Enriques, Federigo

Questioni riguardanti le matematiche elementari

Zanichelli, Bologna, 1983. (2 voll.) (Vol. I, parte I: Critica dei principi; Vol. II, parte II: I problemi classici della geometria e le equazioni algebriche, parte III: Numeri primi e analisi indeterminata. Massimi e minimi.)

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

QUESTIONI RIGUARDANTI LE MATEMATICHE ELEMENTARI

Raccolte e coordinate da FEDERIGO ENRIQUES

PARTE PRIMA

CRITICA DEI PRINCIPI

TERZA EDIZIONE

CM3 • ZANICHELLI

PREFAZIONE

La raccolta delle Questioni riguardanti la Geometria elementare, *apparsa per la prima volta nel 1900 ed allargata sotto il nome di* Questioni riguardanti le Matematiche elementari *nei due volumi del 1912-1914, esce ora in una terza edizione interamente rifatta secondo un disegno organico ancora più vasto: che vuole rispondere non soltanto a uno sviluppo d' idee, sì anche al posto che quest'ordine di problemi ha preso ormai nella preparazione dei docenti delle scuole italiane. Poichè tutte le riforme recenti della Scuola, nei suoi diversi gradi — in particolare l'istituzione di un corso di Matematiche complementari per le cosidette lauree miste, e gli esami di Stato in cui la cultura dei candidati dovrà essere in gran parte saggiata traverso le questioni che toccano l'insegnamento secondario — mettono in valore l'indirizzo dell'opera nostra.*

E consentono allo sviluppo che essa riceve in quest' edizione, tendente ad appagare il bisogno più sentito di dare alla teoria scientifica una base storica.

Altre pubblicazioni, che stiamo approntando, ed in primo luogo quella degli Elementi *d'* Euclide *accompagnati dalla critica antica e moderna, dovranno offrire ciò che occorre ad un esame comparativo dei testi scolastici. Ma il docente che apprenderà in tal guisa una maniera razionale di giudizio, vorrà ritrovare la stessa comprensione storica della scienza anche nella veduta superiore delle questioni che qui viene offerta. Perciò gli articoli di carattere più esclusivamente logico o filosofico — e in particolare i miei propri sui principî della geometria e sul concetto del numero — sono stati rifatti in questo senso, ed, in rapporto allo scopo, anche il loro ordine è stato radicalmente cambiato. Inoltre sono state prese in considerazione da nuovi collaboratori alcune nuove questioni, che troveranno posto nei volumi successivi della raccolta.*

Tutto questo rimaneggiamento d'un'opera che, ormai per lunga consuetudine, accompagna e dirige lo studio dei nostri migliori docenti di Matematiche, procede dai corsi speciali che per la preparazione di essi sono stato chiamato ad impartire, nei due anni scolastici decorsi, all'Università di Roma. Perchè ogni volta che si cerca di spiegare ai giovani come la scienza universitaria si colleghi alle materie dell' insegnamento secondario e valga ad avvantaggiarne il possesso, cioè ogni volta che si vuole trasformare la dottrina in cultura o in abito e facoltà delle menti, sempre si è condotti a vedere metodi e problemi nella loro evoluzione storica. Al lume della quale la coscienza didattica, che ha dismesso gli abusi del logicismo, apprende veramente a superare *il periodo di quella critica troppo arida ed angusta, senza ricadere nei vecchi errori che ne costituirono il giusto motivo.*

Non giova dissimularlo: diverse circostanze minacciano oggi di menomare la scienza e la cultura matematica, che è vanto e tradizione d'Italia, se non forse nell'eletto manipolo degli studiosi dediti alla ricerca originale, almeno nella schiera più numerosa di coloro che hanno l'alto compito di diffonderla nella scuola. Poichè, da una parte, i corsi universitarii del primo biennio si sono venuti trasformando in questi ultimi anni per avvicinarsi agli scopi pratici degli ingegneri; e, d'altra parte, l'abbinamento sistematico delle cattedre di matematiche e di fisica nelle scuole medie — che non si addice a tutte le intelligenze — toglierà ai molti il tempo e l'occasione di approfondire certe dottrine altamente educative. Tali circostanze sono state presenti ai redattori di questa raccolta, per esempio là dove i problemi che toccano i fondamenti della geometria vengono messi in rapporto colla geometria proiettiva.

Infine abbiamo lavorato col proposito di offrire ai nostri studenti e docenti un'opera di preparazione e di confronto, alla quale essi possano attingere non soltanto notizie largamente utilizzabili, sì anche una veduta comprensiva del progresso delle idee matematiche: che, oltre ad educare il giudizio del maestro, può illuminare la ricerca più elevata e aprire anche il campo fruttifero dell'investigazione storica ad un più vasto numero di studiosi.

Roma, Dicembre 1923.

FEDERIGO ENRIQUES.

ARTICOLO PRIMO

L'evoluzione delle idee geometriche nel pensiero greco: punto, linea e superficie, di FEDERIGO ENRIQUES a Roma.

§ 1. **Gli « Elementi » d' Euclide.** — Ogni discussione sui principî delle matematiche fa capo agli « *Elementi* » *d'Euclide*, che costituiscono il più antico Trattato di questa scienza, a noi pervenuto. EUCLIDE viveva ad Alessandria ai tempi del re Tolomeo e quindi la sua opera si può collocare approssimativamente nel 300 a. C. In essa trovano posto nozioni di geometria e di aritmetica, in guisa da coprire — quasi interamente — il campo che noi riguardiamo ancora oggi appartenere alle matematiche elementari: al quale aggiungiamo tuttavia gli sviluppi formali dell' algebra. Infatti gli *Elementi* (στοιχεῖα) sono divisi in tredici *libri* (1). I primi sei sono dedicati alla geometria piana e precisamente comprendono:

1) relazioni d'eguaglianza e diseguaglianza dei triangoli, parallele e somma degli angoli d'un poligono, eguaglianza di superficie dei parallelogrammi o triangoli d'ugual base e teorema di PITAGORA;

2) algebra geometrica, cioè relazioni d' eguaglianza fra le superficie di rettangoli, che contengono — sotto forma geometrica — la maggior parte della teoria delle equazioni di 2° grado (completata nel libro 6, prop. 28, 29 (2);

3) teoria del cerchio, intersezioni e contatti, angoli iscritti ecc.;

(1) Cfr. EUCLIDIS, *Opera Omnia*, edizione critica di HEIBERG e MENGE, in 5 volumi. Lipsia, 1883-1888.

(2) Cfr. H. G. ZEUTHEN, *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et dans le moyen âge*, trad. fr., 1902. — E. ARTOM, *Le equazioni di secondo grado presso i Greci*. « Periodico di Matematiche », n. 4, 1922.

4) costruzione dei poligoni regolari iscritti e circoscritti nel cerchio : triangolo, quadrato, pentagono, esagono e pentadecagono;

5) teoria generale delle grandezze e dei loro rapporti cioè, sotto forma geometrica, numeri incommensurabili ;

6) proporzioni geometriche, triangoli simili ecc.

I tre libri seguenti, 7, 8 e 9 sono invece dedicati all'aritmetica : proporzioni fra numeri interi, massimo comun divisore, decomposizione dei numeri in fattori primi ecc.

Il libro 10 contiene — sotto forma geometrica — una elaborata classificazione degli incommensurabili, resultanti da radicali quadratici sovrapposti.

I libri 11, 12, offrono i principî della stereometria, e in ispecie le relazioni di volume fra prismi e piramidi, cilindri e coni, nonchè la proporzionalità della sfera al cubo del diametro. Ed infine il libro 13 porge la costruzione dei cinque poliedri convessi regolari.

§ 2. Le origini della geometria greca: fonti per la ricostruzione storica. — L'opera, di cui abbiamo brevemente riassunto il contenuto, non può ritenersi costruzione originale d' EUCLIDE, ma appare riduzione in un trattato organico di ciò che il genio greco ha costruito nei tre secoli precedenti. Anche se mancassero in proposito testimonianze storiche precise, ciò dovrebbe ammettersi da chiunque — esaminando gli *Elementi* euclidei — si renda conto della magnifica perfezione dell'ordinamento deduttivo, che conferisce a questo trattato il suo carattere classico, e della finezza della critica che traspare in ogni sua parte. Ma più direttamente ciò si desume anche dalle informazioni che possediamo intorno allo sviluppo storico della geometria greca, che resultano dalle testimonianze di PLATONE (1) e d'ARISTOTELE (2), da alcuni frammenti come quello sulle lunule di IPPOCRATE di Chio (circa 450 a. C.) tramandatoci da SIMPLICIO, da qualche riferimento di ARCHIMEDE (287?–212 a. C.), e specialmente da autori greci di un'epoca posteriore, come PROCLO (412-485 d. C.) e PAPPO (3) che hanno potuto raccogliere la tradizione e avere notizia di testi, oggi perduti. Una particolare menzione merita il commento di PROCLO

(1) PLATONE d'Atene (429-348 a. C.).

(2) ARISTOTELE di Stagira (384-322 a. C.).

(3) PAPPO d' Alessandria fiorì al tempo di TEODOSIO alla fine del IV secolo d. C. ovvero — secondo altri — circa un secolo prima, sotto l'impero di DIOCLEZIANO.

al primo libro d' EUCLIDE (1), che reca diverse notizie sull'origine dei teoremi ed anche un breve disegno storico sui progressi della geometria.

Tutti questi documenti sono stati oggetto di uno studio accurato per parte di critici competenti, che ne hanno tratto una ricostruzione dello sviluppo storico della scienza nelle sue grandi linèe (2). Grazie a tali lavori noi possediamo oggi una conoscenza discreta dell'ordine delle scoperte, delle epoche e dei nomi a cui si legano i principali acquisti, e cominciamo anche a renderci conto del vasto lavoro di « critica dei principî » che ha preceduto l'opera euclidea: la quale, per ciò appunto, ci appare tanto più vicina ai trattati moderni, esprimenti le esigenze logiche raffinate del nostro pensiero.

Ma andando oltre queste notizie, è specialmente importante per il matematico, non meno che per il filosofo, comprendere la genesi e lo sviluppo delle idee, che vuol dire costruire — nel suo più alto significato — la storia della scienza. E questa storia, toccando insieme alle origini della geometria e dell'analisi infinitesimale, nonchè della logica e della metafisica, dipende in gran parte da un'interpretazione delle fonti che solleva dubbi e dispareri, cui non è dato rispondere al lume della pura erudizione filologica senza una veduta filosofica. Dalla quale invero non può farsi indipendente neppure l'accertamento di quelli che, nella storia scientifica, voglionsi riguardare come « fatti », dove pure si tratta di conferire ai dati il loro proprio significato e di supplire talvolta alle fonti parziali o manchevoli, con ipotesi probabili.

Spieghiamo il nostro pensiero: a quel modo che la fisica non

(1) *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarium*, ed. FRIEDLEIN, Lipsia, 1873. — Sono anche da notare gli *Scholii* anonimi riprodotti nell'edizione critica dell' EUCLIDE sopra citata.

(2) C. A. BRETSCHNEIDER, *Die Geometrie und die Geometer von Euklides*, Lipsia, 1870; G. J. ALLMANN, *Greek Geometry from Thales to Euclid*, Dublino, 1889; P. TANNERY, *La géométrie grecque...*, Partie I, Parigi, 1887; *Pour l'histoire de la science hellène*, Parigi, 1887; H. G. ZEUTHEN, *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le Moyen Age* (ed. danese 1893), trad. fr. di MASCART, Parigi, 1902; M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, vol. I, 3ª ed., Lipsia, 1907; G. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia* (1ª ed. « Memorie dell'Accademia di Modena », 1893-1902), 2ª ed. Milano, Hoepli, 1914; TH. HEATH, *A History of Greek Mathematics*, Oxford, 1921; J. L. HEIBERG, *Naturwissenschaften, Mathematik und Medizin*, 2ª ed., Lipsia, 1920; trad. ingl., Oxford, 1922.

è copia della natura esteriore, ma rappresentazione di essa traverso concetti elaborati dalla nostra mente, allo stesso modo anche la storia del sapere non è semplice riproduzione di una realtà obiettiva (che si ridurrebbe positivamente alla collazione dei testi e delle testimonianze superstiti!), bensì elaborazione e ricostruzione dei dati, secondo un ordine intelligibile del progresso, che è posto dallo storico.

Ed è essenziale notare che quest'ordine costruttivo è altra cosa dall'ordine logico delle deduzioni, quale si ravvisa in una sistemazione organica della materia, per esempio nell'opera d' Euclide. Qui infatti appariscono ai primi posti teoremi — come quelli sull'eguaglianza dei triangoli — che non possono appartenere ad un periodo primitivo dello sviluppo geometrico perchè non hanno significato di per se stessi, ricevendolo soltanto come principî od anelli di una catena che fa capo a proprietà geometriche veramente espressive: tali la somma degli angoli del triangolo e la relazione (pitagorica) fra i quadrati dei lati del triangolo rettangolo, i due fuochi cui tende l'ordinamento del primo libro euclideo.

§ 3. **Apporti della cultura egiziana ed orientale.** — La prima questione, in qualche modo pregiudiziale, per l'intelligenza dello sviluppo scientifico presso i Greci, consiste nel misurare l'apporto recato alla Grecia da altre civiltà. A tale riguardo è istruttiva la circostanza che la scienza o filosofia della natura dei Greci abbia avuto inizio nelle colonie ioniche dell'Asia Minore, che per la loro situazione geografica dovevano più facilmente comunicare coi paesi vicini, in cui aveva sede una più antica cultura, specie cogli Egiziani e coi Babilonesi. E la tradizione ricollega appunto le origini delle Matematiche nel mondo greco, agli insegnamenti ricevuti da codesti paesi.

Erodoto (1) (scrittore della seconda metà del secolo V a. C.) racconta che Sesostri (cioè Ramsete II, circa 1300 anni a. C.) distribuì le terre d' Egitto in tanti pezzi rettangolari, su cui impose un annuo tributo; ma l'inondazione del Nilo avendo coperto in parte codesti terreni, fu necessario procedere ad una riduzione delle imposte, mediante misura delle aree: di qui — egli dice — sembra avere avuto origine la Geometria, che passò poi in Grecia.

(1) II, 109.

A questo racconto si riferisce forse (1) — direttamente o indirettamente — PROCLO, nel *Commento all'Euclide*, ove attesta (2) che, secondo la tradizione, « gli Egiziani furono i primi inventori della Geometria, e che questa nacque dalla misura dei campi, la quale dovevasi periodicamente rinnovare a causa delle inondazioni del Nilo, cancellanti i confini delle proprietà.... ». « TALETE (3) per primo — aggiunge PROCLO — avendo visitato l' Egitto, trasportò la dottrina geometrica da codesto paese in Grecia; egli medesimo fece varie scoperte ed aprì la via a molte altre, con i suoi metodi aventi ora un carattere più generale (o scientifico) ora un carattere applicativo ».

La perizia degli Egiziani nella pratica geometrica resulta anche indirettamente dalle parole (se pure non sicuramente autentiche) che da CLEMENTE (4) sono attribuite a DEMOCRITO (5), cioè che egli non aveva trovato chi lo superasse nel costruire linee nelle figure e dimostrarne le proprietà, « nemmeno fra i cosiddetti *arpedonapti* (tenditori di corde = geometri catastali) dell' Egitto ».

Anche alla derivazione di dottrine matematiche da paesi orientali dell'Asia, si riferiscono alcune testimonianze di autori greci. PROCLO (nello stesso brano sopra citato) dice che « presso i Fenici, a cagione degli scambi e delle operazioni commerciali a cui si dedicavano, sorse la precisa conoscenza dei numeri », e GIAMBLICO (6) menziona una speciale proporzione:

$$a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b;$$

che PITAGORA avrebbe appreso dai Babilonesi.

D'altra parte la predizione che TALETE ebbe a fare dell'eclisse solare del 28 maggio 585 a. C., non si può spiegare se non in base alle secolari osservazioni babilonesi (7), da cui resulta un certo periodo di ricorrenza delle eclissi (il *saros caldaico* di 423 lunazioni); sia che la notizia sia pervenuta a TALETE direttamente dai Babilonesi, o indirettamente dagli Egiziani.

(1) Cfr. HEATH, op. cit., vol. I, pag. 121.
(2) Pag. 65.
(3) TALETE di Mileto (circa 600 a. C.).
(4) *Strom.*, I, 15, 69 (DIELS, *Vorsokratiker*, II^3).
(5) *Democrito* d'Abdera (circa 460-360 a. C.).
(6) In *Nicomachum*, pagg. 18-19.
(7) Cfr. l'art. di G. SCHIAPARELLI, in « Scientia », nn. VI, VII (1908).

Ma queste frammentarie indicazioni riceverebbero maggior lume da un esame approfondito di tutti i rapporti culturali intercedenti fra la civiltà greca e l'orientale, in ispecie dalla critica comparativa delle idee religiose. È un fatto degno di rilievo che la credenza nella «palingenesi», o trasmigrazione delle anime, si veda ad un tempo nascere e diffondersi in India ed in Grecia, presso gli Orfici e Pitagorici matematizzanti. E la coincidenza acquista particolare importanza per la storia della geometria, grazie alla recente scoperta di un lavoro di Apastamba-Sulba-Sutra (1), che appartiene verosimilmente al V secolo a. C., ma la cui materia sembra risalire ad un'antichità assai più remota: dal quale resulta che gl' Indiani hanno conosciuto, prima dei Greci, diversi casi particolari del teorema cosiddetto di Pitagora (2) (Euclide, I, 47) — cioè non soltanto i casi 3, 4, 5 (di cui si trova pure notizia presso i Cinesi), sì anche i casi 5, 12, 13 e 15, 36, 39 — e che hanno acquistato in tal guisa una conoscenza induttiva del teorema generale, che Apastamba considera come una relazione del rettangolo alla sua diagonale.

In seguito a questa scoperta è difficile sfuggire all'impressione che un'influenza orientale si sia esercitata sulle origini della geometria greca e segnatamente sopra la scuola pitagorica. Ma diversi motivi inducono a ritenere che le dottrine geometriche, qualunque grado di sviluppo abbiano potuto ricevere nel mondo orientale ed egiziano, rivestissero un carattere pratico, come arte di misura e di costruzione, e soltanto presso i Greci — e nella scuola pitagorica — abbiano assunto il carattere propriamente scientifico e razionale, così tipicamente rappresentato dall'esposizione dell' Euclide. Questa veduta, cui sembra suffragare una testimonianza generica di Platone (3), è conforme al riferimento di

(1) Trad. di Buerk, in «Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft», t. 56 (1901).

(2) Nato a Samo intorno al 572 a. C., o poco prima, Pitagora, dopo lunghi viaggi disceso a Crotone fondò ivi quella setta di carattere religioso ed aristocratico che prese il nome di *scuola italica*. Questa associazione, dopo avere esercitato una larga influenza sulla vita politica delle città della Magna Grecia, andò incontro ad una violenta reazione, sicchè si dice che il locale delle sue riunioni a Crotone sia stato incendiato attorno all'anno 500, e nel disastro molti membri della scuola — e forse anche il maestro — abbiano trovato la morte (altri fa vivere Pitagora fino a tardissima età, segnando come estremo della sua vita il 482).

(3) *Rep.*, 436, ove i Greci, a differenza dei Fenici e degli Egiziani, vengono dipinti come amanti del sapere piuttosto che della ricchezza.

PROCLO nel citato sunto storico. Quivi, dopo la menzione che riportammo di TALETE e l'accenno ad un ignoto MAMERCO, l'A. prosegue:

« Dopo di questi, Pitagora trasformò lo studio della geometria in un insegnamento liberale, esaminando i principî generali da cui resulta la dimostrazione dei teoremi in una maniera immateriale e intellettuale: fu lui a scoprire la teoria delle grandezze incommensurabili e la costruzione delle figure cosmiche (poliedri regolari) ».

Ora la costituzione della geometria come scienza razionale importa di superare alcune peculiari difficoltà inerenti ai concetti fondamentali, di cui per la prima volta vuolsi guadagnare una visione astratta; ed il nostro problema sarà appunto d'intendere questo progresso critico delle idee, che ha un'importanza decisiva per la storia del pensiero e della filosofia dell'antica Grecia.

§ 4. **Ordine delle principali scoperte.** — Per chiarezza d'esposizione offriremo anzitutto al lettore una notizia riassuntiva dell'ordine delle principali scoperte geometriche, secondo le indicazioni che traggonsi in primo luogo dal *Commento all'Euclide* di PROCLO, debitamente criticate e confrontate colle testimonianze di altri scrittori (1).

A TALETE di Mileto sono attribuite le seguenti scoperte:

1) L'osservazione che il cerchio viene diviso in parti uguali dai suoi diametri (PROCLO, pag. 157, 10).

2) La proprietà (EUCLIDE, I, 5) che gli angoli alla base del triangolo isoscele sono uguali, o *simili*, secondo la parola che sembra designare il concetto arcaico dell' « angolo » come limitato (PROCLO, pagg. 250, 20 e 251, 21).

3) L' uguaglianza degli angoli opposti al vertice formati da due rette che s'incontrano (EUCL., I, 15): questa proprietà sarebbe stata osservata, ma non dimostrata, da TALETE, secondo la testimonianza di EUDEMO (2) in PROCLO (pag. 229, 1-5).

4) Il teorema sull'uguaglianza dei triangoli che hanno uguali un lato e due angoli (EUCL., I, 26) è pure attribuito a TALETE da EUDEMO (PROCLO, pag. 320, 14–18), argomentando da ciò che la sua conoscenza è implicita nella determinazione della distanza d'una nave, di cui appunto TALETE aveva notizia. Ma TANNERY e ZEUTHEN giustamente osservano che il citato teorema non ha

(1) Cfr. HEATH, op. cit.

(2) EUDEMO da Rodi, discepolo d'ARISTOTELE.

un senso di per sè, fuori di un ordine deduttivo d'esposizione della geometria, e però ritengono dalla indicazione d'EUDEMO soltanto questo, che TALETE aveva appreso (probabilmente dagli Egiziani, ad eseguire alcune operazioni elementari di geometria pratica.

5) Aggiungeremo che, secondo un'indicazione di PAMFILO (vissuto sotto il regno di Nerone 54-68 dell'e. v.) si sarebbe tratti ad attribuire a TALETE anche la proprietà che l'angolo iscritto nel semicerchio è retto; ma secondo APOLLODORO (in DIOGENE LAERZIO, I, 24, 25), questa scoperta apparterrebbe a PITAGORA.

Abbiam detto che il sunto storico di PROCLO, dopo avere menzionato TALETE ed un MAMERCO, di cui non si ha d'altronde ulteriore notizia, viene a parlare dello sviluppo che la geometria ricevette per opera di PITAGORA.

Ora a PITAGORA e — in largo senso — alla sua scuola, sono attribuite le seguenti scoperte geometriche:

1) Il teorema che la somma degli angoli del triangolo è uguale a due retti (EUCL., I, 32): EUDEMO (in PROCLO, pag. 397, 2) dice che la scoperta di questo teorema generale appartiene ai Pitagorici; secondo GEMINO (1) parrebbe che alcuni casi particolari siano stati conosciuti a più antichi geometri. Al teorema precedente si lega poi la divisione del piano in poligoni regolari: triangoli, quadrati o esagoni, di cui rispettivamente 6 o 4 o 3 hanno un vertice a comune.

