Fig. 1'.

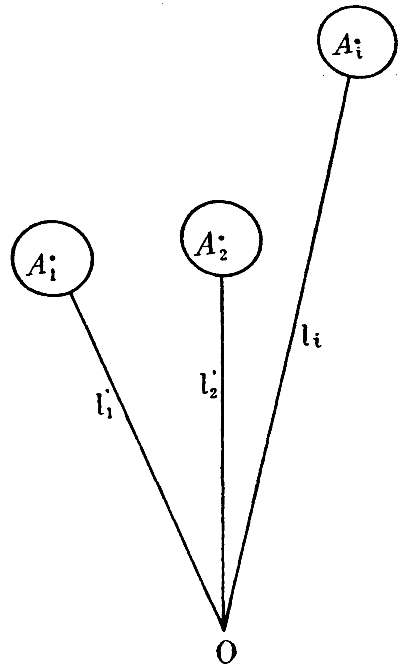


Fig. 2'.

mazione essenzialmente diversi: cioè tenendoli fermi e facendo che i cappi intermedi attraversino A_r, e allora le sostituzioni S_r e S_s rimangono invariate, o invece movendo, per esempio l_r, in guisa che attraversi i punti di diramazione intermedi, ciò che ha per effetto di alterare la sostituzione S_r.

Orbene, nel nostro caso $r = 1$, $s = 2$, quando ci si avvicina al valore critico $t = t_c$, l_1 e l_2 possono essere resi contigui e onestamente vicini purchè si operi convenientemente coi due modi di trasformazione. Così la riduzione dalla fig. 1) alla 1') o dalla 2) alla 2') si effettua in due tempi, portando anzitutto l_i ad essere intermedio fra l_1 e l_2, e poi movendo per esempio l_2 in guisa che attraversi A_i: si ottengono così i due cappi l_1' e l_2' onestamente vicini.

Dopo ciò passiamo a svolgere la nostra analisi, in rapporto alle tre specie di punti critici, T, D e Q.

1) Un punto T $(t = t_c)$ è un punto di diramazione che scambia due punti A (vicini ad $x = x_c$). E, per l'osservazione fatta innanzi, è sempre lecito ridursi al caso che i punti scambiati sieno contigui, e però indicabili con A_1 e A_2, e che i cappi contigui, $l_1 O = A_1$ e $l_2 O = A_2$, diventino onestamente vicini per $t = t_c$.

Adottando codesta ipotesi, studiamo l'effetto che ha sulle sostituzioni di R_0, un giro elementare intorno al nostro punto critico T. È chiaro

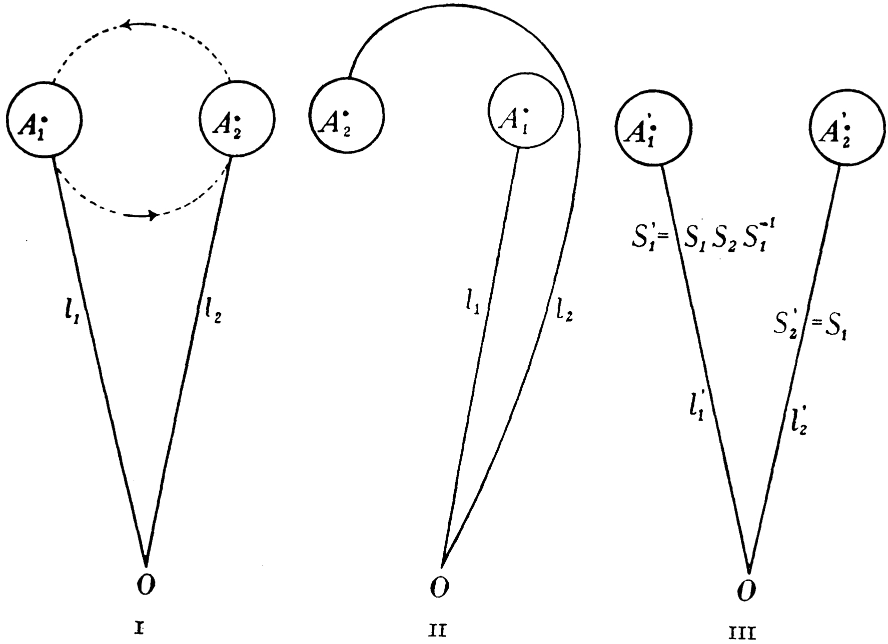


Fig. 3.

che tale effetto si riduce a quello di un cerchio infinitesimo che circondi T, a cui risponde un cerchietto descritto dai punti A_1 e A_2, ognuno dei quali percorre uno dei due archi $A_1 A_2$, indicati nella fig. 3, I: ciò è significato dalla relazione analitica

$$x - x_c = \lambda(t - t_c)^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Ebbene, osserviamo nella fig. 3 i tre disegni I, II, III, che rappresentano gli stati successivi della trasformazione, dove il passaggio dalla II alla III consiste nel trasportare l_2 dalla destra alla sinistra di l_1: vediamo così che le sostituzioni S_1 e S_2 si cambiano rispettivamente in

$$S'_1 = S_1 S_2 S_1^{-1}$$
$$S'_2 = S_1 .$$

E, frattanto, gli altri cappi $l_3, \ldots$ non hanno subito alcun cambiamento.

Per il nostro scopo conviene esaminare successivamente le tre ipotesi che, a priori, si possono fare intorno alla natura degli scambi S_1 e S_2:

a) Gli scambi S_1 e S_2 sono uguali, e sia per esempio

$$S_1 = S_2 = (12) .$$

In questa ipotesi

$$S'_1 = S_1 , \qquad S'_2 = S_2 ,$$

cioè la nostra condizione d'invarianza è soddisfatta.

b) Gli scambi S_1 e S_2 sono diversi fra loro ma permutabili: e sia, per esempio

$$S_1 = (12) , \qquad S_2 = (34) .$$

In questa ipotesi risulterebbe

$$S'_1 = S_2 = (34) ,$$
$$S'_2 = S_1 = (12) ,$$

contrariamente alla nostra condizione d'invarianza. Dunque questa condizione *esclude il presentarsi dell'ipotesi b) rispetto ad un punto T.*

c) Gli scambi S_1 e S_2 non sieno permutabili e però sieno del tipo

$$S_1 = (12) , \qquad S_2 = (23) .$$

In questa ipotesi

$$S'_1 = (13) , \qquad S'_2 = (12) ,$$

cioè S'_1 e S'_2 sono rispettivamente i trasformati di S_1 e S_2 mediante la sostituzione prodotto

$$S_2 S_1 = (123)^{-1} .$$

Ma questa conclusione è inconciliabile con la nostra *condizione d'invarianza* la quale *esclude* dunque *anche l'ipotesi c)*.

Pertanto la condizione d'invarianza di R_0 significa che, *in corrispondenza ai punti* T, cioè alle tangenti semplici della curva di diramazione C, i *due punti contigui* (estremi di cappi onestamente vicini) *che ivi si scambiano, portano la medesima sostituzione sui rami della funzione* z.

2) Un punto D $(t = t_c)$ è un punto critico apparente in cui confluiscono due punti A_1 e A_2 (vicini ad $x = x_c$) che possiamo ritenere contigui ed estremi di cappi onestamente vicini. Ora l'effetto di un giro elementare intorno a D si riduce a quello di un cerchio infinitesimo circondante D, a cui rispondono due cerchi descritti nello stesso senso dai punti A_1 e A_2, come è significato dagli sviluppi analitici

$$x_1 - x_c = \lambda_1(t - t_c) + \dots$$
$$x_2 - x_c = \lambda_2(t - t_c) + \dots,$$

dove x_1 e x_2 designano le coordinate di A_1 e A_2.

Sottraendo membro a membro si ha

$$x_1 - x_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_c) + \dots,$$

da cui risulta che la nostra trasformazione consiste nel far descrivere ad A_2 un cerchio intorno ad A_1. Ciò equivale a compiere successivamente due trasformazioni del tipo 1) (relative a punti T): infatti una trasformazione di quel tipo, dove si designano ancora con x_1 e x_2 le coordinate di A_1 e A_2, dà

$$x_1 - x_c = \lambda(t - t_c)^{\frac{1}{2}} + \dots$$
$$x_2 - x_c = -\lambda(t - t_c)^{\frac{1}{2}} + \dots,$$

donde

$$x_1 - x_2 = 2\lambda(t - t_c)^{\frac{1}{2}} + \dots,$$

e però equivale alla rotazione di mezzo giro di A_2 intorno ad A_1. E, del resto, l'equivalenza d'un nodo di C a due tangenti è ben nota, secondo il principio di continuità.

Pertanto, senza bisogno di esaminare le figure di passaggio, si può qui affermare a priori che un giro elementare intorno a D porta S_1 e S_2 rispettivamente in

$$S_1' = S_2 S_1 S_2^{-1}, \qquad S_2' = S_1 S_2 S_1^{-1}.$$

Ora si possono passare in rassegna le tre ipotesi a), b), c) considerate per i giri del tipo 1); e si arriva subito alla conclusione seguente: la *condizione d'invarianza* relativa alle sostituzioni di R_0 significa che, *in corrispondenza ai punti* D, cioè alle rette che vanno ai nodi della curva di diramazione C, i *due punti contigui* che ivi (onestamente) confluiscono portano *sostituzioni permutabili*, cioè sostituzioni identiche, come (12) (12), ovvero sostituzioni del tipo (12) e (34).

Ma conviene aggiungere che il caso delle *sostituzioni identiche* corrisponde a una particolarità della superficie F, $z = f(xy)$, cioè all'esistenza di un *punto doppio*, in generale *conico*

$$x = x_c\,, \qquad y = t_c x_c\,, \qquad z = f(x_c, t_c y_c)\,.$$

3) Un punto $Q(t = t_c)$ è un punto di diramazione che scambia due punti A (vicini ad $x = x_c$), i quali possono ritenersi contigui ed estremi di cappi onestamente vicini, che verranno indicati con A_1 e A_2: Ora l'effetto di un giro elementare intorno a Q si riduce a quello d'un cerchio infinitesimo che circondi Q: a cui risponde un cerchietto descritto dai punti A_1 e A_2, ognuno dei quali percorre nello stesso senso tre archi successivi $A_1 A_2$, come è significato dallo sviluppo

$$(x - x_c) = \lambda (t - t_c)^{\frac{3}{2}} + \ldots$$

Pertanto, la trasformazione relativa a questo caso equivale al prodotto di tre trasformazioni del tipo 1): d'accordo col fatto che la cuspide assorbe tre tangenti infinitamente vicine.

Dopo ciò si vede senz'altro quale sia l'effetto di una trasformazione del tipo 3) nelle tre ipotesi a), b), c), che si presentano a priori possibili.

L'ipotesi b) in cui si abbiano sostituzioni permutabili non identiche è *scartata*. Dunque le *condizioni d'invarianza* per le sostituzioni di R significa che in *corrispondenza ai punti* Q, cioè alle rette che vanno alle cuspidi della curva di diramazione C, i *due punti contigui* che ivi si permutano portano sostituzioni identiche ovvero *sostituzioni concatenate*, cioè non permutabili del tipo (12) e (23).

Ma il caso delle *sostituzioni identiche* risponde all'esistenza di un *punto doppio* (*biplanare*) della superficie F.

IV. - Ricapitolazione delle condizioni d'invarianza.

Innanzi di riassumere i risultati della nostra analisi, giova introdurre una conveniente nomenclatura, cui si accompagna un'osservazione essenziale per l'esatta comprensione dell'argomento.

Si considerino due punti di diramazione A_r e A_s della riemanniana R_t e — facendo variare t lungo un certo cammino descritto nel piano τ — si portino vicini ad un punto critico, che sia un T, o un D, o un Q; quindi si rendano contigui in modo che i relativi cappi diventino onestamente vicini (cfr. § III).

In seguito a questa trasformazione le sostituzioni relative ad A_r e A_s potranno divenire

identiche, come (12) e (12),

concatenate, come (12) e (23),

disgiunte, come (12) e (34):

nel primo caso diremo che nella riemanniana R_0 le *sostituzioni relative* ad A_r e A_s sono *identiche*, nel secondo e nel terzo che esse sono rispettivamente *concatenate* e *disgiunte*, *in rapporto al punto critico* t_c *e al cammino* che vi porta nel piano τ.

Ma, a giustificare questa definizione, conviene mostrare che: se le sostituzioni portate da due punti di diramazione A_r e A_s della riemanniana R_0 diventano identiche, concatenate o disgiunte, in relazione ad un cammino che vada a t_c, per una certa trasformazione dei cappi, altrettanto accade per qualunque altra trasformazione dei cappi (che renda sempre contigui e onestamente vicini l_r e l_s).

Infatti se l_r e l_s sono contigui e onestamente vicini, rispetto ad ogni trasformazione che li conservi tali, essi possono sostituirsi con un unico cappio l_{rs} che avvolga insieme A_r e A_s, ed allora, ogni qual volta l_{rs} traversi un punto di diramazione A_i, le relative sostituzioni S_r e S_s sono egualmente trasformate con S_i, e quindi rimangono, come all'inizio concatenate o disgiunte.

Dopo ciò possiamo riassumere i risultati della nostra analisi nel seguente enunciato:

Sia C la curva di diramazione d'un piano n-plo, rappresentativo d'una superficie F e, nella riemanniana ad n fogli che risponde alla retta del fascio $y = tx$ (da ritenere come retta n-pla i cui punti di diramazione sono le intersezioni $A_1, A_2, \ldots, A_m$ con C) si considerino *i due punti di diramazione A_r e A_s che vengono a confondersi in un punto critico $t = t_c$*: allora, *per qualunque cammino di t che vada al punto critico t_c, le sostituzioni portate da A_r* e *A_s* dovranno essere

1) *identiche rispetto ad ogni punto T*, cioè ad una *tangente semplice* per $O = (00)$;

2) *disgiunte rispetto ad ogni punto D*, cioè ad ogni *nodo* di C, che non risponda ad un punto doppio (conico) della superficie F (ed invece identiche se D risponde ad un punto conico);

3) *concatenate rispetto ad ogni punto* Q, cioè ad ogni *cuspide* di C, che non risponda ad un punto doppio (biplanare) della superficie F (ed invece identiche se Q risponde ad un punto biplanare).

V. - Teorema d'esistenza.

Il teorema enunciato nel precedente paragrafo s'inverte e si hanno quindi le condizioni, non più soltanto necessarie, ma altresì sufficienti, perchè la curva piana C sia curva di diramazione d'un piano n-plo.

Queste si possono enunciare dicendo che « fra le riemanniane ad n fogli R_t che si possono costruire sopra un raggio $y = tx$ variabile per un punto generico $O = (000)$, prendendo come punti di diramazione le intersezioni con C, deve esservene una che rimanga invariata per qualsiasi giro chiuso del parametro complesso t ».

E spiegando poi tali condizioni d'invarianza, secondo l'analisi del precedente § IV, si avrà il *teorema d'esistenza*, nella forma che gli daremo a conclusione di questo paragrafo.

Cerchiamo intanto di dimostrare il nostro asserto: partendo dalla ipotesi d'invarianza della R, faremo vedere che essa permette di costruire una superficie F rappresentata sopra un piano n-plo, che abbia come curva di diramazione C.

Invero la nostra ipotesi porta che, in corrispondenza d'una retta a variabile per O ($y = tz$, $z = 0$), si possa costruire una famiglia di curve birazionalmente identiche, rappresentabili sopra una delle rette n-ple che hanno come punti di diramazione le intersezioni di a con C (che viene distinta fra le altre rette n-ple analoghe), la quale famiglia ritorna in sè stessa quando a, variando comunque entro il fascio, ritorni alla posizione iniziale.

Ora codesta famiglia potrà essere proiettivamente realizzata mediante un sistema di curve K_{n+h}, d'un ordine $n+h$ abbastanza alto, giacenti nel piano verticale $y = tx$, e passanti h volte per il punto all'infinito dell'asse z; inoltre K_{n+h} si potrà anche imporre di segare z in n punti $1, 2, \ldots, n$, che rimangano fissi al variare di t. Aggiungendo condizioni complementari, si determinerà in tal guisa un numero finito s di K_{n+h}, ossia s funzioni algebriche $z = \varphi_t^{(i)}$:

$$z^{(1)} = \varphi t_t^{(1)}(x) \,,$$

$$z^{(2)} = \varphi t_t^{(2)}(x) \,,$$

$$\cdots\cdots$$

$$z^{(s)} = \varphi t_t^{(s)}(x) \,,$$

ciascuna ad n rami.

Quindi si determinerà razionalmente la funzione

$$z = \frac{1}{n}\,(z^{(1)} + z^{(2)} + \ldots + z^{(s)})\ ,$$

che risponderà ad *una* K_{n+h}, passante ancora per i punti fissi 1, 2, ..., n.

Al variare del piano $y = tx$ nel fascio che ha per asse l'asse z, codesta K genererà una superficie F, che a priori potrà supporsi passare un certo numero r di volte per l'asse z, e quindi avere l'ordine $n + h + r$. Per proiezione dal punto all'infinito dell'asse z questa F riesce rappresentata sul piano n-plo che ha come curva di diramazione C.

L'affermazione precedente solleva soltanto il dubbio critico che, in corrispondenza a particolari piani del nostro fascio, la K_{n+h} — che si mantiene sempre *algebricamente irreducibile* almeno finchè la traccia del piano non diventi tangente (propriamente o impropriamente) a C — possa *degenerare proiettivamente* in una curva multipla, cui vada sommato l'asse z e forse qualche altra retta parallela ad esso: ciò che porterebbe a completare la curva di diramazione del piano n-plo rappresentativo di F, aggiungendovi delle rette per O. Ma questo dubbio si può escludere osservando che, per h abbastanza alto, la degenerazione proiettiva di una delle nostre K_{n+h} esige più che *una* condizione ([2]), dimodochè la costruzione può farsi in modo che non si presenti la circostanza sfavorevole sopra accennata.

Dopo ciò possiamo enunciare il teorema d'esistenza, come segue:

Teorema d'esistenza. – Sia C una curva piana (posta nel piano $z = 0$), d'un certo ordine pari $m = 2n + 2\pi - 2$, dotata d'un certo numero di nodi e di cuspidi, che ci proponiamo di assumere come curva di diramazione d'una funzione algebrica di due variabili $z = f(xy)$. La *condizione d'esistenza* di questa funzione è che:

fra le riemanniane R_t determinate sopra un raggio, a, variabile nel fascio di centro generico $O = (000)$, prendendo come punti di diramazione le intersezioni $A_1, A_2, \ldots, A_m$ con C, ve ne sia una tale che:

per ogni giro elementare descritto dal parametro complesso t, le sostituzioni relative a due qualunque *punti* di diramazione, *che vadano a coincidere nel punto di contatto d'una tangente, sieno identiche rispetto a questo*;

le sostituzioni relative a due punti che vadano a coincidere in un *nodo* sieno, in relazione a questo, *disgiunte*;

ed infine quelle di due punti che vadano a coincidere in una *cuspide*, sieno, in relazione ad essa, *concatenate.*

([2]) Cfr. Enriques-Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche,* L. 5, § 33, vol. III, p. 363.

Ora questo enunciato si può semplificare osservando che tutti i giri elementari, descrivibili da t — nel suo piano τ — intorno ai punti critici già designati con T e D e Q, si lasciano comporre mercè un sistema primitivo di cappi che circondino codesti punti. Infatti se, per esempio, si giri attorno ad un certo punto T mediante due cammini che avvolgano un punto Q, la condizione d'invarianza di R_t essendo soddisfatta per il primo cammino in rapporto al T e poi anche per il cappio che avvolge il Q in rapporto al Q, ne segue che essa verrà soddisfatta anche per il secondo cammino rispetto al T. Così dunque potremo enunciare il

Teorema d'esistenza nella forma semplificata. – *Affinchè la curva piana C possa assumersi come curva di diramazione d'un piano n-plo, basta che le sostituzioni relative ai punti di diramazione di una R_t sieno rispettivamente identiche, disgiunte o concatenate in relazione alle tangenti semplici o ai nodi o alle cuspidi di C, per un certo sistema di giri elementari o cappi avvolgenti quei punti critici, nel piano della variabile complessa t.*

LXVIII.

SOPRA LE SUPERFICIE ALGEBRICHE TRASFORMABILI IN RIGATE (*)

« Rend. Acc. Lincei », s. 6ª, vol. XII (2° sem., 1930), pp. 3-6

Alcune conferenze tenute all'Università di Roma mi hanno dato occasione a ritornare sui teoremi fondamentali per la teoria delle superficie che son contenuti nella memoria scritta in collaborazione con CASTELNUOVO per gli « Annali di Matematica » (1901) e nell'altra mia memoria del Circolo Matematico di Palermo: *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero* (1905) (*)'. Mi è avvenuto così di ricostruire la dimostrazione dei teoremi di riferibilità a rigata, unificando i risultati espressi nelle due memorie, rendendo assai più semplice la trattazione della prima e evitando le critiche a cui possono andare incontro alcuni ragionamenti della seconda.

Esporrò qui soltanto le linee generali di questa ricostruzione, che sarà poi sviluppata dal prof. H. GEPPERT, il quale — avendo seguito le mie conferenze — collabora già da qualche tempo con me per dare a tutta la materia l'ordine più conveniente.

Come fondamento della ricerca pongo il teorema che le superficie di genere geometrico $p_g = 0$ o di genere numerico $p_a = -p \ (p > 0)$ posseggono un fascio irrazionale di curve, C, razionali o irrazionali, del genere p.

Designando con π il genere delle C e con Δ il numero delle C dotate di punto doppio, l'espressione dell'invariante di ZEUTHEN-SEGRE ci dà:

$$\Delta + 4(p-1)(\pi-1) = 13 - 12p - p^{(1)}$$

(*) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1930.

(*)' [Queste *Memorie*, vol. II, XXXVI].

dove $p^{(1)}$ designa il genere lineare della superficie. Di qui

$$(1) \qquad \Delta + 4(p-1)(\pi-1) = 13 - 12p - p^{(1)}.$$

Ma è facile riconoscere che, per $p > 0$, la superficie è tale che sopra di essa l'aggiunzione non si può estinguere. La dimostrazione si fa anzitutto per $p > 1$ e poi anche per $p = 1$. Infatti per $p > 1$, qualsiasi curva appartenente alla superficie (contenendo un'involuzione del genere p) ha il genere $\geqslant 2p-1$, e quindi possiede certo ∞^{p-2} curve aggiunte.

Per $p = 1$, basta osservare che, qualora l'aggiunzione — a partire da un sistema lineare qualsiasi di curve — si estinguesse, conducendo ad un ultimo sistema aggiuntivo di curve ellittiche, quest'ultimo sistema dovrebbe essere ∞^1 almeno, ovvero essere aggiunto d'un sistema lineare di curve di genere 2, $|L|$: allora $|L|$ apparterrà a una serie continua $\{L\}$ composta di ∞^1 sistemi lineari disequivalenti, ciascuno dei quali avrà una curva aggiunta ellittica, e perciò (essendo $p_g = 0$) si troveranno sopra la superficie ∞^1 curve ellittiche K, formanti una serie ellittica di grado $n \geqslant 1$. Dall'esistenza di tali curve ellittiche K di grado $n \geqslant 1$, si deduce facilmente che la superficie è riferibile a una rigata, essendo $\pi = 0$ (per $n > 1$ avremo un fascio di curve ellittiche con punti base, per $n = 1$ il sistema doppio $|2K|$ sarà di genere due e condurrà alla rappresentazione della superficie su un piano doppio).

Resta dunque stabilito che per le nostre superficie con $p_g = 0$ e $p_a = -p < 0$, l'aggiunzione non si può estinguere, e pertanto che $p^{(1)} > 0$.

Così lo studio delle superficie su cui l'aggiunzione si estingue si può limitare al caso razionale e alla trattazione che per questo caso dette già il CASTELNUOVO, semplificata poi in successive memorie di CASTELNUOVO-ENRIQUES. La conoscenza del fascio irrazionale sopra la superficie ha reso superflui i ragionamenti più approfonditi a cui si era dovuti ricorrere nella citata memoria comune degli « Annali ».

Procedendo poi nell'esame delle superficie con un fascio irrazionale di curve C, ed avendo ormai provato che $p^{(1)} \geqslant 1$, si deduce senz'altro dalla (1):

$$\text{o} \qquad \pi = 0 \ \text{(rigate)}\,, \qquad \text{ovvero} \qquad \Delta = 0,\ p = 1,\ p^{(1)} = 1\,.$$

Pertanto resta solo da studiare il caso $p = 1$, che — all'infuori dell'ipotesi $\pi = 0$ — dà luogo a supporre $\pi = 1$ o $\pi > 1$.

Il caso $\pi = 1$ si esaurisce com'è indicato nella mia memoria del Circolo di Palermo. Per $\pi > 1$, il ragionamento ivi svolto deve essere ripreso ed emendato in un punto (p. 7 della Nota) perchè, dopo avere costruito una *curva parabicanonica* K è facile convincersi che, se questa non appartenga ad un fascio, non si può costruirne un'altra distinta e disequivalente.

Ecco dunque come condurremo la discussione. La nostra superficie F possiede, per ipotesi, un fascio ellittico di curve di genere π senza punti doppi. Sopra una curva C del fascio si ha un certo numero s di serie $g_{4\pi-4}^{3\pi-4}$ semiquadricanoniche, cioè serie disequivalenti dalla bicanonica, i cui doppi coincidono nella serie quadricanonica. Codeste serie si scambiano, in generale, l'una nell'altra, al variare di C nel fascio ellittico di F. Ma, in corrispondenza ad ogni C, si può costruire razionalmente un gruppo di s curve C' birazionalmente identiche, ciascuna delle quali risponda alla C stessa ed ad una delle s $g_{4\pi-4}$ definite sopra di essa. In tal guisa si potrà sostituire alla nostra superficie F una F' coi medesimi caratteri — rappresentata sulla F multipla senza curva di diramazione — che contiene parimenti un fascio di curve C' di genere π, senza punti doppi, su ciascuna delle quali viene definita razionalmente una serie $g_{4\pi-4}^{3\pi-4}$ semiquadricanonica. Sulla superficie F' consideriamo le curve M che segano sulle C' gruppi della detta serie $g_{4\pi-4}$. Le curve $2M$ segando sulle C' gruppi della serie quadricanonica, è facile riconoscere che il sistema continuo $\{2M\}$ equivale alla somma di un certo numero di curve C' e d'una curva paraquadricanonica, la cui esistenza si prova come quella della curva parabicanonica nella mia Nota citata di Palermo.

Avremo pertanto

$$\{2M\} = \{rC' + 2K\}\,,$$

designando con K la curva parabicanonica.

Ora, se r è pari, i caratteri di $\{M\}$ sono quelli stessi di $\{(r/2)C+K\}$ e quindi si prova egualmente l'esistenza d'una M spezzata in tante curve C' e in una curva Θ parasemiquadricanonica: questa curva, come la K, è ellittica ma disequivalente da K e perciò *distinta* da essa; ora le due curve equivalenti 2Θ e $2K$ permettono di costruire in F' un fascio lineare di curve ellittiche (come nella mia Nota di Palermo); ne risulta poi che tutte le C' e quindi anche tutte le C di F, hanno eguali moduli, ecc.

Ma che cosa accade se r è dispari? In questo caso non si arriva più alla conclusione voluta; però si riconosce tosto che allora il genere delle C e delle C', π, deve essere dispari:

$$\pi = 2\varrho - 1\,.$$

Dunque il nostro ragionamento vale per π pari. Se π è dispari, conviene considerare in luogo delle serie semiquadricanoniche sulle C, le serie che moltiplicate per un altro intero $t(\neq 2)$ danno il t-plo della serie bicanonica. Il ragionamento si svolge in modo affatto analogo e conduce allo scopo tutte le volte che π sia divisibile per t. Basta dunque aver preso t eguale ad un divisore, per esempio al più piccolo divisore primo, di π.

La conclusione a cui si è condotti è quella stessa che si trova nella citata Nota di Palermo:

Le superficie con $p_g = 0$, $p_a = -1$, *che non siano riferibili a rigata appartengono alla famiglia delle superficie ellittiche (con* ∞^1 *trasformazioni in sè), rappresentabili sopra un cilindro ellittico multiplo con un certo numero di sezioni piane parallele di diramazione. E infine le condizioni di riferibilità a rigata d'una superficie sono espresse dall'annullamento del quadrigenere e del sestigenere*

$$P_4 = P_6 = 0 \, .$$

LXIX.

LE CASSINOIDI E LE CURVE DI DARBOUX

« Rend. del Seminario Matematico della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma », s. 2ª, vol. VI (1930), pp. 15-25

In questo studio ci proponiamo in primo luogo di studiare le curve piane, luogo dei punti le cui distanze da un gruppo di poli danno un prodotto costante. Queste curve son dette *cassinoidi*, presentandosi come estensioni della curva di CASSINI, che risponde al caso di due poli. Talvolta sono anche dette *lemniscate*, generalizzando il nome della lemniscata di BERNOULLI, che è il luogo dei punti il cui prodotto delle distanze da due poli A e B eguaglia il quadrato della metà di AB.

In secondo luogo studieremo anche la famiglia delle curve di DARBOUX (1) che si presentano a loro volta come estensione delle *cassinoidi*.

1. - Nozioni preliminari.

Come punto di partenza ricordiamo alcune nozioni relative alla distanza di punti reali e complessi nel piano, che hanno come fondamento la nota formula della distanza di due punti.

La distanza di un punto proprio A da un punto B si conserva sempre finita, finchè B non va all'infinito. La distanza AB è infinita se il punto B cade in un punto all'infinito diverso da uno dei punti ciclici del piano.

La distanza AB assume forma indeterminata quando B cade in uno dei punti ciclici del piano.

Più precisamente, se A essendo un punto proprio fisso, si fa variare il punto B fino a cadere in uno dei punti ciclici, M, la distanza $AB=AM$

(1) Cfr. G. DARBOUX, *Sur une classe remarquable de surfaces algébriques*. Parigi, Gauthier et Villars, 1873.

definita per continuità è:

1) infinita del 1° ordine se B tende ad M secondo una curva che non tocchi la retta isotropa AM;

2) finita e $\neq 0$, se B tende ad M secondo una curva che tocchi semplicemente la retta AM;

3) uguale a 0, ed anzi infinitesima d'ordine $i > 0$, se B tende ad N secondo una curva osculatrice che abbia con la AM un contatto d'ordine $i+1$.

Una seconda premessa, che qui pure giova ricordare, si riferisce alla nozione delle coppie di punti associati nel piano.

Si abbiano nel piano 2 punti propri A e B, e si congiungano coi punti ciclici M, N, determinando le intersezioni

$$A' = AM \cdot BN\,, \qquad B' = AN \cdot BM\,.$$

La coppia $A'B'$ dicesi con DARBOUX *associata* alla coppia AB. E si verifica che:

il rapporto delle distanze di un punto P da due punti A, B, eguaglia $e^{i\alpha'}$, designando α' l'angolo secondo cui si vede da P il segmento formato dai punti associati A' e B' (2):

$$e^{i\alpha'} = \frac{PA}{PB}\,.$$

2. - Cassinoidi.

Consideriamo dapprima la curva di CASSINI luogo dei punti le cui distanze da due punti (generici) A e O danno un rapporto costante (non nullo). Questa curva K è del 4° ordine, come appare dall'equazione. Essa deve soddisfare a due condizioni:

1) La K non può segare la retta all'infinito del piano in un punto P fuori dei punti ciclici M e N, perchè la distanza PA (e similmente la PB) diverrebbe infinita. Per lo stesso motivo la K, passando, per esempio, per M, non può avere in M un ramo tangente alla retta all'infinito, sul quale P, accostandosi ad M, diverrebbe infinito.

2) La K non può neppure segare una retta isotropa per A o B, per esempio AM, in un punto P a distanza finita, perchè la distanza PA e quindi il prodotto $PA \cdot PB$ si annullerebbe. Quindi la K tocca

(2) Cfr. G. DARBOUX, id., p. 63.

coi suoi due rami per M le due rette isotrope AM e BM, ed anzi queste debbono essere tangenti d'inflessione per i detti rami.

In conclusione: *La curva di Cassini è una quartica che passa doppiamente per i due punti ciclici del piano ed ha un flesso su ciascuno dei quattro rami uscenti da M e N.*

Queste proprietà caratterizzano la curva di Cassini. Se una quartica K, soddisfacente ad esse, è reale, le tangenti principali m_1 e m_2 in M, sono immaginarie coniugate alle tangenti n_1 e n_2 in N, sicchè i punti $A = m_1 n_1$, $B = m_2 n_2$, sono reali: la K è luogo dei punti il cui prodotto delle distanze da A e B riesce costante.

Infatti, se sopra la quartica K si fa muovere un punto P, il prodotto delle distanze $PA \cdot PB$ non si annulla mai a distanza finita, e nei punti all'infinito M e N — accostandosi ad essi sopra i rami che vi passano — si conserva pure finito e diverso da zero: giacchè, per il ramo osculatore a PM accade che la distanza PA diventi zero (del 1° ordine) mentre la distanza PB diventa infinita dello stesso ordine.

Il risultato ottenuto riesce confermato da un calcolo di costanti, che pure, a prima vista, conduce ad un *paradosso.*

Le quartiche piane dipendono da 14 costanti arbitrarie. L'imposizione d'un punto doppio equivale a 3 condizioni lineari e così le quartiche passanti doppiamente per M e N dipendono da $14 - 6 = 8$ parametri. Ora, se una tangente principale in M o in N deve essere tangente di flesso, si ha una condizione lineare: in tutto dunque 4 condizioni, che sembran ridurre a $8 - 4 = 4$ i parametri da cui dipendono le curve di Cassini. Ma i due poli d'una tal curva dipendono da 4 parametri (le loro coordinate nel piano) e resta ancora la costante a cui si eguaglia il prodotto delle distanze. Dunque le curve di Cassini contengono in effetto 5 e non 4 parametri! Come si spiega il paradosso?

La risposta è che le condizioni perchè le tangenti principali nei due punti doppi d'una quartica sieno tangenti di flesso pei relativi rami, non sono condizioni indipendenti: *se una quartica passante per M e N oscula tre rami lineari uscenti da questi punti, essa oscula anche il rimanente ramo.*

Per dimostrarlo si consideri il sistema lineare di tutte le quartiche K che passano doppiamente per M e N: questo sistema ha la dimensione 8 e il grado 8, cioè due K si segano (fuori di M, N) in un gruppo di 8 punti comuni alle K di un fascio; si deduce che le quartiche K passanti per 7 punti del piano passano in generale per un 8° punto da esse determinato.

Fra i gruppi di punti intersezioni di due K, vi è quello formato dalle intersezioni d'una K generica colla retta $r = MN$ contata 4 volte, che — detratte le 8 intersezioni assorbite in generale dai punti doppi M

e N — contiene 8 punti, costituiti da 4 coppie di punti infinitamente vicini ad M e N, sui rami di K. Ciò posto, si supponga che per una K irreducibile, tre delle tangenti principali ai rami per M e N (per esempio m_1, m_2, n_1) osculino i relativi rami; allora la quartica formata da tutte e quattro le tangenti principali m_1, m_2, n_1, n_2, contiene 7 fra le intersezioni della nostra K colla retta r^2, e quindi contiene anche l'8° punto d'intersezione: quanto dire che la tangente principale n_2 oscula anche essa il corrispondente ramo di K (per N).

Le cose dette per la quartica di CASSINI si estendono facilmente alle cassinoidi d'ordine superiore.

La cassinoide luogo dei punti del piano per cui è costante il prodotto delle distanze da n poli, è una curva d'ordine $2n$ passante n volte per ciascuno dei punti ciclici M e N, caratterizzata dalla proprietà di possedere su ciascuno dei $2n$ rami per M o N un flesso d'ordine $n-1$: cioè un contatto $(n+1)$ punto colla tangente.

3. - Le curve di Darboux.

DARBOUX ha considerato una famiglia di curve piane che, come vedremo, costituisce una generalizzazione delle cassinoidi, e che si lasciano definire in relazione a due serie di poli $A_1, A_2, \ldots,$ e $B_1, B_2, \ldots$ *come luoghi di punti per cui il prodotto delle distanze d'un punto dai poli della prima serie ha un rapporto costante al prodotto delle distanze dai poli della seconda serie*:

$$PA_1 \cdot PA_2 \ldots = kPB_1 \cdot PB_2 \ldots \qquad (k \neq 0, 1, \infty).$$

Consideriamo in particolare il caso in cui si abbiano due coppie di poli A_1, A_2, e B_1, B_2:

$$\frac{PA_1 \cdot PA_2}{PB_1 \cdot PB_2} = k .$$

La formula richiamata nel § 1 mostra che per *i punti P della curva riesce costante anche la somma algebrica degli angoli secondo cui si vedono le due coppie formate dai punti associati ad A_1, B_1 e A_2, B_2.*

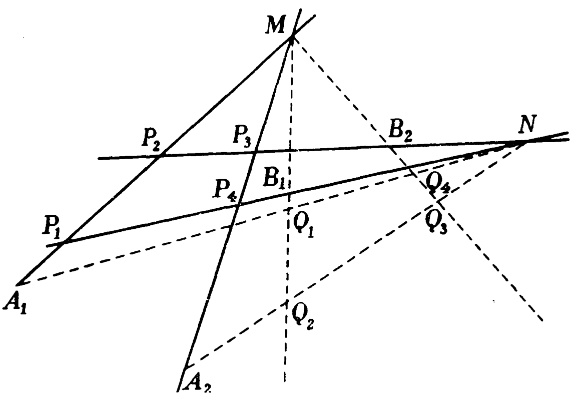
Questa proprietà si estende in generale alle *curve di Darboux* relative a due serie di n poli, che appariscono dunque come *luoghi di punti per cui riesce costante la somma algebrica degli angoli secondo cui si vedono n segmenti dati del piano* (3).

(3) Cfr. DARBOUX, loc. cit.

DARBOUX ha scoperto questa bella proprietà, di cui godono tutte le curve luogo di punti per cui i prodotti delle distanze da due serie di n e m poli hanno rapporto costante; le quali, per $m < n$, rientrano pure come caso particolare nella famiglia sopra considerata, siccome dimostreremo nel seguito.

4. - La quartica di Darboux definita in relazione ai punti ciclici.

Per caratterizzare le curve di DARBOUX, dal punto di vista delle relazioni proiettive coi punti ciclici, ci varremo di considerazioni sinte-



tiche, a cui si è condotti per naturale estensione dallo studio del caso ($n = 1$) del cerchio.

Riferiamoci al caso semplice delle curve di DARBOUX con due coppie di poli, che — come appare subito dall'equazione — sono del 4° ordine. Affinchè il rapporto $(PA_1 \cdot PA_2)/(PB_1 \cdot PB_2)$ si mantenga sempre eguale alla costante $k \neq 1$, esso non deve mai diventare 1, nemmeno quando P va all'infinito sopra la curva; segue da ciò che la quartica non può segare la retta all'infinito in altri punti che nei punti ciclici M e N, ed anche che in questi non può avere un ramo tangente alla retta all'infinito, poichè accostandosi P, per esempio, ad M, sopra il ramo, il rapporto fra i detti prodotti di distanze tenderebbe ad 1. Pertanto la quartica di DARBOUX passa doppiamente per M e N.

Oltre a ciò essa deve soddisfare a condizioni ulteriori. Poichè una retta isotropa come la A_1M, sega la curva in un punto P che ha da A_1 una distanza $PA_1 = 0$, onde non si annulli il nostro rapporto di prodotti bisogna che si annulli in pari tempo anche la distanza PB_1 o PB_2, sia, per esempio, PB_1. Allora PB_1 sarà pure una retta isotropa: $PB_1 = PN$.

Si riconosce in tal guisa che le due coppie di punti (generalmente a distanza finita), P_1P_2 e P_3P_4, in cui la quartica di DARBOUX, K, viene segata dalle rette isotrope, MA_1 e MA_2, sono anche due coppie di punti appartenenti alle rette isotrope NB_1 e NB_2.

Similmente le due coppie di rette isotrope NA_1, NA_2 e MB_1, MB_2, si segheranno in 4 punti Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, appartenenti alla K.

Queste condizioni sono espresse dall'annessa figura, ove tutti i punti sono segnati *come se fossero reali*. Esse *valgono a caratterizzare la quartica di Darboux*, K, potendosi dimostrare la costanza del rapporto dei prodotti delle distanze in relazione alle coppie di poli A_1A_2 e B_1B_2. Infatti, facendo variare un punto P sulla curva, si verifica che il rapporto $(PA_1 \cdot PA_2)/(PB_1 \cdot PB_2)$ non diventa mai zero o infinito, nè quando P va all'infinito in M o N, nel qual caso PA_1, PA_2, PB_1, PB_2, diventano infinite dello stesso ordine, nè quando P va sopra una retta isotropa per A_1, A_2 o B_1, B_2, cioè assume la posizione d'uno dei punti P_1, P_2, P_3, P_4 o Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, nel qual caso numeratore e denominatore del rapporto diventano infinitesimi dello stesso ordine. E però quel rapporto rimane costante.

Ora sorge una domanda: che cosa importano le condizioni sopra espresse per una quartica, K, soggetta ad avere due punti doppi in M e N?

La risposta può esser data molto semplicemente per chi conosce gli elementi della geometria delle curve ellittiche, ossia di genere 1 ([4]).

La K, passante doppiamente per M e N, è una curva di genere 1, sulla quale le rette per M e N segano due involuzioni g_2^1: Quando si proiettano da N sulla stessa K le coppie di punti di K allineate con M, si trasforma la prima g_2^1 in un'altra g_2^1, che, se è distinta dalla data, non avrà coppie comuni con essa. Dunque, se i due punti P_1P_2 allineati con M sono proiettati da N su K, in altri due punti, P_3 e P_4, pure allineati con M, vuol dire che la g_2^1 segata su K dalle rette per M viene trasformata in se stessa dall'involuzione analoga segata dalle rette per N: in altre parole *le due involuzioni g_2^1 sono permutabili.*

Se sussiste questa relazione simmetrica di permutabilità, anche ogni coppia di punti allineati con M, dovrà esser proiettata da N in una coppia di punti allineati con M, e reciprocamente due punti di K allineati con N saranno proiettati da M in due punti ancora allineati con N.

([4]) Cfr. per esempio: ENRIQUES-CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni*, vol. III, §§ 7, 27.

Così essendo, si può costruire la figura sopra disegnata a partire da un punto A, scelto nel piano in maniera arbitraria. Infatti, assunto A in un punto generico del piano, determineremo i punti P_1 e P_2 sezioni di MA colla K, e quindi i punti P_3 e P_4 loro proiezioni da N, i quali si troveranno sopra una retta per M: a questa retta dovrà dunque appartenere anche il punto A_2. Ma ora seghiamo la K colla retta NA, in Q_1Q_4; proiettando Q_1Q_4 da M sulla K stessa, si avranno due punti Q_2Q_3, allineati con N, e sulla Q_2Q_3 dovrà pure trovarsi anche il punto A_2, che così riesce determinato.

Infine anche i punti B_1 e B_2 verranno determinati come intersezioni rispettivamente delle rette P_1N, Q_1M e P_2N, Q_3M.

In conclusione potremo enunciare il teorema:

La quartica di Darboux è caratterizzata come curva del 4° ordine che passa doppiamente pei punti ciclici M, N del piano, e su cui le rette per M, N segano due involuzioni permutabili. Questa quartica costituisce il luogo dei punti per cui i prodotti delle distanze da due coppie di poli stanno in rapporto costante, e ciò relativamente ad una serie ∞^2 di quaterne di poli: una quaterna (come DARBOUX pure ha avvertito) *resta determinata dalla scelta arbitraria, nel piano, di uno dei suoi punti.*

È facile valutare il numero dei parametri da cui dipendono queste curve; anzi, effettuandosi il computo in due modi diversi, se ne trae una conferma dei risultati stabiliti.

L'imposizione d'un punto importa per una curva 3 condizioni e la permutabilità di 2 involuzioni g_2^1 sopra una curva ellittica dà luogo ad *una* condizione, che significa l'equivalenza delle serie doppie (serie complete g_2^1) ([5]); perciò le quartiche di DARBOUX contengono $14 - 6 - 1 = 7$ parametri. Allo stesso risultato si arriva contando le 8 costanti da cui dipendono le due coppie di poli A_1A_2 e B_1B_2, e la costante data dal rapporto delle distanze $(PA_1 \cdot PA_2)/(PB_1 \cdot PB_2)$; purchè si diminuisca il numero, 9, così ottenuto, di 2, in vista della circostanza che una quartica di DARBOUX è tale rispetto ad ∞^2 quaterne di poli.