2) La relazione fra i quadrati dei lati del triangolo rettangolo (EUCL., I, 47) — comunemente designata col nome di «teorema di PITAGORA» — viene dalle concordi testimonianze di PLUTARCO, ATENEO e DIOGENE LAERZIO attribuita a PITAGORA. PROCLO nel sunto storico del suo *Commento*, si limita a dire che «fra gli scrittori d'antiche storie vi sono alcuni che riferiscono questo teorema a PITAGORA, raccontando ch'egli avrebbe sacrificato un bove in onore della scoperta».

3) L'*applicazione delle aree*, parabolica o iperbolica (in eccesso) o ellittica (in difetto), — cioè la costruzione d'un rettangolo (o d'un parallelogramma) di data base, che sia equivalente o prevalente o suvvalente, di un dato quadrato, ad un'area data —, risalirebbe pure, secondo EUDEMO in PROCLO (2), ai Pitagorici.

(1) Nel *Commento alle «Coniche» di Apollonio* di EUTOCIO (Ed. HEIBERG, II, pag. 170).

(2) Pag. 419, 15 - 420, 12. Di qui traggono origine i nomi delle tre specie di coniche, introdotti da APOLLONIO di Perge.

Questi resultati — che trovano posto in EUCLIDE: I, 44, II, 5 e 6, VI, 28 e 29 — costituiscono secondo ZEUTHEN, la cosiddetta *algebra geometrica*, che importa sostanzialmente la risoluzione delle equazioni di 2° grado (1).

4) La scoperta degli incommensurabili è attribuita a PITAGORA da PROCLO, nel passo del sunto storico riportato di sopra. Ma uno scolio al libro X dell' EUCLIDE (2) riferisce la scoperta ai Pitagorici, e racconta che colui che la rese pubblica perì in un naufragio. Questa leggenda, che prende anche altre forme, sembra alludere ad uno scisma avvenuto nell'ordine pitagorico, per cui gli *acusmatici* si separarono dai *matematici*, ad opera d' IPPASO di Metaponto. Ma vi si può anche scorgere la tradizione di un geloso segreto con cui si voleva sottrarre alla critica dei profani un resultato tardivo e, come vedremo, imbarazzante per l'insieme delle dottrine pitagoriche. È difficile tuttavia di precisare un poco l'epoca della scoperta: un limite superiore è fissato dalle notizie che PLATONE (3) ci porge sull' irrazionalità di $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots, \sqrt{17}$ riconosciuta da TEODORO di Cirene (nella seconda metà del V secolo a. C.), nonchè dal titolo di un'opera perduta di DEMOCRITO d'Abdera (460-360).

Pure l'irrazionalità di $\sqrt{2}$, cioè l' incommensurabilità della diagonale col lato del quadrato, si lascia dedurre assai spontaneamente dal teorema di PITAGORA. Le considerazioni aritmetiche di tipo pitagorico che valgono all'uopo, sono accennate da ARISTOTELE (*Analytica priora*, I, 23) e spiegate in uno scolio anonimo all' EUCLIDE (4): supposto $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ è lecito ammettere che uno dei due interi m e n, p. es. n, sia dispari; ma allora si ha:

$$m^2 = 2n^2, \qquad m = 2m_1, \qquad n^2 = 2m_1^{\,2}$$

e quindi si deduce che n è pari, contro l'ipotesi.

5) La costruzione delle figure cosmiche (poliedri regolari), che — come abbiam visto — è attribuita da PROCLO a PITAGORA, non deve forse interpretarsi nel senso più elevatamente scientifico. Poichè gli archeologi hanno trovato modelli di dodecaedri re-

(1) Cfr. E. ARTOM, *Le equazioni di secondo grado presso i Greci*, in « Periodico di Matematiche », II, 4 (1922).

(2) Ed. HEIBERG, V, pagg. 415, 417.

(3) TEETETO, 147 d.

(4) Ad. libr. X, prop. 115 (Ed. HEIBERG, t. III, pag. 408).

golari di origine etrusca (1) e celtica (2), risalenti probabilmente alla prima metà del millennio a. C., è assai verosimile, che tali oggetti siano stati conosciuti ed abbiano attratto l'attenzione di PITAGORA : ciò non significa che egli sia riuscito a darne la costruzione precisa, che si trova in EUCLIDE, XIII, 17. Ed invero lo scolio 1 all' EUCLIDE, XIII (3) dice che : « le cinque figure dette platoniche, non appartengono di fatto a PLATONE, ma tre di esse — cioè il cubo, il tetraedro e il dodecaedro — sono dovute ai Pitagorici, ed invece l'ottaedro e l'icosaedro a TEETETO ».

Da questo breve riassunto si può arguire quale fosse il grado di sviluppo raggiunto dalla scienza geometrica, intorno alla metà del V secolo a. C., cioè all'epoca in cui — secondo il sunto storico di PROCLO — si occuparono di questioni geometriche ANASSAGORA di Clazomene (500-428 a. C.) e ENOPIDE di Chio, e dopo di loro « acquistarono rinomanza nella geometria, IPPOCRATE di Chio, che scoprì la quadratura delle lunule, e TEODORO da Cirene », mentre « IPPOCRATE compose anche per la prima volta in trattato gli *Elementi della scienza* ».

Ne inferiamo che, almeno per quanto concerne la planimetria, la maggior parte della materia contenuta nell' EUCLIDE (I-VI) fu acquisita rapidamente dai geometri greci, in un primo periodo di sviluppo della geometria che sembra occupare meno di un secolo. Più precisamente riscontriamo nei resultati posseduti dalla scuola pitagorica, le materie contenute nei libri I, II, VI e probabilmente IV, mentre la dottrina generale delle proporzioni (o dei rapporti incommensurabili) del libro V, sappiamo da uno scoliasta appartenere ad EUDOSSO di Cnido (408-353 a. C.). Per quel che riguarda il libro III (gli angoli nel cerchio ecc.), i nostri riferimenti non ci danno altra notizia che l'accenno concernente l'iscrizione dell'angolo retto nel semicerchio : scoperta attribuita a TALETE e a PITAGORA, che difficilmente si può credere rimanesse isolata, tenuto conto dell'interesse estetico che i Pitagorici manifestano per le figure rotonde.

Ora le notizie sopra riferite si possono confrontare con un documento di eccezionale importanza, conservatoci da SIMPLICIO nel

(1) LINDEMANN, « Rendic. Accad. di Monaco » (1897), t. 26, pag. 625.

(2) HUGO, « Comptes rendus » (1873, '75, '79), t. 63, pag. 420 ; 67, pag. 433 ; 81, pag. 332.

(3) Ed. HEIBERG, t. V, pag. 654.

Commento alla Fisica di ARISTOTELE (1). Trattasi del frammento di uno scritto sulle lunule d' IPPOCRATE di Chio (2) che, potendosi presumere composto intorno al 450 a. C., ci lascia scorgere l'altezza raggiunta a quell'epoca dal ragionamento geometrico e conferma d'altronde il possesso delle sopra menzionate teorie. Anzi questo lavoro attesta nell'Autore anche la conoscenza delle proprietà del cerchio (EUCL., III), ch'ei dovrebbe dunque avere ritrovato da sè (come opina il LORIA) se non si vuole ammettere che l' argomento sia stato precedentemente studiato.

Di ciò che il frammento d' IPPOCRATE può insegnarci in ordine a questioni di aree, di natura infinitesimale, e in genere su ciò che i Greci giunsero a vedere in questo campo, diremo espressamente più avanti.

§ 5. **I concetti fondamentali della geometria pitagorica.** — Resulta dal precedente esame che, ad approfondire la storia dei concetti fondamentali della geometria, conviene fermare l'attenzione su quel momento decisivo del suo sviluppo in cui la scienza — superando i bisogni della pratica — acquista un significato razionale, traverso l'opera della scuola pitagorica.

Questo sviluppo appare strettamente connesso colle speculazioni cosmologiche e filosofiche sulla natura, iniziate fin dai più antichi Milesî. Non tanto perchè tali speculazioni abbian dato motivo a porre e risolvere problemi matematici, siccome oggi accade nella fisica teorica, quanto perchè la riflessione dei geometri primitivi sembra esercitarsi sopra lo spazio cosmico, riguardato nella sua materiale concretezza, anzichè sollevarsi all'idea d'uno spazio astratto, puramente matematico.

Di siffatta maniera di pensare, che è per noi un po' difficile a comprendere, ma che — accettata — è atta a renderci chiara l'evoluzione dei concetti, possiamo recare precise testimonianze

(1) Ed. DIELS, Berlino, 1882.

(2) Fino dal 1870 il BRETSCHNEIDER attrasse su questo documento l'attenzione dei geometri. Più tardi gli studi critico-filologici dell'ALLMANN (1881) e dell' USENER collaboratore del DIELS (1882), e quindi del TANNERY (1883) e dell' HEIBERG (1884), valsero a sceverare in modo abbastanza soddisfacente ciò che del testo di SIMPLICIO risale propriamente a IPPOCRATE (o almeno a EUDEMO che direttamente vi attinse). Questi studi e le critiche più recenti, sono riassunti nel « Bericht des Simplicius über die Quadraturen.... », di F. RUDIO, pubblicato a Lipsia nel 1907.

storiche. ARISTOTELE allude certo ai Pitagorici in *Met.*, VI, 11 (1), ove dice che alcuni definivano il cerchio e il triangolo riguardandoli assolutamente, come chi nella definizione dell'uomo ne consideri la carne e l'ossa, e perciò — non come divisioni d'una linea nella continuità della superficie — ma come oggetti concreti, tenendo conto del bronzo o della pietra di cui son fatti.

Tuttavia tale affermazione non si deve prendere troppo alla lettera, poichè guardando al profondo significato della filosofia pitagorica (che maturerà in senso positivo coll'atomistica) vi si scorge la tendenza a ridurre le differenze qualitative della materia sensibile al numero e alla disposizione di elementi identici, da cui tutti i corpi si suppongono costituiti (2).

Appunto questa dottrina monadica della materia estesa, che è ad un tempo dottrina matematica e metamatematica, sembra continuare le speculazioni sulla *natura* delle cose dei filosofi milesî.

Già TALETE supponeva che l'acqua (che si vede ora zampillare liquida dalla roccia, ora alimentare i semi e crescere le piante) costituisse una natura primitiva, cioè una forma cosmica della materia, che si ritroverebbe in qualche modo invariabile traverso i cambiamenti di stato della materia sensibile. Più tardi ANASSIMENE cercherà il principio cosmologico nell'aria, ed ERACLITO (d' Efeso) nel fuoco. Frattanto però il secondo dei Milesî, ANASSIMANDRO, aveva enunciato che la natura delle cose è *τὸ ἄπειρον*, cioè «l'infinito»: e probabilmente egli ha voluto indicare in tal guisa soltanto l'attributo della materia cosmica di essere illimitatamente diffusibile, identificandosi collo spazio.

Ora, proprio accanto alle ricerche sulla natura dei filosofi ionici, ARISTOTELE menziona la dottrina pitagorica, in questi termini.

Met., I, 5 (3): «I cosiddetti Pitagorici, avendo cominciato ad occuparsi di matematiche, le fecero grandemente progredite, e studiando pensarono i principî di queste essere i principî di tutte le cose esistenti. E poichè i primi che qui s'incontrano sono, naturalmente, i numeri, sembrò loro di ravvisare in questi, molte più analogie con ciò che esiste o avviene nel mondo, di quante se ne possono trovare nel fuoco, nella terra e nell'acqua....

(1) *Z* 11, 1036 b, 8.
(2) Cfr. p. es. ARISTOTELE, *de caelo*, *Γ* 1, 300 a, 15.
(3) A. 5, 985 b, 23.

« Avendo poi riconosciuto che le proprietà e le relazioni delle armonie musicali corrispondevano a rapporti numerici, e che anche in altri fenomeni naturali si riscontravano analoghe corrispondenze coi numeri, furono tanto più indotti ad ammettere che i numeri costituissero gli elementi di tutte le cose.... ».

Filolao, che viveva a Tebe circa il 400 a. C., ed è il primo dei Pitagorici da cui possiamo raccogliere qualche scritto, esprimeva le medesime dottrine dicendo: « tutte le cose conosciute posseggono un numero e nulla possiamo conoscere o comprendere senza di questo » (1). Ma il passo sopra citato, ed altri passi aristotelici (p. es. *De coelo*, III, 1 (2) ove è detto che i Pitagorici componevano il cielo coi numeri) suggerisce una formula più antica e paradossale, cioè che: *le cose sono numeri*. La quale formula assumerà un significato comprensibile per chi ritenga che il *numero pitagorico* — almeno nei pensatori primitivi della scuola — non sia già il numero astratto della nostra aritmetica, bensì il *numero concreto*, designando una *collezione* d'oggetti che comunemente dovevano venire pensati come *punti*, presi in una certa disposizione e costituenti una certa figura (3). D'altronde della concretezza del numero pitagorico si hanno prove storiche, dirette e indirette. La più chiara illustrazione ne è pôrta dalla teoria dei numeri figurati: numeri triangolari, rettangolari, piramidali ecc., che formarono particolare oggetto di studio nella scuola. A proposito dei quali è interessante ricordare che la considerazione loro — implicante la veduta d'un rapporto fra geometria ed aritmetica — sembra avere occupato Des Cartes nell'inverno 1619-20, precorrente all'elaborazione della geometria analitica (4).

Ciò che a noi importa soprattutto fermare è che l'elemento « punto » della primitiva teoria pitagorica, non era il punto senza dimensioni della nostra geometria euclidea, ma il *punto esteso*, conforme all'intuizione empirica del granellino di sabbia, che

(1) In Diels, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, I (Berlino, 1912), fr. 4.

(2) Γ 1, 300 a, 14.

(3) Ipotesi affacciata da P. Tannery, e svolta da G. Milhaud, *Les philosophes geomètres de la Grèce* (pag. 107), Parigi, 1900. Cfr. anche L. Brunsvicg, *Les étapes de la philosophie mathématique* (Parigi, 1912), in ispecie a pag. 33 ove si affaccia l'idea ingegnosa che l'accennato concetto del numero sia stato suggerito dall'osservazione delle costellazioni rappresentate nella carta celeste.

(4) Cfr. Milhaud, in « Scientia », I, II, 1918, pag. 87.

quei filosofi designavano come *monade* o unità avente posizione. La tesi che le cose sono numeri implica precisamente questa teoria monadica della materia, della quale si può scorgere forse il legame che la riattacca alla dottrina della materia infinita di ANASSIMANDRO. Mentre ANASSIMENE derivava il liquido e il solido per condensazione, e il fuoco per rarefazione, dall' « aria infinita », (*τὸ ἄπειρον ἀήρ*), poteva similmente PITAGORA far nascere la struttura corpuscolare della materia da una condensazione dell'elemento primitivo (infinito) attorno a centri monadici, per modo che i punti venissero delimitati da un circostante vuoto o più propriamente da un mezzo etereo rarefatto, della natura del fuoco: il che si accorda con talune descrizioni che ARISTOTELE ci porge delle vedute pitagoriche (1).

Ora la teoria monadica della materia, in quanto appare anche teoria dello spazio (pensato — come si è detto — in concreto) offre il naturale fondamento di una dottrina delle proporzioni o della misura: perchè due linee, essendo formate ciascuna da un certo numero di punti, hanno un rapporto definito dal rapporto di tali numeri ecc. Si comprende dunque come i Pitagorici poterono riuscire ad una trattazione aritmetica della geometria, sebbene basata sul presupposto erroneo che tutte le grandezze siano commensurabili. Soltanto la scoperta degli incommensurabili doveva dar luogo ad una revisione critica dei concetti fondamentali.

Così la prima costruzione della geometria pitagorica, non rappresenta che un tentativo imperfetto di conferire alla scienza un assetto razionale. Tuttavia anche il solo pensiero d'un ordine deduttivo in cui le proprietà geometriche vengano dimostrate, anzichè semplicemente osservate, costituisce già un avvenimento memorabile nella storia.

ZEUTHEN (2) ritiene che il motivo a tale progresso venga pôrto dal bisogno di offrire una dimostrazione generale del cosiddetto teorema di PITAGORA, relativo ai quadrati dei lati del triangolo rettangolo. Si è già detto che casi particolari di questo teorema erano noti in Oriente fin dall'antichità più remota. ZEUTHEN crede che una dimostrazione induttiva, nel supposto che i lati

(1) Cfr. ARISTOTELE, *Met.*, A 5, 986 a, 15; 987 a, 9; N. 3, 1091 a, 13; *Phys.*, Δ 6, 213 b, 22.

(2) *Théorème de Pythagore: origine de la géométrie scientifique.* II Congresso int. di Filosofia, Ginevra, 1904.

del triangolo siano espressi da numeri interi, abbia potuto esser guadagnata da PITAGORA mercè l'osservazione d'una figura in cui il quadrato appare decomposto in quadrati e rettangoli, come si vede nel secondo libro dell' EUCLIDE. E soltanto più tardi nella scuola pitagorica, si sarebbe giunti al possesso della dimostrazione generale, basata sulle proporzioni. Per quanto anche questa dimostrazione non sia affatto rigorosa, finchè non si sia imparato a trattare (con EUDOSSO) i rapporti incommensurabili, pure essa dovette fornire occasione allo sviluppo di un primo ordine dimostrativo della scienza geometrica. Il quale fu poi mutato da EUCLIDE, che — avendo rimandato fino al quinto libro la teoria delle proporzioni, resa difficile dall'esigenza del rigore eudossiano — ebbe a costruire *ex-novo* la dimostrazione del teorema di PITAGORA esposta nel primo libro degli *Elementi*, siccome ne reca testimonianza il *Commento* di PROCLO (1).

§ 6. **La critica eleatica.** — La nostra attenzione si volge ora al momento in cui la geometria pitagorica, edificata — come si è ammesso — sopra il concetto del punto esteso, dovette andare incontro ad una crisi rinnovatrice. Forse questa crisi potè essere determinata dalla scoperta dell'incommensurabilità fra l'ipotenusa e il lato del triangolo rettangolo isoscele, che vedemmo già esser fatta nella stessa scuola pitagorica: e ad essa, e allo stato d'animo che l'accompagna, può riferirsi la leggenda di IPPASO di Metaponto, espulso dai confratelli e punito dagli Dei per aver rivelato il segreto di codesta scoperta, o di altra simigliante.

Comunque, noi crediamo di poter cogliere lo sviluppo della crisi e l'acquisto del vero concetto razionale degli enti geometrici (punto senza dimensioni, superficie senza spessore ecc.) traverso la polemica della scuola d'Elea (PARMENIDE, ZENONE) per l' « unità » e la continuità dell' esistente, cioè della materia estesa e dello spazio, e contro la « pluralità » (che designerebbe la tesi pitagorica spiegata innanzi). E riteniamo che la stessa veduta metafisica degli Eleati — che sarà svolta poi, in senso formale, dai *Megarici* e da PLATONE, in antitesi col « divenire » eracliteo — sorga precisamente sopra il terreno di codesta critica dei concetti naturalistici e matematici pitagorici; onde infine si afferma — fuori dell'idea metafisica o metamatematica — la nozione degli enti

(1) Pag. 426, 6.

geometrici quali enti astratti, cioè matematici, nel senso che noi diamo a questa parola.

Non è qui il luogo per discutere, coll'ampiezza che sarebbe necessaria, la tesi sopra accennata, suffragandola coll'esame comparativo dei testi; e d'altronde lo abbiamo già fatto espressamente altrove e specie in un recente articolo del « Periodico di Matematiche », a cui rimandiamo lo studioso (1). Ci limiteremo perciò ad enunciare le conclusioni a cui siamo pervenuti, spingendo avanti le vedute affacciate primamente dal TANNERY.

Dunque, PARMENIDE d' Elea (2), in antitesi coi filosofi della più antica scuola pitagorica, riconosce la continuità dello spazio, e così libera la geometria dalle contraddizioni che ineriscono al concetto delle superficie dotate di spessore, o del punto esteso. Il quale, costituendo un bastardo infinitesimo attuale, non può soddisfare a quei principî logici, che appunto il Nostro scopre e formula in tale occasione, come condizioni della pensabilità degli enti, ed anche — secondo il suo criterio razionalistico — della loro esistenza fuori di noi, nel mondo della natura.

Ma poichè la tesi parmenidea veniva oppugnata da avversari che male la comprendevano, ZENONE (3) levatosi in armi a difendere il maestro, volle far toccare con mano che, dalla tesi opposta della pluralità (le figure « somme di punti ») derivano conseguenze assai più ridicole e assurde, per chi sia capace di spingere abbastanza avanti la riflessione. E gli argomenti di ZENONE assumono forma matematica precisa, cioè quella forma che siamo soliti incontrare nelle cosiddette « antinomie dell' infinito ».

Specialmente interessante è la spiegazione che la nostra veduta offre dei celebri argomenti sul moto, da riguardare non più puri sofismi, bensì riduzioni all'assurdo della tesi pitagorica: siccome già fu riconosciuto dal TANNERY. Ricordiamo in breve i primi due argomenti (4).

(1) *La polemica eleatica per il concetto razionale degli enti geometrici.* « Periodico di Matematiche », n. 2, 1923.

(2) Nato intorno al 540 a. C., o — secondo altri — una trentina d'anni più tardi.

(3) Discepolo di PARMENIDE, di 25 anni più giovane.

(4) Il terzo argomento (della freccia) significa che il tempo non è « somma d'istanti ». Il quarto crediamo — a differenza del TANNERY — che voglia provare la relatività del movimento. Cfr. ENRIQUES, *La relatività del movimento nell'antica Grecia*. « Periodico di Matematiche », n. 2, 1921.

1) Un punto mobile non può passare da A in B senza passare prima per il punto medio, C, del segmento AB, e poi per il punto medio del segmento CB, e così via all'infinito.

2) Similmente Achille pie'-veloce non può raggiungere alla corsa la tartaruga, sol che le dia un certo vantaggio AB, poichè dovrà prima passare per il punto B, e frattanto la tartaruga avrà percorso un certo tratto BB' (sia pure, p. es., un decimo di AB); ed ancora prima, di raggiungere la tartaruga, Achille dovrà andare da B in B', mentre la tartaruga avrà percorso un nuovo tratto $B' B''$, e così via all'infinito.

A questi argomenti — che sono appunto i primi due argomenti di ZENONE — noi rispondiamo che lo spazio da percorrere è, nell'un caso come nell'altro, finito, sebbene decomposto in un numero infinito di parti. Invero il primo caso porge la decomposizione

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \qquad (AB = 1),$$

mentre il secondo conduce a ricercare la somma della progressione geometrica

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = 1 + \frac{1}{9} \qquad \left((AB) = 1,\ BB' = \frac{1}{10}\right).$$

Però, nell'ipotesi che ogni segmento sia sempre superiore ad un minimo e (dimensione del punto o intervallo fra due punti contigui), si deduce che una somma d'un numero infinito di segmenti è sempre infinita, sicchè le deduzioni di ZENONE provano rigorosamente l'assurdo di siffatta ipotesi.