([5]) Questa equivalenza si può esprimere, come è noto, in base al teorema d'ABEL, eguagliando le somme dei valori degl'integrali ellittici di prima specie

$$2I(P_1) + 2I(P_2) \equiv 2I(P_3) + 2I(P_4) \qquad (\text{mod. } \omega, \omega').$$

L'integrale I (coi periodi ω, ω'), relativo ad una quartica $f(xy) = 0$ passante doppiamente per i punti all'infinito M e N, vien dato da

$$I = \int \frac{dx}{f'_y}.$$

5. - Casi particolari.

La quartica di DARBOUX essendo definita per rispetto ad una serie di poli, vi è luogo a considerare il caso particolare in cui uno di questi va all'infinito e la curva appare quindi come luogo di punti per cui il prodotto delle distanze da due poli e la distanza da un terzo polo stanno in un rapporto costante. Inoltre, particolarizzando la quartica, si presenta anche il caso in cui essa compaia come luogo dei punti le cui distanze da due poli danno un rapporto costante, cioè come una curva di CASSINI.

La quartica K essendo affatto generale (con due punti doppi in M e N e le relative g_2^1 permutabili) si può ottenere una particolare quaterna di poli, facendo coincidere la retta per N cui appartengono P_1 e P_3 colla retta all'infinito NM: ciò accade se si scelga A, sopra una delle due tangenti principali a K in M; allora A_2M sarà la tangente principale all'infinito; e così anche Q_3 e Q_4, le A_1N e A_2N resultando tangenti principali ai rami di K in N. La *quartica K, di Darboux, appare così anche il luogo dei punti P per cui il prodotto delle distanze $PA_1 \cdot PA_2$ ha un rapporto costante alla distanza da un unico polo, B.*

Per particolarizzare ulteriormente la generazione della K, mandando all'infinito anche B_1, occorre che la K stessa soddisfi a condizioni particolari. Infatti, bisogna che anche P_1 e P_4 vadano all'infinito vicino ad M, e però che le tangenti ai due rami di K in M siano tangenti di flesso per questi rami. Se ciò accade, anche Q_1 e Q_2 come Q_3 e Q_4 andranno all'infinito vicino ad N, cioè le tangenti principali di K in N resulteranno tangenti di flesso pei rispettivi rami. *La K così particolarizzata è la curva di Cassini, luogo dei punti per cui è costante il prodotto delle distanze dai poli A_1 e A_2.* Ed invero la proprietà caratteristica che abbiamo indicato per questa curva, implica — come subito appare — che le due g_2^1 segate dalle rette per M e N, siano permutabili: quando sussista per una quartica tale relazione, le quattro tangenti ai rami pei punti doppi M ed N resulteranno tangenti di flesso pei rispettivi rami, ove ciò accade per *due* di esse; si ritrovano così le tre condizioni perchè una quartica passante doppiamente per M e N, sia una curva di CASSINI.

Il risultato ottenuto ci permette di enunciare che: *la quartica di Cassini può ritenersi anche, in infiniti modi, come luogo di punti i cui prodotti delle distanze da due coppie di poli sono in un rapporto costante*; uno dei poli della quaterna può scegliersi ad arbitrio, nel piano, sopra una retta per M, diversa dalle tangenti principali.

6. - Curve di Darboux d'ordine n.

I risultati che abbiamo svolto per le curve di DARBOUX relative a due coppie di poli, si estendono al caso di due serie di poli qualsiansi. Così, il luogo dei punti per cui i prodotti delle distanze da due terne di poli A_1, A_2, A_3 e B_1, B_2, B_3 sono in un rapporto costante, sarà una sestica, K_6, passante triplamente per i due punti ciclici, M e N, e su cui le rette per M e N segheranno due g_3^1 permutabili. S'intende con ciò che tre punti di K_6 allineati con M verranno proiettati da N, sulla K_6 stessa, in sei punti costituiti da due terne ancora allineate con M; e reciprocamente per tre punti allineati con N. Questa relazione, come nel caso delle due g_2^1 sulla quartica di genere 1, si esprime affermando l'equivalenza dei tripli delle due g_3^1: cioè dicendo che codesti tripli sono contenuti in una medesima serie completa g_9^5, sulla K_6 di genere 4. Infatti, i gruppi di 9 punti formati da terne allineate con M e N costituiscono gruppi comuni alle serie complete (non speciali) g_9^5 triple delle nostre g_3^1, le quali g_9^5 debbono quindi coincidere [6]; ma se tali serie coincidono, le g_9^3 composte delle terne delle due g_3^1 avranno comune una g_3^1, cioè vi saranno ∞^1 gruppi G_9 composti di terne allineate con M e N; ogni terna allineata con M o N farà parte d'un tal G_9; ossia le due g_3^1 saranno permutabili, nel senso innanzi spiegato.

Anche qui la K_6 apparirà come luogo dei punti per cui i prodotti delle distanze da due terne di poli danno un rapporto costante, e ciò rispetto ad una serie di ∞^2 sestine di poli: dove è possibile scegliere un polo ad arbitrio ecc.

Il numero dei parametri da cui dipendono le curve di DARBOUX del 6° ordine può determinarsi facilmente in due modi, il cui accordo vale anche come dimostrazione della proprietà caratteristica di esse.

Le curve del 6° ordine con due punti tripli M e N contengono $(6 \cdot 9/2) - 2 \cdot 6 = 15$ costanti arbitrarie; e la permutabilità delle due g_3^1 segate dalle rette per M e N, che significa l'equivalenza di due gruppi di 9 punti composti da terne delle due serie, porta 4 condizioni, essendo 4 il genere della curva; queste condizioni, possono esprimersi col noto teorema d'ABEL, eguagliando due somme d'integrali abeliani. Così rimangono $15 - 4 = 11$ parametri.

Allo stesso numero si arriva contando le $2 \cdot 6 = 12$ costanti da cui dipendono le due terne di poli, nonchè la costante che esprime il rapporto dei prodotti delle distanze; poichè una stessa curva di DARBOUX ammette una serie ∞^2 di poli.

---

(6) Cfr. ENRIQUES-CHISINI, op. cit., § 17.

Ciò che si è detto per il caso $n = 3$ si estende ora al caso di n qualunque e si ottengono, pure per n qualunque, i casi particolari corrispondenti a quelli considerati per $n = 2$.

Ci limiteremo ad enunciare i risultati che in tal guisa si ottengono.

La curva di Darboux, luogo dei punti per cui i prodotti delle distanze da due serie di n poli ciascuna sono in rapporto costante, è in generale, una curva d'ordine 2n di genere

$$p = n^2 - 2n - 1 ,$$

passante n volte per i due punti ciclici M e N, e caratterizzata dalla proprietà che gli n-pli delle due g_n^1 *segate dalle rette per M e N appartengono alla stessa serie lineare* $g_{n^2}^{n^2-p}$. *La curva gode della sua proprietà rispetto ad* ∞^2 *coppie di serie di poli, potendosi scegliere ad arbitrio uno dei poli.*

Le curve, luogo dei punti per cui i prodotti delle distanze da due serie di n e m ($m < n$) *poli, sono in un rapporto costante, appartengono alla stessa famiglia delle curve anzidette, i poli della prima serie trovandosi su rette che hanno un contatto d'ordine* $n - m$ *coi rami della curva in M e N.*

In particolare, per $m = 0$, *rientrano fra le curve di Darboux le cassinoidi,* luogo dei punti per cui è costante il prodotto delle distanze da n poli: tali poli si trovano sopra rette osculatrici (con contatto d'ordine n) ai rami della curva.

LXX.

INTORNO AD ALCUNE SERIE INVARIANTI DI GRUPPI DI PUNTI SOPRA UNA SUPERFICIE ALGEBRICA (¹)

« Rend. Acc. Lincei », s. 6ª, vol. XVI (2º sem., 1932), pp. 533-540

1. – Il sig. SEVERI (²) — avendo posto felicemente la definizione delle *serie razionali di gruppi di punti equivalenti* sopra una superficie, e insegnato a operare su di esse per somma e sottrazione — è riuscito a trovare una interessante interpretazione geometrico-funzionale del carattere numerico I, conosciuto come invariante di ZEUTHEN-SEGRE. Si tratta precisamente di una serie di grado $I+4$, che viene definita virtualmente a partire dal gruppo jacobiano $(C)_j$ di un fascio lineare di curve C, mediante la formula

$$(C)_j-(CC)-2(CC'):$$

(CC) designa il gruppo delle intersezioni di due C, e (CC') il gruppo delle intersezioni di C con una curva C' aggiunta a $|C|$.

La serie di SEVERI così definita gode di *invarianza relativa*, in ordine alle trasformazioni birazionali della superficie F che non introducono curve eccezionali, riuscendo indipendente dal fascio o dal sistema $|C|$ scelto su F.

Ora a me sembra interessante notare che il modo tenuto dal SEVERI non è il solo modo con cui si possono costruire sopra una superficie delle serie invarianti di gruppi equivalenti.

In particolare voglio indicare la costruzione di una serie invariante di gruppi di $p+I$ punti ($p=p_a=$ genere numerico), che gode dell'invarianza assoluta.

(¹) Presentata nella seduta del 4 dicembre 1932.

(²) *Un nuovo campo di ricerche ...*, « Memorie della R. Acc. d'Italia », vol. III (1932).

Alla serie invariante che qui abbiamo in vista, si arriva seguendo l'idea generale che sta a base della teoria delle curve invarianti, come è sviluppata nella mia *Introduzione alla geometria sopra le superficie* ... (« Società Italiana detta dei XL », 1896) (*) e — nella forma più semplice — dalla Nota *Intorno ai fondamenti della geometria sopra una superficie* ... (« R. Acc. di Torino », 1901) (**) ([3]). Analoga dimostrazione potrebbe svilupparsi per l'invarianza della serie di SEVERI.

2. – Si consideri una rete di curve C e le curve cuspidate che le appartengono. È noto che il numero χ di queste si esprime semplicemente per mezzo del genere π delle C e del genere numerico $p(=p_a)$ della superficie, colla formula:

$$\chi = 24(\pi + p) \text{ ([4])} . \tag{1}$$

Ora il gruppo $(C)_\chi$ delle cuspidi di codeste curve cuspidate appartiene, in generale, ad una serie razionale covariante di $|C|$; ed è facile vedere come questa serie si modifichi quando si passa da $|C|$ ad un sistema lineare più ampio $|C+K|$.

Precisamente si può dimostrare la relazione di equivalenza

$$(C+K)_\chi \equiv (C)_\chi + 24(CK) + 12(KK') \tag{2}$$

dove (CK) designa il gruppo delle intersezioni di una C con K, e (KK') un gruppo canonico di K, intersezione di K con una curva aggiunta K'.

Per dimostrare questa relazione conviene considerare una rete $K+(C)_2$ di curve spezzate $K+C$, con K componente fissa, ritenendola come limite di una rete $(L)_2$ contenuta entro $|L|=|C+K|$, la quale sia fatta tendere alla prima, in un modo determinato, attraverso una serie ∞^1 di stati.

Siccome la rete delle curve riducibili $K+(C)_2$ contiene infinite curve cuspidate, essendo K luogo di tacnodi delle curve composte con χ e con una C tangente, occorre esaminare più da vicino il passaggio al limite sopra indicato.

(*) [queste *Memorie*, vol. I, XIII].

(**) [queste *Memorie*, vol. II, XXXII].

([3]) Cfr. F. ENRIQUES, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, redatte da L. Campedelli. Edizione litografica, Cedam, Padova, 1932, cap. II.

([4]) Cfr. H. G. ZEUTHEN, *Études géométriques*, « Math. Annalen », 4 (1871); M. NOETHER, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens* ..., « Math. Ann. », 8 (1875); F. SEVERI, *Il genere aritmetico* ..., « Atti Acc. Torino », 37 (1902); T. BONNESEN, *Sur les séries linéaires* ..., « Bull. de l'Académie de Danemark », 1906.

Designamo:

con π, come già si è detto, il genere di C,

con ϱ il genere di K,

con d il numero delle intersezioni (CK),

e quindi con $\Pi = \pi + \varrho + d - 1$ il genere di $|L|$.

Giova considerare:

a) una rete generica $(L)_2$ di curve L irriducibili, che possiamo supporre contenga $24(\Pi + p)$ curve cuspidate distinte, e non contenga entro di sè infinite curve spezzate di cui faccia parte la K;

b) una rete particolare $(\bar{L})_2$ di curve irriducibili L, che contenga dentro di sè una fascio $K + (C)$, di curve spezzate colla componente fissa K: questa rete e la $K + (C)_2$, avendo comune un fascio, saranno contenute insieme in un sistema lineare ∞^3 $(\bar{L})_3$, per cui K è curva fondamentale;

c) la rete delle curve irriducibili $(\bar{\bar{L}})_2 = K + (C)_2$.

Osserviamo anzitutto che cosa diventi il gruppo delle cuspidi delle curve cuspidate di $(L)_2$, cioè il gruppo $(L)_\chi$, quando $(L)_2$ diventa $(\bar{L})_2$. È ovvio che un certo numero di cuspidi darà, al limite, cuspidi delle curve $\bar{L}$, fuori di K, il gruppo delle quali potrà essere designato con $(\bar{L})_\chi$; invece alcune delle curve cuspidate di $(L)_2$ tenderanno alle $2d + 2\pi - 2$ curve composte di K e di una C tangente del fascio $(C)_1$: il gruppo delle cuspidi di queste ultime curve è il gruppo jacobiano della serie g'_d segnata dalle curve di $(C)_1$ sopra K, da contare un certo numero x di volte. Così potremo scrivere:

$$(L)_\chi \equiv (\bar{L})_\chi + x\,\{2(CK) + (KK')\}\,, \tag{3}$$

essendo (CK) il gruppo delle intersezioni di K con una C, e (KK') un gruppo canonico di K, intersezione di K con una curva aggiunta K'.

Ora cerchiamo che cosa diventa il gruppo $(\bar{L})_\chi$ quando la rete $(\bar{L})_2$, variando entro il sistema lineare $(\bar{L})_3$, attraverso una successione ∞^1 di stati, tenda alla $(\bar{\bar{L}})_2 = K + (C)_2$.

A tal uopo ci riferiremo alla superficie F dello spazio S_3 che ha come sezioni piane le curve di $(\bar{L})_3$.

Su F un gruppo $(\bar{L})_\chi$ si costruisce intersecando la curva parabolica, C_a, sezione della hessiana H di F, colla curva sezione della polare di un punto generico A (cioè colla curva jacobiana C_j della rete delle sezioni di F coi piani per A), e prescindendo dalle intersezioni delle due curve C_h C_j, che cadono nel punto multiplo (d-plo) O, immagine di K. Pertanto, se il punto A, muovendosi sopra una linea per O, tenda ad O (e quindi la rete $(\bar{L})_2$ alla $(\bar{\bar{L}})_2 = K + (C)_2$) il gruppo delle cuspidi $(\bar{L})_\chi$ si moverà sopra la curva C_h, e infine si ridurrà al gruppo $(C)_\chi$ costituito dalle cuspidi della rete $(C)_2$ aumentato del gruppo dei punti di C_h infinitamente vicini ad O, da contare un certo numero y di volte. Ora, che cos'è il gruppo dei punti, infinitamente vicini ad O, sulla curva parabolica C_h? È, evidentemente, un gruppo di intersezioni $(C_h K)$, poichè l'intorno di O rappresenta appunto la curva K. Si può verificare precisamente che quel gruppo equivale (sopra K) ad un gruppo jacobiano della serie g_d segata dalle C, e quindi che

$$(\bar{L})_\chi \equiv (C)_\chi + y\{2(CK) + (KK')\} .$$

La verifica accennata si fa valutando il comportamento della hessiana di F (e così della curva C_h) nel punto d-plo O. Si può riconoscere che la hessiana si comporta in O, come se avesse la molteplicità $4d - 4$, e quindi come una superficie del sistema quadruplo delle aggiunte φ_{n-2}, che contenga 4 volte la curva (infinitesima) K, costituente l'intorno di O. Ciò posto, la curva luogo delle cuspidi delle curve di un sistema lineare ∞^3 $(L)_3$ è, in generale, una curva del sistema $|4L + 4L'| = |4C + 4K + 4C + 4K'|$; quando $(L)_3$ si riduce ad $(\bar{L})_3$ da essa si stacca $4K$, cosicchè

$$C_h = 8C + 4K',$$

e quindi il gruppo di punti

$$(C_h K) \equiv 8(CK) + 4(KK') ,$$

ossia $(C_h K)$ è equivalente ad un gruppo jacobiano della serie g_d segnata dalle C sopra la K.

In ultima analisi avremo dunque

$$(\bar{L})_\chi \equiv (C)_\chi + y\{2(CK) + (KK')\} ,$$

e infine, per la (3),

$$(L)_\chi \equiv (C)_\chi + (x + y)\{2(CK) + (KK')\} .$$

La relazione numerativa (1), già innanzi ricordata, dà $x + y = 12$, e perciò

$$(L)_\chi \equiv (C + K)_\chi \equiv (C)_\chi + 24(CK) + 12(KK') . \tag{2}$$

Scambiando le due curve C e K, scrivendo

$$(C+K)_\chi \equiv (K)_\chi + 24(CK) + 12(CC') .$$

Ne deduciamo in generale la relazione d'equivalenza sopra la superficie

$$(C)_\chi - 12(CC') \equiv (K)_\chi - 12(KK') . \tag{4}$$

Questa relazione si lascia interpretare come segue. Al variare di una rete $(C)_2$ entro il sistema lineare $|C|$, il gruppo delle cuspidi della rete descrive una serie razionale di gruppi equivalenti: sottraendo 12 volte un gruppo della serie razionale descritta dai gruppi (CC'), si definisce ancora una serie razionale di gruppi equivalenti. Ebbene:

La serie razionale di gruppi equivalenti che si ottiene partendo dal gruppo delle cuspidi di una rete C e togliendo 12 volte il gruppo delle intersezioni di una C con una aggiunta C', riesce indipendente dal sistema $|C|$ e perciò ha carattere invariante rispetto a trasformazioni birazionali della superficie.

Il grado della serie invariante così ottenuta vale $24(p+1)$. E, poichè p (genere numerico) è un invariante assoluto della superficie (anche rispetto a trasformazioni birazionali che introducono curve eccezionali), si comprende che la detta serie dovrà godere egualmente della invarianza assoluta. Ciò si verifica senza difficoltà, osservando che i gruppi di essa non dipendono affatto dai punti base del sistema $|C|$, e quindi non si altera l'ordine della serie stessa quando un punto base di $|C|$ venga sostituito con una curva eccezionale.

3. – Sopra una data superficie F conosciamo ora tre serie invarianti:

1) la serie di SEVERI, S_s (che egli chiama canonica);

2) la serie canonica S_c definita dai gruppi delle intersezioni delle curve canoniche (poichè a questa serie ci sembra più conveniente di riservare un tal nome);

3) e la nostra serie S_e;

i gradi rispettivi delle serie S_s, S_c e S_e sono

$$\mathrm{I}+4 , \qquad p^{(1)} - \mathrm{I} \qquad \text{e} \quad 24(p+\mathrm{I}) ,$$

designando I l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE, $p^{(1)}$ il genere lineare(relativo) di F, e p il suo genere numerico.

Ora fra i detti numeri sussiste la relazione indicata da NÖTHER [5]:

$$\mathrm{I} = 12p - p^{(1)} + 9 ,$$

---

[5] Loc. cit.

cioè

$$24(p+1) = 2(1+4) + 2(p^{(1)} - 1).$$

Si presenta subito alla mente l'idea che questa relazione numerica ammetta un'interpretazione geometrica funzionale, cioè che si abbia:

$$S_e = 2S_s + 2S_c.$$

Per stabilire effettivamente questa relazione, basta interpretare geometricamente i passaggi con cui BONNESEN (6) dimostra la relazione numerica di NÖTHER, sopra ricordata.

Si assuma, come modello della superficie, una F dotata di curva doppia ordinaria nello spazio S_3, le cui sezioni costituiscano le curve C. Sopra F, il gruppo delle cuspidi di una rete di C è dato dalle intersezioni della curva sezione della hessiana colla polare di un punto O, fuori dei punti cuspidali della curva doppia. E sopra la medesima curva intersezione di F colla polare di O si ha il gruppo dei punti doppi per un fascio di C. Indichiamo con H la curva sezione di F colla hessiana, con T e T' le curve intersezioni di F colle polari di due punti O e O', e con G il gruppo dei punti cuspidali della curva doppia di F. Avremo

$$(C)_\chi \equiv (HT) - 2G$$
$$(C)_j \equiv (TT') - G.$$

Si tratta di verificare che

$$(C)_\chi - 12(CC') \equiv 2\{(C)_j - (CC) - 2(CC')\} + 2[(C'-C)(C'-C)],$$

ossia

$$(C)_\chi \equiv 2(C)_j + 4(CC') + 2(C'C'),$$

e quindi che sussiste l'equivalenza dei gruppi di punti

$$(HT) \equiv 2(TT') + 4(CC') + 2(C'C').$$

A tal uopo si ricordi che

$$H = 4C + 4C',$$
$$T = 2C + C'$$

(6) Nella citata Nota dell'Accademia danese.

e

$$T' = 2C + C'.$$

Or dunque si deve verificare l'equivalenza

$$\{(4C + 4C')(2C + C')\} \equiv 2\{(2C + C')(2C + C')\} + 4(CC') + 2(C'C'),$$

che appare manifesta sviluppando i prodotti simbolici qui indicati.

In conclusione

La serie invariante S_e da noi definita è il doppio della somma della serie di Severi e della serie canonica:

$$S_e \equiv 2(S_s + S_c).$$

Naturalmente anche la serie, virtualmente definita,

$$S_s + S_c,$$

di cui S_e è il doppio, costituirà una serie invariante per la superficie e godrà, come S_e, dell'invarianza assoluta: ciò risulta subito dal modo di variare in senso opposto delle due componenti, S_s e S_c, per l'introduzione di una curva eccezionale. Ma potrà darsi che, per qualche superficie, esista effettivamente S_e e non $S_s + S_c$, mancando ambedue o almeno una delle serie componenti.

Frattanto la circostanza che S_e si esprima come combinazione delle S_s e S_c, lascia *presumere che in generale le serie invarianti sopra una superficie si riducano a due indipendenti*, così come vi sono due caratteri numerici indipendenti; mentre vi è un solo sistema lineare invariante (il sistema canonico) ai cui multipli si riducono tutte le formazioni invarianti di questa natura (7).

4. – La questione fondamentale di calcolare la dimensione delle serie invarianti, o almeno un suo limite inferiore, e quindi — in particolare — di decidere quando esse abbiano un'esistenza effettiva, si presenta meno ardua di quel che *a priori* potrebbe aspettarsi. Per risolverla giova esaminare alcuni esempi.

(7) La cosa si presenta come naturale estensione della costruzione e della dimostrazione d'invarianza data da ENRIQUES (per la serie canonica sopra le curve, 1899, e) per il sistema canonico sopra le superficie a partire dalla jacobiana di una rete di curve nei « Rendiconti Accademia di Torino », 1901. Il resultato si lascia prevedere *a priori* in base alla veduta, confortata da noti esempi, che per le superficie di moduli generali il *numero-base* di PICARD-SEVERI resulta eguale ad 1.

Nel piano la S_s (come SEVERI ha osservato) è la serie delle terne di punti: $S_s = S_3$.

Invece la S_c vien data dalle intersezioni delle curve anticanoniche $C - C'$, cioè dalle cubiche: cosicchè $S_c = S_9$. La somma è la serie dei gruppi di 12 punti S_{12}, e la S_e è il doppio di questa serie.

Sopra la superficie generale del 4° *ordine* (le cui sezioni piane verranno designate con C) la serie S_s si costruisce a partire dalla serie dei gruppi jacobiani dei fasci (C):

$$(C)_J \equiv [(2C + C')(2C + C')] ,$$

togliendo

$$(CC) + 2(CC');$$

si avrà dunque

$$S_s \equiv [(2C + C')(C + C')] - (CC' - CC) ,$$

e poichè

$$|C| = |C'| ,$$

la serie S_s (d'ordine 24) verrà segnata sopra la superficie dalle sestiche intersezioni di una quadrica e di una cubica.

Siccome poi la serie canonica S_c è nulla, resulta

$$S_e = 2S_s:$$

la S_e verrà segnata sopra la superficie del 4° ordine dalle curve d'ordine 12, intersezioni di una cubica con una superficie del 4° ordine.

Dal precedente esempio si può elevarsi alla costruzione delle serie invarianti, dapprima per le superficie d'ordine n qualunque, senza curva doppia, e poi per le superficie F dotate di curva nodale con un numero finito τ di punti cuspidali. Ma questa ricerca, e le osservazioni e i problemi che essa suggerisce, eccedono dai limiti della presente Nota.

LXXI.

SULLE IRRAZIONALITÀ ARITMETICHE CHE OCCORRONO PER LA RAPPRESENTAZIONE PIANA DELLA SUPERFICIE RAZIONALE A SEZIONI ELLITTICHE DELL'OTTAVO ORDINE

« Rend. Acc. Lincei », s. 6ª, vol. XVI (2° sem., 1932),
pp. 540-541

In una Memoria dei « Math. Annalen » (Bd. 49) del 1896 (*), ebbi già a classificare le superficie razionali in ordine alle irrazionalità aritmetiche che occorrono per la loro rappresentazione piana. In questa ricerca compare come uno dei tipi la superficie F_8 dell'ottavo ordine a sezioni ellittiche, che risponde al sistema lineare ∞^8 delle quartiche piane con due punti base doppi (A e B). Tale superficie io ritenni potersi rappresentare sul piano senza introdurre irrazionalità aritmetiche, avendo considerato come razionalmente dato il sistema ∞^2 delle coniche di essa che risponde alla rete delle rette (laddove esso è contenuto nel sistema ∞^3 che risponde a quello delle coniche per A e B). Il SEVERI ha avuto occasione di rilevare recentemente questa svista. Sorge ora la domanda:

Da quali irrazionalità artimetiche dipende la rappresentazione piana della superficie F_8?

La risposta non è difficile, ma interessante per la semplicità del risultato. *La rappresentazione piana della F_8 si può far dipendere da tre radicali quadratici.*

All'uopo osserviamo:

1) La F_8 contiene due fasci di coniche rappresentati sul piano dai fasci di rette per A e B; le coniche di essi stanno in piani formanti due serie razionali, diciamo α e β.

2) Le due serie di piani α e β generano due varietà a tre dimensioni secanti uno S_4 secondo due curve razionali C_α e C_β.

(¹) Presentata nella seduta del 4 dicembre 1932.

(*) [queste *Memorie*, vol. I, XVIII].

3) Mediante un radicale quadratico (risoluzione di un'equazione di 2° grado) si può separare le due curve C_α e C_β; e l'introduzione di altri due radicali quadratici serve a determinare due punti di esse, uno sopra ciascuna delle due curve. Dopo ciò avremo due coniche di F_8 secantisi in un punto razionalmente determinato della superficie.

4) Ora, essendo dato un punto di F_8, la F_8 potrà proiettarsi dal relativo piano tangente sopra una superficie di VERONESE, sulla quale saran pur dati razionalmente dei punti, e quindi rappresentarsi sul piano senza aggiunta di altre irrazionalità.

LXXII.

SULLE SUPERFICIE ELLITTICHE DI GENERE ZERO [1]

« Rend. Acc. Lincei », s. 6ª, vol. XIX (1º sem., 1934), pp. 195-199

1. – In un corso di lezioni tenute al Seminario Matematico dell'Università di Roma, ho esposto i principi della classificazione delle superficie algebriche e in ispecie di quelle di genere geometrico $p_g = 0$ e numerico $p_a = -1$, già studiate nella mia Memoria del Circolo Matematico di Palermo del 1905 (*).

Queste lezioni, che appariranno ordinate per cura del dott. LUIGI CAMPEDELLI nei « Rendiconti » del Seminario anzidetto, mi hanno offerto l'occasione di rivedere l'intera teoria, e di svilupparla precisandone e completandone alcuni risultati. In particolare mi sono anche fermato sulle superficie con due fasci di curve ellittiche, cioè dotate di curva canonica virtuale d'ordine zero. Tali superficie s'incontrano nella teoria delle superficie iperellittiche, e sotto questo aspetto, tanto BAGNERA e DE FRANCHIS come ENRIQUES e SEVERI, hanno avuto occasione di completarne la classificazione assegnando i valori possibili del determinante, nelle loro memorie dedicate appunto alle superficie iperellittiche del 1907-1908. Tuttavia la classificazione di cui si tratta e la costruzione dei tipi corrispondenti, può darsi per via algebrico-geometrica, senza ricorrere a rappresentazioni parametriche trascendenti, come appunto viene indicato in questa Nota.

Ricordo (dalla mia Memoria sopra citata del Circolo di Palermo) che le superficie di genere geometrico $p_g = 0$ e di genere numerico $p_a < 0$, non riferibili a rigate, hanno il $p_a = -1$ e sono superfici ellittiche, dotate di un gruppo ellittico ∞^1 di trasformazioni in se stesse. Esse posseg-

---

[1] Presentata nella seduta del 4 febbraio 1934.

(*) [queste *Memorie*, vol. II, XXXVI].

gono, in generale, un fascio ellittico di curve di genere $\pi \geqslant 1$, ed un fascio lineare di curve ellittiche C, e si rappresentano sopra il cilindro cubico multiplo:

$$f(xy) = 0 ,$$

in maniera che ad ogni punto di questo risponde un numero finito n di punti, intersezioni di una C e di una K: a codesto numero n, per il significato che esso assume in riguardo alla rappresentazione parametrica della superficie mediante funzioni ellittiche di un parametro e algebriche d'un altro, conviene il nome di *determinante* della superficie stessa.

Aggiungasi che i gruppi di n punti G_n, intersezioni delle C e delle K formano una involuzione, I_n, generata da un gruppo finito Γ_n di trasformazioni in sè della superficie, gruppo contenuto nel gruppo ∞^1 delle trasformazioni di essa e perciò costituite di trasformazioni permutabili, cioè *ciclico* o *abeliano* (non ciclico): i primi esempi relativi a questo secondo caso sono stati incontrati da BAGNERA e DE FRANCHIS nei loro studi sulle superficie iperellittiche; più tardi il CHISINI ha indicato in maniera generale la costruzione algebrica delle superficie ellittiche del tipo abeliano, completando in questo punto la determinazione ch'io avevo dato per il caso ciclico ([2]).

2. – Ciò premesso, consideriamo le superficie ellittiche con due fasci di curve ellittiche C e K e distinguiamo i casi in cui le curve ellittiche K sieno di *modulo generale* ovvero *armoniche* e *equianarmoniche.*

Le K siano di modulo generale. Allora il gruppo Γ_n subordina su K un gruppo abeliano dello stesso ordine sopra ogni K, il quale deve contenere: una trasformazione di prima specie ciclica d'ordine $m = n/2$, generante un'involuzione ellittica γ_m^1 e (almeno) una involuzione (o trasformazione di 2ª specie) generatrice di una g_2^1.

Ma, in base ad un'osservazione di CHISINI, si può dire di più: che codesto gruppo deve essere di *base due*, cioè generato soltanto da due trasformazioni indipendenti, poichè a tale condizione deve soddisfare il gruppo Γ_n per riguardo alle curve ellittiche C su cui esso subordina un gruppo di trasformazioni di prima specie ([3]).

Pertanto i soli gruppi abeliani soddisfacenti a tali condizioni sopra la K, sono: il gruppo Γ_2 generato da una g_2' (che ci porta alla F di determinante due), e il gruppo diedrico Γ_4 generato da due g_2' permutabili.

([2]) O. CHISINI, *Le superficie ellittiche il cui determinante è un numero composto.* « Rendic. Lincei », sett.-ott. 1921.

([3]) Cfr. ENRIQUES-CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni,* vol. III.

Dunque *vi sono soltanto due tipi di superficie ellittiche di moduli generali con curva canonica virtuale d'ordine zero*: superficie di *determinante due* e di *determinante quattro.*

Le prime (del tipo ciclico) si lasciano rappresentare mediante le equazioni:

$$(1a) \qquad u = \sqrt{(z-a)(z-b)(z-d)(z-e)\,\psi(xy)}\,, \qquad f(xy) = 0,$$

dove f designa un cilindro cubico, e $\psi = 0$ un altro cilindro d'ordine pari $2m$ (per esempio quadrico) che tocchi f in $3m$ generatrici.

Le superficie del secondo tipo (abeliano = diedrico), di determinante $n = 4$, potranno rappresentarsi colle equazioni

$$(1b) \qquad u = \sqrt{(z-a)(z-b)\,\psi_1(xy)} + \sqrt{(z-d)(z-e)\,\psi_2(xy)}\,, \qquad f(xy) = 0,$$

designando ψ_1 e ψ_2 due cilindri d'ordine pari, per esempio quadrici, toccanti f ciascuno secondo $3m$ o 3 generatrici (che costituiscano gruppi non equivalenti).

3. – *Tipo armonico.* Se le curve K sono armoniche, il gruppo abeliano della F, subordina sopra di esse un gruppo di base due. E, all'infuori del caso già trovato nell'ipotesi del modulo generale, codesto gruppo, deve contenere una trasformazione singolare del 4° ordine.

Poichè inoltre il gruppo deve essere di base due, si hanno soltanto due casi possibili:

1) gruppo ciclico del 4° ordine generato da una trasformazione singolare del 4° ordine (il cui quadrato è un'involuzione);

2) e gruppo d'ordine 8, generato da due trasformazioni singolari del 4° ordine, aventi lo stesso quadrato, cioè tali che i punti uniti quadrupli dell'una sieno uniti doppi per l'altra: questo gruppo si ottiene anche moltiplicando il gruppo generato da una trasformazione singolare del 4° ordine per la g_2' in cui sono coniugate le due coppie di punti uniti, rispettivamente quadrupli e doppi, ovvero per la trasformazione di prima specie involutaria γ_2' determinata dalle stesse coppie.

In corrispondenza ai due casi indicati si hanno *due nuove famiglie di superficie ellittiche tipo armonico con* $p_g = 0$ *e curva canonica virtuale d'ordine zero*: *una di determinante* $n = 4$ *e l'altra di determinante* $n = 8$.

Le superficie della prima famiglia sono del tipo ciclico e si lasciano rappresentare colle equazioni:

$$(2a) \qquad u = \sqrt[4]{(z-a)(z-b)(z-d)^2\,\psi(xy)}\,, \qquad f(xy) = 0,$$

designando ψ un cilindro del 4° ordine che tocchi f con contatto quadripunto, secondo tre generatrici.

Le superficie F della seconda famiglia, del tipo abeliano, si possono rappresentare, secondo CHISINI, colle equazioni

$$u = \sqrt[4]{(z-a)(z-b)^3\psi_1(xy)} + \sqrt[4]{(z-b)(z-c)\psi_2(xy)}\,, \qquad f(xy), \tag{2b}$$

designando ψ_1 e ψ_2 due cilindri, per esempio del 4° ordine, che tocchino f, il primo lungo 3 generatrici di contatto quadripunto e il secondo lungo 6 generatrici di contatto semplice.

La formula di CHISINI rispecchia la circostanza che il gruppo abeliano Γ_8 della F è generato da una trasformazione ciclica del 4° ordine e da un'altro del 2° ordine.

4. – *Tipo equianarmonico.* Se le K sono curve equianarmoniche all'infuori del caso pertinente all'ipotesi del modulo generale, può accadere che il gruppo abeliano della superficie F subordini su K un gruppo contenente una trasformazione singolare ciclica del 3° ovvero del 6° ordine. Pertanto sono anzitutto possibili due casi ciclici, ove il determinante n vale

$$n = 3 \quad \text{o} \quad n = 6\,.$$

In ciascuno di questi casi la F viene rappresentata sopra il cilindro multiplo $f(xy) = 0$, con tre curve di diramazione: $z = a$, $z = b$, $z = d$.

Più precisamente, nel primo caso le tre curve corrisponderanno a punti tripli delle γ_3' appartenenti alle K e la superficie F potrà rappresentarsi colle equazioni

$$u = \sqrt{(z-a)(z-b)(z-d)\psi(xy)}\,, \qquad f(xy) = 0, \tag{3a}$$

dove f designa un cilindro cubico e ψ un altro cilindro dello stesso ordine che osculi f secondo tre generatrici.

Invece nel secondo caso, una fra le curve di diramazione, per esempio $z = a$, corrisponderà ai punti sestupli delle g_6^1 appartenenti alle curve K, la seconda $z = b$ alle coppie di punti tripli di queste g_6^1, e la terza $z = d$, corrisponderà alle terne di punti doppi delle medesime g_6^1 cicliche. La superficie potrà quindi rappresentarsi colle equazioni

$$u = \sqrt[6]{(z-a)(z-b)^2(z-d)^3\psi(xy)}\,, \qquad f(xy) = 0, \tag{3b}$$

dove ψ designa un cilindro, per esempio del 6° ordine, che tocchi f secondo tre generatrici contate ciascuna 6 volte.

Resta da esaminare il caso in cui il gruppo Γ_n e quindi anche il gruppo subordinato sopra le K, sia abeliano, non ciclico. Ora si vede anzitutto che un gruppo ciclico Γ_6 sopra una curva ellittica non può essere contenuto in un gruppo abeliano più ampio.

Invece il gruppo Γ_3 si lascia ampliare in un Γ_9 abeliano, quale viene formato dalle proiettività cicliche del terz'ordine che trasformano in sè la cubica:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

avendo come rette unite i lati del triangolo hessiano

$$xyz = 0 .$$

Dunque, *nel caso equianarmonico ci saranno, oltre le due famiglie di superficie ellittiche con curva canonica virtuale d'ordine zero di determinante* 3 *e* 6 (*tipo ciclico*), *anche una famiglia di superficie di determinante* 9. Come equazioni di una superficie F di questa famiglia potremo dare, secondo CHISINI:

$$u = \sqrt{(z-a)(z-d)\psi_1} + \sqrt{(z-b)(z-d)\psi_2}\,, \qquad f(xy) = 0, \tag{3c}$$

dove ψ_1 e ψ_2 designano due cilindri, per esempio cubici, osculanti f ciascuno secondo due terne di generatrici, non equivalenti.

Riassumendo:

Le superficie ellittiche di generi $p_g = 0$, e $p_a = -1$, ***con curva canonica virtuale d'ordine zero, si distribuiscono in*** 7 ***famiglie rappresentabili colle equazioni*** (1)***a*** e ***b***, (2)***a*** e ***b***, (3)***a***, ***b***, ***c***.

LXXIII.

DES COURBES PARACANONIQUES APPARTENANT À UNE SURFACE ALGÉBRIQUE IRRÉGULIÈRE

« Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège », vol. VIII (1939), pp. 422-423

Soit F une surface algébrique irrégulière de genre numérique $p_a \geqslant 0$ et de genre géométrique $p_g > p_a$. On sait que tout système linéaire de courbes sur F, de dimension virtuelle $\geqslant 0$, est contenu en une série continue de systèmes analogues non équivalents. Il en sera ainsi du système canonique ∞^{p_g-1}: celui ci fera partie d'une série $\infty^{p_g-p_a}$ de systèmes paracanoniques, chacun de dimension > 0. Il s'agit d'évaluer la dimension effective de ces systèmes. On supposera que, le genre linéaire de F étant $p^{(1)} > 1$, *le système canonique* $|K|$ *soit irréductible.*

On peut construire sur F un système linéaire irréductible $|C|$, de genre π et de degré n, de façon à satisfaire aux conditions suivantes:

1) $|C|$ sera régulier de dimension $r = n - \pi + 1 + p_a$, faisant partie d'une série $\infty^{p_g-p_a}$ de systèmes linéaires analogues et ainsi d'un système continu $\{C\}$ ayant la série caractéristique complète de dimension $n - \pi + p_g$;

2) Le système adjoint à $|C|$, c'est-à-dire $|C'| = |C + K|$, sera également régulier de dimension $p_a + \pi - 1$, et découpera sur une courbe canonique K une série complète et non spéciale de dimension

$$2\pi - 2 - n + p^{(1)} - 1 - p^{(1)} = 2\pi - n - 3 .$$

3) A chaque courbe $\bar{C}$ de $\{C\}$ on pourra associer une ou plusieurs, au moins ∞^{p_a}, courbes $\bar{K}$ résiduelles de C par rapport au système linéaire $|C'|$; en particulier à toute courbe $\bar{C}$ infiniment voisine à C on pourra associer une ou plusieurs courbes $\bar{K}$ infiniment voisines à K.

LXXIV.

SUR L'EXTENSION DU THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH AUX SYSTÈMES LINÉAIRES DE COURBES APPARTENANT À UNE SURFACE ALGÉBRIQUE

« Bulletin des Sciences Mathématiques », s. 2ª, to. LXIV (1940), pp. 207-215

1. – On sait que le théorème de RIEMANN-ROCH pour les courbes algébriques permet d'évaluer la dimension r de la série linéaire complète définie par un groupe de n points $\mathcal{G}$ sur une courbe de genre p, on a précisément

$$r = n - p + i\,,$$

$i(\geqslant 0)$ désignant l'index de spécialité du groupe $\mathcal{G}$, c'est-à-dire le nombre des groupes canoniques linéairement indépendants qui renferment $\mathcal{G}$.

Des efforts successifs ont permis d'étendre ce théorème aux surfaces de la manière suivante. D'abord, M. NÖTHER [1], en considérant un système linéaire irréductible $|C|$ de courbes C, tracées sur une surface, a remarqué que les courbes canoniques de celle-ci découpent sur une C des groupes résiduels des groupes appartenant à la série caractéristique, découpée par les autres C. En appliquant le théorème de RIEMANN-ROCH sur cette courbe, il en fut amené à écrire une égalité où figurent: la *dimension* r du système $|C|$, son *degré* n (c'est-à-dire le nombre des intersections de deux C) et le *genre* π des C; on a précisément

$$r = p + n - \pi + 1 - i\,,$$

désignant par p le genre de la surface et par i $(\geqslant 0)$ l'index de spécialité de $|C|$, c'est-à-dire le nombre des courbes canoniques K de la surface dont fait partie une C.

---

(1) *Extension du théorème de* RIEMANN-ROCH *aux surfaces algébriques*, « C. R. Acad. Sciences », 1886.

NÖTHER semble avoir envisagé particulièrement le genre géométrique $p = p_g$ de la surface, que d'ailleurs il supposait coïncider avec le genre numérique p_a pour $p_a \geqslant 0$, et son raisonnement repose sur l'hypothèse sous-entendue que les séries dont on parle (la série caractéristique et celle découpée sur une C par les K) soient complètes pour des systèmes de courbes également complets.

Cette hypothèse n'est pas toujours vraie, pas même pour les surfaces régulières ($p_a = p_g$) en ce qui concerne la série découpée sur C par les K et elle ne subsiste pas non plus pour la série caractéristique, si la surface est irrégulière ($p_a < p_g$). En tenant compte des défauts des séries qui entrent en considération, l'extension aux surfaces du théorème de RIEMANN-ROCH s'exprimera sous forme de l'inégalité suivante

$$r \geqslant p_a + n - \pi + 1 - i;$$

le signe d'égalité vaudra pour les systèmes linéaires *réguliers*, mais ne saurait remplacer dans tous les cas l'inégalité. C'est là le résultat des efforts déployés par MM. ENRIQUES (2) (1893-1896) et CASTELNUOVO (3) (1896-1897), dont les auteurs mêmes ont rendu compte en une Note que MM. PICARD et SIMART ont bien voulu ajouter à leur traité sur la *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (4).

La voie qui amène à ce résultat est la suivante: On commence à évaluer d'abord la dimension du système $|C'|$ *adjoint* à un système $|C|$ de genre π (système qui, dans le cas le plus simple, est défini par la propriété des C' de découper sur les C des groupes canoniques), cette dimension s'exprime au moyen de l'inégalité

$$r \geqslant p_a + \pi - 1,$$

qui sert à définir comme caractère invariant le genre numérique p_a de la surface. De cette formule, on passe à celle où figurent les caractères de $|C'|$ et l'on obtient ainsi l'extension du théorème de RIEMANN-ROCH pour les systèmes adjoints ou pour les systèmes qu'on peut appeler « plus grands » que le système canonique $|K|$, c'est-à-dire qui renferment partiellement ce système.