Ma certo il pensiero greco non poteva fermarsi a questa conclusione negativa: o qualche avversario di ZENONE o magari ZENONE stesso, debbono essersi posto il problema di sommare la progressione geometrica, e il resultato era perfettamente raggiungibile da chi possedeva — nella teoria geometrica delle proporzioni — un equivalente delle nostre equazioni lineari, mercè cui si trova appunto l'incontro di Achille colla tartaruga. Perciò si deve ritenere (collo ZEUTHEN) che la *scoperta della somma della progressione geometrica* risalga appunto a quel periodo delle matematiche greche, in cui la critica eleatica s'imbatte, per la prima volta, colle difficoltà sollevate dall'infinito.

§ 7. **Origini dell'analisi infinitesimale: la quadratura del cerchio e Ippocrate di Chio.** — ZENONE d' Elea, o — con lui e, accanto a lui — chi ha trovato la somma della progressione geometrica, ha scoperto il mondo dell'infinito; chi altri camminerà più avanti su questa strada meravigliosa?

Ecco una storia la cui ricostruzione non potrebbe esser pagata a troppo caro prezzo, ma che disgraziatamente si avvolge, per una gran parte almeno, in una fitta tenebra. Quando la tenebra si dirada, troviamo ARCHIMEDE (1) occupato colle più vaste applicazioni dell'analisi infinitesimale ai problemi della geometria e della meccanica, e vediamo il genio di lui stretto dalla disciplina di un metodo, dovuto ad EUDOSSO di Cnido e gelosamente custodito nella scuola d'Alessandria.

Pure la stessa cura con cui codesto metodo elimina ogni procedimento infinito, sostituendolo con semplici diseguaglianze e riduzioni all'assurdo, testimonia di un rigore raffinato, quale noi stessi abbiamo imparato a praticare (con CAUCHY, WEIERSTRASS, DINI ecc.) nella recente sistemazione critica del moderno calcolo infinitesimale; e, come non si potrebbe concepire questa sistemazione critica senza una precedente fioritura più libera dei concetti infinitesimali, così siamo indotti a ritenere (collo ZEUTHEN) che anche la critica dei Greci — di cui troviamo il resultato nella teoria dei rapporti incommensurabili del 5° libro euclideo, o nelle dimostrazioni per assurdo di teoremi come quello sull'equivalenza delle piramidi (*Elementi*, libro XII, prop. 4) — sia stata preceduta da un più libero impiego di procedimenti suggeriti dalla considerazione dell'infinito: la quale ebbe ad esser ripresa più tardi da ARCHIMEDE, le cui ricerche precorrono, come diremo, al calcolo integrale moderno. Questa induzione viene confermata da uno scritto, recentemente scoperto, dello stesso ARCHIMEDE, e dalle — siano pure poche e frammentarie — notizie che qui giova raccogliere.

Anzitutto è naturale di rivolgersi al problema della quadratura del cerchio (2), la cui antichità è attestata da una costruzione pratica contenuta nel *Papyrus Rhind* dell'egiziano AHMES, che

(1) Nato a Siracusa probabilmente il 287 a. C., fu ucciso nel 212 da un soldato romano di Marcello, espugnatore della città, di cui egli aveva fatto una memorabile difesa.

(2) Cfr. RUDIO, *Archimedes, Huyghens, Lambert, Legendre*, Lipsia, 1892.

risale a due mila anni avanti l'èra volgare, e che porge un valore abbastanza approssimato del rapporto della circonferenza al diametro ($\pi = 3,16$). Certo il problema della quadratura del circolo deve essere stato tentato dai Greci fin dagli inizi della scienza matematica, e quindi nella scuoia pitagorica; ma su ciò non pare che si abbiano testimonianze.

Invece in un frammento di IPPOCRATE di Chio, conservatoci da SIMPLICIO (1), si vede un tentativo d'ordine assai elevato per la risoluzione del famoso problema, e si scorge IPPOCRATE adoperare la proporzionalità dei cerchi ai quadrati dei diametri. IPPOCRATE, che già dicemmo essere ricordato da PROCLO (EUDEMO) come autore di *Elementi*, doveva possedere di questo teorema qualcosa di più che una semplice verifica empirica, cioè una dimostrazione, più o meno rigorosa, che forse aveva trovato egli stesso o che aveva preso a prestito da qualche predecessore. Ciò induce a supporre che all'epoca cui risale il frammento (circa la metà del V secolo a. C.) si dovesse già essere presentata ai geometri la considerazione dei poligoni iscritti, e probabilmente anche dei poligoni circoscritti al cerchio, quindi anche la serie o le serie infinite cui essi danno luogo. Qualcuno spinge più lontano l'ipotesi, fondandosi sopra un accenno alla dimostrazione della proporzionalità dei cerchi ai quadrati dei diametri, che è contenuto nella lettera d'ARCHIMEDE preludente al libro sulla quadratura della parabola. ARCHIMEDE dice che già, in occasione di quel teorema, i geometri precedenti si sono serviti del lemma che « se due spazi sono diseguali, la differenza tra di essi addizionata più volte a se stessa, può superare qualunque spazio finito ».

Questo lemma conduce ad un tipo particolare di dimostrazione per assurdo, cioè a quel *metodo*, cui già innanzi si è alluso, che dicesi di *esaustione*, e che in tutta la sua generalità fu praticato da EUDOSSO di Cnido (fondatore della scuola di Cizico verso il 368 a. C.); ma, secondo lo HANKEL e il LORIA, l'accenno d'ARCHIMEDE potrebbe riferirsi già ad IPPOCRATE, che così preluderebbe, in un caso particolare, al metodo d'esaustione.

Non c' è invero nulla di straordinario nella scoperta del lemma sopra accennato (che comunemente viene designato come « postulato d'ARCHIMEDE »), anzi il riconoscimento del fatto è implicito già negli argomenti di ZENONE; ma più difficile è ammettere che

(1) Già citato al § 4.

il metodo d'esaustione possa, fin da principio, prendere il posto di altri procedimenti diretti e men rigorosi, che si presentano più naturali. Perciò, in ogni caso, crediamo che il periodo costruttivo dell'analisi infinitesimale, dove ha posto la considerazione non dissimulata dell'infinito, debba prolungarsi in Grecia dopo la scuola di Chio, specialmente in DEMOCRITO d'Abdera (1).

§ 8. **Sviluppo dell'analisi infinitesimale da Democrito a Eudosso e Archimede.** — A vero dire i documenti su cui possiamo fondare un giudizio dell'opera matematica di DEMOCRITO, sono poca cosa; tuttavia non manca, come vedremo, qualche testimonianza precisa.

Anzitutto conviene esaminare i titoli delle opere perdute del grande filosofo, che si riferiscono alle matematiche. Secondo TRASILLO (2), questi titoli sono:

1) *Su una differenza d'opinione o sul contatto del cerchio e della sfera*; ovvero: *Sulla differenza del gnomone o sul contatto del cerchio e della sfera* (3);

2) *Sulla geometria*;

3) *Libri geometrici*;

4) *I numeri*;

5) Due libri *Sulle linee e sui solidi incommensurabili.*

Limito il catalogo alle opere strettamente matematiche, lasciando da parte quelle astronomiche, naturalistiche ecc., che salgono ad un centinaio, e contemplano tutti i rami dello scibile.

Il titolo del primo lavoro, secondo il modo dell'interpretazione, conduce a differenti ipotesi. Coloro che vi leggono la parola «gnomone», sono condotti (con ALLMANN) a supporre che contenesse questioni direttamente attinenti all'analisi infinitesimale. Quelli che leggono «opinione» possono scorgervi (con VOGT) una polemica contro la tesi che vedremo sostenuta da PROTAGORA, circa la natura del contatto.

La prima interpretazione è forse un po' speciosa, ma il criterio della ricostruzione di ALLMANN, che muove dalla visione d'un legame fra le vedute atomistiche (propugnate, come è noto, da

(1) Filosofo atomista, n. il 460, m. circa il 360 a. C.

(2) DIELS, B. 11, L. 11 p (II, 62).

(3) La diversità di traduzione dipende dall' incerta scrittura di una parola greca in cui taluno legge *γνώμης* (opinione), altri *γνώμονος* (del gnomone).

DEMOCRITO) e lo sviluppo dei concetti dell'analisi infinitesimale, mi sembra eccellente; e l'induzione che l' atomista DEMOCRITO si sia veramente occupato di tali concetti apparirà confermata, almeno in senso generale, da documenti che lo storico inglese non poteva conoscere.

Intanto osserviamo che la disposizione dei trattati 2)-5) di DEMOCRITO ricorda, come il TANNERY ha notato, quella dei libri d' EUCLIDE, e che il titolo dei libri 5) ci fa pensare che l'Autore abbia precorso le classificazioni degli incommensurabili da PLATONE attribuite a TEETETO, e comunque mostra che egli si è occupato di una teoria che tocca pure a questioni infinitesimali.

Ma riferimenti più diretti a tale ordine di questioni nell'opera di DEMOCRITO, ci vengono pôrti da due diverse testimonianze.

PLUTARCO (1) racconta che DEMOCRITO discuteva se le sezioni piane (assai vicine) di una sfera siano uguali o disuguali, perocchè — egli diceva — se sono uguali, la sfera dovrebbe apparire come un cilindro, e se diseguali, dovrebbe mostrarsi in qualche modo come dentata. Questo accenno indica DEMOCRITO alle prese colle questioni infinitesimali cui conduce il problema delle cubature; ed acquista valore quando d'altra parte veniamo ad apprendere che l'Abderita si è occupato appunto di cubature. Tale precisa testimonianza ci è recata da ARCHIMEDE in una lettera ad ERATOSTENE che costituisce la prefazione alla sua operetta *Sul metodo* recentemente scoperta (2).

ARCHIMEDE, mandando all'amico uno scritto che contiene due teoremi sulle cubature, debitamente dimostrati, crede opportuno di comunicargli anche il metodo di ricerca di cui si è servito, affinchè egli pure possa valersene «per scoprire certe verità matematiche col mezzo della meccanica»; ed in realtà si tratta di procedimenti infinitesimali che ricordano quelli dei così detti precursori del Calcolo infinitesimale, nel Rinascimento. Ora è notevole che ARCHIMEDE non considera in alcun modo codesti procedimenti come «dimostrazioni», ma dice che «riesce più facile, dopochè con tale metodo si sia acquistata una cognizione all'ingrosso delle questioni, d'immaginarne la dimostrazione, che se si cer-

(1) *Adv. Stoic. de commun. notit.*, p. 1079 (DIELS, B. 155, II, 90).

(2) Cfr. HEIBERG, in «Hermes», t. 42 (1907); HEIBERG e ZEUTHEN, «BIBL. MATH.» III serie, t. 7 (1907). Una traduzione italiana della lettera indicata d'ARCHIMEDE trovasi in LORIA, op. cit., pag. 326.

casse questa senza alcuna nozione preliminare ». Quindi egli continua : « Per la stessa ragione riguardo ai teoremi di cui EUDOSSO per primo ha scoperto le dimostrazioni — cioè che il cono è il terzo del cilindro, la piramide il terzo del prisma aventi eguale base ed eguale altezza — il merito ne va fatto risalire in buona parte a DEMOCRITO, che per primo ha dato senza dimostrazione le proposizioni relative a tali figure ».

Dunque DEMOCRITO ha scoperto per primo la cubatura della piramide, che dà luogo già ad un difficile problema d'analisi infinitesimale, e — seguendo lo stesso ordine di considerazioni — ha esteso il resultato al cono. Insieme con questa conoscenza precisa, la testimonianza d'ARCHIMEDE apre l'adito a supporre che i metodi meccanici d'integrazione (cubatura) adoperati dal matematico siracusano si riattacchino, in qualche modo, a metodi geometrici analoghi adoperati dal geometra d'Abdera.

Qui vi è pur luogo a fare un'altra osservazione relativa ai criterî con cui deve procedere la ricostruzione storica dell'opera di DEMOCRITO.

Prima che venisse scoperta l'anzidetta lettera d'ARCHIMEDE ad ERASTOTENE, si doveva ritenere, in base ad un'altra esplicita affermazione dello stesso ARCHIMEDE (contenuta nella prefazione al *De sphaera et cylindro*), che la cubatura della piramide appartenesse senz'altro ad EUDOSSO. Si badi che le due testimonianze non si contraddicono punto ! ARCHIMEDE, sia per proprio rigido criterio logico, sia per ossequio all'opinione scientifica dominante nell'ambiente accademico alessandrino, ritiene che il vero autore d'un teorema sia, non colui che per primo vi è giunto con un procedimento più o meno rigoroso, ma colui che ne ha fornito una (vera) dimostrazione, cioè una dimostrazione impeccabile. Molti matematici contemporanei sono dello stesso avviso, e — non preoccupati della storia — giungerebbero, colle migliori intenzioni del mondo, a spogliare per esempio i fondatori del calcolo infinitesimale delle loro scoperte, a favore dei critici, come CAUCHY o WEIERSTRASS o DINI, che due secoli più tardi vi hanno portato il rigore delle dimostrazioni.

Ora, se DEMOCRITO, come tutto porta a credere, si moveva nell'ordine delle questioni infinitesimali, è chiaro che egli non poteva fare matematica rigorosa, per quanto sia verosimile che si sia preoccupato — quanto per lui era possibile — di questa esigenza. Pertanto la posterità, che trovava ogni difetto di rigore rimosso dall'opera dei suoi successori, aveva in ciò un motivo per dimenticare quanto gli era dovuto, a profitto di questi.

Tuttavia tali motivi non bastano a spiegare il silenzio di Proclo, che nel suo sunto storico non nomina affatto Democrito fra i matematici precedenti ad Euclide e ad Eudosso (e pare impossibile che il nome di lui non si trovasse nelle storie d' Eudemo!). Quindi siamo costretti ad attaccare l'imparzialità dello storico e a sospettare che Proclo, platonico, abbia voluto, per quanto gli era possibile, condannare all'oblìo il rivale di Platone, in cui egli doveva vedere un po' il diavolo, propugnatore dell'atomismo e del materialismo!

È lecito terminare questo discorso facendo qualche congettura sui procedimenti che Democrito poteva adoperare nel calcolo del volume della piramide?

Per ciò conviene prender per base la supposizione che Eudosso, pur convertendo il metodo infinitesimale in una riduzione all'assurdo (portata dal metodo d'esaustione), abbia conservato la costruzione di Democrito, e questa sia passata poi nella prop. 4 del libro XII dell' Euclide. Allora si è indotti ad ammettere che Democrito potesse arrivare alla cubatura della piramide utilizzando direttamente la somma della progressione geometrica, che abbiam visto contenuta negli argomenti di Zenone. Infatti la costruzione euclidea (che porge la decomposizione della piramide triangolare in due prismi equivalenti e in due piramidi simili alla data) conduce ad esprimere il volume della piramide, T, per mezzo di quello del prisma, P, di ugual base ed altezza, mediante la formula

$$T = P\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots,\right) = \frac{1}{3} P.$$

D'altronde non si può nemmeno escludere che Democrito, in occasione del detto problema, sia stato condotto in qualche modo anche all'altro metodo dell'analisi infinitesimale che troviamo usato da Archimede, cioè a quello che fu poi svolto da Cavalieri sotto il nome di «metodo degli indivisibili», e che risponde alla nostra considerazione degli «integrali». Infatti la decomposizione della piramide in tanti piccoli strati (approssimativamente prismatici) poteva in lui ricorrere per fornire una prova sensibile dell'equivalenza delle piramidi con basi uguali ed altezze uguali. Tuttavia, mentre il riferimento sopra citato di Plutarco mostrerebbe il nostro geometra preoccupato dalle difficoltà concettuali inerenti a questo metodo, non è detto nemmeno che DEMOCRITO riuscisse a superare la difficoltà inerente al calcolo della serie dei quadrati dei termini d'una progressione aritmetica a cui si è condotti per la detta via: della quale scoperta, se non si trovino riattacchi nelle ricerche pitagoriche, conviene forse lasciare il merito ad ARCHIMEDE.

In ciò che precede è ricorso più volte il nome di EUDOSSO di Cnido, matematico ed astronomo, filosofo contemporaneo (1) ed amico, ma probabilmente anche un po' rivale di PLATONE. Secondo le attestazioni di ARCHIMEDE, che abbiamo ricordate, si deve attribuire specialmente ad EUDOSSO, la sistemazione critica delle determinazioni di aree e volumi, toccanti all'analisi infinitesimale; mentre un anonimo scoliasta, commentando il 5° libro dell' EUCLIDE, attribuisce a lui la teoria generale delle proporzioni (indipendente dalla commensurabilità delle grandezze).

Nel campo ristretto in cui egli doveva muoversi, EUDOSSO ha foggiato un metodo d'analisi che non la cede in rigore ai procedimenti introdotti dalla più recente critica nel Calcolo infinitesimale; la superiorità di questi è soltanto nella maggior larghezza e facilità d'applicazione. Ma il criterio filosofico rimane, nei due casi, il medesimo; si tratta invero di ricondurre sempre ogni ragionamento sull'infinito o l'infinitesimo alla considerazione di un sistema di diseguaglianze.

Al metodo d'esaustione d' EUDOSSO, sia che egli ne sia stato senz'altro l'inventore, sia che — trovandone qualche esempio in geometri precedenti (come abbiam detto essersi supposto da alcuno) ne abbia soltanto sistemizzato l'uso — si può muovere soltanto il rimprovero di nascondere la via naturale che il pensiero è indotto a percorrere nei problemi dell'analisi infinitesimale. Ma ad una siffatta obiezione risponde l'esempio d'ARCHIMEDE, che ritorna a codesti procedimenti non rigorosi come a metodi di scoperta, e dà loro maggiore estensione coll'impiego di questioni meccaniche, mentre — d'altra parte — convalida i resultati acquisiti con dimostrazioni rigorose di tipo eudossiano; onde appare che il rigore critico non riesce effettivamente a fermare lo svi-

(1) Vissuto fra il 408 e il 353 a. C., ovvero un po' più tardi secondo il SUSEMIHL che ne porta la nascita al 390 a. C.

luppo della scienza se non per gli spiriti che sono già fermi: sulla via del Siracusano passarono pure i grandi matematici del Rinascimento, i costruttori del Calcolo infinitesimale!

Qui è opportuno rilevare esplicitamente che in sostanza tutti i metodi del calcolo s'incontrano già nell'opera d'ARCHIMEDE (1): la somma delle serie infinite nella quadratura della parabola (2), e il metodo degl'indivisibili (3) (corrispondente al moderno processo d'integrazione) nei trattati sulle spirali, i conoidi e gli sferoidi (4); infine — a proposito delle spirali — anche il calcolo delle tangenti. Il resultato più brillante delle investigazioni archimedee, è, notoriamente, la determinazione del volume e — ciò che è ancora più difficile — della superficie della sfera; onde a ragione il grande geometra volle sulla sua tomba un monumento che ne ricordasse la scoperta, cioè una sfera iscritta in un cilindro: il qual monumento doveva ritrovare e restaurare, un secolo e mezzo più tardi, CICERONE, trovandosi questore in Sicilia.

§ 9. **Il concetto della linea e la polemica antimatematica dei sofisti.** — Il discorso sullo sviluppo dell'analisi infinitesimale presso i Greci, conducendoci fino ad ARCHIMEDE, ci ha allontanati dal periodo di elaborazione critica dei principî della geometria, che viene aperto dalla polemica antipitagorica degli Eleati. Sulla strada di questa critica, proprio alla fine del secolo V a. C., troviamo le sottili disquisizioni dei Sofisti.

L'opera dei quali, discreditata volutamente da PLATONE ed ARISTOTELE, è nel comune concetto così svalutata che riesce impossibile comprendere come il mondo greco dell'epoca di PERICLE potesse prenderla sul serio. Senonchè un più giusto apprezzamento della sofistica fu dato fino da HEGEL, e specialmente dal GROTE e dal LEWES, che hanno riconosciuto in quel movimento di pensiero un indirizzo empirico e positivo, affatto simile al positivismo moderno.

In una maniera più determinata crediamo si possa spiegare la

(1) *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii*, Lipsia, 1880-81.

(2) Qui interviene proprio la serie geometrica $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} \ldots = \frac{1}{3}$ che abbiamo incontrato nella cubatura della piramide.

(3) Queste integrazioni sono sempre ricondotte alla somma di serie infinite, per esempio della progressione aritmetica, della serie dei quadrati dei termini d'una progressione aritmetica ecc.

(4) Cfr. l'art. di TOGLIATTI, in « Periodico di Matematiche », n. 4, 1922.

filosofia dei sofisti come antitesi al razionalismo metafisico e metamatematico della scuola d' Elea (1) e così che i *Discorsi demolitori della Verità* di PROTAGORA (2) e lo scritto *Sulla natura o su ciò che non esiste* di GORGIA (3), vadano interpretati, non già come semplici scherzi o giuochi di parole, ma dando alle parole « verità » (ἀλήθεια) e « esiste o esistente » (τὸ ἐόν) il significato tecnico preciso che esse avevano assunto traverso le speculazioni degli Eleati, dove appunto la verità razionale viene opposta all' opinione (δόξα) che esprime la conoscenza empirica, e l'esistenza riceve pure un analogo significato, al lume dei principî logici che la condizionano.

Ora, poichè i sofisti hanno attaccato le vedute razionalistiche della scuola d' Elea per ciò che importano di assurdo rispetto al senso comune, si è indotti a cercare se — penetrando più addentro nel tempio di quella metafisica — abbiano anche affrontato la critica dei concetti matematici, da cui essa trae origine. Effettivamente si trova in ARISTOTELE qualche accenno ad una polemica antimatematica dei sofisti, che indirettamente getta pure qualche lume sull'ambiente in cui si svolse la critica dei principî della geometria, in connessione collo sviluppo delle vedute infinitesimali.

Met., II, 2 (20) (4): « .... Invero le linee sensibili non sono quali le dicono i geometri, poichè nessuna delle cose sensibili è così (rigorosamente) retta o curva. Difatti la circonferenza non tocca la retta (tangente) in un punto, ma come diceva PROTAGORA redarguendo i geometri, secondo un elemento di una certa lunghezza α ».

A questa polemica si può forse riferire lo scritto di DEMOCRITO citato innanzi, *Sopra una differenza d'opinione* : « .... DEMOCRITO, per la posizione razionalistica che ha a comune con PLATONE (5), doveva sostenere naturalmente il concetto matematico ».

Ma PROTAGORA non è il solo dei sofisti in cui si scorga una polemica antimatematica ; anzi è probabile che la logica di un rigoroso empirismo e la posizione storica avversa alla filosofia eleatica, li tragga tutti, più o meno, a vedute somiglianti ; che rico-

(1) Per PROTAGORA quest' antitesi resulta da una testimonianza di PORFIRIO (in EUSEBIO) : cfr. DIELS, B. 2.