---

(2) *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, « Memorie Accademia di Torino » (1893) [queste *Memorie*, vol. I, V]; *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche*, « Soc. Ital. delle Scienze, detta dei XL » (1896) [queste *Memorie*, vol. I, XIII].

(3) *Alcuni resultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, « Soc. Ital. delle Scienze, detta dei XL » (1896).

Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie, « Annali di Mat. » (1897).

(4) Gauthier-Villars, I (1897); II (1906).

Pour étendre ce théorème aux systèmes quelconques, spéciaux ou non spéciaux, M. CASTELNUOVO a développé des considérations très ingénieuses par lesquelles il arrive à établir que « le défaut de la série caractéristique d'un système linéaire irréductible $|C|$ est toujours $\leqslant p_g - p_a$ ».

Plus tard, M. SEVERI, en deux Notes de 1903 et 1905 (5) a réussi à simplifier ce procédé en s'attachant d'abord à la série découpée sur les courbes d'un système $|C|$ par le système canonique $|K|$ et en démontrant que cette série est complète pour tout système de courbes C formé par les intersections complètes de la surface donnée (que l'on suppose dépourvue de points multiples propres) et d'une surface d'un ordre s suffisamment élevé. Le lemme de SEVERI figure comme une application directe du théorème de NÖTHER de l'$Af + B\varrho$, étendu aux surfaces.

Si je reviens aujourd'hui sur ces questions, ce n'est pas que je trouve que le procédé dont j'ai parlé laisse quelque chose à désirer au point de vue de la simplicité; mais c'est d'abord que j'attache un certain intérêt au lemme qui joue le rôle principal dans l'ordre des idées nouvelles que j'expose ici, et ensuite qu'il me semble avantageux d'établir la théorie des systèmes linéaires des courbes tracées sur une surface, sous un point de vue unitaire, en passant tout naturellement du cas des systèmes plus grands que le système canonique à celui des systèmes quelconques, même des systèmes qui sont « plus petits » que celui-ci, c'est-à-dire spéciaux.

Le lemme qui, d'après les vues que j'expose ici, vient remplacer celui de SEVERI est le suivant: *Les systèmes petits découpent une série complète sur la courbe générale d'un système linéaire irréductible assez grand, dépourvu de courbes fondamentales.* On se rapporte d'ailleurs à des systèmes linéaires complets, dépourvus de points-base sur la surface. Un système est assez grand par rapport à un autre, s'il renferme un multiple suffisamment élevé de celui-ci ou le multiple d'un système dont celui-ci constitue une partie.

De notre lemme découle comme conséquence immédiate le théorème de RIEMANN-ROCH pour les systèmes $|C|$ quelconque appartenant à une surface algébrique, car on pourra construire $|C|$ par le retranchement d'une courbe D d'un système linéaire

$$|L| = |C + D|,$$

où $|D|$ est un système régulier suffisamment grand et, d'après le lemme, $|C|$ devra découper sur D une série complète qui, ajoutée à la série

(5) *Sulla deficienza della serie caratteristica,* « R. Accad. dei Lincei », 2e sem. 1903. *Sul teorema di* RIEMANN-ROCH ..., « Atti Accad. di Torino » (1905).

caractéristique de D, donnera lieu à une série non spéciale ou spéciale d'index $i > 0$, une C faisant partie de i courbes canoniques K linéairement indépendantes.

2. – Je vais indiquer brièvement une *première démonstration* de mon *lemme*, en supposant d'abord que « $|C|$ soit un système linéaire irréductible, de dimension $\geqslant 2$, dépourvu de points-base et de courbes fondamentales, et $|D|$ un multiple de $|C|$ d'un ordre s suffisamment élevé ».

Je préciserai que la valeur de s doit être assez grande pour que les courbes D de $|D|$, aux quelles on impose de passer par un groupe de la série complète déterminée par les C sur une D, donnent lieu à un système linéaire (simple) de dimension $\geqslant 3$.

Soit $\mathscr{G}$ un groupe de cette série, intersection d'une certaine courbe $\overline{D}$ avec une $C = \overline{C}$, que je veux supposer formée d'un certain nombre m de points, simples et distincts $A_1, \ldots, A_m$. Au moyen de ces courbes D passant par $\mathscr{G}$, on pourra transformer la surface donnée, F, en une surface Φ qui renfermera m droites $a_1, \ldots, a_m$, correspondant aux points de $\mathscr{G}$, et que je pourrai supposer également simples et distinctes: ces droites passeront par un même point O, multiple pour Φ, qui sera l'image de la courbe $\overline{C}$, fondamentale pour le système ∞^3 des D.

Il est aisé de reconnaitre que cette courbe $\overline{C}$, que je puis supposer irréductible, est la seule courbe fondamentale pour notre système ∞^3 des D par $\mathscr{G}$. Car, si l'on admet qu'il y ait une autre courbe fondamentale θ, il faudra d'abord que θ rencontre les courbes du système $|D| = |sC|$, dépourvu de courbes fondamentales en un nombre de points multiple de s et, partant, qu'elle passe par plusieurs points du groupe $\mathscr{G}$, soit par exemple par A_1 et A_2. Or, à θ viendra correspondre sur la surface Φ un point multiple commun aux droites a_1 et a_2, qui ne saurait être distinct de O. Il s'ensuit que la courbe θ, si elle ne coïncide pas avec $\overline{C}$, touche en A_1 et A_2 la $\overline{C}$, et ainsi se trouve connexe avec $\overline{C}$, de sorte que la somme $\overline{C} + \theta$ constitue une courbe fondamentale monovalente pour notre système ∞^3 des D par $\mathscr{G}$. Mais cette conclusion est absurde, parce que la $\overline{C} + \theta$ possède un point double en A_1 (et de même en A_2), ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que les points-base de notre système soient m points simples et distincts (non infiniment voisins entre eux).

Ceci posé, nous allons envisager un groupe Γ, de m points $A_1, \ldots, A_m$ appartenant à la série complète découpée par les C sur $\overline{D}$, dont on ne sait pas *a priori* qu'il est effectivement l'intersection de $\overline{D}$ avec une certaine C; nous pouvons construire un système linéaire (simple) ∞^3 de courbes D passant par Γ et ce système donnera lieu à la transformation de notre surface F en une surface ψ que nous allons étudier de plus près. Il y aura sur ψ m droites $a_1, \ldots, a_m$, correspondant aux points-base du groupe Γ et — puisque Γ peut varier par continuité en tendant à $\mathcal{G}$ — ces droites, come celles de Φ, seront, en général, simples et distinctes.

Comparons sur la surface ψ une courbe C quelconque et le groupe des droites $a = a_1 + \ldots + a_m$; il s'agit de deux courbes découpant des groupes équivalents sur les sections planes de ψ, qui — d'après le théorème, du reste — peuvent être découpées sur ψ par des surfaces ayant une même ligne-base, qui se comportent comme des *adjointes* par rapport à la courbe double de ψ et forment un faisceau linéaire. Le groupe de droites a, envisagé comme limite d'une courbe irréductible de ce faisceau, devra être complété par un ensemble de courbes fondamentales θ, qui, *a priori*, aura pour imagine sur ψ l'ensemble de plusieur courbes infiniment petites, constituant l'entourage de certains points multiples de la surface: c'est par les courbes de θ que s'établira la connexion entre les droites $a_1, \ldots, a_m$.

Or, d'après un théorème connu de KNESER, le groupe des points $A_1, \ldots, A_m$ envisagé sur une courbe D, et appartenant à une série simple au moins ∞^2 sur celle-ci, est susceptible de toutes les permutations du groupe total; en conséquence, il faut que tous les couples de droites $a_1, \ldots, a_m$ sur ψ se comportent également et ainsi que ces droites soient deux à deux incidentes; il s'ensuit qu'elles doivent passer par un même point multiple P de la surface ψ.

Ceci posé, on voit que la courbe fondamentale θ, dont nous avons parlé, est une courbe fondamentale *monovalente* pour le système des courbes D, qui correspond à celui des sections planes de ψ, car elle a, pour image sur ψ, l'entourage de P ou une partie de cet entourage. D'ailleurs, cette courbe θ, envisagée sur la surface donnée F, sera, *a priori*, équivalente à une courbe C ou à une C augmentée d'une autre courbe; en ce dernier cas, θ devrait passer au moins doublement par quelques-uns des points $A_1, \ldots, A_m$, ce qui est absurde étant donné que ces points-base du système des D sont simples et distincts.

Nous venons de reconnaître que par le groupe Γ, qui est un groupe quelconque de la série complète découpée sur une D par les courbes C, il passe toujours une courbe C, ainsi qu'il fallait le démontrer.

3. – Nous venons d'établir le lemme énoncé ci-dessus en supposant que le système « assez grand » $|D|$ soit un multiple d'un ordre s assez élevé du petit système $|C|$.

Mais il n'est pas difficile d'étendre la démonstration au cas où le système irréductible $|D|$ soit plus grand qu'un multiple de $|C|$ ou à celui où il soit multiple d'un système irréductible $|L|$ plus grand que $|C|$, c'est-à-dire au cas où l'on ait

$$|D| = |sL|, \qquad |L| = |B + C|,$$

$|B|$ et $|C|$ pouvant avoir une dimension quelconque en étant irréductibles ou réductibles.

Je me bornerai à indiquer la démonstration du théorème envisagé dans le deuxième cas. Soit $\mathcal{G}$ le groupe de points découpé sur une courbe irréductible D par une B; s étant assez élevé, toutes les courbes L passant par $\mathcal{G}$ contiendront nécessairement comme partie chaque composante de B et, en conséquence, la courbe B; il s'ensuit que les courbes C découperont sur D une série complète. On pourra en dire autant des courbes B.

4. – J'ai déjà indiqué comment l'extension aux surfaces du théorème de Riemann-Roch se déduit du lemme que je viens d'établir et je ne m'arrêterai pas sur cette déduction, que l'on peut considérer comme connue. Pour la même raison, je ne m'arrêterai pas non plus à démontrer le théorème de Castelnuovo qui en découle, d'après lequel le défaut de la série caractéristique d'un système linéaire irréductible complet est $\leqslant p_g - p_a$.

5. – Je préfère indiquer une *seconde démonstration* du *lemme fondamental* qui constitue l'objet de ce Mémoire; cette démonstration atteint le maximum de simplicité; elle a d'ailleurs une signification que je ferai ressortir. Je me placerai dans les hypothèses les plus simples: $|C|$ est un système linéaire irréductible, dépourvu de points-base et de courbes fondamentales sur la surface F (dépourvue elle-même de singularités ou douée d'une simple courbe double avec des points triples, dans l'espace ordinaire); $|D|$ est le système complet multiple de $|C|$ suivant un ordre s, que l'on peut supposer aussi élevé que l'on veut. Je remarque d'abord que la dimension de $|D|$ (dont on connaît tout au moins une limite inférieure) croît avec s, devenant infinie de l'*ordre de* s^2, tandis que, *a priori*, le défaut d de la série caractéristique de

$$|L| = |D + C| = |(s+1)C|$$

reste inférieur à $-p_a$ augmenté de la dimension de la série complète résiduelle déterminée sur une L, par le système canonique $|K|$. Or, le nombre des intersections de $|(s+1)C|$ avec une K est égal à $(s+1)\cdot(2\pi - 2 - n)$, $2\pi - 2 - n$ étant le nombre des intersections de C et K;

partant, la dimension de la série complète (KL) sera en tout cas inférieure à ce nombre. Il s'ensuit que — lors même que le défaut d susnommé pourrait croître et tendre à l'infini avec s — il serait tout au plus de l'ordre de s. Partant, on pourra choisir une valeur de s assez élevée pour que le défaut d de la série caractéristique, découpée sur une L par les autres courbes L, soit inférieur à la dimension du système

$$|D| = |sC|.$$

Ceci posé, considérons un groupe $\mathcal{G}$ de la série complète déterminée sur une L par les courbes C: on pourra toujours lui associer un groupe $\mathcal{G}'$ découpé sur L par une courbe (irréductible) D, tel que $\mathcal{G} + \mathcal{G}'$ appartienne à la série caractéristique de L, c'est-à-dire qu'il constitue le groupe-base d'un faisceau de L. Or, dans ce faisceau, il y aura une courbe L qui contient la courbe fondamentale D passant par $\mathcal{G}'$ et cette courbe se décomposera en D et en une courbe C par $\mathcal{G}$. Ainsi donc, tout groupe $\mathcal{G}$ de la série complète déterminée sur L par les C est l'intersection d'une C; ce qu'il fallait démontrer.

Il n'y aura pas de difficulté à étendre le théorème établi au cas où $|D|$ serait plus grand qu'un multiple de $|C|$ ou multiple d'un système plus grand que $|C|$.

6. – Le raisonnement exposé ci-dessus s'appuie sur une remarque concernant le défaut de la série caractéristique d'un système linéaire de courbes tracées sur notre surface F: pour les systèmes assez grands, ce défaut reste, *a priori*, d'ordre inférieur à la dimension du système. Mais, *a posteriori*, après avoir établi le théorème de RIEMANN-ROCH on en déduit que ce défaut ne saurait dépasser $p_g - p_a$. En conséquence, notre raisonnement permet d'apporter au résultat des précisions remarquables.

Soit $|L| = |C + D|$ la somme de deux systèmes linéaires irréductibles appartenant à la surface F: on pourra affirmer que $|C|$ découpe sur une courbe L une série complète, pourvu que la dimension de $|D|$ dépasse l'irrégularité $p_g - p_a$. Si la même condition est satisfaite pour $|C|$, le système $|D|$ aussi découpera une série complète sur la courbe L.

Or, étant donné un système linéaire irréductible $|C|$, dont la dimension dépasse $p_g - p_a$, on pourra toujours lui associer un système régulier $|D|$ aussi grand que l'on veut, qui soit lui-même l'adjoint d'un système irréductible $|B|$, de sorte que l'on ait

$$|D| = |B + K|.$$

Dans ces conditions, on est en droit d'affirmer que les deux systèmes $|C|$ et $|C+K|$ découpent, sur une courbe L de $|C+D|$, des séries complètes ayant donc les mêmes dimensions que les systèmes eux-mêmes. En même temps, $|D|$ aussi découpe sur L une série complète.

Puisqu'on connaît exactement la dimension de $|D|$, il s'ensuit que celle du système

$$|C'| = |C+K|$$

adjoint à $|C|$ ne saurait dépasser la limite qui est indiquée par l'index de spécialité i de la série résiduelle découpée sur L par $|D|$. En faisant le calcul, on trouve que la dimension de $|C'|$ est exactement

$$p_a + \pi - 1\,,$$

π désignant le genre de $|C|$, c'est-à-dire que le *système* $|C'|$ *est régulier*. En effet, si l'on désigne par m et ϱ le degré et le genre de $|D|$ et par t le nombre des intersections (CD), la dimension du système régulier $|D|$ aura la valeur

$$r = p_a + m - \varrho + 1$$

et r sera de même la dimension de la série complète d'ordre $m+t$ que $|D|$ découpe sur L; mais le genre de L étant

$$\pi + \varrho + t - 1\,,$$

l'index de spécialité de cette même série sera

$$i = r - \{m + t - (\pi + \varrho + t - 1)\} + 1 = p_a + \pi\,.$$

Il s'ensuit que la dimension de $|C'|$ est exactement

$$i - 1 = p_a + \pi - 1\,,$$

c'est-à-dire que le *système* $|C'|$ *adjoint à un système irréductible* $|C|$, *de dimension* $p_g - p_a$, *est régulier*. Cette affirmation rentre dans un théorème extrêmement remarquable que M. E. PICARD a découvert et établi en 1905, par des considérations transcendantes ([6]). Il me semble intéressant que ce théorème se trouve établi ici par une voie tout à fait élémentaire, bien qu'à la faveur d'une restriction (dimension de $|C|$ plus grande que $p_g - p_a$) qui renferme quelque chose de superflu.

([6]) « Journal für Math. » (1905). Cfr. PICARD et SIMART, Traité cité, II, Cap. 13, n° 13, p. 437. Une démonstration algébrico-géométrique du théorème de PICARD fondée sur la propriété des surfaces irrégulières de renfermer des systèmes continus de courbes non équivalentes, a été fournie par M. SEVERI, « Rendiconti Lincei », 2^e sem. 1908.

INDICE DEI NOMI

INDICE ANALITICO

ELENCO CRONOLOGICO DELLE PUBBLICAZIONI DI FEDERIGO ENRIQUES [1]

Sono segnati con un asterisco i trattati e volumi diversi, con due asterischi i libri di testo per le scuole medie.

[1] A cura di L. CAMPEDELLI, A. BARLOTTI e G. MENICHETTI.

1885.

Tavola dei quadrati e dei cubi perfetti interi contenuti in 100000, Pisa, Tip. T. Nistri e C., un fascicolo in 16° di 10 pagine.

1890.

Alcune proprietà dei fasci di omografie negli spazi lineari ad n dimensioni, « Rend. Acc. Lincei », s. IV, vol. 6 (2° sem.), pp. 63-70.

Le omografie cicliche negli spazi ad n dimensioni, « Giorn. Battaglini », vol. 30, pp. 311-318.

Le omografie armoniche negli spazi lineari ad n dimensioni, ibid., pp. 319-325.

1893.

Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane nel piano, « Rend. Acc. Lincei », s. V, vol. 2 (1° sem.), pp. 468-473.
Queste « Memorie », vol. I, I, pp. 1-7.

Sopra un gruppo continuo di trasformazioni di Jonquières nel piano, ibid. (1° sem.), pp. 532-538.
Queste « Memorie », vol. I, II, pp. 9-15.

Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica, ibid. (2° sem.), pp. 3-8.
Queste « Memorie », vol. I, III, pp. 17-22.

Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche, ibid. (2° sem.), pp. 281-287.
Queste « Memorie », vol. I, IV, pp. 23-29.

Sugli spazi pluritangenti delle varietà cubiche generali appartenenti allo spazio di 4 dimensioni, « Giorn. Battaglini », vol. 31, pp. 31-35.

Ricerche di geometria sulle superficie algebriche, « Mem. Acc. Torino », s. II, t. 44, pp. 171-232.
Queste « Memorie », vol. I, V, pp. 31-106.

Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in se stesse, « Atti Ist. Veneto », s. VII, vol. 4, pp. 1590-1635.

1894.

Intorno alla memoria « Le superficie con infinite trasformazioni in se stesse », ibid., s. VII, vol. 5, pp. 638-642.

Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche, « Rend. Acc. Lincei », s. V, vol. 3 (1° sem.), pp. 481-487.
Queste « Memorie », vol. I, VII, Nota I, pp. 125-131.

Ancora sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche, ibid., pp. 536-543.
Queste « Memorie », vol. I, VII, Nota II, pp. 132-139.

Sui fondamenti della geometria proiettiva, « Rend. Ist. Lombardo », s. II, vol. 27, pp. 550-567.
Queste « Memorie », vol. I, VIII, pp. 141-157.

Sulla massima dimensione dei sistemi lineari di curve di dato genere appartenenti ad una superficie algebrica, « Atti Acc. Torino », vol. 29, pp. 173-195.
Queste « Memorie », vol. I, VI, pp. 107-124.

* *Lezioni di Geometria proiettiva* (litog.), I ed. (a cura di C. Pedretti), Bologna, 1893-94, un volume di 214 pagine; II ed. (a cura di G. Serrazanetti), Bologna, 1894-95, un volume di 245 pagine.

* *Lezioni di Geometria descrittiva* (litog.), I ed., Bologna, 1893-94, un volume di 454 pagine; II ed. (a cura di J. Schimaglia), 1894-95, un volume di 108+ +120+VIII pagine.

1895.

Alcune proprietà metriche dei complessi di rette ed in particolare di quelli simmetrici rispetto ad assi (1891), « Ann. della Scuola Norm. sup. di Pisa », vol. 7, pp. 1-55.

Sulle irrazionalità da cui può dipendere la risoluzione di un'equazione algebrica $f(xyz) = 0$, mediante funzioni razionali di due parametri, « Rend. Acc. Lincei », s. V, vol. 4 (2° sem.), pp. 311-316.
Queste « Memorie », vol. I, IX, pp. 163-169.

Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva (Corrispondenza con G. Fano), « Rend. Circ. Mat. Palermo », t. 9, pp. 79-85.
Queste « Memorie », vol. I, VIII, pp. 158-162.

Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche, « Math. Ann. », vol. 46, pp. 179-199.
Queste « Memorie », vol. I, X, pp. 171-191.

Sur les surfaces algébriques admettant un groupe continu de transformations birationelles en elles mêmes (in coll. con G. Castelnuovo), « C. R. Acad. des Sc. Paris », t. 121, pp. 242-244.
Queste « Memorie », vol. I, XI, pp. 193-195.

* *Conferenze di Geometria: fondamenti di una geometria iperspaziale* (litogr.), Bologna, 1894-95, un volume di 136+III pagine.

1896.

Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche, « Rend. Circ. Mat. Palermo », t. 10, pp. 30-35.
Queste « Memorie », vol. I, XV, pp. 321-325.

Sopra le equazioni differenziali lineari del quarto ordine che divengono integrabili quando è noto un loro integrale particolare, « Rend. Ist. Lombardo », s. II, vol. 29, pp. 257-269.
Queste « Memorie », vol. I, XII, pp. 197-209.

Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperlleittiche, « Rend. Acc. Lincei », s. V, vol. 5 (1° sem.), pp. 191-197.
Queste « Memorie », vol. I, XIV, pp. 313-319.

Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche, « Mem. Soc. Ital. d. Scienze (detta dei XL) », s. III, t. 10, pp. 1-81.
Queste « Memorie », vol. I, XIII, pp. 211-312.

Sui piani doppi di genere uno (con una « aggiunta » di G. CASTELNUOVO), ibid., s. III, t. 10, pp. 201-224.
Queste « Memorie », vol. I, XVI, pp. 327-354.

Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algêbriques (in coll. con G. CASTELNUOVO), « Math. Ann. », vol. 48, pp. 241-316.
Queste « Memorie », vol. I, XVII, pp. 355-433.

1897.

Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un'equazione algebrica $f(xyz) = 0$ con funzioni razionali di due parametri, ibid., vol. 49, pp. 1-23.
Queste « Memorie », vol. I, XVIII, pp. 435-459.