(2) PROTAGORA d' Abdera nacque 25 anni prima che DEMOCRITO, cioè probabilmente nel 485 e morì nel 415 (a. C.).

(3) GORGIA di Lentini (circa 483-400 a. C.).

(4) B. 2, 997 b, 32, in DIELS, B. 7.

(5) SESTO, *Adv. Math.*, VII, 389, dice che : DEMOCRITO e PLATONE sostenevano l'esistenza degli « intelligibili » contraddicendo a PROTAGORA.

vono lume dalla tradizione non interrotta dell'empirismo greco, quale si trova rappresentata nell'interessante scritto di SESTO EMPIRICO, *Adversus geometras* (1).

Appunto in senso polemico dobbiamo interpretare il cosiddetto tentativo di ANTIFONTE per la quadratura del cerchio, di cui ARISTOTELE (2), facendosi eco manifestamente dell'opinione dei geometri, dice che non spetta al geometra di confutarlo perchè « non è fondato sui principî ». Il commento di SIMPLICIO (3) spiega che ANTIFONTE ragionava così : si iscriva nel cerchio un quadrato (4) e quindi un poligono regolare avente il doppio numero di lati e così via ; tutti i poligoni regolari ottenuti sono quadrabili, cioè si lasciano trasformare in quadrati con una semplice costruzione ; ma proseguendo i successivi raddoppiamenti di lati di cui sopra è detto, i nominati poligoni vengono a confondersi col cerchio, quindi si ottiene anche la *costruzione* di un quadrato equivalente al cerchio (*sic*).

Nonostante la condanna esplicita di ARISTOTELE, si è tentato da qualcuno una difesa di questa soluzione sofistica : la quale acquisterebbe qualche pregio matematico se si potesse ammettere che ANTIFONTE — pure scambiando la ricerca della *misura* con quella della *costruzione* — sia stato il primo a considerare la serie infinita dei poligoni iscritti nel cerchio, venendosi quindi a collocare il suo tentativo fra i primi (e sia pure imperfetti) conati dell'analisi infinitesimale. Ma — poichè ANTIFONTE, contemporaneo di SOCRATE (con cui si dilettava a disputare di filosofia) è assai probabilmente posteriore ad IPPOCRATE di Chio, — le considerazioni già svolte (nel § 7) intorno a questo geometra, che riflette uno stato più elevato della questione, portano ad escludere l'accennata interpretazione. Conviene dunque (collo ZEUTHEN) accogliere la testimonianza di ARISTOTELE, ritenendo che la quadratura d'ANTIFONTE non spetti propriamente alla geometria, ma abbia valore di polemica empiristica antimatematica. ANTIFONTE doveva sostenere che, conformemente a ciò che si vede, i poligoni iscritti

(1) In *Adversus mathematicos*, III. Anche nell'epoca moderna si ravvisa un simile atteggiamento degli empiristi e proprio in rapporto alle origini del calcolo infinitesimale. Si veda la polemica di BERKELEY contro NEWTON (*The Analist*, 1734).

(2) *Physica*, A. 1, 185 a, 14.

(3) In DIELS, B. 13.

(4) Secondo TEMISTIO un triangolo equilatero.

vengono a confondersi col cerchio, non al limite d'una serie infinita, ma semplicemente quando il numero dei lati è abbastanza grande.

E perchè non si riterrebbe all'opposto che il Nostro fosse un infinitista e volesse dunque postulare la possibilità di un procedimento trascendente?

La risposta è data dal considerare l'atteggiamento filosofico di ANTIFONTE, che è ben lungi da un siffatto razionalismo: si veda, per esempio ciò che egli dice in un frammento *Intorno alla Verità* (1): «Colui che esamina degli oggetti grandi non vede la grandezza davanti ai suoi occhi e non la riconosce nemmeno per mezzo del suo spirito». Appare qui, nella sua propria luce, l'empirista che — contro i filosofi delle idee, postulanti la realtà delle essenze matematiche — non concede altra maniera d'esistenza che l'esistenza sensibile. Al lume di questo criterio le linee dovevano essere per lui, come per PROTAGORA, delle strisce di piccola larghezza, affatto diverse da quelle che il realismo greco cercava in un mondo metafisico e che noi riconosciamo oggi come prodotti d'idealizzazione del nostro stesso pensiero.

§ 10. **Le definizioni del punto, della linea e della superficie presso i geometri del IV secolo a. C.** — La polemica antimatematica dei sofisti dovette essere presto superata nel mondo greco: e del resto appare evidente che essa interessa piuttosto la posizione filosofica di matematici idealisti, che non la loro scienza matematica.

Tuttavia le difficoltà che si manifestano nel ragionamento infinitesimale — di cui la detta polemica esprime un aspetto — dovettero dare impulso a quel movimento critico del pensiero, onde si raccolgono come frutto le dottrine che, come si è detto, furono elaborate da EUDOSSO. Frattanto lo stesso pensiero critico si vede rivolgersi all'ordinamento logico della geometria e alla sistemazione dei suoi principî: l'alto grado raggiunto da questa critica rendendo comprensibile la mirabile perfezione del trattato euclideo (2).

Interessa qui a noi di esporre in particolare le definizioni di

(1) DIELS, B. 1.

(2) Cfr. H. G. ZEUTHEN, *Sur la réforme qu'a subie la mathématique de Platon à Euclide, et grace à la quelle elle est devenue science raisonnée*; in danese con sunto in francese. «Memorie dell'Accademia delle scienze di Copenhagen», 1917.

punto, linea, superficie, correnti presso i geometri del IV secolo, che precedono l'Autore degli *Elementi*. Esse si desumono in ispecie da ARISTOTELE e sono le medesime che s'incontrano poi in tutti i trattati antichi e moderni, salvo per gli ultimi, ispirati dalla critica recentissima.

La prima definizione che si trova del punto è quella dei Pitagorici che riecheggia le più antiche concezioni della scuola e che tuttavia sembra conservarsi con significato diverso dal primitivo, anche dopo superato il periodo dell'empirismo geometrico: « Tutto ciò che è indivisibile quanto alla grandezza dicesi unità (o monade), *il punto è l'unità avente posizione* » (1).

Ora, essendosi riconosciuto che il *punto*, come diceva PLATONE (2) è una pura « finzione geometrica » (γεωμετρικόν δόγμα,) si doveva ammettere che esso non è parte della linea, ma è il *principio della linea* (ἀρχὴ γραμμῆς): la quale può venirne *generata col movimento*; similmente *la linea col moto produce la superficie* (3).

Accanto a questa definizione genetica delle linee e delle superficie, che PROCLO (4) giudicherà perfetta, viene criticata da ARISTOTELE (5) un'altra definizione, adottata dai geometri dell'epoca:

Le superficie sono i termini dei solidi. Le linee sono i termini delle superficie. I punti sono i termini delle linee.

EUCLIDE ha conservato queste definizioni della linea e del punto (6), come complemento di quelle che riassumono in qualche modo il resultato negativo della polemica eleatica:

Il punto è ciò che non ha parti (Def. 1). *La linea è una lunghezza senza larghezza* (Def. 2): quest'ultima definizione essendo presa dalla scuola platonica (7).

§ 11. **Sull'ordinamento logico della scienza greca: definizioni, assiomi e postulati.** — Ora dobbiam chiederci: quale valore hanno le precedenti definizioni?

Per rispondere occorre esaminare il significato dell'ordinamento logico della scienza.

(1) ARISTOTELE, *Met.*, 1016 b, 24; PROCLO, pag. 97, 8-13.
(2) In ARISTOTELE, *Met.*, 922 a, 20.
(3) ARISTOTELE, *De Anima*, I, 4, 409 a, 4.
(4) Pag. 97.
(5) *Topica*, VI, 4, 141 b, 20,
(6) *Elementi*, I, Def. 3, 6.
(7) ARISTOTELE, *Topica*, VI, 6, 1436, 11.

ARISTOTELE esprimeva manifestamente un concetto acquisito dai geometri del suo tempo allorchè diceva:

Analytica posteriora, I, 2, 6: «Ogni conoscenza razionale, sia acquistata sia insegnata deriva sempre da conoscenze anteriori. L'osservazione mostra che ciò è vero di tutte le scienze: infatti questo è il procedimento delle matematiche e senza eccezione di tutte le altre arti».

Da questo stesso concetto lo STAGIRITA derivava che «la scienza dimostrativa procede necessariamente da principî veri, da principî immediati, più noti che la conclusione, di cui sono la causa ed a cui precedono».

Quanto alla classificazione dei principî, essa appare già in ARISTOTELE conforme — almeno nei tratti essenziali — a quella che trovasi realizzata dall' EUCLIDE.

Dove si trovano tre specie di principî:

1) *termini* (ὅροι);

2) *nozioni comuni* (κοιναὶ ἔννοιαι);

3) *postulati* (αἰτήματα).

I termini corrispondono solo in parte alle nostre «definizioni». I Greci concepivano un mondo degli enti matematici in corrispondenza alle idee formate nella nostra mente o alle parole che le designano. Quindi la definizione era per loro essenzialmente *reale* (e non nominale) contenendo soltanto l'indicazione dell'ente che risponde ad una certa parola: così il termine poteva venire spiegato per mezzo di altri concetti, ovvero semplicemente introdotto con una parola di cui si supponga noto il significato.

Le nozioni comuni — che il linguaggio pitagorico designava come *assiomi* — insieme ai postulati, costituiscono le proposizioni primitive su cui vuolsi fondare la dimostrazione di tutte le proprietà che si esporranno nel trattato.

Secondo il criterio aristotelico, di cui sopra è fatto cenno, l'ordine dimostrativo della scienza sarebbe un ordine naturale e perciò la scelta di siffatte proposizioni sarebbe subordinata, non tanto a criterî di convenienza, quanto ad una vera necessità logica. Rimane sempre traccia di tale veduta nel presupposto di certe discussioni assai comuni, dove si tratta di decidere se una data proposizione (presa in se stessa) sia un assioma o un postulato o piuttosto un teorema, cioè se «possa o non possa dimostrarsi». Ma già prima di ARISTOTELE si era affacciata la veduta superiore di fronte a cui tali discussioni perdono senso, che l'ordine logico di una scienza dimostrativa è relativo, potendosi dimostrare i principî per mezzo delle conclusioni, così come le conclusioni dai principî.

Quanto alla differenza fra assiomi e postulati nella geometria greca, siamo informati da PROCLO (1) che essa veniva fatta secondo tre criterî:

1) Per GEMINO, gli assiomi differiscono dai postulati come i problemi dai teoremi, o le identità dalle equazioni. I postulati sarebbero precisamente i principî cui si riduce la risoluzione dei problemi, aventi quindi il carattere di proposizioni *esistenziali*, giusta l'osservazione dello ZEUTHEN che la costruzione aveva appunto pei Greci l'ufficio di stabilire l'esistenza delle figure. Questo carattere si riconosce invero ai postulati euclidei, con esclusione del 4º: «tutti gli angoli retti sono eguali»; ma ZEUTHEN spiega come in tale affermazione debba vedersi un complemento del post. 2, nel senso di affermare che il prolungamento di una retta è unico.

2) PROCLO osserva pure che gli assiomi e i postulati differiscono anche per essere, questi principî particolari della geometria, e quelli, principî comuni alle varie scienze, poichè si tratta in essi delle proprietà generali della eguaglianza e diseguaglianza delle grandezze.

3) Infine la distinzione fra le due specie di principî si accorda anche col criterio d'ARISTOTELE che riconosce negli assiomi delle verità necessarie ed indimostrabili perchè evidenti di per se stesse, mentre i postulati sarebbero verità partecipanti ad un'altra specie di evidenza (sensibile), che non resultano egualmente, in modo necessario, dal significato dei termini.

Fra queste varie maniere di distinzione è soprattutto la terza che è sopravvissuta nella comune coscienza fino ai nostri tempi; e sventuratamente è proprio quella che appare di fronte alla critica priva di valore: perchè un'analisi adeguata scopre anche nelle verità che si pretendono evidenti *a priori*, l'espressione di esperienze elementari, e cioè delle verità della stessa natura di quelle che vedonsi espresse nei postulati. Per tale motivo la logica moderna delle matematiche non distingue più fra assiomi e postulati e dà egualmente il nome di postulati a tutte le proposizioni pri-

(1) Pag. 193. Cfr. G. VAILATI, *Intorno al significato della differenza fra gli Assiomi ed i Postulati nella Geometria greca.* «Scritti», pag. 547.

mitive (comunque evidenti) che si assumono, senza dimostrazione, a fondamento di un ordine deduttivo delle proposizioni.

§ 12. **I criterî della logica moderna.** — Nella lunga tradizione dell'insegnamento geometrico, che si riattacca agli *Elementi* d' EUCLIDE, i criterî dell'ordinamento logico dei Greci sembrano conservarsi immutati fino ai tempi più recenti. Ma un secolo di critica per molti aspetti analogo a quello che precede l'opera euclidea, ci ha appreso insieme a comprendere tutta la raffinatezza della critica che essa esprime, e a superare quella maniera d' intendere i principî. D'altronde siffatto progresso procede da una lunga evoluzione della logica, che matura appunto nel pensiero dei geometri contemporanei e conduce ad una comprensione chiara e determinata dell'ordine di una scienza deduttiva, per la prima volta, nelle «Vorlesungen über neuere Geometrie» di MORITZ PASCH, del 1882.

Questa storia interessante abbiamo tentato di ricostruire altrove (1): qui ci limiteremo a indicare in breve il resultato raggiunto.

I nostri criterî logici differiscono da quelli degli antichi specialmente per ciò che si attiene alla definizione. Poichè, in luogo di vedere nelle idee geometriche l'immagine di una realtà trascendente al pensiero, vi scorgiamo soltanto delle produzioni dello stesso pensiero, foggiate a rappresentare la realtà sensibile. In accordo con questa veduta sta il concetto che tutte le definizioni matematiche (o anche tutte le definizioni *logiche*) sono puramente *nominali*, suggello e espressione del processo mentale per cui certi concetti vengono costruiti da altri dati, e non *reali*, cioè atte ad indicare qualcosa che si trovi già dato in una classificazione naturale, fuori di noi. Pertanto la definizione è da intendere, conformemente al criterio rigoroso di BLAISE PASCAL, come valevole a sostituire, per ogni effetto, il definito, e quindi come un procedimento di riduzione affatto analogo alla deduzione: in questa si tratta di derivare la verità di una proposizione da altre premesse, in quella si tratta di spiegare il significato di un concetto per mezzo di altri concetti supposti noti.

Ciò posto, allo stesso modo che la deduzione fa capo ad un certo numero di postulati, che debbono venire assunti senza dimostrazione (logica), è manifesto che la definizione fa capo a ta-

(1) Cfr. ENRIQUES, *Per la storia della logica: i principî e l'ordine della scienza, nel concetto dei pensatori matematici*, Bologna, Zanichelli, 1922.

luni concetti fondamentali, avanti ai quali non se ne trovano altri per mezzo dei quali possano venir definiti.

Dunque, in ogni momento dello sviluppo della scienza, il suo ordine logico deve muovere da dati (concetti e proposizioni) esplicitamente presi come non riducibili, per fondarvi definizioni e dimostrazioni ; e alla base di una trattazione logica della geometria si dovrà trovare la dichiarazione dei *concetti primitivi* o *fondamentali*, e dei *postulati*, ossia delle *proposizioni fondamentali*, che ne esprimono i rapporti più elementari.

Più precisamente nelle ricerche critiche inerenti ai principî delle matematiche si sono affermati alcuni criterî che esprimono le norme di una trattazione logica idealmente perfetta, e tendono nel loro insieme ad un avvertimento più chiaro dell'uso che facciamo della intuizione, e ad una separazione di ciò che è logico da ciò che è intuitivo. Tali criterî sono i seguenti :

a 1) Tutti i concetti che compariscono nella trattazione debbono esser dati esplicitamente come *primitivi* o *fondamentali*, senza definizione, o venir definiti logicamente per mezzo dei concetti primitivi.

In ultima analisi, dunque, non debbono entrare nella trattazione se non i concetti primitivi, ed i *concetti puramente logici*, come p. es. i concetti di *appartenenza* (significato dal verbo « essere » o « contenere »), di *ordine*, di *corrispondenza*, ecc.

2) È desiderabile che i concetti primitivi siano fra loro *assolutamente indipendenti*, per modo che non sia possibile definire logicamente uno qualunque di essi per mezzo degli altri.

b 1) Tutte le proposizioni che compariscono nella trattazione debbon essere enunciate esplicitamente come *postulati*, o venire logicamente dimostrate per mezzo di altri postulati.

In ultima analisi, dunque, non debbono entrare nel ragionamento, se non le premesse contenute nei postulati e gli *assiomi* esprimenti le leggi della logica deduttiva.

2) È desiderabile che i postulati siano fra loro *assolutamente indipendenti*, per modo che nessuno di essi possa essere dimostrato in base ai rimanenti.

Le condizioni *a* 1) e *b* 1) sono essenziali, perchè si abbia una geometria trattata in modo *rigorosamente* logico. Esse permettono di dimenticare il contenuto dei concetti che vi figurano, considerando la trattazione stessa come una *teoria logica astratta* nella quale entrano soltanto dei simboli non determinati, legati da certe relazioni; e dove pertanto *il sistema dei postulati costituisce la definizione implicita dei concetti fondamentali*, presi nel loro insieme.

Questo modo astratto di concepire la geometria ha una grande importanza, perchè fissando in varie guise il senso dei simboli indicati, si possono ottenere varie *interpretazioni* di una stessa teoria astratta, riuscendo così a porre un legame fra più teorie geometriche concrete; un tale legame consiste in ciò che « si possono tradurre tutte le proposizioni dell'una teoria in proposizioni dell'altra, sostituendo, in modo determinato, i concetti che figurano nella prima con quelli della seconda ». Un esempio di ciò si ha nella *legge di dualità* della geometria proiettiva o della geometria sferica.

Ogni insieme di proposizioni, che soddisfi ai requisiti *a* 1) e *b* 1), può considerarsi come una *teoria logica astratta*, capace di ricevere generalmente varie interpretazioni concrete (geometriche o non geometriche), purchè le ipotesi espresse dai postulati siano *logicamente compatibili*, ossia non *contraddittorie*.

La possibilità di ricevere una interpretazione intuitiva sicchè la teoria possa riguardarsi come esprimente un insieme di rapporti fra concetti nettamente rappresentati, assicura praticamente che la condizione di compatibilità è soddisfatta. Per la geometria dunque, in quanto essa è fondata sulla intuizione, non ci domanderemo se i postulati sono compatibili, purchè essi siano intuitivamente evidenti.

I requisiti *a* 2), *b* 2) esprimono piuttosto condizioni di *eleganza* della trattazione, anzichè condizioni di rigore. Ed appariscono veramente importanti per riguardo alle possibili generalizzazioni della geometria.

L'indipendenza di più concetti può essere riconosciuta immediatamente coll'intuizione in un senso psicologico (ad es. quando si tratta di concetti rientranti in diverse categorie logiche), ed allora essa può servir di base al riconoscimento della indipendenza di alcuni gruppi di postulati.

Da un punto di vista logico l'indipendenza suaccennata non ha senso finchè non si enuncino i postulati, che nell'intuizione sono supposti, perciò quando si dirà che il *concetto* C *non può esser definito per mezzo di* A, B (o che è indipendente da essi) bisognerà aggiungere: *rispetto a un dato sistema di postulati* (a, b, c....), che costituisce la definizione implicita di A, B, C.

Per verificare l'indipendenza anzidetta A. PADOA ha proposto il seguente procedimento: si cerchino due interpretazioni della teoria assegnando ad A, B significati determinati e a C due significati diversi, per modo che una proposizione vera nella prima interpretazione risulti falsa nella seconda; allora è chiaro che C non può essere definito per mezzo di A, B rispetto ai postulati assegnati.

Si può riconoscere che un postulato a è indipendente da altri dati b, c..., facendo vedere che l'ipotesi opposta ad a è compatibile colle b, c.... Perciò si presenta naturale il procedimento seguente: si attribuisca convenzionalmente un senso, diverso dal senso originale, ai simboli che entrano nella trattazione a denotare i concetti primitivi, e si cerchi così di *interpretare* la teoria logica basata su b, c.... e sulla negazione di a, in un modo conforme all'intuizione. La possibilità di una siffatta interpretazione serve a stabilire l'indipendenza domandata.

Volendosi l'indipendenza assoluta di un sistema di postulati, occorre anzitutto che essi vengano formulati in modo *non ricorrente*, cioè che ciascuno di essi abbia un senso prescindendo dagli altri. In mancanza di questo requisito si potrà domandare soltanto l'*indipendenza ordinata*, ossia l'impossibilità di dedurre ciascun postulato dai *precedenti*.

L'indipendenza di un sistema di postulati è anche relativa alla *composizione* dei postulati stessi. Quando una proposizione a si lasci scomporre in due altre (*più semplici*) a', a'', che prese insieme equivalgono ad a, può ben accadere che la a non dipenda dalle altre proposizioni date b, c..., ma che in base alle b, c.... si riesca a dimostrare la a'; allora è chiaro che il postulato a contiene qualche cosa di superfluo, potendo essere limitato alla proposizione a''.

Si può istituire una analoga osservazione relativamente all'indipendenza dei concetti fondamentali, ove si consideri la possibilità di sostituire un dato concetto A *più particolare*, con due altri B e C *più generali*, per modo che A risulti definito come interferenza delle classi di enti B e C.

L'indipendenza dei concetti e delle proposizioni fondamentali ha dunque un valore tanto più significativo quanto più sono osservate le condizioni di:

a 3) *Generalità* dei concetti.

b 3) *Semplicità* dei postulati.

È possibile considerare concetti assolutamente generali e proposizioni assolutamente semplici, non suscettibili di venire decomposte in più altre?

A questo proposito A. PADOA ha fatto un'osservazione risolutiva. Qualsiasi proposizione si riduce in ultima analisi ad affermare che un oggetto *a* non coincide nè con *b*, nè con *c*..., dove *b*, *c*.... sono oggetti particolari ben determinati. Pertanto la sola proposizione assolutamente semplice è quella del tipo: *a* non è *b*. Ma con proposizioni di questo tipo, prese in numero finito, non si arriverebbe mai a postulare quell'insieme di proposizioni che caratterizzano i concetti più comuni della geometria. Si può tuttavia attribuire alle condizioni *a* 3) e *b* 3) un valore relativo convenientemente precisato, ed *avvicinarsi* così in vari modi ai criterî di perfezione logica sopra indicati.

§ 13. **I principî della geometria rispetto all'intuizione.** — All'enunciato delle norme logiche, cui deve soddisfare l'ordine della geometria come scienza deduttiva, stimiamo opportuno di aggiungere le seguenti riflessioni.

Riferendoci ai motivi storici che hanno generato l'analisi logica dei principî, si può dire che questa ha come scopo principale di avvertire distintamente gli atti che la nostra intuizione compie, ogniqualvolta rileva i rapporti fra oggetti che cadono immediatamente nel suo dominio; e così rendere possibile un controllo regolare del dato intuitivo. Sotto questo aspetto si presentano, quasi in contrapposto coi criterî logici sopra indicati, alcune osservazioni:

c 1) I postulati debbono esprimere immediatamente i rapporti fra i concetti primitivi che formano oggetto della nostra visione immaginativa senza che occorra aggiungere a questi la rappresentazione di qualche altro oggetto. Questa condizione porta talvolta ad assumere concetti primitivi non indipendenti.

Se intendiamo che il concetto *A* venga definito logicamente per mezzo di altri concetti *B*, *C*..., anche le proprietà di *A* dovranno essere dedotte da quelle (che ci vengono rivelate dalla intuizione) di *B*, *C*...; quindi se nella trattazione figura un postulato desunto dal modo con cui *A* viene intuito, questo porta l'implicita considerazione di un nuovo elemento concettuale primitivo, non contenuto in *B*, *C*....

Un esempio di ciò è offerto dalla proposizione fondamentale del piano: se si pensa la *retta* come un ente primitivo, e si vuol *definire* il *piano* colla proiezione della retta da un punto esterno, si deve anche dimostrare che la superficie così costruita contiene ogni retta determinata da due dei suoi punti; se invece si dà questa proposizione come un postulato, si deve riguardare anche il piano come un ente primitivo, in quanto la nominata proposizione non potrebbe essere intuita se ci formassimo soltanto un'immagine mentale della retta e non avessimo una rappresentazione del piano.

c 2) La rappresentazione intuitiva che ci formiamo dei nostri concetti ci presenta spesso una gerarchia di generi e specie, per modo che i concetti più particolari appaiono definiti per le loro differenze specifiche rispetto ad un concetto più generale.

In tal caso l'intuizione ci porge una serie di postulati ricorrenti, per i quali non si può parlare d'*indipendenza assoluta*, ma soltanto d'*indipendenza ordinata*.

L'assoluta indipendenza dei postulati esige dunque la costruzione di diverse gerarchie di concetti, dove i concetti particolari vengano generalizzati in modi diversi.

c 3) La nostra rappresentazione intuitiva dello spazio incontra prima dei concetti particolari e sale per astrazioni successive ai concetti più generali.

Non diremo per questo che i concetti più generali allorchè sono intuiti abbiano un minor grado di evidenza in confronto ai particolari: ma l'evidenza loro sta in rapporto ad uno stato della mente più progredito, in cui si esercita una facoltà di rappresentazione più astratta.

Dunque dal punto di vista intuitivo la generalità dei concetti che si possono scegliere come fondamentali per la geometria (e quindi in certo modo anche la semplicità dei relativi postulati) ha un limite nella nostra capacità di rappresentazione dell'astratto.

Ora si presenta qui un secondo scopo dell'analisi logica dei principî. Quest'analisi può soccorrere allo sviluppo della intuizione geometrica e spingere il lavoro di astrazione produttore di concetti più generali, mercè la costruzione logica di oggetti che potranno venire rappresentati più tardi. La logica disseccando in certo modo i dati intuitivi, colla semplificazione dei postulati, ci presenta infinite combinazioni diverse di questi, cui corrispondono infiniti concetti possibili. Ma definire logicamente un concetto significa soltanto indicarne una rappresentazione mediata che può costruirsi con una combinazione opportuna dei dati. In realtà però tale combinazione tende psicologicamente ad essere surrogata da una vera e propria visione immaginativa del concetto definito, non appena a questo si colleghino delle associazioni che gli conferiscono un *interesse*; e solo allora può dirsi che la combinazione logica, arbitrariamente fissata colla definizione, si converte in uno sviluppo duraturo per la scienza.

Queste riflessioni mostrano che, per quanto la logica possa soccorrere al processo di astrazione costruttivo dei concetti, essa non può da sola surrogare le associazioni psicologiche che costituiscono cotesto processo. Se non si vuole un'astrazione illusoria, bisogna educare la capacità rappresentativa dell'astratto, ricorrendo anche a mezzi sperimentali.

Sarà opportuno illuminare le cose dette con qualche esempio. L'idea che comunemente ci si forma della « linea » e della « superficie » ricavata per astrazione da pochi casi particolari è molto meno generale di quella accolta dal geometra. Chi ha avuto sott'occhio soltanto il piano, la sfera, i coni, i cilindri ed altre analoghe superficie a *punti ellittici* o *parabolici* non si rappresenta una superficie a *punti iperbolici*, attraversata in ciascun punto dal piano tangente. E la dimostrazione analitica della possibilità di questo caso non potrebbe riguardarsi che come l'anticipazione di una esperienza, quale ci viene fornita, per esempio, dalla costruzione dell'*iperboloide rigato*.

Lo stesso si può dire per la superficie di Möbius, modello di superficie *unilatera*, per cui si dimostra falso il comune giudizio che ogni superficie abbia due facce ben distinte ed irriducibili per moto continuo.

La conoscenza delle superficie a punti iperbolici e delle unilatere allarga il comune concetto della superficie, permettendoci di abbracciare coll'intuizione un maggior numero di casi. Ma non sembra possibile limitare il progresso di questa intuizione, poichè uno studio ulteriore ci conduce a considerare linee e superficie con infinite oscillazioni, linee senza tangente, superficie senza piano tangente ecc.; e di questi enti si può anche in un certo senso, e fino ad un certo punto, formarsi una rappresentazione, come, per esempio, quando una linea della specie suindicata viene definita per mezzo di una poligonale variabile che tende ad un limite con legge determinata.

Riassumendo le considerazioni svolte innanzi, diremo che:

la critica dei principî della geometria fa parte di quel processo di costruzione e di elaborazione di concetti che costituisce lo sviluppo della scienza nei suoi rami più elevati. In ispecie l'ufficio dell'analisi logica in codesto processo è di *distinguere* gli atti d'intuizione, e di soccorrere ad *astrazioni* successive; così si prosegue lo sviluppo della intuizione geometrica, che mette capo a *spazi intuitivi superiori*, variamente interessanti.

§ 14. **I concetti di punto, linea e superficie davanti alla critica moderna.** — Al lume dei criterî logici che abbiamo innanzi analizzati, appare manifesto come le definizioni date dai Greci per il punto, la linea e la superficie, non siano affatto definizioni nel senso proprio della parola, ma formule atte a richiamare i due procedimenti con cui la nostra mente idealizzatrice passa dal solido alla superficie che lo termina, e quindi alla linea e al punto, o per contro dall'immagine del punto mobile alla linea generata dal moto, e poi dalla linea mobile alla superficie e da questa al solido. Che, invero, cotali formule non valgano a *definire* i concetti che vogliono spiegare, resulta da ciò che nello sviluppo della geometria non se ne fa uso alcuno, riferendosi invece a talune proprietà che l'intuizione dei concetti descritti in quelle formule ci suggerisce come evidenti.

D'altronde se si vuol tentare una definizione del punto, della linea e della superficie, ovvero di alcuni fra questi concetti, bisogna pure supporre altri concetti primitivi. Non è impossibile, per esempio, definire il punto quando si assumano come primi i concetti fondamentali di *solido* (corpo rigido) e di *movimento*, debitamente analizzati.

A tale scopo si riterranno i movimenti come corrispondenze o *trasformazioni* operanti nella classe che ha per elementi i solidi: si avrà così un *gruppo di trasformazioni*, cioè un sistema di trasformazioni G tale che:

1) il prodotto di due trasformazioni di G (cioè la trasformazione che si ottiene dalle due, eseguendole, in un certo ordine, una dopo l'altra) appartiene al G;

2) insieme ad una trasformazione appartiene al G anche l'inversa.

Questo gruppo — che dipende da sei parametri — si lascia caratterizzare (con SOPHUS LIE) mediante certe proprietà determinative che esprimono il grado di libertà di movimento dei corpi solidi : segue da queste che il gruppo stesso possiede dei sottogruppi dipendenti da tre parametri, che sono costituiti dalle rotazioni attorno ad un centro. Orbene, ogni punto potendosi ritenere come determinato da un siffatto sottogruppo di G, si può astrattamente definire in rapporto ad esso (POINCARÉ). Ma non è qui il luogo di insistere sopra nozioni elevate, come quelle attinenti alla teoria dei gruppi di trasformazioni, che — in una forma più elementare e per quanto concerne i movimenti della geometria — si vedranno spiegate nell'Art. Terzo.

Ora, in luogo di derivare i concetti di punto, linea e superficie da altri concetti, apparirà naturale di introdurli, essi stessi, nella geometria, come concetti primitivi, traducendone i rapporti logici con un opportuno sistema di postulati. E quanto al « punto », ognuno lo riceverà volentieri come elemento primo, ritenendo tutte le figure che via via verranno introdotte siccome « classi o insiemi di punti ». Ma per la linea e la superficie, la domanda urta in una grave difficoltà, quando — in armonia col carattere deduttivo della scienza — si voglia procedere dai concetti più generali, subordinandovi le nozioni particolari di linea *retta*, superficie *piana* ecc. Perchè — come già si è avvertito — vi è nell' intuizione delle linee e delle superficie arbitrarie qualcosa di illimitatamente estendibile.

Quindi giova piuttosto ai fini della scienza — e certo almeno ad una trattazione elementare — di procedere in maniera induttiva, cercando di caratterizzare prima particolari classi di linee e di superficie, quali sono le *rette* e i *piani*, per salire da queste a concetti vieppiù generali : sia che codesti enti (rette e piani) si assumano come concetti primitivi senza definizione, sia che si tenti di definirli per mezzo di altri concetti, come la congruenza o il movimento, siccome si vedrà nell'Art. Secondo.

Concludiamo questo studio rilevando che il nostro esame ha mostrato quale secolare evoluzione d'idee soggiaccia alla moderna critica dei principî : le cui esigenze rischiano di essere mal comprese e di condurre a virtuosità ed abusi didattici se non siano riguardate, oltrechè nel loro aspetto logico, anche nel loro significato storico.

ARTICOLO SECONDO

Sui concetti di retta e di piano, di Ugo Amaldi a Padova.

Per render conto delle questioni relative alla introduzione nella Geometria dei concetti di *retta* e di *piano*, adotteremo dapprincipio un punto di vista storico, prendendo le mosse da quella prima e, diciamo pure, semplicista soluzione che di codesti problemi logico-didattici è fornita dagli *Elementi* di Euclide. Ivi i concetti di retta e di piano sono introdotti per via di pretese definizioni reali, la cui manchevolezza, agli effetti dell'assetto logico della Geometria, non sfuggì nemmeno ai primi commentatori del testo euclideo.

Si vennero così moltiplicando le interpretazioni dei principî fondamentali degli *Elementi* e le proposte di nuove e più soddisfacenti definizioni: ma il movimento critico così determinatosi non riuscì per secoli a superare gli schemi logici della concezione euclidea dei principî della Geometria. Soltanto nell'800, traverso la elaborazione delle Geometrie non euclidee, maturò nei critici matematici quella riforma del concetto stesso di *Geometria razionale*, che si riconnette alla esplicita constatazione della vanità logica di ogni tentativo di definizione reale e della necessità di introdurre le nozioni elementari, in particolare quelle di retta e piano (o altre da cui esse possano derivare logicamente) come *primitive*, caratterizzandole con un opportuno sistema di postulati.

Di questa veduta, sotto il suo aspetto generale, è già stato discorso nell'Articolo Primo. Qui nella prima parte del presente articolo la giustificheremo da un punto di vista più elementare, traverso un rapido esame dei vari tentativi di definizione di retta e piano che ebbero, l'un dopo l'altro, fortuna nei trattati e nella scuola.

Per definire i punti razionali del sistema armonico, basterà fare le seguenti osservazioni:

1) il punto 2 è il coniugato armonico di 0 rispetto a 1, ∞, e così il punto 3 è il coniugato di 2 rispetto a 1, ∞ ecc.;

2) il punto —1 è il coniugato di 1 rispetto a 0, ∞, quindi —2 è il coniugato di 0 rispetto a 1, ∞ ecc.;

3) il punto $\frac{1}{2}$ è il coniugato di ∞ rispetto a 0, 1; $\frac{1}{4}$ è il coniugato di ∞ rispetto a 0, $\frac{1}{2}$ ecc.;

4) per n intero e positivo, il punto $\frac{n}{2n-1}$ si ottiene come coniugato armonico di n rispetto a 0, 1, e quindi si ottiene $\frac{1}{2n-1}$ come coniugato di 1 rispetto a $\frac{n}{2n-1}$, ∞. Non c'indugeremo più oltre su questi sviluppi, che ognuno può ormai completare da sè. Ma diremo che — come dall'introduzione delle coordinate, cartesiane o proiettive, si può trarre, coll'analisi di Darboux, il teorema fondamentale della proiettività — così, reciprocamente, la teoria basata su questo teorema, conduce a porre assai semplicemente le coordinate proiettive: si tratta invero di porre una corrispondenza per isomorfismo fra un gruppo permutabile di proiettività paraboliche sopra la retta, e il gruppo delle sostituzioni $x' = x + k$ agenti sull' insieme dei numeri reali, x. Questo sviluppo si trova nell'Appendice alle *Lezioni di Geometria proiettiva* dell' Enriques.

ARTICOLO SESTO

I numeri reali, di FEDERIGO ENRIQUES a Roma.

Parte prima. — *I numeri naturali.*

I. — INTRODUZIONE STORICA.

§ 1. **Origine del concetto.** — I *numeri naturali* 1, 2, 3..., si affacciano fin dalle civiltà primitive; il loro possesso è chiaramente definito dall' uso che se ne fa nel conteggio, e le loro proprietà esprimono in qualche modo alcune *esperienze elementari* che sottostanno alla genesi del concetto nella nostra mente: le quali vengono richiamate nell' insegnamento rivolto ai bambini, ancora sforniti di codesto concetto astratto, che appunto in tal guisa si vuole ad essi spiegare. Del resto si offrono, per questo scopo, due serie di esperienze, relative all' uso del numero come *cardinale* e *ordinale*, sebbene presto s' impari ad associare le due specie di numeri e a designarli cogli stessi simboli, offertici dalle cosiddette cifre arabiche.

§ 2. **Definizioni dei Greci.** — Ora quel procedimento di associazione e d'astrazione che la mente infantile ripete nell'acquisto dei concetti aritmetici, con più largo sviluppo si osserva nella storia della scienza, almeno per quanto ci è dato riportarci alle sue origini. Così accade di trovare che l'antica scrittura ieratica degli Egizii, adoperava segni diversi per rappresentare numeri di oggetti o numeri d'ordine dei giorni del mese (1).

(1) Cfr. F. HOEFER, *Histoire des Mathématiques* (3ª ed., Parigi, Hachette, 1886). Larghi riferimenti e notizie bibliografiche trovansi in E. BORTOLOTTI, *Definizioni di numero* («Periodico di Matematiche», Novembre 1922) e A. NATUCCI, *Il concetto di numero e le sue estensioni* (Torino, Bocca, 1923). Quest'ultimo libro contiene un vasto materiale di studio per la ricostruzione dello sviluppo storico del concetto di numero, e vi abbiamo attinto numerose informazioni.

In una maniera assai significativa il processo di sviluppo del concetto di numero si palesa allo storico della scienza greca, poichè sembra che nel primo periodo costruttivo dell'aritmetica il numero stesso non venisse distinto da una collezione di oggetti ritenuti come indivisibili. GIAMBLICO attribuisce a TALETE di Mileto (circa 600 a. C.) la definizione «numero è un sistema di unità», che si ritrova presso i Pitagorici. Ma l' unità o monade aveva originariamente in questa scuola un significato cosmologico, come elemento o principio di tutte le cose, ovvero come «punto» fisico e geometrico insieme (cfr. Articolo Primo) ; e così il numero serbava ancora qualcosa della figura geometrica in cui le sue unità (punti) si pensavano disposte. Perciò i Pitagorici parlavano di *numeri figurati* : numeri *lineari*, *triangolari*, *rettangolari*, *piramidali* ecc.

Queste teorie rispondono ad un concetto del numero che tende a liberarsi per gradi dal concreto e pure vi resta in qualche modo attaccato : il concetto astratto del numero (come quello degli enti geometrici) fu effettivamente raggiunto traverso le speculazioni d' un razionalismo metafisico, su cui PLATONE ci porge delle vedute caratteristiche. Leggiamo, per esempio, nella *Repubblica* (525 *c*) che la scienza dei numeri deve insegnarsi ai futuri reggitori dello Stato «non alla volgare maniera, occupandosene a scopo di compra e vendita come mercanti e rivenditori, ma in guisa che l' intelligenza loro possa contemplare la natura dei numeri» sì da condurli dal mondo sensibile delle cose che periscono al mondo intelligibile della verità e dell'esistenza. Infatti questo insegnamento «innalza l'anima, e la obbliga a ragionare intorno ai numeri considerati in sè, non accettando di ragionare se altri ricorra a numeri associati a corpi visibili o tangibili» (525 *d*).

Ora il tentativo di spiegare appunto il concetto astratto del numero, distinguendolo dalla pluralità di oggetti, mette capo alle definizioni d' EUCLIDE nel libro VII degli *Elementi* :

Unità è ciò per cui ogni singola cosa è detta uno.

Numero è la pluralità composta d' unità.

§ 3. **I numeri nel Rinascimento.** — Queste definizioni vedonsi tramandate pel Medio Evo traverso BOEZIO (m. 526 p. C.) e ricompaiono in LEONARDO PISANO detto il FIBONACCI (1) e in NICOLÒ TARTAGLIA (2), che esplicitamente spiega la preoccupazione onde

(1) *Liber Abaci*, 1202, p. 2.

(2) *General Trattato di Numeri e Misure*, Venezia, 1556, carte 1-2.

traggono origine. « Bisogna avertire — egli dice — che sopra al numero vi son quelle medesime due sorte di considerationi, dette sopra delle unità, cioè una secondo il Naturale e l'altra secondo il Mathematico. Il Naturale considera il detto numero sì secondo la ragione come secondo l'essere, congionto con quelle materie sensibilmente numerate.... ; ma il Mathematico poi considera il detto numero sì come una moltitudine composta de unitade mathematice, cioè astratte da ogni materia sensibile ».

Però, mentre le idee astratte sono realizzate dagli antichi in un mondo intelligibile fuori di noi (che è appunto il mondo delle idee platoniche), la filosofia moderna acquista, a grado a grado, la consapevolezza che si tratta di formazioni del nostro stesso pensiero. Così dice DESCARTES (1): «*numerus* non in ullis rebus creatis, sed tantum in abstracto, sive in genere consideratur, est modus cogitandi dumtaxat ; ut et alia omnia quae universalia vocamus.... Ita, cum videbimus duos lapides, nec ad ipsorum naturam, sed ad hoc tantum quod duo sint attendimus, formamus ideam eius numeri quem vocamus *binarium* ; cum postea duas aves, aut duas arbores videmus.... ; ut et hunc numerum eodem universali nomine binarium appellamus.... ».

Vi è qui un progresso filosofico accompagnantesi all'evoluzione storica della logica, che altrove (2) abbiamo tentato di descrivere, e che mette capo alla riforma della logica contemporanea.

§ 4. **La critica del secolo XIX.** — Col lavoro di questa riforma è congiunta la critica del concetto di numero che si svolge nel secolo XIX, e nella seconda metà di esso : in stretto rapporto collo sviluppo della Geometria non euclidea.

Infatti l'impulso dominante a siffatta critica sembra essere venuto da ciò : che, avendo dovuto riconoscere alcunchè di sperimentale, e però di non logico e non necessario, nella scienza dello spazio, la mente matematica cerca almeno di salvare sopra una base puramente logica e razionale i principî dell'Analisi, facendo capo al primo e più semplice concetto del numero intero.

Così appunto GAUSS (in una lettera a Bessel del 1829) esprimeva la differenza fra la Geometria e la Meccanica da un lato e l'Analisi dall'altro, dicendo che il numero è un puro prodotto della

(1) *Principia philosophiae naturalis*, nn. 58-59.
(2) *Per la Storia della Logica*, Bologna, Zanichelli, 1922.

nostra mente, laddove spazio e tempo hanno anche fuori del nostro spirito una realtà, di cui *a priori* non possiamo segnare le leggi. E da questo pensiero procede quell'*aritmetizzazione delle Matematiche*, che caratterizza la scuola di WEIERSTRASS (1) e di KRONECKER (2), riducente il significato di ogni proposizione matematica a pure relazioni fra numeri naturali. Alla quale si collega in gran parte l'esame più approfondito degli assiomi che occorrono nella costruzione di tali numeri.

Vero è che la ricerca critica intorno ai principî dell'Aritmetica è lungi dall'accordarsi sopra un comune fondamento filosofico; chè infatti diverse vedute vedonsi accolte da diversi pensatori: la veduta di KANT, seguìta da W. HAMILTON (3), che riattacca il numero all'intuizione *a priori* del tempo, ordine della sensibilità interna; e quella che HELMHOLTZ riprende dagli empiristi inglesi, per cui il numero ha un significato sperimentale (sebbene, anche per HELMHOLTZ, il tempo entri particolarmente nella sua formazione psicologica); infine la veduta, più direttamente connessa al menzionato indirizzo aritmetico della scuola di Berlino, che viene professata da FREGE (4) e DEDEKIND (5), i quali considerano semplicemente il concetto di numero come pertinente alla logica.

Ma infine il dissenso filosofico che quì si manifesta, e che si rinnova anche oggi fra matematici e pensatori che pure si accostano nell'indirizzo delle loro analisi, non toglie l'accordo intorno al senso della critica matematica, volta a spiegare il concetto del numero. « Se si considera attentamente ciò che facciamo quando *numeriamo dei gruppi* e *contiamo* delle cose — dice DEDEKIND — si è condotti a por mente alla facoltà dello spirito di riferire oggetti ad oggetti, o di far corrispondere un oggetto ad un oggetto, senza la quale non è possibile in genere nessun pensiero ».

E tutta la critica recente del concetto di numero si appunta precisamente sullo studio degli ordini e delle corrispondenze che si possono stabilire entro e fra classi o insiemi di oggetti: studio

(1) Cfr. l'esposizione di E. KOSSAK, *Die Elemente der Arithmetik*, Berlino, 1872.

(2) *Ueber den Zahlenbegriff*, Lipsia, 1887.

(3) *Zahlen und Messen*, Lipsia, 1887.

(4) *Grundlagen der Arithmetik*, Breslavia, 1884.

(5) *Was sind und was sollen die Zahlen*, Braunschweig, 1887.

assorto a costituire un ramo generalissimo della scienza matematica, traverso l'opera di GIORGIO CANTOR (1).

Il matematico può, almeno in certo grado, prescindere dalle questioni propriamente filosofiche che qui si riattaccano: se, e fino a che punto e in qual senso, l'idea di un oggetto in generale e della sua identificazione e discriminazione da altri oggetti, resulti da esperimenti; e se ancora da esperimenti fisici e psicologici rilevi la corrispondenza che poniamo fra oggetti e oggetti, in cui altri vede piuttosto la consapevolezza delle facoltà associative dello stesso pensiero. Sebbene accada pure di scorgere un qualche influsso del presupposto filosofico sull'indirizzo della critica matematica, per esempio nella preferenza che alcuni critici danno al numero ordinale sul cardinale, perchè quello, a differenza di questo, sembra riflettere l'idea del tempo, e perchè venga ritenuto come primo nell'acquisto psicologico.