Le superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)} = 2$, « Rend. Acc. Lincei », s. V, vol. 6 (1° sem.), pp. 139-144.
Queste « Memorie », vol. I, XIX, pp. 461-467.

Sulle superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)} = 3$, ibid., pp. 169-174.
Queste « Memorie », vol. I, XX, pp. 469-474.

Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio (in coll. con G. FANO), « Ann. di Mat. », s. II, t. 26, pp. 59-99.
Queste « Memorie », vol. I, XXI, pp. 475-512.

1898.

Sulle ipotesi che permettono l'introduzione delle coordinate in una varietà a più dimensioni, « Rend. Circ. Mat. Palermo », t. 12, pp. 222-239.

Sui piani doppi di genere lineare $p^{(1)} = 1$, « Rend. Acc. Lincei », s. V, vol. 7 (1° sem.), Nota I, pp. 234-240; Nota II, pp. 253-257.
Queste « Memorie », vol. I, XXII, Nota I, pp. 513-519; Nota II, pp. 520-525.

Sopra le superficie che posseggono un fascio ellittico o di genere due di curve razionali, ibid. (2° sem.), pp. 281-286.
Queste « Memorie », vol. I, XXIII, pp. 527-532.

Sopra le superficie che posseggono un fascio di curve razionali, ibid. (2° sem.), pp. 344-347.
Queste « Memorie », vol. I, XXIV, pp. 533-536.

Sur les problèmes qui se rapportent à la résolution des équations algébriques renfermant plusieurs inconnues, « Verhandlungen des ersten internat. Math.-Kongresses in Zürich (9-11 Aug. 1897) », Leipzig, Teubner, pp. 145-146.

* *Lezioni di Geometria proiettiva,* I ed., un volume in 8° di IX+379 pagine; II ed. 1904; III ed. 1909; IV ed. 1920; successive ristampe, Bologna, Zanichelli (per la trad. tedesca cfr. 1903, per quella francese cfr. 1930; trad litogr. in inglese).

1899.

Sur les problèmes qui se rapportent à la résolution des équations algébriques renfermant plusieurs inconnues, « Math. Ann. », vol. 51, pp. 134-153.
Queste « Memorie », vol. II, XXV, pp. 1-21.

Una proprietà delle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica regolare, « Rend. Circ. Mat. Palermo », t. 13, pp. 95-98.
Queste « Memorie », vol. II, XXVI, pp. 23-26.

Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali, « Math. Ann. », vol. 52, pp. 449-456.
Queste « Memorie », vol. II, XXVII, pp. 27-35.

Programma del Corso di Geometria Superiore, Università di Bologna, Anno accademico 1897-98, « Boll. di bibliogr. e storia delle Mat. », a II, pp 76-78.
Queste « Memorie », vol. II, XXVIII, pp. 37-39.

1900.

Sur une classe de surfaces algébriques (in coll. con G. Castelnuovo), « C. R. Acad. des Sc. Paris », t. 131, pp. 739-742.
Queste « Memorie », vol. II, XXIX, pp. 41-43.

Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi (in coll. con G. Castelnuovo), « Rend. Circ. Mat. Palermo », t. 14, pp. 290-302.
Queste « Memorie », vol. II, XXX, pp. 45-46.

Sulle equazioni algebriche risolubili per radicali quadratici e sulla costruibilità dei poligoni regolari, in « Questioni riguardanti la Geometria elementare », pp. 353-396; « Fragen der Elementargeometrie », pp. 137-170 (cfr. 1907); « Questioni riguardanti le matematiche elementari », vol. II, II ed., pp. 129-166; p. II, III ed., pp. 263-305. (cfr. 1914 e 1926).

Sull'importanza scientifica e didattica delle questioni che si riferiscono ai principii della geometria, in « Questioni riguardanti la Geometria elementare », pp. 1-31.

[*recens.*] D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie,* « Boll. di bibliogr. e storia delle Mat. », a. III, pp. 3-7.

* *Questioni riguardanti la Geometria elementare,* raccolte e coordinate da F. E., Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di 8+VII+532 pagine, (per la trad. tedesca cfr. 1907 e 1910).

Sul preteso raddrizzamento delle immagini nella visione, « Boll. di Mat. e Sc. fis. e nat. », a. I, pp. 113-114.

1901.

Sur les surfaces algébriques admettant des intégrales de différentielles totales de première espèce, « Ann. de la Fac. des Sc. Toulouse », s. II, vol. 3, pp. 77-84.
Queste « Memorie », vol. II, XXXI, pp. 57-64.

Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche, « Atti Acc. Torino », vol. 37, pp. 19-40.
Queste « Memorie », vol. II, XXXII, pp. 65-83.

Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche (in coll. con G. CASTELNUOVO), « Ann. di Mat. », s. III, t. 6, pp. 165-225.
Queste « Memorie », vol. II, XXXIII, pp. 85-144.

Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria, « Riv. filosofica », a. III, vol. 4, pp. 171-195.
Queste « Memorie », vol. II, XXXIV, pp. 145-161.

Intorno alla seconda soluzione di Laplace del problema dei tre corpi (estratto da una lettera al prof. T. Levi-Civita), « Atti Ist. Veneto », s. VIII, vol. 3, pp. 957-959.

Remarque au sujet d'une Note de M. S. Kantor, « C. R. Acad. des Sc. Paris », t. 132, pp. 248-249.

Relazione sui lavori presentati pel 1° concorso bandito dal « Bollettino » nell'anno 1900, « Boll. di Mat. e Sc. fis. e nat. », a. II, pp. 97-98.

1902.

* *Lezioni di Geometria descrittiva,* a cura di U. CONCINA, I ed., un volume in 8° di XI+421 pagine; II ed. 1908, ristampe varie, Bologna, Zanichelli.

Per ricondurre la filosofia alla scienza (lettera ad A. ORVIETO), « Il Marzocco », a. VII, 19 genn. 1902, pag. 3.

1903.

Sopra le superficie e le varietà a più dimensioni le cui geodetiche sono rappresentabili con equazioni lineari, « Rend. Acc. Bologna », s. nuova, vol. 7, pp. 52-58.

* *Vorlesungen über projektive Geometrie,* trad. H. FLEISCHER, introduz. di F. KLEIN, I ed., un volume in 8° di XIV+378 pagine; II ed. 1915, Leipzig, Teubner.

** *Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori* (in coll. con U. AMALDI), I ed., un volume in 16° di XXII+655 pagine; ediz. successive varie con rielaborazioni diverse, Bologna, Zanichelli.

** *Elementi di Geometria ad uso delle scuole normali* (in coll. con U. AMALDI), I ed., un volume in 16° di VIII+296 pagine; ediz. successive varie presentate come « *Elementi di Geometria*: edizione ridotta », Bologna, Zanichelli.

Estensione e limiti dell'insegnamento della matematica in ciascuno dei due gradi, inferiore e superiore, delle Scuole Medie (in coll. con F. SEVERI ed A. CONTI), « Boll. di Mat. », vol. 2, pp. 50-56.

[*recens.*] *Rapport du Jury international de l'exposition universelle de 1900 à Paris, Introduction générale, Deuxième partie, Science, par* M. EMILE PICARD, « Riv. filosofica », a. V, vol. VI, pp. 139-141.

1904.

Sul gruppo di monodromia delle funzioni algebriche, appartenenti ad una data superficie di Riemann, « Rend. Acc. Lincei », s. V, vol. 13 (1° sem.), pp. 382-384.

Luigi Cremona, « Rend. Acc. Bologna », s. nuova, vol. 8, pp. 37-51.

1905.

Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari, ibid., vol. 9, pp. 5-13.
Queste « Memorie », vol. II, XXXV, pp. 163-168.

Sur les surfaces algébriques irrégulières, « C. R. Acc. des Sc. Paris », t. 140, pp. 133-135.

Sur les surfaces algébriques de genre zéro, ibid., pp. 564-566.

Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero, « Rend. Circ. Mat. Palermo », t. 20, pp. 1-33.
Queste « Memorie », vol. II, XXXVI, pp. 169-204

Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in se stesse, ibid , t. 20, pp. 61-72.
Queste « Memorie », vol. II, XXXVII, pp. 205-216.

1906.

Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali, « Rend. Acc. Lincei », s. V, vol. 15 (2° sem.), pp. 665-669.
Queste « Memorie », vol. II, XL, pp. 273-277.

Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions (in coll. con G. Castelnuovo), « Ann. de l'École norm. sup. », t. 23, pp. 339-366.
Queste « Memorie », vol. II, XXXVIII, pp. 217-240.

Sur quelques résultats nouveaux dans la théorie des surfaces algébriques, in appendice al trattato di E. Picard e G. Simart: « Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes », t. II, Paris, Gauthier-Villars.

Sui principii della meccanica, « Rend. Acc. Bologna », s. nuova, vol. 10, pp. 48-53.

* *Problemi della Scienza,* I ed., un volume in 8° di IV+593 pagine; II ed. 1908, rist. 1926, Bologna, Zanichelli, (per la trad. tedesca cfr. 1910, per quella inglese cfr. 1914, per la francese cfr. 1909 e 1912).

L'ordinamento dell'Università in rapporto alla filosofia, « Atti I Conv. Soc. filosofica ital. », pp. 37-42.

Sulla preparazione degli insegnanti di scienze: relazione, « Atti V Cong. degli Insegnanti di scuole medie », Bologna.

1907.

Sopra le superficie algebriche di bigenere uno, « Mem. Soc. ital. d. Scienze (detta dei XL) », s. III, t. 14, pp. 327-352.
Queste « Memorie », vol. II, XXXIX, pp. 241-272.

Einige allgemeine Bemerkungen über die geometrischen Aufgaben, in « Fragen der Elementargeometrie », vol. II, pp. 327-348.

Intorno alle superficie iperellittiche (in coll. con F. SEVERI), « Rend. Acc. Lincei », s. V, vol. 16 (1° sem.), pp. 443-453.
Queste « Memorie », vol. II, XLII, pp. 283-294.

Intorno alle superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)} = 1$, « Rend. Acc. Bologna », s. nuova, vol. 11, pp. 11-15.
Queste « Memorie », vol. II, XLI, pp. 279-282.

Prinzipien der Geometrie, « Encyklop. d. math. Wissensch. », III, 1, Heft. 1, 1, pp. 1-129 (per la trad. francese cfr. 1911).

* *Fragen der Elementargeometrie*, Gesammelt und zusammengestellt von F. E. - II Teil, *Die Geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit*, trad. H. FLEISCHER, I ed., un volume in 8° di XII+348 pagine; II ed. 1922, Leipzig, Teubner.

La scienza eterodossa e la sua funzione sociale, « Scientia », vol. 1, pp. 323-328.

[*recens.*] V. PARETO, *Manuale di economia politica con una introduzione alla scienza sociale*, ibid., vol. 1, pp. 350-352.

Le principe d'inertie et les dynamiques non-newtoniennes, ibid., vol. 2, pp. 21-34.

[*recens.*] H. HOFFDING, *Histoire de la Philosophie moderne*, ibid., vol. 2, pp. 187-190.

[*recens.*] A. REY, *La théorie de la Physique chez les physiciens contemporains*, ibid., vol 2, pp. 375-377.

1908.

Intorno alle superficie iperellittiche irregolari (in coll. con F. SEVERI), « Rend. Acc. Lincei », s. V, vol. 17 (1° sem.), pp. 4-9.
Queste « Memorie », vol. II, XLIII, pp. 295-301.

Sui moduli delle superficie algebriche, ibid., pp. 690-694.
Queste « Memorie », vol. II, XLV, pp. 307-312.

Un'osservazione relativa alle superficie di bigenere uno, « Rend. Acc. Bologna », s. nuova, vol. 12, pp. 40-45.
Queste « Memorie », vol. II, XLIV, pp. 303-306.

Grundeigenschaften der algebraischen Flächen (in coll. con G. CASTELNUOVO), « Encyklop. d. math. Wissensch. », III, 2, Heft. 6, 6a, pp. 635-768.

Matematiche e filosofia, « Rassegna contemporanea », a. I, pp. 85-89; « Atti del IV Congr. int. dei Mat., Roma, aprile 1908 », vol. III, Roma, 1909, pp. 373-376.

Il valore della scienza, discorso inaugurale dell'anno accad. 1907-1908 alla Università di Bologna, « Annuario dell'Univ. di Bologna », 1907-1908, pp. 29-55; « Rassegna contemporanea », a. II, 1909, pp. 107-119.

Il rinascimento filosofico nella scienza contemporanea, discorso inaugurale del II Congresso della Soc. filosofica ital., a Parma, in « Questioni filosofiche », Bologna-Modena, Formiggini, pp. 1-6.

Il valore della scienza, ibid., pp. 61-65.

Relazione del Presidente della Soc. filosofica ital. al II Congr., ibid.

La riforma dell'Università italiana, « Scientia », vol. 3, pp. 362-372.

L'Università italiana: critica degli ordinamenti in vigore, ibid., vol. 3, pp. 133-147.

Un caso d'indeterminazione nella meccanica ibid., vol. 4, pp. 164-166.

[*recens.*] GALLETTI e SALVEMINI, *La riforma della scuola media*, ibid., vol. 4, pp. 192-194.

[*recens.*] C. GINI, *Il sesso dal punto di vista statistico*, ibid., vol. 4, pp. 386-387.

1909.

Le superficie di genere uno, « Rend. Acc. Bologna », s. nuova, vol. 13, pp. 25-28.
Queste « Memorie », vol. II, XLVI, pp. 313-315.

Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques (in coll. con F. SEVERI), p. I, « Acta Math. », vol. 32, pp. 283-392.
Queste « Memorie », vol. II, XLVII, pp. 317-431.

** *Elementi di Geometria ad uso delle scuole tecniche* (in coll. con U. AMALDI), I ed., un volume in 16° di VII+254 pagine; ediz. successive varie, Bologna, Zanichelli.

La valeur de la Science, « Revue du Mois », vol. 4.

Il principio di ragion sufficiente nella costruzione scientifica, « Scientia », vol. 5, pp. 1-20.

Razionalismo e storicismo, ibid., vol. 5, pp. 350-372.

[*recens.*] E. BOUTY, *La Vérité Scientifique; sa peursuite*, ibid., vol. 5, pp. 381-382.

La teoria dello Stato e il sistema rappresentativo, ibid., vol. 6, pp. 148-179.

Les deux écoles italiennes de droit penal, ibid., vol. 6, pp. 372-374.

* *Les problèmes de la Science et de la Logique*, Trad. J. DUBOIS, Paris, Alcan, un volume in 8° di 256 pagine, tradotto in russo da A. BATSCHINSKI e G. G. SPETT, Mosca, Kosmos, 1910.

1910.

Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno, « Rend. Acc. Bologna », s. nuova, vol. 14, pp. 71-75.
Queste « Memorie », vol. II, XLVIII, pp. 519-522.

Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques (in coll. con F. SEVERI), p. II, «Acta Math. », vol. 33, pp. 321-403.
Queste « Memorie », vol. II, XLVII, pp. 431-518.

Über die philosophische Bedeutung der Fragen die sich auf die Grundlagen der Geometrie beziehen, in « Fragen der Elementargeometrie », vol. I, pp. 1-19.

Bemerkungen zum Unterricht in der wissenschaftlichen Geometrie, ibid., pp. 20-37.

* *Fragen der Elementargeometrie*, Gesammelt und zusammengestellt von F. E. - I Teil: *Die Grundlagen der Geometrie*, trad. H. THIEME, Leipzig, Teubner, un volume in 8° di X+366 pagine.

** *Nozioni di geometria ad uso delle scuole complementari* (in coll. con U. AMALDI), I ed. un volume in 16° di VII+195 pagine; ediz. successive varie, Bologna, Zanichelli.

** *Nozioni di geometria ad uso dei ginnasi inferiori* (in coll. con U. AMALDI), I ed., un volume in 16° di 158 pagine; ediz. successive varie rielaborate, Bologna, Zanichelli.

La metafisica di Hegel considerata da un punto di vista scientifico, « Riv. di Filosofia », a. II, pp. 56-75.

La métaphysique de Hegel considerée d'un point de vue scientifique, « Revue de Métaphysique et de Morale », vol. 18, pp. 1-24.

La filosofia positiva e la classificazione delle scienze, « Scientia », vol. 7, pp. 369-385.

Il pragmatismo, ibid., vol. 8, pp. 146-164.

[*recens.*] H. BOUASSE, *Bachot et bachotage* (Étude sur l'enseignement en France), ibid., vol. 8, pp. 201-202.

* *Probleme der Wissenschaft* - 1, *Wirklichkeit und Logik* - 2, *Die Grundbegriffe der Wissenschaft,* trad. K. GRELLING, Leipzig, Teubner, due volumi in 8° di X+272 e VI+340 pagine.

1911.

Sulla definizione del continuo lineare, « Rend. Acc. Bologna », s. nuova, vol. 15, pp. 39-43.

Sui numeri non archimedei e su alcune loro interpretazioni, « Boll. della Mathesis », a. III, pp. 87-105.

Principes de la Géométrie, « Encyclopédie des Sciences Math. », III, pp. 1-147.
Queste « Memorie », vol. III, XLIX, pp. 1-147.

I numeri e l'infinito, « Scientia », vol. 9, pp. 1-24.

Il problema della realtà, discorso inaugurale del IV Congresso internaz. di Filosofia, « Atti del IV Congr. internaz. di Filosofia », vol. I, pp. 5-20; « Scientia », vol. 9, pp. 257-274.

La philosophie de Giovanni Vailati, « Scientia », vol. 10, pp. 171-174.

La filosofia italiana al Congresso di Bologna, « Riv. di Filosofia », a. III, pp. 361-366 e [Nota], pag. 588.

Mettiamo le cose a posto, ibid., a. III, pp. 582-584.

Esiste un sistema filosofico di Benedetto Croce?, « Rassegna contemporanea », a. IV, pp. 405-418.

Intervento a proposito dell'inchiesta sulla riforma universitaria promossa dalla « Rassegna contemporanea », ibid., pp, 308-311.

[*recens.*] W. JAMES, *Philosophie de l'expérience,* « Scientia », vol. 9, pp. 226-228.

Che cosa è la Filosofia? [sunto di conferenza], « Atti della Soc. ital. Progr. Scienze », riun. V, Roma, S.I.P.S., pp. 119-123.

1912.

Sulle superficie algebriche con un fascio di curve ellittiche, « Rend. Acc. Lincei », s. V, vol. 21 (1° sem.), pp. 14-17.
Queste « Memorie », vol. III, L, pp. 149-152.

Sopra una involuzione non razionale dello spazio, ibid., pp. 81-83.
Queste « Memorie », vol. III, LI, pp. 153-155.

Sui moduli di una classe di superficie algebriche e sul teorema d'esistenza per le funzioni algebriche di due variabili, « Atti Acc. Torino », t. 47, pp. 300-307. Queste « Memorie », vol. III, LII, pp. 157-164.

Sur le théorème d'existence pour les fonctions algébriques de deux variables indépendentes, « C. R. Acad. des Sc. Paris », t. 154, pp. 418-421.

Alcune osservazioni intorno alle superficie razionali reali, « Rend. Acc. Bologna », s. nuova, vol. 16, pp. 70-73.
Queste « Memorie », vol. III, LIII, pp. 165-167.

Sull'importanza filosofica delle questioni che si riferiscono ai principii della geometria, in « Questioni riguardanti le matematiche elementari », vol. I, II ed., pp. 1-18.

Sull'insegnamento della Geometria razionale, ibid., vol. I, II ed., pp. 19-35.

I numeri reali, ibid., vol. I, II ed., pp. 365-493; p. I, vol. I, III ed. (1924), pp. 231-389

* *Questioni riguardanti le matematiche elementari,* raccolte e coordinate da F. E., vol. I: *Critica dei principii,* II ed., Bologna, Zanichelli, un volume in 16° di VI+650 pagine (per la trad. spagnola cfr. 1921).

Matematiche e teoria della conoscenza, « Scientia », vol. 11, pp. 1-17, trad. russa « Kagans Bote », n. 502, pp. 265-278.

Il significato della critica dei principii nello sviluppo delle matematiche, « Scientia », vol. 12, pp. 172-191; « Proceedings of the fifth international Congress of Mathematiciens (Cambridge, 22-28 august 1912) », vol. I, pp. 67-79, Cambridge, University Press, 1913.

Risposta a Benedetto Croce, « Riv. di Filosofia », a. IV, pp. 294-297.

Die Probleme der Logik, « Encyklop. d. phil. Wissensch. » di WINDELBAND e RUGE, t. I, pp. 219-242.

* *Scienza e razionalismo,* Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di XV+302 pagine.

* *Les concepts fondamentaux de la Science. Leur signification réelle et leur acquisition psychologique,* trad. L. ROUGIER, Paris, Flammarion, un volume in 8° di 315 pagine.

1913.

Sulla teoria geometrica degli immaginari, « Rend. Acc. Bologna », s. nuova, vol. 17, pp. 69-72.

Intorno alla risoluzione razionale di una classe di equazioni algebriche fra quattro variabili, « Ann. di Mat. », s. III, t. 20, pp. 109-111.
Queste « Memorie », vol. III, LIV, pp. 169-171.

Il salto dalla teoria della conoscenza all'idealismo metafisico, « Riv. di Filosofia », a. V, pp. 95-97.

[*recens.*] G. LE BON, *La Révolution Française et la psycologie des révolutions,* « Scientia », vol. 13, pp. 456-458.

1914.

Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare $p^{(1)} = 1$, « Rend. Acc. Lincei », s. V, vol. 23 (1° sem.), Nota I, pp. 206-214; Nota II, pp. 291-297.
Queste « Memorie », vol. III, LV, Nota I, pp. 173-182; Nota II, pp. 183-190.

Sul teorema d'invarianza della serie canonica g_{2p-2}^{p-1} appartenente ad una curva algebrica di genere p, « Mem. Acc. Bologna », s. VII, t. I, pp. 81-85.
Queste « Memorie », vol. III, LVI, pp. 191-196.

Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus (in coll. con G. CASTELNUOVO), « Encyklop. d. math. Wissensch. », III, 2, Heft 6, 6b, pp. 674-768.
Queste « Memorie », vol. III, LVII, pp. 197-296.

Alcune osservazioni generali sui problemi geometrici, in « Questioni riguardanti le matematiche elementari », vol. II, II ed., pp. 337-357; p. II, III ed. (1926), pp. 575-596.

Massimi e minimi nell'analisi moderna, ibid., vol. II, II ed., pp. 641-798; p. III, III ed. (1927), pp. 311-471.

[*recens.*] *Opere matematiche di Luigi Cremona, t. I*, « Ann. di Mat. », s. III, t. 22, pp. 327-330.

* *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, raccolte e coordinate da F. E., vol. II: *Problemi classici della Geometria. Numeri primi e analisi indeterminata. Massimi e minimi*, II ed., Bologna, Zanichelli, un volume in 16° di VI+812 pagine (per la trad. spagnola cfr. 1921).

** *Nozioni di matematica ad uso dei licei moderni* (in coll. con U. AMALDI), vol. I, Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di VI+235 pagine.

* *Problems of Science*, trad. K. ROYCE, con prefaz. di J. ROYCE, London a. Chicago, Open Court Co., un volume in 8° di XVI+392 pagine.

Un convegno di matematici e di filosofi, « Il Marzocco », a. XIX, 8 marzo 1914, pag. 2.

I problemi della logica, « Enciclop. delle scienze filosofiche », I: Logica, pp. 207-229.

1915.

Sulle intersezioni di due varietà algebriche, « Rend. Acc. Bologna », s. nuova, vol. 19, pp. 90-92.
Queste « Memorie », vol. III, LVIII, pp. 297-298.

[*recens.*] *Opere matematiche di Luigi Cremona, t. II*, « Ann. di Mat. », s. III, t. 24, pp. 157-158,

* *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* (in coll. con O. CHISINI), vol. I, I ed., un volume in 8° di XIV+398 pagine; nuova ristampa 1929, Bologna, Zanichelli.

** *Nozioni di matematica ad uso dei licei moderni* (in coll. con U. AMALDI), vol. II, Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di 262 pagine + 4 tavole fuori testo.

La connaissance historique et la connaissance scientifique dans la critique de E. De Michelis. « Scientia », vol. 17, pp. 458-460.

Réflexions sur l'art d'écrire un traité: à propos d'un traité de mathématiques ibid., vol. 18, pp. 152-155.

1916.

Sulla teoria delle singolarità delle curve algebriche, « Rend. Acc. Lincei », s. V, vol. 25 (1° sem.), pp. 607-613.
Queste « Memorie », vol. III, LIX, pp. 299-306.

L'intorno di una curva sopra una superficie algebrica, « Rend. Acc. Bologna », s. nuova, vol. 20, pp. 109-112.

** *Zasady Gieometrji Elementarnej do użytku szkół średnich*, trad. W. L. WOJTOWICZ, Varsavia, Leopoli.

1917.

Sui rami delle curve algebriche gobbe nell'intorno di un punto singolare, « Rend. Acc. Lincei », s. V, vol. 26 (1° sem.), pp. 415-420.

Sulla teoria delle omografie iperspaziali, ibid. (1° sem.), pp. 629-631.
Queste « Memorie », vol. III, LX, pp. 307-309,

Sull'analisi delle singolarità puntuali delle superficie algebriche mediante divisioni di polinomi, ibid. (2° sem.), pp. 35-43.

Osservazioni sulle falde d'una superficie algebrica nell'intorno di un punto singolare, « Rend. Acc. Bologna », s. nuova, vol. 21, pp. 102-107.

[*recens.*] *Opere matematiche di Luigi Cremona, t. III*, « Ann. di Mat. », s. III, t. 26, pp. 225-226.

Sur quelques questions soulevées par l'infini mathématique, « Revue de Métaphisique et de Morale », t. 24, pp. 149-164.

1918.

* *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* (in coll. con O. CHISINI), vol. II, un volume in 8° di 714 pagine, Bologna, Zanichelli.

* *Conferenze sulla Geometria non-euclidea*, a cura di O. FERNANDEZ, Bologna, Zanichelli, un fascicolo in 8° di 46 pagine.

* *Conferencias de Geometría No-Euclidea*, recogidas y ordenadas por el Dr. O. FERNANDEZ BAÑOS, Valladolid, Imp. Castellana, un fascicolo in 8° di 47 pagine.

Sulla teoria della materia e sulle origini della meccanica in Democrito d'Abdera « Rend. Acc. Bologna », s. nuova, vol. 22, pp. 106-110.

Il concetto della Logica dimostrativa secondo Aristotele, « Riv. di Filosofia », a. X, pp. 16-22.

Sopra un passo del Timeo, ibid., pp. 51-52.

1919.

Questioni numerative e loro significato nella geometria sopra le curve algebriche, « Rend. Acc. Lincei », s. V, vol. 28 (1° sem.), pp. 370-374.
Queste « Memorie », vol. III, LXI, pp. 311-315.

Sulle curve canoniche di genere p dello spazio a $p-1$ dimensioni, « Rend. Acc. Bologna », s. nuova, vol. 23, pp. 80-82.
Queste « Memorie », vol. III, LXII, pp. 317-318.

Sul procedimento di riduzione all'assurdo, « Boll. della Mathesis », a. XI, pp. 6-14.

Nota alla lettera del prof. G. Loria: Come venne scoperto il teorema di Pitagora?, ibid., pp. 127-128.

1920.

Sul gruppo proiettivo delle curve ellittiche normali e su certi fasci sizigetici di queste curve, « Rend. Acc. Bologna », s. nuova, vol. 24, pp. 91-95.
Queste « Memorie », vol. III, LXIII, pp. 319-321.

Il valore delle Matematiche nella Filosofia italica [Sunto di conferenza], « Boll. della Mathesis », a. XII, pp. 4-7.

La evolucion del concepto de la geometria y la escuela italiana durante los ultimos cincuenta años, « Rev. mat. Hispano-americana », t. 2, pp. 1-17.

Democrito e le origini della meccanica, «Atti della Soc. ital. Progr. Scienze », riun. X, Pisa, aprile 1919, Roma, S.I.P.S., pag. 476.

La teoria democritea della scienza nei dialoghi di Platone, « Riv. di Filosofia », a. XII, pp. 14-24.

Razionalismo e misticismo, ibid., pp. 325-331.

1921.

Sul teorema d'esistenza per le funzioni algebriche, « Rend. Acc. Bologna », s. nuova, vol. 25, pp. 89-91.
Queste « Memorie », vol. III, LXIV, pp. 323-324.

Noterelle di logica matematica, « Periodico di Mat. », s. IV, vol. I, pp. 233-244.

Polemica logico-matematica, ibid., pp. 360-365.

L'oeuvre mathématique de Klein, « Scientia », vol. 30, pp. 393-396.

[*recens.*] W. HALLOK a. H. WADE, *Outlines of the Evolution of Weights and Measures and the Metric System,* « Periodico di Mat. », s. IV, vol. I, pag. 61.

[*recens.*] H. SIMON, *Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX Jahrhundert,* ibid., pp. 61-62.

[*recens.*] H. G. ZEUTHEN, *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et dans le moyen âge,* ibid., pag. 62.

[*recens.*] T. L. HEATH, *The thirteen Books of Euclids Elements,* ibid., pag. 212.

[*recens.*] W. LOREY, *Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19 Jahrhunderts,* ibid., pag. 286.

* *Questiones relativas a la Matematica Elemental,* trad. per conto della « Revista Hispano-americana », Valladolid.

Insegnamento dinamico, « Periodico di Mat. », s. IV, vol. I, pp. 6-16; riprodotto parzialmente in « Archimede », a. VIII (1956), pp. 109-112.

La relatività del movimento nell'antica Grecia, ibid., pp. 77-94; riprodotto in « A. KOPFF, *I fondamenti della Relatività Einsteiniana* (ed. ital. a cura di R. CONTU e T. BEMBO) », Milano, U. Hoepli (1923), pp. 385-400.

La lingua internazionale, ibid., pp. 371-373.

Le conferenze di Alberto Einstein a Bologna, parole di presentazione, « Riv. di Filosofia », a. XIII, pp. 271-274.

La théorie kantienne des jugements a priori par rapport au-développement historique de la science contemporaine, « Soc. franc. de Phil. ».

[*recens.*] C. CIAMBERLINI, *Saggi di didattica matematica,* « Periodico di Mat. », s. IV, vol. 1, pp. 122-124.

1922.

Il principio di degenerazione e la geometria sopra le curve algebriche, « Math. Ann. », vol. 85, pp. 195-199.
Queste « Memorie », vol. III, LXV, pp. 325-330.

Sulle equazioni algebriche $f(x, y) = 0$ che si risolvono parametricamente mediante due polinomi, « Rend. Acc. Bologna », s. nuova, vol. 26, pp. 137-139.

Il positivismo e la critica degli assiomi dell'uguaglianza, « Periodico di Mat. », s. IV, vol. 2, pp. 185-187.

Sull'interpolazione nell'uso delle tavole dei logaritmi e delle funzioni trigonometriche, ibid., pp. 280-282.

Conservazione e progresso nelle matematiche, ibid., pp. 483-486.

[*recens.*] T. L. HEAT, *A History of Greeck Mathematics*, ibid., pp. 183-184.

[*recens.*] W. LIETZMANN, *Der Pytagoreische Lehrsatz*, ibid., pag. 184.

[*recens.*] F. KLEIN, *Gesammelte mathematische Werke, Bd. I*, ibid., pag. 184.

[*recens.*] H. WIELEITNER, *Der Begriff der Zahl in seiner logischen und historischen Entwicklung*, ibid., pag. 482.

Einstein e l'interpretazione subiettiva della Scienza, ibid., pp. 77-80.

Le venerabili proprietà della materia, ibid., pp. 117-125.

* *Per la storia della logica. I principii e l'ordine della scienza nel concetto dei pensatori matematici*, Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di 302 pagine (per la trad. francese cfr. 1925, per quella tedesca cfr. 1927, per la inglese cfr. 1929).

1923.

Sui fondamenti dell'aritmetica e sul principio dell'invarianza del numero, « Rend. Acc. Lincei », s. V, vol. 32 (2° sem.), pp. 113-117.
Queste « Memorie », vol. III, LXVI, pp. 331-335.

La polemica eleatica per il concetto razionale della geometria, « Periodico di Mat. », s. IV, vol. 3, pp. 73-88.

[*recens.*] F. KLEIN, *Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. II*, ibid., pag. 55.

[*recens.*] S. PINCHERLE, *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche*, ibid., pp. 134-135.

[*recens.*] R. C. ARCHIBALD, *The training of Teacher of Mathematics for the Countries represented in the international Commission on the Teaching of Mathematics*, ibid., pp. 244-245.

[*recens.*] G. LORIA, *Guida allo studio della storia delle matematiche*, ibid., pp. 245-246.

1924.

Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione, « Ann. di Mat. », s. IV, vol. I, pp. 185-198.
Queste « Memorie », vol. III, LXVII, pp. 337-351.

Sulle singolarità algebriche, « Rend. Seminario mat. Univ. Roma », s. II, vol. 1, pp. 31-37.

Sur la théorie des équations et des fonctions algébriques d'après l'école géométrique italienne, « Enseignement math. », a. XXIII, pp. 309-322.

Sur la classification des surfaces algébriques au point de vue des transformations birationnelles, « Bull. Soc. math. de France », vol. 52, pp. 602-609.

L'evoluzione delle idee geometriche nel pensiero greco: punto, linea, superficie in « Questioni riguardanti le matematiche elementari », p. I, vol. I, III ed., pp. 1-40, (per la trad. francese cfr. 1927).

I numeri reali, ibid., p. I, vol. I, III ed., pp. 231-389.

[*recens.*] F. KLEIN, *Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. III,* « Periodico di Mat. », s. IV, vol. 4, pp. 74-75.

[*recens.*] A. LA BARBERA, *I numeri reali: calcolo dei radicali e dei logaritmi,* ibid., pag. 75.

* *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* (in coll. con O. CHISINI), vol. III, Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di 594 pagine.

* *Questioni riguardanti le matematiche elementari,* raccolte e coordinate da F. E., parte I: *Critica dei principii,* vol. I, III ed. Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di VIII+398 pagine.

Introduzione e note alla traduzione di L. HEIBERG: *Matematiche, scienze naturali e medicina nell'antichità classica,* Roma, Stock.

La signification et l'importance de l'histoire de la science et l'oeuvre de Paul Tannery, « Revue de Métaphisique et de Morale », t. 31, pp. 425-434, riprodotto come introduzione al volume di P. TANNERY, « Pour l'histoire de la science hellène », II ed., Paris, 1930.

Il significato umanistico della scienza nella cultura nazionale, « Periodico di Mat. », s. IV, vol. 4, pp. 1-6.

1925.

Questione proposta n. 93, ibid., vol. 5, pag. 46.

[*recens*] G. LORIA, *Curve sghembe speciali, algebriche e trascendenti, vol. I: Curve algebriche,* ibid., vol 5, pp. 363-364.

* *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna,* editi da F. E. col concorso di diversi collaboratori, libri I-IV, Roma, Stock, poi Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di 325 pagine (per la trad. spagnola cfr. 1954).

* *Questioni riguardanti le matematiche elementari,* raccolte e coordinate da F. E., parte I: *Critica dei principii,* vol. II, III ed. Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di 466 pagine.

Prefazione, introduzione e note critiche (con la coll. di U. FORTI) *sullo sviluppo dei concetti della meccanica,* in I. NEWTON, « Principii di Filosofia naturale, teoria della gravitazione », Roma, Stock, poi Bologna, Zanichelli.

Spazio e tempo davanti alla critica moderna, in « Questioni riguardanti le matematiche elementari », p. I, vol. II, III ed., pp. 429-459.

Le teorie sulla forma della terra nell'antica Grecia, « Rend. Seminario mat. Univ. Roma », s. II, vol. 2, pp. 17-20.

[*recens.*] A. MIELI, *Manuale di storia della scienza,* « Periodico di Mat. », s. IV, vol. 5, pp. 361-363.

* *L'évolution de la logique,* trad. G. E. MONOD-HERZEN, Paris, Chiron, un volume di 204 pagine.

Max Noether (in coll. con G. CASTELNUOVO e F. SEVERI), « Math. Ann. », vol. **93**, pp. 161-181.

1926.

Il cerchio, articolo di prova per l'« Enciclopedia italiana », « Periodico di Mat. », s. IV, vol. 6, pp. 26-38; « Enciclop. ital. », vol. 9, 1931, pp. 781-783.

* *Courbes et fonctions algébriques d'une variable* (in coll. con O. CHISINI), trad. M. LEGAUT, Paris, Gauthier-Villars.

* *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, raccolte e coordinate da F. E., parte II: *I problemi classici della geometria e le equazioni algebriche*, III ed. Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di 606 pagine.

Alcune osservazioni generali sui problemi geometrici, ibid., p. II, III ed., pp. 575-596.

** *Elementi di Geometria ad uso delle scuole complementari* (in coll. con U. AMALDI), Bologna, Zanichelli, un volume in 16° di VIII+196 pagine.

Continuity and discontinuity of Sciences, relazione al Congresso internazionale di Filosofia di Cambridge, Mass.

L'Italia nella collaborazione universale della cultura, « Nuova Antologia », s. VII, vol. CCXLVII, pp. 129-134.

Prefazione a E. RUFINI: *Il « Metodo » di Archimede*, Roma, Stock, poi Bologna, Zanichelli.

Il problema della forma della terra nell'antica Grecia, « Periodico di Mat. », s. IV, vol. 6, pp. 73-98, e in A. CLAIRAUT, « La teoria della forma della terra », a cura di M. LOMBARDINI, Bologna, Zanichelli (1928), pp. 215-240.

1927.

Sull'immaginario in geometria, p. I e II, « Periodico di Mat. », s. IV, vol. 7, pp. 140-153 e pp. 231-240.

La teoria matematica della lotta per l'esistenza secondo Vito Volterra, ibid., pp. 111-113.

Questioni proposte nn. 144, 145, 150, ibid., pag. 205 e pag. 269.

La géométrie non-euclidienne et la théorie de la connaissance, nel volume « In memoriam N. Lobaschewsky », Kazan.

* *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, raccolte e coordinate da F. E., parte III: *Numeri primi e analisi indeterminata. Massimi e minimi*, III ed., Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di 492 pagine.

Massimi e minimi nell'Analisi moderna, in « Questioni riguardanti le matematiche elementari », p. III, III ed., pp. 311-471.

* *L'évolution des idées géométriques dans la pensée Grecque: point, ligne, surface*, trad. M. SOLOVINE, Paris, Gauthier-Villars, un fascicolo in 8° di VIII+48 pagine.

La definizione come problema scientifico, « Periodico di Mat. », s. IV, vol. 7, pp. 73-82.

[*recens.*] « *Les Maîtres de la pensée scientifique* », a cura di M. SOLOVINE, ibid., pag. 109.

[*recens.*] « *Science et civilisation* », a cura di M. SOLOVINE, ibid., pp. 109-110.

* *Zur Geschichte der Logik. Grundlagen und Aufbau der Wissenschaft im Urteil der mathematischen Denker*, trad. L. BIEBERBACH, Leipzig, Teubner, un volume di V+240 pagine.

Lettera aperta a S. E. il Ministro della Pubblica Istruzione (per il Comitato scientifico dell'Ist. naz. per la Storia della Scienza), « Periodico di Mat. », s. IV, vol. 7, pp. 351-354.

1928.

Gli studi matematici (Arti e studi in Italia nell'ultimo venticinquennio), « Leonardo », a. IV, pp. 132-141.

La riforma Gentile e l'insegnamento della Matematica e della Fisica nella Scuola media, « Periodico di Mat. », s. IV, vol. 8, pp. 68-73.

Questioni proposte n. 159 e n. 160, ibid., pag. 76.

[*recens.*] E. BERTINI, *Complementi di Geometria proiettiva,* ibid., pag. 75.

[*recens.*] L. OLSCHKI, *Galilei und seine Zeit,* ibid., pag. 121.

1929.

Abeliano, « Enciclop. Ital. », vol. 1, pag. 57.

Alessandria: le scienze fisico-matematiche, ibid., vol. 2, pag. 311.

Analisi, ibid., vol. 3, pag. 86.

Angolo (*Geometria,* §§ 1, 2, 3), ibid., vol. 3, pp. 335-336.

** *Elementos de Geometría* (in coll. con U. AMALDI), trad. F. LA MENZA, Buenos Aires.

** *Nociones intuitivas de Geometría* (in coll. con U. AMALDI), trad. F. D. JAIME, Buenos Aires.

Les modifications essentielles de l'enseignement mathématique dans les principaux pays depuis 1910 (in coll. con H. FEHR, A. CHATELET, S. GAGULIN), « Enseignement math. », vol. 28.

Über die Geschichte des wissenschaftlichen Denkens bei den Griechen, « Nachr. Hochschulges. Giessen », vol. 7, pp. 15-27.

Ansichten über die Entwicklung der griechischen Wissenschaft, « Abhandlungen aus dem Math. Seminär der Hamburgischen Univ. », vol. 7, pp. 70-81.

* *The historic development of logic: the principles and structure of science in the conception of mathematicals thinkers,* trad. J. ROSENTHAL, New York, H. Holt, un volume di 282 pagine.

1930.

Sopra le superficie algebriche trasformabili in rigate, « Rend. Acc. Lincei », s. VI, vol. 12, pp. 3-6.
Queste « Memorie », vol. III, LXVIII, pp. 353-356.

Le cassinoidi e le curve di Darboux, « Rend. Seminario Mat. Univ. Roma », s. II, vol. 6, pp. 15-25.
Queste « Memorie », vol. III, LXIX, pp. 357-366.

La geometria non-euclidea e i presupposti filosofici della teoria della relatività, « Atti Soc. ital. Progr. Scienze », riun. XVIII, Firenze, sett. 1929, vol. I, Roma, S.I.P.S., pp. 411-413.

Sul principio d'identità dei polinomi, « Periodico di Mat. », s. IV, vol. 10, pp. 172-173.

[*recens.*] *Enciclopedia delle matematiche elementari, vol. I, parte I,* ibid., pp. 39-41.

[*recens.*] G. Loria, *Curve piane speciali, algebriche e trascendenti. Teoria e storia, vol. I: Curve algebriche,* ibid., pp. 107-108.

* *Leçons de géométrie projective,* trad. P. Labérenne, Paris, Gauthier-Villars, un volume di IV+430 pagine.

* *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna,* editi da F. E. col concorso di diversi collaboratori, libri V-IX, Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di IV+357 pagine.

** *Elementi di Geometria ad uso delle scuole complementari e di avviamento al lavoro* (in coll. con U. Amaldi), Bologna, Zanichelli, un volume in 16° di VIII+272 pagine.

Il determinismo e la fisica quantistica nel Congresso fiorentino della Mathesis, « Periodico di Mat. », s. IV, vol. 10, pp. 65-70.

La filosofia d'Elea e la posizione del problema della Meccanica, a cura di U. Cassina, « Rend. Seminario mat. e fis. Milano », vol. 4, pp. 1-5.

Philosophia de Elea et positione de problema de Mechanica, « Schola et Vita », V, pp. 5-10.

Assioma - Assiomatica, « Enciclop. Ital. », vol. 5, pp. 35-36.

Assoluto: l'assoluto nella matematica e nella fisica, ibid., vol. 5, pag. 62.

Assurdo, ibid., vol. 5, pp. 70-71.

Astrazione: definizione per astrazione, ibid., vol. 5, pag. 88.

Bertini Eugenio, ibid., vol. 6, pag. 790.

Betti Enrico, ibid., vol. 6, pag. 834.

Brianchon Ch. J., ibid., vol. 7, pag. 841.

I motivi della filosofia di Eugenio Rignano, « Scientia », vol. 47, pp. 377-384.

Il principio di ragion sufficiente nel pensiero greco, ibid., vol. 48, pp. 285-290.

1931.

Castelnuovo Guido, « Enciclop. Ital. », vol. 9, pp. 364-365.

Continuità (in coll. con O. Chisini), ibid., vol. 11, pp. 237-240.

Corrispondenza, ibid., vol. 11, pag. 501.

Curve, ibid., vol. 12, pp. 172-180.

Definizione, ibid., vol. 12, pp. 483-484.

Dimensioni, ibid., vol. 12, pp. 849-850.

Dimostrazione, ibid., vol. 12, pag. 851.