§ 5. **Indirizzo assiomatico.** — Il proposito di prescindere da ogni questione d'origine e di significato nella trattazione matematica dei numeri, ha trovato la sua espressione nella dottrina *puramente formale*, che viene enunciata, per es. da HEINE (1872) (2), dicendo che « i numeri sono soltanto *determinati segni*, e le regole delle operazioni che si fanno sopra di essi sono regole con cui due numeri legati dai simboli operativi possono scambiarsi ».

Ma una critica logica approfondita ha rilevato che la compatibilità di tali regole postula infine l'esistenza logica di oggetti corrispondenti ai segni di cui si definiscono i rapporti, e così la critica formale (pur conservando la predilezione del « signicismo ») viene a risolversi in un *indirizzo assiomatico* come quello che caratterizza la scuola di GIUSEPPE PEANO: qui la critica dei fondamenti dell'Aritmetica (similmente alla critica della Geometria)

(1) Le memorie principali di questi sulla teoria degli insiemi, si trovano nel « Journal für Mathematik » (di CRELLE), 77, 84 (1874-1877), poi nei « Math. Annalen », 15, 17, 20, 21, 22, 23, degli anni 1879-1884, e negli « Acta Mathematica » a cominciare dal tomo 2 (1883) ove appaiono traduzioni francesi degli articoli precedenti. La critica del concetto del numero cardinale ordinario è svolta in ispecie in « Math. Annalen », 49 (1895). Sui numeri ordinali e sulla introduzione dei transfiniti, dopo le memorie citate del 1883 si veda: « Zur Lehre von Transfiniten », Halle (1890) e « Math. Annalen », 49 (1897).

(2) « Journal für Mathematik », 74, 172.

si riduce ad un'analisi semplificatrice, che mette capo a taluni *concetti primitivi non definiti*, di cui vengono postulati i rapporti elementari.

L'analisi istituita a tale scopo dal PEANO (1) riproduce sostanzialmente nella sua parte positiva, il metodo di trattazione di H. GRASSMANN (2), di S. PEIRCE (3) e di R. DEDEKIND (l. c.): dove, posta la *successione dei numeri ordinali*

$$1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots.$$

si assume come *operazione elementare* dell'Aritmetica il passaggio dal numero n al successivo $n+1$, e si porgono quindi *definizioni induttive* dell'addizione e della moltiplicazione; sicchè per es. l'addizione viene definita in base all'assioma

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1.$$

Ora questo sistema grassmanniano, che si dimostra proprio a raccogliere e ordinare logicamente le proprietà algoritmiche dei numeri, in una maniera semplice ed *economica*, viene assunto senz'altro da PEANO, come una risposta al problema dei principî dell'Aritmetica. Per il Nostro non si ha da spiegare o discutere sul significato dei numeri, bensì, ritenendo come concetti primi non definiti «Numero», «Successivo di un numero», «1» o «0», occorre soltanto postulare i semplici rapporti logici di tali concetti (cioè gli assiomi aritmetici), che ne porgono la *definizione implicita*. Come si vede l'indirizzo assiomatico della scuola di PEANO, assimila la fondazione dell'Aritmetica alla fondazione della Geometria secondo il criterio di MORITZ PASCH (Cfr. Articolo Primo, § 12).

Ma tale assimilazione ha qualcosa d'urtante. Infatti il criterio di PASCH si basa sul presupposto che i concetti geometrici primitivi (punto, retta....) designino oggetti o classi d'oggetti empiricamente definiti, e — comunque si voglia criticare questo assunto filosofico — l'interpretazione dei postulati geometrici contiene l'invito ad una *visione*, sia pure *intellettuale* o *immaginativa*, dei rapporti (di appartenenza ecc.) che con essi si esprimono. Ma che cosa siamo invitati a vedere, colla nostra immaginazione, dietro

(1) *Arithmetices Principia*, Torino, 1889.
(2) *Lehrbuch der Arithmetik*, Berlino, 1861.
(3) «American Journal», 1878.

il simbolo non definito del numero? Ogni tentativo in questo senso ci porta a realizzare, per così dire in un mondo intelligibile, non i numeri, bensì oggetti o classi d'oggetti di cui i numeri esprimono dei rapporti logici. E d'altronde non si riesce a comprendere che cosa, di essenzialmente nuovo o diverso, i concetti aritmetici aggiungano alle semplici nozioni logiche, usate nella nostra analisi.

Questa critica si è affacciata nell'ambito stesso di coloro che adottano i simboli della logica matematica di PEANO, per opera di B. RUSSELL (1), il quale rifiuta appunto di distinguere i concetti primitivi dell'Aritmetica dai concetti generali della logica, e ritorna così — traverso una nuova elaborazione sistematica — alla posizione di CANTOR e di FREGE, e alla teoria dei numeri cardinali (2).

§ 6. **Che cos'è logico?** — Ma la tesi che riconduce l'«aritmetico» al «logico», suscita la domanda di definire ciò che è logico. Alla quale si dànno tre risposte, che s'accordano con tre diverse posizioni filosofiche:

1) Secondo la veduta degli empiristi inglesi (STUART MILL) la logica non è che una conoscenza di *fatti generalissimi* che, al pari di ogni altra nozione, deriva dall'esperienza: i «fatti» a cui si accenna, esprimenti gli *assiomi* logici, sarebbero più precisamente le «proprietà degl'insiemi o aggregati d'oggetti».

2) Per KANT la logica esprime un elemento formale, che tiene alla *mente* sperimentatrice e che — pure rivelandosi nello sperimentare — è tuttavia indipendente dall'oggetto della stessa esperienza.

3) Infine la tesi neo-aristotelica — che si svolge da LEIBNIZ, traverso BOLZANO e CANTOR, fino a RUSSELL — pone i rapporti logici come *relazioni d'un mondo intelligibile*: il mondo degli «enti» o dei «possibili», che avrebbe — fuori della nostra mente — una sua propria realtà, cui si subordina la realtà delle cose «esistenti».

(1) *The Principles of Mathematics*, 1893. Cfr. RUSSELL e WHITEHEAD, *Principia mathematica*, Cambridge, 1910-13.

(2) Tuttavia la tendenza puramente formale e simbolica si esprime ancora in nuovi lavori, per esempio in quelli di DAVID HILBERT, *Neue Begründung der Mathematik*, nelle «Abbandlungen del Seminario d'Amburgo» (1872) e *Die logische Grundlagen der Mathematik*, in «Math. Annaler», 88 (1822). E basti citare il motto caratteristico dell'Autore: *In principio era il segno.*

Altrove (1) abbiamo spiegato come quest'ultima tesi *realistica* si connetta alla veduta *simbolica* della logica, che tuttavia in alcuni cultori (per es. in BOOLE e forse ancora in PEANO) appare legata ad una concezione empirica. E all'analisi simbolica della logica, e alla veduta *statica* che essa implica del pensiero, abbiamo contrapposto, da parte nostra, un'*analisi dinamica*, che mette in evidenza le *operazioni elementari* di codesto processo psicologico (2). Infine un esame approfondito del problema, ci ha condotti a conciliare l'empirismo colla concezione kantiana, in una *tesi critica*, che — riconoscendo i due aspetti, subiettivo e obiettivo della logica — postula la sussistenza di fatti generalissimi, come condizione d'accordo della mente colla realtà, che rende possibile l'applicazione della logica.

Lo sviluppo dei principî dell'Aritmetica, che qui offriamo al lettore (perfezionando il lavoro contenuto nella 1ª edizione del 1912), può ritenersi come un'illustrazione della tesi critica sopra accennata. Ma questo sviluppo sale dal concreto all'astratto, e dalle esperienze alle leggi mentali che in esse si discoprono, conformemente all'ordine dell'evoluzione storica delle idee. Così, prendendo le mosse dall'analisi del significato empirico dei numeri, riusciremo a chiarire meglio le esigenze d'una costruzione razionale: la quale basa tutta l'Aritmetica sui *concetti puramente logici* (di classe, ordine, corrispondenza) prodotti dalle operazioni associative del pensiero sopra oggetti dati o supposti, e sugli *assiomi* che esprimono le proprietà fondamentali di codeste operazioni.

II. — IL SIGNIFICATO EMPIRICO DEI NUMERI.

§ 7. **Numeri cardinali.** — Le esperienze da cui nasce il concetto del numero sono relative a *gruppi* o *classi* di *oggetti* (*elementi*) la cui natura è arbitraria; il solo requisito è che si tratti di oggetti individuabili, cioè che non variino o sfumino o si confondano fra loro durante l'esperienza. Ai bambini si offrono a tal uopo vari esempi: dita, noci, mele, sassi, lapis, uomini, ecc.

D'altronde vi sono, come già accennammo, due serie di esperienze elementari che corrispondono all'uso diverso dei *numeri cardinali* e dei *numeri ordinali*.

(1) *Per la Storia della Logica*, 1922.
(2) *Problemi della Scienza*, 1906, cap. III.

Per definire i numeri cardinali si parte dalle esperienze seguenti:

Si abbiano due classi di oggetti dati (intendo dati materialmente davanti agli occhi):

$$(a) = (a_1 a_2 \ldots.)$$
$$(b) = (b_1 b_2 \ldots.).$$

Cerchiamo di *associare* ad ogni elemento della prima classe *un* elemento della seconda, riunendo materialmente gli elementi associati o ponendo un contrassegno che valga a riunirli idealmente nella nostra mente; se l'associazione suddetta si può porre in modo che viceversa ogni oggetto della seconda classe risulti così associato ad *uno* della prima, senza eccezione, si ha fra gli elementi delle due classi (o, come si dice anche, fra le due classi) una *corrispondenza biunivoca*; diremo allora che le due classi (a), (b) sono *equivalenti* e scriveremo

$$(a) = (b).$$

L'equivalenza fra classi di oggetti soddisfa alle tre proprietà fondamentali che, con De Morgan e Vailati, vengono designate come segue:

1) *Proprietà riflessiva*:

$$(a) = (a).$$

Infatti si può associare ad ogni elemento di (a) se stesso.

2) *Proprietà simmetrica*:

$$(a) = (b)$$
$$(b) = (a).$$

Infatti l'associazione di due elementi a, b, è un'operazione mentale simmetrica, cioè indipendente dall'ordine in cui si considerano i due elementi associati.

3) *Proprietà transitiva*:

se

$$(a) = (b)$$

e

$$(b) = (c),$$

anche

$$(a) = (c).$$

Infatti se un elemento a si pensa associato ad un b, e questo b ad un c, restano associati nel pensiero a e c. (La corrispondenza così ottenuta fra (a) e (c) dicesi *prodotto* di quelle poste fra (a) e (b) e fra (b) e (c)).

A queste proprietà si aggiunge la seguente:

4) *Se una classe* (b) *contiene tutti gli elementi di* (a) *e qualche altro elemento, le due classi* (a) *e* (b) *non sono equivalenti.*

Si abbiano le classi

$$(a) = (a_1\, a_2 \ldots .)$$
$$(b) = (h\ a_1\, a_2 \ldots .),$$

dove si suppone per semplicità che la classe (b) contenga un solo elemento oltre gli a.

Se fosse

$$(a) = (b),$$

si avrebbe fra le due classi una corrispondenza biunivoca. In questa ad h corrisponderebbe un certo elemento a_i di (a).

Togliamo h ed a_i dalle due classi rispettivamente; avremo

$$(a_1\, a_2 \ldots .\, a_{i-1}\, a_{i+1} \ldots .) = (a_1\, a_2 \ldots .\, a_{i-1}, a_i, a_{i+1} \ldots .)$$

Ora fra queste due classi intercede una corrispondenza, in cui ad a_i corrisponde un certo elemento a_s; tolti a_i, a_s dalle due classi, rimangono classi equivalenti, e così via di seguito.

Ma, seguitando a togliere successivamente gli oggetti di una classe, *materialmente dati* (o *effettivamente pensati*), la classe si esaurisce (*principio d'induzione matematica*, cfr. § 16); si arriva pertanto a ridursi al caso di una classe composta d'un solo oggetto a_r; e si trova che questa dovrebbe essere equivalente ad una classe che contiene anche un altro elemento:

$$(a_r) = (a_r a_t).$$

Questa conclusione è evidentemente assurda, perchè se si fa corrispondere l'elemento a_r della prima classe all'uno o all'altro elemento della seconda, rimane sempre in questa seconda classe un elemento a cui non viene associato alcun elemento della prima.

Il ragionamento riesce ugualmente (*a fortiori*) se la classe (b) contiene più di un elemento oltre a_r.

La proprietà 4) si può enunciare in altro modo, ponendo la seguente

DEFINIZIONE. — Se (a) e (b) sono due classi e la classe (a) è equivalente ad una classe contenuta in (b) e non coincidente con (b), cioè ad una *parte propria* di (b), la classe (b) si dice *prevalente* ad (a), e si scrive:

$$(b) > (a).$$

Allora la proprietà 4) si può enunciare dicendo:

4′) *Se di due classi* (a), (b), *l'una è prevalente all'altra, le due classi non sono equivalenti.*

O più brevemente (tenendo presente la prop. 3):

Una classe non può essere equivalente ad una sua parte propria.

Confrontiamo ora due classi qualunque di oggetti materialmente dati. Si ha:

5) *Date due classi* (a), (b), *o esse sono equivalenti o una di esse è prevalente all'altra* (cioè questa è equivalente ad una parte di quella).

Tale proprietà si dimostra in base allo stesso principio d'induzione adoperato per stabilire la 4). Togliamo da ciascuna delle due classi (a), (b) un elemento; per es.:

$$a_1, \quad b_1$$

e associamo idealmente questi elementi; la questione è ridotta al confronto delle classi residue. Ma successivamente così operando si giunge ad esaurire una delle due classi, per es. (a), mentre l'altra (b) può essere contemporaneamente esaurita o non ancora esaurita. Risulta quindi che

$$(a) = (b) \text{ oppure } (b) > (a).$$

Infine notiamo che:

6) *Se di tre classi* (a), (b), (c)

$$(a) > (b) \text{ e } (b) > (c)$$

anche

$$(a) > (c);$$

se

$$(a) > (b) \quad \text{e} \quad (b) = (c)$$

anche

$$(a) > (c).$$

Questa proprietà risulta immediatamente dalla **definizione** della prevalenza.

7) Corollario. — *Se di due classi* (a) *e* (b):

$$(a) > (b),$$

non può essere

$$(b) > (a).$$

Invero se così fosse risulterebbe

$$(a) > (a).$$

contro la prop. 4) (cfr. la 1).

Osservazione. — In altri termini *la relazione di prevalenza fra classi soddisfa alla proprietà transitiva* (6) *ma non alle proprietà simmetrica e riflessiva.*

Le precedenti proposizioni conducono a classificare o distribuire le classi o gruppi d'oggetti in *classi di classi* per modo che:

a) *Insieme ad una classe* c *appartengono alla medesima classe di classi le sue equivalenti.*

b) *Insieme a* c *non può trovarsi nella medesima classe di classi una parte di* c.

In base a questa distribuzione si può costruire un concetto astratto, che vale come contrassegno delle classi (equivalenti) appartenenti ad una medesima classe di classi, e corrisponde ad una qualsiasi delle classi suddette pensata come sostituibile (*uguale*) ad un'altra qualunque di esse. Questo concetto è il *numero* (*cardinale*) *degli oggetti d'una classe.* L'equivalenza delle classi (a), (b) si trasforma quindi nell'uguaglianza: numero degli elementi di (a) = numero degli elementi di (b); il significato di questa uguaglianza consiste appunto nell'indicare l'astrazione anzidetta il cui resultato è l'identità del concetto astratto = numero cardinale corrispondente alla classe di classi $\{(a), (b)....)\}$.

§ 8. **Astrazione e uguaglianza.** — La definizione data del numero è una *definizione per astrazione*: si definisce il «numero degli oggetti d'una classe» stabilendo quand' è che i numeri corrispondenti a due classi sono «eguali».

Questo modo di definizione s'incontra già nel libro 5° degli

Elementi d' EUCLIDE, dove appunto non si dice ciò che sia il rapporto di due grandezze, ma soltanto che cosa si deve intendere per « rapporti eguali ».

Ma per chiarire tali definizioni conviene esaminare che cosa significhi l'operazione logica di astrazione, su cui esso si basa.

Data una classe di oggetti, la mente può sempre costruire il *concetto astratto dell'elemento della classe* : per es. dalla classe (Tizio, Caio....) si ricava il concetto astratto di uomo, da una classe di rette parallele si ricava il concetto di direzione ecc. La costruzione del concetto astratto dell'elemento di una classe, ha questo significato psicologico ; è la finzione di un *quid comune* agli elementi della classe, ciascun dei quali viene immaginato per così dire come somma del *quid* comune e di un *quid* diverso che ne caratterizza l'individualità. Così ad es. si concepisce un ente astratto « l'uomo » da cui Tizio, Caio ecc. si ottengono coll'aggiunta di determinati caratteri, una direzione (astrattamente determinata) comune a tutte le rette parallele ecc.

Come abbiamo avvertito nel cenno storico introduttivo (§ 2), gli antichi si rappresentavano i concetti astratti come enti reali posti fuori di noi in un mondo intelligibile (*idee platoniche*), e a questa rappresentazione si legano le celebri controversie medioevali fra *realisti* e *nominalisti*.

Ma, riconosciuto il carattere mentale dell'astrarre, conviene tuttavia determinare il significato logico proprio di questa operazione, che i logici matematici aventi adottato l' ideografia di PEANO confondono colla riunione di più oggetti in una classe. Invero, dal riunire più oggetti a, b, c.... sorgono *due enti logici diversi* : la *classe*, a e b e c.... e il *concetto astratto*, a o b o c.... che, in qualche modo, si può ritenere come resultato dell'operazione inversa per cui dalla classe si ritorna a uno degli elementi che la costituiscono.

Rispetto a quest'operazione, si spiega il significato dell'*uguaglianza*. L'uguaglianza di due oggetti non ha alcun significato di per sè, ma solo per riguardo ad una classe in cui essi si trovino riuniti, ed è sempre *relativa al concetto astratto della classe in cui vengono considerati* ; per es. « segmenti uguali » sono quelli che appartengono ad un medesimo sistema di segmenti generato dalle possibili posizioni di un segmento (rigido) che si muove liberamente nello spazio. Il significato psicologico dell'uguaglianza è la finzione di ritrovare lo stesso *quid* identico negli elementi della classe che abbiamo detto costituire appunto « l'astratto » ; in altre parole ogni eguaglianza si concepisce come « somma di un'identità e di una diversità ».

All'uguaglianza spettano le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, che esprimono qui le proprietà fondamentali del processo logico d'associazione e astrazione. Viceversa ogni relazione fra oggetti qualsiansi che goda delle tre proprietà suddette può considerarsi come un'uguaglianza, perchè essa porge un modo determinato di classificazione degli oggetti dati, ove si pongono in una medesima classe gli oggetti legati dalla relazione indicata.

Si aggiunga che, secondo l'analisi di A. Padoa (che si può ritenere come illustrativa del pensiero di Leibniz), in luogo di considerare l'uguaglianza come una relazione fra due oggetti a, b di una classe rispetto all'astratto, si può considerare l'astratto funzione di a come uguale all'astratto funzione di b ; ad esempio invece di dire che due segmenti sono uguali, si può dire che la lunghezza di un segmento è uguale alla lunghezza dell'altro. Questo giudizio riveste allora la forma di una identità, ma il suo valore non tautologico si desume dalle considerazioni che seguono.

Ogni concetto astratto corrisponde ad una classe di oggetti. Ciò che i logici designano come *estensione del concetto* è l'insieme degli oggetti che compongono la classe suddetta ; così due concetti aventi la medesima estensione contengono gli stessi oggetti. Accanto all'estensione i logici considerano la *comprensione* del concetto, cioè l'insieme delle proprietà (per così dire esterne) che caratterizzano la classe di oggetti corrispondente. Ora due serie diverse di proprietà possono definire la medesima classe di oggetti ; così per es. la classe dei triangoli equilateri coincide con quella dei triangoli equiangoli. Affermare l'uguaglianza di due concetti astratti significa in generale riconoscere che due classi definite mediante proprietà diverse, cioè differenti dal punto di vista della comprensione, sono identiche dal punto di vista dell'estensione, ossia contengono gli stessi elementi.

§ 9. **Nota critica.** — Alle cose dette innanzi, che mirano a spiegare nei più brevi termini una questione assai delicata, stimiamo opportuno di aggiungere qualche sviluppo critico.

Realismo e *nominalismo* non esprimono soltanto due *dottrine* filosofiche, ma anche due *tendenze* opposte della mente umana :

1) La tendenza, che si può caratterizzare come *realistica* segue di preferenza il cammino deduttivo, dal generale al particolare; e però si attacca alla *logica della comprensione*, ritenendo il *concetto* come *somma delle proprietà che lo definiscono*, o come interferenza di concetti più generali ed astratti (generi, specie). Qui dunque l'astratto, il *quid* comune agli elementi d'una classe, è un presupposto dell'esistenza stessa della classe, i cui elementi verranno ulteriormente *distinti* e individuati in rapporto ad esso, coll'aggiunta di differenze specifiche.

2) Invece la tendenza *nominalistica* va per la via induttiva, dal particolare al generale, e però si attacca alla *logica dell'estensione*. Qui il concetto è pensato come una *classe d'individui*, rispetto a cui questi vengono eguagliati. Pertanto i realisti assumono come *prima logica* i concetti *universali*, e la difficoltà è per essi nel giungere agli *ultima*, che sono gl'individui: in questo senso domandavano gli scolastici: «dove trovare un *principium individuationis?*». All'opposto nella seconda via il *primum* che si suppone dato è l'*individuo*, e sono gli universali che diventano l'ultimo irraggiungibile (*flatus vocis*).

Ora, lasciando da parte la questione filosofica se veramente nell'ordine dei concetti possa darsi un *primum*, sia universale sia individuale, non si può negare almeno il significato relativo dei due procedimenti del pensiero, ascendente e discendente o induttivo e deduttivo, che dir si vogliano. E allora la questione in cui ci siamo imbattuti si riduce a questa: se il concetto abbia il medesimo significato per la logica comprensiva e per l'estensiva.

Il linguaggio comune segna qui una differenza: l'umanità e l'uomo, l'Italia e l'italiano, l'esercito e il soldato, sono coppie di nomi che rispondono ciascuna ad una classe e al corrispondente astratto, cioè — in qualche modo — allo stesso concetto ritenuto una volta per la sua estensione e l'altra per la sua comprensione.

L'illegittimità di confondere i due significati risulta da ben noti sofismi che attrassero già l'attenzione degli Scolastici. Per esempio:

Pietro e Paolo sono apostoli;
Gli apostoli sono dodici;
Dunque Pietro e Paolo sono dodici.

È chiaro che la fallacia sta qui nell'ambiguità del termine medio, poichè la prima proposizione asserisce che Pietro e Paolo sono membri della classe degli apostoli, mentre la seconda esprime la proprietà di questa classe, di essere una dozzina: si confonde dunque il concetto astratto dell'«apostolo» colla «classe degli apostoli».