Programma del corso sulla « Teoria delle superficie algebriche », « Rend. Seminario mat. Univ. Roma », s. II, vol. 7, pp. 107-109.

[*recens.*] G. Loria, *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche,* « Periodico di Mat. », s. IV, vol. 11, pp. 187-190.

[*recens.*] E. Ciani, *Introduzione alla geometria algebrica,* ibid., pp. 248-249.

[*recens.*] G. Hessenberg, *Grundlagen der Geometrie,* « Scientia », vol. 50, pp. 175-176.

** *Algebra elementare* (in coll. con U. Amaldi), vol. I, ad uso dei Ginnasi superiori e del corso inferiore degli Istituti tecnici, Bologna, Zanichelli, un volume in 16° di VI+182 pagine.

** *Nozioni di Geometria ad uso delle scuole di avviamento al lavoro* (in coll. con U. AMALDI), Bologna, Zanichelli, un volume in 16° di VIII+326 pagine.

** *Nozioni intuitive di Geometria ad uso degli Istituti magistrali inferiori* (in coll. con U. AMALDI), Bologna, Zanichelli, un volume in 16° di IV+200 pagine.

[*recens.*] *Histoire des Sciences en France* (t. XIV et XV de la « Grande Histoire de la Nation Française »), « Scientia », vol. 49, pp. 43-44.

[*recens.*] P. TANNERY, *Pour l'histoire de la Science hellène*, ibid., vol. 49, pp. 128-129.

[*recens.*] B. GINZBURG, *The Adventure of Science*, ibid., vol. 50, pp. 34-35.

1932.

Intorno ad alcune serie invarianti di gruppi di punti sopra una superficie algebrica, « Rend. Acc. Lincei », s. VI, vol. 16, pp. 533-540.
Queste « Memorie », vol. III, LXX, pp. 367-374.

Sulle irrazionalità aritmetiche che occorrono per la rappresentazione piana della superficie razionale a sezioni ellittiche dell'ottavo ordine, ibid., pp. 540-541.
Queste « Memorie », vol. III, LXXI, pp. 375-376.

Geometria (§§ 1-11), « Enciclop. Ital. », vol. 16, pp. 623-627.

[*recens*] *Enciclopedia delle Matematiche elementari, vol. I, p. II*, « Periodico di Mat. », s. IV, vol. 12, pp. 124-125.

[*recens.*] O. CHISINI, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, ibid., pp. 125-127.

* *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* (in coll. con L. CAMPEDELLI), (litogr.), parte I, Padova, « Cedam », un volume in 8° di IV+484 pagine.

* *Gli elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, editi da F. E. col concorso di diversi collaboratori, libro X, Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di 337 pagine.

** *Algebra elementare* (in coll. con U. AMALDI), vol. II, ad uso dei Licei classici e del corso superiore degli Istituti tecnici, Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di XII+363 pagine.

Platone e la teoria della scienza (in coll. con G. DIAZ DE SANTILLANA), « Scientia », vol. 51, pp. 5-20.

[*recens.*] L. BRUNSCHWIG, *De la connaissance de soi*, ibid., vol. 51, pp. 107-108.

[*recens.*] H. DINGLER, *Philosophie der Logik und Aritmetik*, ibid., vol. 51, pp. 444-446.

[*recens.*] E. MEYERSON, *Du cheminement de la pensée*, ibid., vol. 51, pp. 365-368.

[*recens.*] P. D'AILLY, *Imago Mundi*, ibid., vol. 52, pp. 102-103.

[*recens.*] F. D'AMATO, *Studi di storia della filosofia*, ibid., vol. 52, pp. 46-47.

* *Storia del pensiero scientifico* (in coll. con G. DE SANTILLANA), vol. I: *Il mondo antico*, Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di 682 pagine.

1933.

Intorno alle serie continue composte di involuzioni razionali di gruppi di punti sopra una superficie algebrica, « Rend. Acc. Lincei », s. VI, vol. 17, pp. 109-111.

Grandezza, « Enciclop. Ital. », vol. 17, pp. 715-716.

Incommensurabile, ibid., vol. 18, pp. 995-996.
Inerzia, ibid., vol. 19, pp. 183-184.
Infinito: l'infinito nella storia della fisica e della matematica, ibid., vol. 19, pp. 206-209.
Irrazionale: matematica, ibid., vol. 19, pag. 567.
** *Algebra elementare* (in coll. con U. AMALDI), vol. II, ad uso del primo biennio dei Licei scientifici, Bologna, Zanichelli, un volume in 16° di 316 pagine.
** *Complementi di algebra ad uso del secondo biennio dei Licei scientifici* (in coll. con U. AMALDI), Bologna, Zanichelli, un volume in 16° di XII+436 pagine.
Sull'insegnamento dell'aritmetica, « Scuola e cultura », a. IX.
L'infinito nella storia del pensiero, « Scientia », vol. 54, pp. 381-401.

1934.

Sulle superficie ellittiche di genere zero, « Rend. Acc. Lincei », s. VI, vol. 19, pp. 195-199.
Queste « Memorie », vol. III, LXXII, pp. 377-381.
Sulla classificazione delle superficie algebriche particolarmente di genere zero (in coll. con L. CAMPEDELLI), « Rend. Seminario mat. Univ. Roma », s. III, vol. 1, p. II, pp. 7-190.
Matematica, « Enciclop. Ital. », vol. 22, pp. 547-554.
Questione proposta n. 274, « Periodico di Mat. », s. IV, vol. 14, pp. 195-196.
[*recens.*] F. SEVERI, *Lezioni di analisi*, ibid., pp. 122-124.
* *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* (in coll. con O. CHISINI), vol. IV: *Funzioni ellittiche e abeliane*, Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di VIII+274 pagine.
** *Nozioni di Geometria ad uso delle scuole di avviamento professionale* (in coll. con U. AMALDI), Bologna, Zanichelli.
** *Algebra elementare* (in coll. con U. AMALDI), vol. II, ad uso dei Licei classici, Bologna, Zanichelli.
** *Algebra elementare* (in coll. con U. AMALDI), vol. II, ad uso degli Istituti tecnici, Bologna, Zanichelli, un volume in 16° di IV+464 pagine.
Meccanicismo, « Enciclop. Ital. », vol. 22, pp. 663-666.
Moto (§§ 1-6), ibid., vol. 23, pp. 942-944.
Naturali scienze, ibid., vol. 24, pp. 306-308.
[*recens.*] G. RENSI, *Le ragioni dell'irrazionalismo*, « Scientia », vol. 56, pp. 358-361.
[*recens.*] G. DELLA VOLPE, *La filosofia dell'esperienza di Davide Hume, vol. I*, ibid., pp. 361-362.
[*recens.*] A. DEL VECCHIO - VENEZIANI, *Gaetano Negri*, ibid., pp. 362-364.
[*recens.*] U. SPIRITO, *Scienza e filosofia*, ibid., pp. 224-229.
[*recens.*] E. WIND, *Das Experiment und die Methaphisik*, ibid., pp. 229-230.
* *Philosophie et histoire de la pensée scientifique*, I: *Signification de l'histoire de la pensée scientifique*, « Actual. scient. et ind. », Nr. 161, Paris, Hermann, un fascicolo in 8° di 68 pagine.

1935.

Unicuique suum, « Periodico di Mat. », s. IV, vol. 15, pp. 65-66.
Sul principio di Plücker-Clebsch (in coll. con O. CHISINI), ibid., pp. 276-283.

Numero (*Matematica*), « Enciclop. Ital. », vol. 25, pp. 31-35.
Parmenide: Parmenide e la geometria, ibid., vol. 26, pag. 392.
Postulato (§§ 1-5), ibid., vol. 28, pp. 99-100.
Problema, ibid., vol. 28, pp. 268-270.
Punto, ibid., vol. 28, pp. 548-549.
* *Gli elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, editi da F. E. col concorso di diversi collaboratori, libri XI-XIII, Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di 355 pagine.
L'infini dans la pensée des Grecs, « Scientia », vol. 57, pp. 310-314.
[*recens.*] R. Carnap, *L'ancienne et la nouvelle logique*, ibid., vol. 57, pp. 69-70.
[*recens.*] M. Caullery, *La science française depuis le XVII^e siècle*, ibid., vol. 57, pp. 70-71.
[*recens.*] J. Nordstrom, *Moyen âge et Renaissance - Essai historique*, ibid., vol. 57, pag. 71.
[*recens.*] Ph. Frank, *Théorie de la connaissance et physique moderne*, ibid., vol. 57, pp. 227-229.
[*recens.*] H. Leenhandt, *La nature de la connaissance et l'erreur initiale des théories*, ibid., vol. 57, pp. 315-316.
[*recens.*] *Collected Papers of Charles Sanders Peirce, vol. V, Pragmatism and Pragmaticism*, ibid., vol. 57, pp. 316-317.
[*recens.*] L. Stefanini, *Platone*, ibid., vol. 57, pp. 382-383.
[*recens.*] A. Metz, *Meyerson, une nouvelle philosophie de la connaissance*, ibid., vol. 57, pp. 454-456.
[*recens.*] Copernic, *Des révolutions des Orbes Célestes*, ibid., vol. 57, pag. 457.
[*recens.*] Caurnot, *Considérations sur la marche des idées et des événements dans les temps modernes*, ibid., vol. 58, pp. 45-46.
[*recens.*] H. Metzeger, *La philosophie de la matière chez Lavoisier*, ibid., vol. 58, pag. 120.
[*recens.*] H. Jaffe, *Natural Law as controlled but not determined by Experiment*, ibid., vol. 58, pag. 193.
[*recens.*] W. A. Heidel, *The heroic Age of Science - The Conceptions, Ideals and Methods of Science among the Ancient Greeks*, ibid., vol. 58, pp. 308-309.
[*recens.*] J. C. Gregory, *Combustion from Heracleitos to Lavoisier*, ibid., vol. 58, pp. 309-310.
[*recens.*] A. Janek, *Die Realität vom Standpunkte des Efallelismus*, ibid., vol. 58, pag. 358.
[*recens.*] G. Sarton, *Introduction to the History of Sciences*, « Periodico di Mat. », s. IV, vol. 15, pp. 192-193.

1936.

La proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari e le curve infinitamente vicine, « Rend. Acc. Lincei », s. VI, vol. 23, pp. 459-462.
Curve infinitamente vicine sopra una superficie algebrica, « Rend. Seminario mat. Univ. Roma », s. IV, vol. 1, pp. 1-9.
Addizione alla memoria precedente, ibid., pag. 119.
Sulle singolarità che nascono per proiezione di una superficie o varietà algebrica, « Scritti mat. offerti a L. Berzolari », pp. 351-352.

Spazio (*Le teorie dello spazio e la geometria; La geometria non euclidea e il problema dello spazio fisico*), « Enciclop. Ital. », vol. 32, pp. 316-317.

[*recens.*] G. Fano, *Geometria non-euclidea,* « Scientia », vol. 59, pag. 340.

[*recens.*] A. Rey, *Les mathématiques en Grèce au milieu du V^e siècle,* ibid., vol. 59, pag. 107.

[*recens.*] M. Lecat, *Erreurs de mathématiciens, des origines à nos jours,* ibid., vol. 59, pp. 107-108.

[*recens.*] C. J. Keyser, *Mathematics and the Question of Cosmic with other Essays,* ibid., vol. 60, pp. 360-361.

[*recens.*] D. E. Smit, *The Poetry of Mathematics and other Essays,* ibid., vol. 60, pp. 361-362.

Pluralità e moto nella polemica eleatica e in particolare negli argomenti di Zenone, « Riv. di Filosofia », a. XXVII, pp. 198-209.

Philosophie scientifique et empirisme logique, « Actes du congrès intern. de Philosophie scient., Paris 1935 » (Sorbonne); « Actual scient. et ind. », Nr. 388, Paris, Hermann, pp. 1-4.

La teoria della conoscenza scientifica nei suoi sviluppi da Kant ad oggi, « Atti Soc. ital. Prog. Scienze », riun. XXIV, Palermo, ott. 1935, vol. 5, Roma, S.I.P.S., pp. 215-219.

La Philosophie de la nature, trad. H. Buriot-Darriles, « Scientia », vol. 59, pp. 218-221.

[*recens.*] G. Della Volpe, *La filosofia dell'esperienza di David Hume, vol. II,* ibid., vol. 59, pag. 339.

[*recens.*] P. Brunet et A. Mieli, *Histoire des Sciences - Antiquité,* ibid., vol. 59, pp. 280-282.

[*recens.*] A. Liebert, *Philosophie des Unterrichtes,* ibid., vol. 60, pp. 288-290.

[*recens.*] A. Wolf, *A History of science, Technology and Philosophy in the 16^th and 17^th Centuries,* ibid., vol. 60, pp. 225-226.

[*recens.*] G. Galilei, *Opere, vol. I, II, III, IV e V,* ibid., vol. 60, pp. 226-227.

[*recens.*] H. Hahn, *Logique, mathématiques et connaissance de la réalité,* ibid., vol. 60, pp. 175-176.

[*recens.*] R. Carnap, *La Science et la Métaphisique devant l'analyse logique du langage,* ibid., vol. 60, pp. 109-110.

[*recens.*] P. Servien, *Principes d'esthétique - Problèmes d'art et langage des sciences,* ibid., vol. 60, pag. 110.

[*recens.*] J. G. Crowter, *Britisch Scientists of the Nineteenth Century,* ibid., vol. 60, pag. 227.

[*recens.*] *Gli atomisti - Frammenti e testimonianze,* ibid., vol. 60, pp. 43-44.

[*recens.*] *I frammenti degli stoici antichi, vol. I e II,* ibid., vol. 60, pp. 44.

[*recens.*] L. Stefanini, *Platone, vol. II,* ibid., vol. 60, pp. 44-46.

* ***Il significato della storia del pensiero scientifico,*** **Bologna, Zanichelli, un fascicolo in 16° di 71 pagine.**

* ***Histoire de la pensée scientifique,*** **I:** *Les Joniens et la nature des choses* (in coll. **con G. De Santillana), « Actual scient. et ind. », Nr. 384, Paris, Hermann, un fascicolo in 8° di 76 pagine.**

* *Histoire de la pensée scientifique*, II: *Le problème de la matière - Pythagoriciens et Eléates* (in coll. con G. DE SANTILLANA), « Actual. scient. et ind. », Nr. 385, Paris, Hermann, un fascicolo in 8° di 62 pagine.

* *Histoire de la pensée scientifique*, III: *Les derniers « Physiologues » de la Grèce* (in coll. con G. DE SANTILLANA), « Actual. scient. et ind. », Nr. 386, Paris, Hermann, un fascicolo in 8° di 45 pagine.

1937.

Curve infinitamente vicine sopra una superficie algebrica, « Rend. Acc. Lincei », s. VI, vol. 26, pp. 193-197.

Superficie (Superficie algebriche, § IV), « Enciclop. Ital. », vol. 33. pp. 9-11.

Uguaglianza ibid., vol. 34, pp. 621-622.

[*recens.*] *Enciclopedia delle matematiche elementari, vol. II, p. I*, « Periodico di Mat. », s. IV, vol. 17, pp. 112-113.

[*recens.*] G. LORIA, *Scritti, conferenze, discorsi sulla storia delle matematiche*, ibid., pag. 114.

Descartes et Galilée, « Revue de Métaphysique et de Morale », a. XLIV, pp. 221-235.

Le problème de la raison, « Travaux du IX^e^ Congrès intern. de Philosophie » (Congrès Descartes), Fs. IV. « Actual. scient. et ind. », Nr. 533, Paris, Hermann, pp. 3-6.

[*recens.*] A. ALIOTTA, *L'esperienza nella scienza, nella religione e nella morale*, « Scientia », vol. 61, pp. 121-123.

[*recens.*] R. BLANCHÈ, *Le rationalisme de Whewell*, ibid., vol. 61, pp. 233.

[*recens.*] G. DE WAARD, *L'expérience barométrique, ses antécedénts et ses explications*, ibid., vol. 61, pp. 188-189.

[*recens.*] C. CARBONARA, *Scienza e filosofia ai principi dell'età moderna*, ibid., vol. 62, pp. 33-35.

* *Compendio di storia del pensiero scientifico dall'antichità fino ai tempi moderni* (in coll. con G. DE SANTILLANA), Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di VI+484 pagine.

* *Histoire de la pensée scientifique*, IV: *Le problème de la connaissance - Empirisme et rationalisme grecs* (in coll. con G. DE SANTILLANA), « Actual. scient. et ind. », Nr. 572, Paris, Hermann.

* *Histoire de la pensée scientifique*, V: *Platon et Aristote* (in coll. con G. DE SANTILLANA), « Actual. scient. ed ind. », Nr. 573, Paris, Hermann, un fascicolo in 8° di 62 pagine.

1938.

Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari, « Rend. Acc. Lincei », s. VI, vol. 27, pp. 493-498.

[*recens.*] F. TRICOMI, *Funzioni analitiche - Funzioni ellittiche*, « Periodico di Mat. », s. IV, vol. 18, pag. 61.

[*recens.*] R. C. ARCHIBALD, *Outline of the History of Mathematics*, « Scientia », vol. 63, pag. 165.

* *Le matematiche nella storia e nella cultura*, a cura di A. FRAJESE, Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di 339 pagine.

Importanza della storia del pensiero scientifico nella cultura nazionale, « Scientia », vol. 63, pp. 125-134.

[*recens.*] *Correspondance du P. Marin Mersenne*, ibid., pag. 102.

[*recens.*] A. NESS, *Erkenntnis und Wissenschaftliches Verhalten*, ibid., pp. 102-103.

[*recens.*] E. BIGNONE, *L'Aristotele perduto e la formazione filosofica di Epicuro*, ibid., pp. 101-102.

* *La théorie de la connaissance scientifique de Kant à nos jours*, « Actual. scient. et ind. », Nr. 638, Paris, Hermann, un fascicolo in 8° di 44 pagine.

1939.

Sur la propriété caractéristique des surfaces algébriques irrégulières, « C. R. Acad. des Sc. Paris », t. 208 (1° sem.), pp. 27-28.

Des courbes paracanoniques appartenant à une surface algébrique irrégulière, « Boll. Soc. r. des Sc. Liège », vol. 8, pp. 422-423.
Queste « Memorie », vol. III, LXXIII, pp. 383-384.

* *Le superficie razionali* (in coll. con F. CONFORTO), Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di VIII+XV+554 pagine.

Piccole note su James Gregory e il suo soggiorno in Italia, « Roy. Soc. Edimburgo », pp. 465-468.

Histoire de la pensée scientifique, VI: *Mathematiques et astronomie de la période hellénique* (in coll. con G. DE SANTILLANA), « Actual. scient. et ind. », Nr. 845, Paris, Hermann, un fascicolo in 8° di 80 pagine.

1940.

Sopra le involuzioni irregolari appartenenti ad una superfice algebrica, « Rev. de la Univ. nac. Tucumán », s. A, vol. 1, pp. 293-296.

Sur l'extension du théorème de Riemann-Roch aux systèmes linéaires de courbes appartenant à une surface algébrique, « Bull. des Sc. math », s. II, vol. 64, pp. 207-215.
Queste « Memorie », vol. III, LXXIV, pp. 385-392.

* *Causalité et Determinisme dans la philosophie et l'histoire des sciences*, « Actual. scient. et ind. », Nr. 899, Paris, Hermann, un volume in 8° di 114 pagine.

1942.

Sur le théorème de Riemann-Roch concernant les surfaces algébriques et sur les systèmes des courbes canoniques et pluricanoniques, « Riv. Accademia delle Sc. di Madrid », vol. 40, pp. 149-159.

L'errore nelle matematiche (con lo pseudonimo « Adriano Giovannini »), « Periodico di Mat. », s. IV, vol. 22, pp. 57-65.

Il pensiero di Galileo Galilei (con lo pseudonimo « Adriano Giovannini »), « Arch. della cultura ital. », vol. 4, pp. 23-28; riprodotto come introduzione al volume « GALILEO GALILEI, *Dialogo dei massimi sistemi*: II-III giornata (a cura di G. CASTELNUOVO) », Roma, EDI - SAN - Ed. Sandron (1946), pp. 9-19.

1943.

Sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica, « Commentarii math. helvetici », vol. 15, 1942-43, pp. 227-237.

1945.

* *Causalità e determinismo nella filosofia e nella storia della scienza,* Roma, « Atlantica », un volume in 8° di 230 pagine.

1946.

** *Nozioni di Geometria ad uso della scuola media* (in coll. con U. AMALDI), Bologna, Zanichelli, un volume in 16° di IV+178 pagine.

** *Elementi di Geometria ad uso delle scuole medie superiori* (in coll. con U. AMALDI), Bologna, Zanichelli, vol. I, in 16° di IV+208 pagine; vol. II, in 16° di IV+368 pagine.

[*recens.*] F. ENRIQUES, *Causalità e determinismo nella filosofia e nella storia della scienza,* « Scientia », vol. 79, pp. 105-106.

Motivi scientifici e artistici nella preparazione matematica dei maestri, « Tecnica dell'insegnare », a. I, pp. 8-9.

Postumi.

1947.

Prefazione agli Elementi di Euclide, « Periodico di Mat. », s. IV, vol. XXV, pp. 66-72.

** *Elementi di trigonometria piana ad uso dei licei* (in coll. con U. AMALDI), Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di 168 pagine,

1948.

Sur la démonstration géométrique d'un théorème de Picard, concernant les surfaces algébriques, « Riv. Acad. delle Sc. Madrid », vol. 42, pp. 5-7.

* *Le Dottrine di Democrito d'Abdera,* testi e commenti (in coll. con M. MAZZIOTTI), Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di XXIII+339 pagine.

1949.

Sur la démonstration géométrique d'un théorème de Picard, concernant les surfaces algébriques, « Riv. Acad. delle Sc. Madrid », vol. 43, pp. 75-77.

* *Le superficie algebriche* (a cura di G. CASTELNUOVO), Bologna, Zanichelli, un volume in 8° di XV+464 pagine.

1954.

* *Los Elementos de Euclides y la critica antigua y moderna,* libros I-VI, trad. J. M. SHELLY, publicaciones del Istituto « Jorge Juan » de Matematicas, Madrid, un volume di 216 pagine.

1958.

* *Natura, ragione e storia,* antologia di scritti filosofici a cura di L. LOMBARDO RADICE, Edizioni Scient. Einaudi, un volume in 8° di [6]+286+[4] pagine.

INDICE