Tuttavia questa distinzione fondamentale della classe e dell'astratto è stata disconosciuta nella costruzione del sistema dell'ideografia logico-matematica (1), e PEANO — fatto accorto della difficoltà contenuta nel citato sofisma — ha preferito risolverla aggiungendo ai simboli dei suoi predecessori un nuovo segno per la copula «è» «è un», di cui distingueva in tal guisa — sulle tracce degli Scolastici — un *sensus divisi* e un *sensus compositi.*

Ma la negletta distinzione si riaffaccia necessariamente nelle «definizioni per astrazione», che perciò debbono offrire ai logici matematici un punto incomprensibile, proprio là dove il loro linguaggio introduce un'ambiguità che non appartiene al linguaggio comune.

Così questo modo di definizione, accolto in un primo tempo da PEANO, è andato incontro alle critiche della scuola.

Ora ecco come la difficoltà appare nella definizione del numero. GIORGIO CANTOR (2) dice che il numero cardinale si ottiene dalla classe, «per mezzo della nostra attiva facoltà di pensare», facendo astrazione dalla natura e dall'ordine dei suoi elementi, di guisa che diverse classi hanno ugual numero (o potenza) se sono equivalenti.

BERTRAND RUSSELL (3) critica questo modo di definizione, avvertendo che esso va incontro a un difetto formale assolutamente fatale, perchè non si può mostrare che esiste un solo oggetto soddisfacente alla definizione. Per rimediarvi egli identifica il numero degli oggetti d'una classe C colla «classe di tutte le classi» equivalenti a C.

C. BURALI-FORTI (4) si è accorto in seguito degli inconvenienti di questo sistema e che occorre introdurre in luogo della classe

(1) Forse c'è qui un motivo storico: PEANO, e più ancora RUSSELL, hanno sovrapposto una veduta realistica alla costruzione d'un simbolismo ispirato a vedute nominalistiche, come quello di BOOLE. Ora i nostri logici e matematici non sanno dove allogare il «concetto astratto» perchè hanno già pensato la «classe» come «concetto astratto».

(2) «Math. Annalen», 46 (1845).

(3) «Principles of Mathematics», Cambridge, 1903, p. 114.

(4) *Gli enti astratti definiti come enti relativi ad un campo di nozioni,* in «Rendic. Lincei», 1912. «Logica matematica», 2ª ed., p. 350. – Cfr. la polemica ENRIQUES-BURALI-FORTI, in «Periodico di Matematiche», 1922.

delle C una funzione $f(C)$; tuttavia non riesce a determinarla, poichè se per C e C' equivalenti si ha $f(C) = f(C')$, si ha anche $\varphi\{f(C)\} = \varphi\{f(C')\}$, dove si designi con φ una funzione arbitraria. Ma questa indeterminazione, che troppo facilmente viene illustrata da esempi, prova soltanto che vi è errore nel modo di porre il problema. E la soluzione sta proprio in quella «facoltà attiva del nostro pensiero» invocata dal CANTOR, che il BURALI-FORTI prende a dileggio.

Ove si chieda ad un logico matematico come definisce la «classe» formata da più oggetti *a*, *b*, *c*..., questi non può rispondere altro se non che il concetto di classe ha un significato logico primitivo: che resulta poi da un'operazione fondamentale del pensiero, — il «riunire» — espresso nel linguaggio comune dalla particella congiuntiva «e». Così, ove altri, in luogo di assumere la classe (*a*, *b*, *c*....) come il concetto primitivamente definito

a e *b* e *c*....

si avvisasse di considerarla una funzione da determinare

$f(a, b, c...)$,

andrebbe incontro a scoprire che f non può essere in alcun modo determinata.

Il medesimo si deve dire per il «concetto astratto» che formiamo nella nostra mente pensando ad un individuo fra i dati *a*, *b*, *c*..., come sostituibile da uno qualunque degli altri (suoi eguali), e che designamo con la particella disgiuntiva «o»:

a o *b* o *c*....

Così per es. «il coniuge» è definito correttamente dicendo «il marito o la moglie», tantochè questa definizione si può sostituire al termine definito in ogni disposizione d'un codice che abbia «il coniuge» come soggetto.

E anche dell'astratto si può dire che è un concetto logico primitivo che ha un senso determinato soltanto per riguardo alla *astrazione*, proprio come la «classe» rispetto alla *riunione*.

Questa critica delle definizioni per astrazione è contenuta nell'analisi della *logica*, come processo operativo del pensiero, che ENRIQUES ha svolto fino dal 1906 nei «Problemi della Scienza» (cap. III) e che ha poi ripreso in altri lavori successivi (1). Ma è

(1) Per es. *Die Probleme der Logik*, in «Encyclopädie der Phil. Wissenschaften», edita da WINDELBAND e RUGE, Tubinga, 1912.

singolare che il significato di essa sia sfuggito a menti abitualmente sottili e che nessuno di coloro che non ne accettano le vedute si sia sentito di scendere a discuterle sul loro proprio terreno.

§ 10. **Numeri ordinali.** — Per definire i numeri ordinali si parte dalle esperienze che seguono:

Una classe di oggetti (materialmente) dati si può *ordinare* (mediante un'opportuna disposizione nello spazio, o mediante contrassegni o semplicemente nel pensiero), pensando un elemento di essa come *primo* e gli altri elementi, come dati *successivamente uno dopo l'altro*; si ottiene così una *classe ordinata*, *serie* o *successione*, nella quale:

1) dati due elementi qualunque, uno di essi *succede* all'altro e questo *precede* quello;

2) se l'elemento c succede a b e b succede ad a, anche c succede ad a;

3) vi è un *primo* elemento, che precede tutti gli altri, e un *ultimo* elemento, che segue a tutti;

4) ogni elemento a, ad eccezione dell'ultimo, ha *un successivo immediato* b (diguisachè non vi è alcun elemento che succeda ad a e preceda b);

5) ogni elemento, ad eccezione del primo, ha *un precedente immediato* (di cui è *il* successivo).

Ciò posto si considerino due serie o classi ordinate:

$$(a) \equiv (a_1 a_2 a_3 \ldots . a_n \ldots .)$$
$$(b) \equiv (b_1 b_2 b_3 \ldots . b_n \ldots .).$$

Cerchiamo di stabilire fra di esse una *corrispondenza biunivoca ordinata*, per modo che:

1) al primo elemento di (a) corrisponda il primo di (b);

2) se due elementi a, b si corrispondono, si corrispondano anche i loro successivi.

In forza di queste condizioni, ad a_2, successivo di a_1 in (a), dovrà corrispondere b_2 successivo di b_1 in (b), e quindi ad a_3, b_3 ecc. Così procedendo si otterrà effettivamente una corrispondenza ordinata (*completa*) fra (a) e (b) se le due classi sono equivalenti; altrimenti, se per es. $(b) > (a)$, si porrà una corrispondenza ordinata fra (a) ed una parte di (b), restando senza corrispondenti gli elementi che succedono in (b) al corrispondente dell'ultimo di (a);

si può anche dire che si ha in ogni caso una corrispondenza ordinata *similare* fra le due serie (a) e (b). E conviene avvertire che l'esistenza e la determinatezza di questa si basa sul principio d'induzione, mercè cui si è introdotto nel § 7 il carattere *finito* delle classi d'oggetti materialmente dati.

Si considerino ora tre serie qualunque

$$\begin{aligned}(a) &= (a_1 a_2 \ldots a_n \ldots)\\ (b) &= (b_1 b_2 \ldots b_n \ldots)\\ (c) &= (c_1 c_2 \ldots c_n \ldots),\end{aligned}$$

ed essendo a_n un elemento qualsiasi di (a), si supponga soltanto che ciascuna delle classi considerate sia prevalente alla parte $(a_1 a_2 \ldots a_n)$.

In tale ipotesi:

si può porre una determinata corrispondenza ordinata (similare) fra le serie (a) e (b), ed in questa all'elemento a_n corrisponde un determinato elemento b_n di (b);

si può porre analogamente una determinata corrispondenza ordinata (similare) fra le serie (a) e (c), ed in questa ad a_n corrisponde un determinato elemento c_n.

Ebbene: se si confrontano le serie (b), (c) ponendo tra di esse la corrispondenza ordinata, in questa all'elemento b_n corrisponde l'elemento c_n.

In forza di questa proprietà si può porre la seguente

Definizione. — *Elementi di due serie che si corrispondono in una corrispondenza ordinata si dicono di* **ugual** *posto.*

Infatti questa relazione gode delle proprietà di un'uguaglianza (riflessiva, simmetrica e transitiva).

Diventa quindi possibile di classificare gli elementi di quante si vogliano serie ponendo in una medesima classe tutti gli elementi di ugual posto (e arrestando la classificazione alla serie minima). Nel quadro seguente si vedono appunto costruite le classi $k_1 k_2 \ldots k_n$ i cui elementi (disposti sopra una verticale) appartengono alle serie (a), (b), (c)..., ed occupano in esse ugual posto:

$$\begin{array}{r|c|c|c|l} k_1 & k_2 & & k_n & \\ (a) = a_1 & a_2 & \ldots & a_n & \ldots \\ (b) = b_1 & b_2 & \ldots & b_n & \ldots \\ (c) = c_1 & c_2 & \ldots & c_n & \ldots \\ \cdots\cdots & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot \end{array}$$

Il concetto astratto dell'elemento della classe $\mathrm{k_n}$ *si dice numero d'ordine dell'elemento* $\mathrm{a_n}$ *nella serie* (a), *ed ugualmente di* $\mathrm{b_n}$ *in* (b) *ecc.*

Questo numero (*ordinale*) contrassegna il posto di a_n e di tutti gli elementi di ugual posto nelle serie considerate.

§ 11. **Confronto fra numeri cardinali e numeri ordinali.** — *Ad ogni numero ordinale* (n), designante il posto di a_n nelle serie

$$a_1 a_2 \ldots\ldots a_n \ldots\ldots,$$

corrisponde un numero cardinale, cioè quello che designa il numero degli oggetti della classe

$$(a_1 a_2 \ldots\ldots a_n).$$

Viceversa si riprenda la classificazione delle classi in classi di classi equivalenti stabilita al § 7. In forza delle proprietà (1.... 7), queste classi di classi ($k_1 k_2 \ldots\ldots k_n \ldots\ldots$) si trovano disposte in una serie ordinata, come indica il seguente quadro:

k_1	k_2		k_n	
(a_1)	$(a_1\,a_2)$	....	$(a_1 a_2 \ldots\ldots a_n)$	....
(b_1)	$(b_1\,b_2)$	....	$(b_1 b_2 \ldots\ldots b_n)$	....
(c_1)	$(c_1\,c_2)$	....	$(c_1 c_2 \ldots\ldots c_n)$	....
. .	. . . .	. .	. . . .	. .

Pertanto al *numero cardinale* n, che designa il numero degli oggetti di ciascuna classe di k_n, *corrisponde un numero ordinale,* cioè quello che designa il posto di k_n nella serie

$$k_1 k_2 \ldots\ldots k_n \ldots\ldots$$

Ed è chiaro che il principio d'induzione, adoperato al § 7, porta che tutte le classi di oggetti sensibilmente dati si troveranno in questa classificazione. Pertanto al *numero cardinale* n, che designa il numero degli oggetti di ciascuna classe di k_n, *corrisponde un numero ordinale,* cioè quello che designa il posto di k_n nella serie

$$k_1 k_2 \ldots\ldots k_n \ldots\ldots$$

L'univocità della corrispondenza resulta qui dalla proprietà 4 o 4': essa esprime il cosiddetto *principio d'invarianza del numero di* SCHRÖDER (cfr. § 15).

Ora, riferendoci alla corrispondenza biunivoca fra numeri cardinali e ordinali stabilita come si è detto, immaginiamo di associare ad ogni numero cardinale (n_c) il suo corrispondente ordinale (n_o): costruiamo così le classi:

$$(1_c 1_o),\ (2_c 2_o) \ldots.,\ (n_c n_o) \ldots.$$

Dalla classe ($n_c n_o$) *possiamo ottenere per astrazione il concetto del numero astratto* n, simbolo comune di un numero cardinale e del corrispondente ordinale (1).

NOTA. — Nella pratica s'impara difatti a operare sopra numeri astratti (1, 2, 3,....) ciascuno dei quali riceve poi il significato di numero cardinale e concretamente di numero degli oggetti di una certa classe, oppure di numero ordinale e precisamente di numero d'ordine di un elemento di una certa serie.

Dal doppio uso dei numeri cardinali e ordinali è nata alla fine del secolo scorso la questione largamente dibattuta nel pubblico «*se il secolo ventesimo cominci col 1° gennaio 1900 o col 1° gennaio 1901*».

La questione consiste in questo: il numero (1900 o 1901) che si scrive nella data (riferendosi alla comune cronologia dell'èra cristiana) designa il numero cardinale degli anni compiuti, a partire dalla (presunta) nascita di G. C., oppure il numero d'ordine dell'anno in corso per riguardo ad una serie di anni che ha la medesima origine?

Nel primo caso il principio del secolo ventesimo sarebbe il 1° gennaio 1900, nel secondo il 1° gennaio 1901.

Ora l'Aritmetica, o qualsiasi considerazione *a priori*, è incapace di sciogliere una questione di questo genere: tanto varrebbe pretendere di sciogliere *a priori* la questione se chi parla di un «piede» intenda riferirsi al sistema metrico inglese o a quello di un altro paese in cui si usi una misura diversa collo stesso nome.

La risposta si deve domandare alla storia. La quale c'insegna che quando (con DIONIGI IL PICCOLO) s'introdusse l'uso di contare gli anni dalla nascita di G. C., il numero che figura nella data fu

(1) In questa trattazione empirica i due concetti del numero come «cardinale» o «ordinale» vengono presi ambedue come primitivi; in seguito — nella teoria razionale — il «cardinale» si farà derivare per astrazione dall'«ordinale».

impiegato come numero ordinale. Perciò il secolo ventesimo è cominciato col 1° gennaio 1901.

Per curiosità ricorderemo che una questione analoga a quella testè indicata sorse anche alla fine del secolo XVIII, e si trova una nota dell'astronomo ARAGO che ne definisce chiaramente i termini, nel senso sopra indicato.

III. — LA SERIE INFINITA DEI NUMERI.

§ 12. **Concetto razionalistico del numero.** — Abbiamo presentato il concetto del numero come resultante per astrazione dal confronto di classi e serie di oggetti materialmente dati, in guisa che le proprietà dei numeri apparivano come espressione di semplici esperienze elementari, intorno alla realtà fisica. Ma come mai tali esperienze potrebbero avere un valore probante al di là dei limiti in cui effettivamente furono esperite?

Operando sopra oggetti e gruppi di oggetti materialmente dati non si arriva *in fatto* che a numeri non troppo grandi. Un uomo, occupato a contare dieci ore il giorno per cinquanta anni della sua vita, arriverebbe press'a poco ad un miliardo. Le esperienze effettive che dovrebbero verificare le proprietà di numeri così grandi richiederebbero un tempo assai maggiore, donde segue un'immensa difficoltà pratica per ottenere siffatte verifiche, quando non si voglia ricorrere all'opera simultanea di vari uomini.

D'altronde una simile impresa, volta alla diretta verificazione delle proprietà aritmetiche dei grandi numeri, non è stata mai tentata — che si sappia — dalla società umana; e se anche si ammetta che una verifica indiretta resulti dal conteggio di numeri superiori al miliardo, che occorre, per esempio, nei bilanci degli Stati moderni, è pur certo che, anche al di là di tali limiti, l'applicazione delle proprietà fondamentali dei numeri non solleva alcun dubbio.

Bisogna dunque ammettere che la conoscenza di cui si tratta non deriva dalla pura esperienza bruta del conteggio su classi di oggetti. Ed invero se l'intelligenza di certi animali o dei selvaggi può essere misurata dal numero massimo cui essa può giungere, per l'uomo civile non esiste alcun massimo nella serie dei numeri.

La nostra mente supplisce alle esperienze effettuate con esperienze immaginate, la cui possibilità di ripetizione indefinita ci porge la costruzione ideale di una serie infinita di numeri.

Dunque il fondamento dell'Aritmetica si trova non soltanto nelle esperienze elementari sulle classi di oggetti materialmente dati, ma anche nella facoltà della mente di immaginare esperienze più estese e predeterminarne il resultato mercè la combinazione e ripetizione di processi già esperiti.

Da questa osservazione si passa naturalmente a discutere la domanda:

Fino a che punto è necessario operare sopra oggetti e gruppi di oggetti materialmente dati?

Si può fondare l'Aritmetica senza ricorrere al mondo esterno, col semplice esame riflesso del nostro pensiero?

È chiaro anzitutto che la natura degli oggetti su cui si esperimenta è affatto indifferente al resultato delle esperienze elementari che sottostanno al concetto di numero; è anche indifferente che si ricorra ad esperienze visive, auditive o tattili ecc. Non vi è quindi difficoltà ad ammettere che si possa anche ricorrere semplicemente ad esperienze mentali. Un uomo, dotato di sufficiente forza di astrazione, il quale sia cieco, sordo, muto e paralizzato, potrebbe *pensare* degli oggetti (anche senza immaginarli in modo preciso), e operare con *associazioni* e *astrazioni* puramente ideali sopra classi di oggetti pensati. Queste esperienze mentali sostituiscono le esperienze elementari su oggetti concreti, analizzate innanzi.

A questo punto di vista si riattacca la *tesi razionalistica* che: *le esperienze elementari conducenti alle definizioni dei numeri non vertono sulle proprietà obiettive degli oggetti o delle classi d'oggetti considerati, ma esprimono piuttosto le leggi operative del nostro stesso pensiero, dell'associazione e dell'astrazione logica.*

E così, in tale aspetto, le proposizioni fondamentali sui numeri si palesano non più come enunciati di *fatto* (*a posteriori*), ma come verità necessarie (*a priori*) che rispondono alla struttura e alla funzione della nostra mente.

Il contrasto fra le due tesi empirica e razionalistica si concilia in una *veduta critica* cui già accennammo nell'introduzione storica, la quale si può formulare come segue:

I principî della teoria delle classi, i numeri e le loro relazioni, corrispondono ugualmente alle leggi logiche (*assiomi*) dei processi d'associazione e d'astrazione cui dà luogo il pensiero, e a proprietà generali dei gruppi di oggetti reali, sotto la condizione d'invarianza di questi e nei limiti in cui tale condizione è soddisfatta.

In quei principî si riconosce dunque un duplice contenuto subiettivo e obiettivo, il cui confronto può essere spiegato dicendo che i pensieri vengono associati nell'intelletto in modo corrispondente a quello con cui si possono associare in gruppi dei sassi. L'Aritmetica non è un'opinione, perchè i cassieri non possono disporre ad arbitrio del contenuto della cassa, e le loro operazioni mentali secondo le regole di calcolo, conducono ad *aspettative* verificate.

Resta la questione filosofica di sapere se sia la mente umana che ha per così dire imitato nei suoi processi l'esperienza del riunire oggetti materiali, o se viceversa la natura dell'intelletto determini *a priori* quelle operazioni ed esperienze; ma una tale questione non ha alcun senso positivo perchè non ci è dato immaginare l'intelletto umano isolato dalla realtà sensibile che lo circonda, più che questa realtà all'infuori del pensiero che la rappresenta. La facoltà di osservare e sperimentare e quella di ragionare costituiscono infatti i due lati inseparabili di un medesimo sviluppo psicologico, che sfugge al nostro esame obiettivo perdendosi nelle tenebre dell'infanzia.

Dal punto di vista razionalistico riterremo tuttavia la veduta che è possibile la costruzione dei numeri e dell'Aritmetica movendo da un puro esame riflesso del pensiero e delle sue operazioni associative. Ma avvertiremo che, per quanto l'anzidetto esame tenda in ultima analisi a riconoscere leggi del nostro modo di pensare, implicite in ogni esperienza ragionata, queste leggi o assiomi (*a priori*) non si possono scoprire che mediante una riflessione obiettiva (*a posteriori*) sui prodotti del pensiero stesso (Fries); cioè mediante l'analisi del ragionamento matematico ovvero quella dei linguaggi naturali o dei possibili linguaggi convenzionali o sistemi di segni, mercè cui si tende a fondare la Logica grammaticale o simbolica.

Insisteremo infine su ciò che, per costruire la serie infinita dei numeri, non bastano gli assiomi logici esprimenti le proprietà fondamentali dell'associazione e astrazione, ma occorre un *postulato esistenziale* affermante la ripetibilità indefinita dell'atto del pensare, o la possibilità di determinare *a priori* una serie illimitata di associazioni; l'infinità della serie dei numeri importa appunto questa potenzialità della mente umana che si traduce appunto nel postulato: *dato un numero qualsiasi, esiste sempre un numero successivo ad esso.*

Nota. — Il riconoscimento che la serie dei numeri è infinita, stabilisce, si può dire, una linea di demarcazione fra la mentalità dell'uomo minimamente civilizzato e la mentalità del selvaggio. Infatti l'intelligenza dei selvaggi, come quella degli animali, si suol misurare col numero più alto a cui essa arriva, al di sopra del quale sembra non concepire che una pluralità indistinta.

La considerazione puramente empirica dei numeri trova rispondenza nei *sistemi naturali* di segni o di suoni con cui i numeri si rappresentano. La rappresentazione convenzionale dei numeri mira a rendere esprimibili i numeri più alti, e nella sua forma più evoluta esprime un processo di formazione della serie infinita.

Il sistema di numerazione moderno, basato sul posto delle cifre e sulla considerazione dello zero, fu scoperto da un prete bramino indiano, venne nell' 800 a conoscenza degli Arabi, e si diffuse in Europa nel secolo XIII per opera di Leonardo Pisano detto il Fibonacci.

§ 13. **Classi finite e infinite.** — Quando si oltrepassa coll'immaginazione il dato reale dell'esperienza e ci si solleva alla considerazione della serie infinita dei numeri, si hanno — nel pensiero — non più classi di oggetti effettivamente rappresentati o pensati, ma classi di oggetti *pensabili*, in determinate condizioni, cioè *elementi supposti*.

Ora si presentano innumerevoli modi di estendere colla supposizione i dati sperimentali, e nascono così diverse *classi infinite* di oggetti : un esempio è offerto dalla classe di punti che costituisce una retta ; anche qui i punti non possono essere tutti effettivamente pensati uno dopo l'altro, ma pur tuttavia sono supposti come pensabili in guisa da dar luogo a talune relazioni di ordine ecc.

Ma l'estensione del concetto di classe alle classi infinite dà luogo a modificare le relazioni analizzate nel § 7. In quel paragrafo si è usato infatti ripetutamente il principio sperimentale che: « togliendo, uno dopo l'altro, gli elementi d'una classe, si arriva ad esaurire la classe », il cui significato è appunto la finitezza della classe considerata. Non valendo più questo principio vediamo cadere la prop. 4) o 4') del § 7 :

Una classe infinita può essere equivalente ad una sua parte.

Data la serie dei numeri

$$1,\ 2,\ 3, \ldots\ n \ldots,$$

è chiaro ch'essa è equivalente a quella che si ottiene togliendo il primo numero:

$$2, 3, 4, \ldots n'$$

perchè fra le due intercede la corrispondenza:

$$n' = n + 1.$$

Parimente, mercè una riduzione proporzionale (similitudine) un segmento, una retta, una figura qualsiasi del piano o dello spazio, può essere posta in corrispondenza con una sua parte.

Sembra che vi sia qui una proprietà generale; tutte le volte che è data una classe infinita, riconosciamo in essa una parte equivalente al tutto. Cerchiamo di provare che questa proprietà sussiste infatti per ogni classe infinita.

Anzitutto: se una classe è *numerabile*, cioè può esser fatta corrispondere biunivocamente alla serie infinita dei numeri 1, 2, 3.... essa è equivalente ad una sua parte (quella che corrisponde alla serie 2, 3,...).

In secondo luogo: se una classe C contiene una serie numerabile S, si può porre come innanzi una corrispondenza fra S ed una sua parte ed in pari tempo far corrispondere ad ogni elemento di C fuori di S se stesso; con ciò resta provato che C è equivalente ad una sua parte.

In terzo luogo si consideri una classe C qualsiasi: si scelga in C un elemento arbitrario che si designerà con 1, quindi un secondo elemento che si designerà con 2, e così via.

Se, dopo un numero finito di scelte la classe C è esaurita, essa corrisponde ad una classe finita (1, 2, 3,... n) ed è finita com'essa; se così non è, *sembra* che la classe C contenga una classe numerabile in corrispondenza colla serie infinita (1, 2, 3,...), e però che essa sia equivalente ad una sua parte.

Tuttavia questa deduzione contiene un *punto delicato*: infatti essa suppone la possibilità di compiere entro C, non solo un numero grande di scelte, ma un *numero infinito di scelte arbitrarie*. Questa possibilità trascende le facoltà del pensiero umano, a meno che non si possa fissare una *regola che determini* a priori *le scelte successive, dipendentemente da un numero finito di operazioni*. Una regola siffatta è facile a trovare per tutte le classi di cui il nostro pensiero ha effettivamente costruita un' immagine; ma l' indeterminatezza del concetto generale di classe lascia indecisa la questione se la possibilità di una tal regola sia data per ogni classe. A dirimere tale questione ZERMELO (1) ha introdotto il *postulato*: data una classe C, e considerato l' insieme I di tutte le sottoclassi che ne costituiscono le parti proprie, si può stabilire fra questo e C una corrispondenza univoca (non univocamente invertibile) in cui ad ognuna di tali sottoclassi corrisponda un suo elemento.

È chiaro che *per le classi soddisfacenti al postulato di* ZERMELO *la possibilità di stabilire una corrispondenza biunivoca fra una classe ed una sua parte propria appartiene a tutte le classi infinite, e costituisce quindi un carattere distintivo fra le classi infinite e le classi finite.*

Ma non bisogna farsi illusione sul valore del postulato di ZERMELO e sulle conseguenze che si ha il diritto di trarne! Un postulato esprime sempre e soltanto una condizione eventualmente restrittiva per la definizione degli enti che vi si sottopongono: perciò non si ha il diritto di applicare *a priori* il postulato di ZERMELO a classi che siano state indipendentemente definite, per es. alla classe costituita dai punti d' un segmento ecc. Ora, per quanto concerne la questione posta innanzi, occorre limitarsi all'osservazione che tuttavia, da tutte le classi infinite che ci sono praticamente conosciute, si può sempre estrarre una successione numerabile, che permette di riferire la classe stessa ad una sua parte propria. L'applicazione del postulato di ZERMELO sembra dunque in qualche modo giustificata *a posteriori*, in ordine alla nostra questione; all'opposto le altre conseguenze, di maggiore portata, che l'autore ha creduto di trarre dal suo principio, sono ben lungi da dar luogo ad una qualsiasi giustificazione. Ma di ciò più avanti!

§ 14. **Potenza delle classi infinite.** — Ora accenneremo come la teoria dei numeri cardinali, relativi a classi finite, abbia dato luogo ad una estensione per le classi infinite. Il concetto di *potenza* di una classe, dovuto a G. CANTOR, risponde appunto al concetto di *numero cardinale infinito* (2).

A base di questa teoria di CANTOR sta l'osservazione che il confronto di due classi infinite può dar luogo, come per le classi finite, a un giudizio di equivalenza o di prevalenza.

(1) « Math. Annalen », 59 (1904), 65 (1908).

(2) Ed egli stesso gli dà anche questo nome. Si vedano le memorie citate a p. 235.

Due classi sono equivalenti se tra gli elementi dell' una e quelli dell'altra intercede una corrispondenza biunivoca. Tale relazione soddisfa, come per il caso delle classi finite, alle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Una classe è prevalente ad un'altra quando si può porre una corrispondenza biunivoca fra gli elementi di questa e gli elementi di una parte di quella. Come per le classi finite, la prevalenza fra classi infinite soddisfa alla proprietà transitiva ; ma, a differenza di quel caso, soddisfa anche alla proprietà riflessiva ; inoltre essa può soddisfare anche, in qualche caso, alla proprietà simmetrica, che non appartiene mai alla prevalenza fra classi finite.

Queste differenze si riconducono alla circostanza fondamentale che :

Una classe infinita può essere contemporaneamente equivalente e prevalente ad un'altra.

Ora sussiste il

Teorema di Bernstein. — *Se* A *e* B *sono due classi, ciascuna delle quali è prevalente all'altra,* A *e* B *sono classi equivalenti.*

Dimostriamo questo teorema fondamentale valendoci delle semplificazioni dovute a Peano e Padoa.

Secondo l' ipotesi è data una corrispondenza biunivoca fra A e una parte B' di B, e un'altra corrispondenza biunivoca fra B e una parte A' di A. In questa seconda corrispondenza a B' corrisponderà una parte A'' di A'.

Si ha così una corrispondenza fra A e A'' parte di A', cioè una corrispondenza *univoca similare* fra A, A', che non è invertibile per gli elementi di $A' - A''$; si tratta di porre una corrispondenza biunivoca fra A ed A', e perciò basterà determinare una parte C di A' in tal guisa che togliendo C da A e da A' rimanga una corrispondenza univoca invertibile, ossia biunivoca, fra $A - C$ e $A' - C$; infatti, ponendo allora in C la corrispondenza identica, si avrà una corrispondenza biunivoca fra A ed A'. Ora la possibilità di determinare la classe C nel modo anzidetto, risult dal seguente

Lemma. — Se si ha una corrispondenza univoca similare fra una classe A ed una sua parte A', cioè una corrispondenza biunivoca fra A ed una parte A'' di A', si può sempre determinare una parte C di A' tolta la quale rimanga una corrispondenza biunivoca fra $A - C$ ed $A' - C$.

Si indichi con π la corrispondenza data fra A'' e A, e si consideri l' insieme degli elementi P di A'' a cui corrisponde in π^r ($r = 1, 2....$) un elemento di $A' - A''$; l' insieme di questi P aggiunto ad $A' - A''$ costituisce la classe C che volevasi determinare.

Il teorema di Bernstein permette di distinguere i seguenti casi nel confronto di due classi infinite A e B :

1) le due classi sono equivalenti ; in tal caso si dice che esse hanno *uguale potenza* ;

2) le due classi *non* sono equivalenti, ed una di esse, per es. A, è prevalente all'altra B ; in tal caso si dice che la *potenza* di A è *maggiore* di quella di B ;

3) le due classi non sono comparabili nel senso che non si sa porre una corrispondenza fra l' una e l'altra, o fra una di esse e una parte dell'altra.

Quest' ultima eventualità, che non sembra potersi escludere, implica una limitazione della teoria delle potenze di Cantor : si suppone sempre di riferirsi a classi comparabili, che dieno luogo ad uno dei giudizi 1) o 2).

La prima classe infinita che viene considerata da Cantor è quella (di minima estensione) costituita dai numeri naturali : 1, 2, 3..., n.... Ogni classe i cui elementi si possono far corrispondere ai numeri naturali si dice *numerabile*. Tutte le classi numerabili hanno la stessa potenza minima che possa appartenere ad una classe infinita.

In seguito vedremo che la classe dei punti di un segmento (o della retta) non è numerabile, cioè che la potenza del continuo è maggiore di quella di una classe numerabile.

In generale notiamo, a titolo d' informazione, che data una classe qualsiasi si può sempre costruire una nuova classe che abbia potenza maggiore di quella. Basta considerare l' insieme di tutte le classi formate cogli elementi della classe data (classe di classi).

Il continuo rettilineo ha la stessa potenza della superficie (quadrato o piano), del volume (cubo o spazio) ecc. (cfr. § 47) ; ma l' insieme di tutti i possibili gruppi (infiniti) di punti d'un segmento ha potenza maggiore di questo ecc.

Infine accenneremo ad una importante questione posta da Cantor, che rimane per ora insoluta : se esista qualche classe (gruppo di punti sulla retta) che abbia potenza intermedia fra il numerabile e il continuo.

§ 15. **Serie finite e infinite.** — Una classe infinita, alla stessa guisa di una classe finita, può concepirsi come una *serie ordinata* (1) per modo che:

1) dati due elementi della serie, uno di essi *succede* all'altro (e questo *precede* quello);

2) se l'elemento c succede a b e b succede ad a, anche c succede ad a.

Ma l'ordine di una serie infinita non soddisfa sempre alle proprietà 3), 4), 5) indicate al § 10 per l'ordine di una serie finita; così per es. la serie dei punti d' una retta è ordinata, ma dato un punto non vi è un successivo immediato nè un precedente immediato di esso. Infatti l'esistenza di un successivo immediato (e di un precedente immediato) si deduce dall'esistenza di un successivo (e rispettivamente d' un precedente), tenuto conto della *finitezza* della serie come classe: se b è successivo ad a, ma vi sono elementi dopo a e prima di b, si prenda uno di questi, c; se c non è successivo immediato ad a, si prenda un elemento successivo ad a e precedente a c e così di seguito; se la serie data è finita, la serie dei tentativi si esaurisce e conduce al successivo immediato di a.

Come in una serie infinita può darsi che per un elemento (non ultimo) manchi un successivo immediato, e di un elemento (non primo) non vi sia alcun precedente immediato, così può anche accadere che una serie infinita non possegga un *primo* nè un *ultimo*

(1) Secondo la nostra concezione della logica, come processo del pensiero, l'«ordine» è un concetto primitivo al pari della «classe», anzi la classe ordinata «precede» psicologicamente la «classe» in cui gli elementi sono riuniti senza un ordine. Ma per coloro che hanno della logica una veduta statica, l'idea dell'«ordine» esige un'analisi, quale è fatta da RUSSELL colla cosiddetta *logica delle relazioni*: una classe si dice ordinata quando esiste una funzione a due valori di due elementi qualunque,

$$R\,(a\,b) = >$$

o

$$R\,(a\,b) = <,$$

colla condizione che se

$$R\,(a\,b) = >, \quad R\,(b\,a) = <,$$

e da

$$R\,(a\,b) = >, \quad R\,(b\,c) = >,$$

si deduca

$$R\,(a\,c) = >.$$

elemento. La serie 1, 2, 3..., n.... non ha ultimo elemento; la serie .... $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3..., non ha nè primo, nè ultimo elemento.

CANTOR chiama *bene ordinata* una serie che soddisfa al seguente requisito:

3) la serie ha un *primo* elemento, ed *ogni serie* contenuta nella data come *parte* ha sempre un *primo elemento.*

Questa proprietà è legata coll'esistenza di un successivo immediato. Si ha infatti il teorema:

In una serie bene ordinata ogni elemento, che non sia ultimo, ha un successivo immediato.

Sia a un elemento (non ultimo) di una serie bene ordinata, gli elementi successivi ad a formano una serie, parte della data; che è come questa bene ordinata, e quindi ha un primo elemento, b: che è il successivo immediato di a.

Il teorema anzidetto non è invertibile. Per es. nella serie

$$1,\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{3}{4}....,\quad ....2\frac{1}{4},\ 2\frac{1}{2},\ 3,$$

ogni elemento ha un successivo immediato, ma pure la parte

$$....2\frac{1}{4},\ 2\frac{1}{2},\ 3,$$

non possiede primo elemento.

L'esempio qui addotto mostra anche la possibilità di concepire serie soddisfacenti a tutte le proprietà 1).... 5) del n. 10 (esistenza di primo ed ultimo elemento, precedente e successivo immediato), che pur sono, come classi, infinite: in guisa che per due serie siffatte non resulta più *determinata* una corrispondenza ordinata similare (cioè una corrispondenza biunivoca fra una delle due classi e una parte dell'altra), dalla semplice condizione che si corrispondano i primi elementi. Per arrivare alla teoria dei numeri ordinali, occorre dunque restringere il concetto della serie al caso delle *serie finite*; e il concetto del buon ordinamento di CANTOR c'indica come ciò possa farsi.

Diciamo *perfettamente ordinata* una serie quando è *bene ordinata insieme all'inversa,* cioè ordinata in guisa che:

ogni parte di essa possegga un *primo* e un *ultimo* elemento.

È chiaro che *una serie perfettamente ordinata è finita*, nel senso comune della parola.

Infatti si abbia la serie bene ordinata:

$$S = a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots ;$$

se essa non è finita, contiene la serie numerata

$$s = a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$$

corrispondente a tutti i valori di n, sia che esistano *dopo* gli elementi di questa serie altri elementi, oppure no; in ogni modo s è parte di S. Ma se prendiamo gli elementi di S, e quindi di s, nell'ordine inverso, la serie S così ottenuta non è bene ordinata, perchè contiene una parte $(\bar{s})$ senza primo elemento.

In luogo della dimostrazione precedente che assume come presupposto il concetto comune del numero ordinale, si può indicare come « *la proprietà delle serie perfettamente ordinate* conduce, non solo alle proposizioni 1) ..., 5) del § 10, ma altresì a definire una corrispondenza ordinata similare fra due serie di cui si associno i primi elementi », sicchè essa può assumersi come *definizione delle serie finite*, dando luogo *a costruire logicamente la teoria dei numeri ordinali.*

A tale scopo si considerino due serie perfettamente ordinate

$$1)\quad \mathrm{a}_1\ \mathrm{a}_2 \ldots\ldots \mathrm{b}$$
$$2)\quad \alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ldots \beta,$$

e si costruisca la serie che ha per elementi le coppie $\mathrm{a}_1, \alpha_1 \ldots\ldots$:

$$3)\quad \mathrm{a}_1\,\alpha_1,\ \mathrm{a}_2\,\alpha_2 \ldots\ldots$$

È chiaro che la serie 3) si trova in corrispondenza biunivoca ordinata con una parte della 1) e con una parte della 2): quindi essa ha un ultimo elemento che risponde a due elementi di ugual posto delle 1) e 2), diciamo a_i ed α_i. Ora si riconosce che, se a_i precede b, necessariamente α_i coincide con β: poichè altrimenti la 3) conterrebbe un elemento, $\mathrm{a}_{i+1}\,\alpha_{i+1}$, successivo ad $\mathrm{a}_i\,\alpha_i$. In conclusione resta definita fra le 1) 2) una corrispondenza ordinata che ad ognuno degli elementi di una almeno delle due serie fa corrispondere un ben determinato elemento dell'altra: che è il requisito delle corrispondenze similari.

E perciò, come si è detto, le serie perfette porgono la definizione per astrazione dei comuni numeri ordinali.

§ 16. **Classi finite e principio dell'invarianza del numero.** — La proprietà delle serie finite, che abbiam visto porgere una costruzione logica della teoria dei numeri ordinali, ci permette ora di colmare la lacuna rilevata alla fine del § 14, definendo rigorosamente le *classi finite* e quindi i numeri cardinali. Diciamo *classe finita una classe in cui si può stabilire un ordinamento perfetto*: sicchè i suoi elementi possono farsi corrispondere ad una serie di numeri ordinali 1, 2.... n.

Questa definizione dà luogo a stabilire un principio che E. SCHRÖDER (1) per primo ha formulato sotto il nome di *principio dell'invarianza del numero*. Ritenendo egli il primato psicologico del numero ordinale, voleva definire il numero (cardinale) degli oggetti d'una classe C come numero d'ordine dell'ultimo oggetto per riguardo ad un ordinamento (cioè ad un modo di numerazione) degli elementi di C, e rilevava quindi il presupposto che codesto numero non varii per diversi ordinamenti di C. Più tardi KRONECKER (l. c., 1887) introduceva esplicitamente questo principio come un *postulato* relativo alla classe dei numeri (1, 2..., n), mentre HELMHOLTZ (l. c., 1887) tentava di dimostrarlo, deducendolo da ciò che il numero non varia per uno scambio di due elementi i, k della classe (1, 2,... a), e che ogni ordinamento della classe si può ottenere da uno dato, con successive trasposizioni (i, k). Ma, a dir vero, questa dimostrazione non può tenersi come soddisfacente, perchè il presupposto di arrivare con successive trasposizioni a qualunque ordinamento di C (in cui si esprime il cosiddetto principio d'induzione matematica) sembra equivalere insomma a ciò che qua si domanda di dimostrare.

Ora, tutta la difficoltà di stabilire con rigore il principio dell'invarianza del numero, si riduce, a nostro avviso, alla definizione logica delle classi finite per mezzo delle serie perfettamente ordinate. Infatti sulla base di questa definizione giungeremo allo scopo (2), dimostrando successivamente che:

1) *Se per gli elementi d'una classe finita si stabilisce co-*

(1) *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, Lipsia, 1873, p. 14.
(2) Cfr. ENRIQUES, « Rendic. Lincei », Settembre 1923.

munque un criterio d'ordinamento, si ottiene sempre un ordinamento perfetto.

2) *Una classe finita non può essere equivalente ad una sua parte propria.*

3) *Per qualunque ordinamento d' una classe finita, il numero d'ordine dell'ultimo elemento è sempre il medesimo* (principio di SCHRÖDER).

1° TEOREMA. — Sia C una classe finita, che perciò si può supporre, per un certo ordinamento, perfettamente ordinata; e sia S un'altra serie (equivalente come classe) in cui vengono disposti gli elementi di C. Vogliamo provare, intanto, che S possiede un ultimo elemento. A tal uopo distinguiamo in C quegli elementi, che designeremo con a, cui spetta la seguente proprietà:

l'elemento a' omologo di a, consegue (in S) a ciascuno degli elementi omologhi ai precedenti di a (in C).

L'insieme degli a forma una parte di C ($a_1 a_2 .... a_i$) che è perfettamente ordinata e possiede un ultimo elemento a_i: dico che il corrispondente a'_i di a_i costituisce l'ultimo elemento di S. Infatti se dopo a'_i esiste in S qualche altro elemento b', il suo corrispondente b, in C, non può certo precedere a_i: supponiamo pertanto che vi siano in C degli elementi b, successivi ad a_i il cui omologo segua a_i (in S), e riduciamo all'assurdo questa supposizione. Per ciò basta osservare che gli elementi b formano una parte di C e quindi vi è fra essi un primo elemento, b_1; questo b_1 è tale che gli omologhi (in C) dei suoi precedenti sono a'_i ed elementi precedenti a'_i (in S), e quindi precedono tutti b'_1 (omologo di b_1); perciò b_1 resulta per definizione un elemento della classe (a) successivo ad a_i, che si era supposto essere l'ultimo.

Lo stesso ragionamento qui adoperato, scambiando l'ordine di S nel suo inverso, vale a provare che S possiede anche un *primo* elemento.

Siccome poi, ogni parte della serie perfettamente ordinata C è del pari perfettamente ordinata, la stessa dimostrazione permette di concludere che anche ogni parte di S (equivalente ad una parte di C) possiede insieme un primo ed un ultimo elemento, c. d. d.

2° TEOREMA. — Una classe finita C non può essere equivalente ad una sua parte propria.

Pongasi che vi sia corrispondenza biunivoca π fra C e una sua parte propria C', diguisachè esista in C un elemento a, non appartenente a C'. Allora si consideri la serie (*catena*) costituita da:

$$a, \; a' = \text{omologo di } a, \; a'' = \text{omologo di } a', \ldots.$$

La serie costituita da *tutti* gli elementi che così vengono ottenuti è una classe ben definita e ordinata. Infatti:

1) appartiene alla classe un elemento x quando esiste una serie perfettamente ordinata

$$x = x_1, \; x_2, \; x_3 \ldots . \; a$$

che ha per ultimo elemento a, in cui ogni elemento ha come omologo il successivo nella corrispondenza inversa di π: allora questa serie perfettamente ordinata (x) è evidentemente unica;

2) l'ordine della classe si stabilisce fissando che, fra due elementi x ed y di essa, x preceda y, quando x è contenuto fra i successivi di y nella serie (y).

Ora si avverta: come a appartiene a C e non a C', così a' appartiene a C' e non alla classe omologa C'', a'' appartiene a C'' e non alla classe omologa C''' ecc.; dunque non può mai accadere che un elemento della catena a, a', a'' .... venga a coincidere con qualcuno dei precedenti, e però *la catena non ha ultimo elemento*, in contraddizione col 1° Teorema.

3° Teorema (Principio di Schröder). Se C e C' sono due classi perfettamente ordinate, fra loro equivalenti, esiste anche fra di esse una corrispondenza ordinata in cui i due ultimi elementi si corrispondono (avendo così lo stesso numero d'ordine).

Se si nega la tesi, accadrà per esempio che all'ultimo elemento di C' risponda, nella corrispondenza similare fra C e C', un elemento che precede l'ultimo, e quindi C' resulterà equivalente ad una parte propria di C, in contraddizione al 2° Teorema.

Ora, la definizione introdotta delle classi finite come perfettamente ordinabili, conduce senza difficoltà a dedurre tutte le proprietà delle classi analizzate nel § 7, senza ricorrere a quel principio d'induzione in cui ivi si traduceva il carattere finito delle classi d'oggetti materialmente dati. Enunciamo qua la conclusione: *le proprietà elementari delle classi finite e quindi dei numeri cardinali, si dimostrano* — a partire dai concetti puramente logici di classe, ordine, corrispondenza e dai relativi assiomi (logici) — *in base alla definizione delle classi finite come perfettamente ordinabili.*

§ 17. Il principio d'induzione matematica e i numeri transfiniti. — Il principio dell'invarianza del numero, stabilito innanzi, si può ritenere come un *principio di subordinazione dei numeri cardinali agli ordinali*, in quanto conduce a definire per astrazione il numero cardinale d'una classe come il numero d'ordine dell'ultimo elemento di essa in un suo ordinamento qualsiasi, conforme alla veduta genetica.

Dopo ciò le classi si possono ordinare, come nel § 11, in ordine di prevalenza, ed in modo che a ciascuna classe — o categoria di classi equivalenti — succede quella che si ottiene aggregandovi un nuovo elemento.

La serie stabilita in tal guisa, è prolungabile oltre ogni limite?

La risposta affermativa a questa domanda resulta dal *postulato esistenziale della somma*:

date due classi C e C', senza elementi comuni, si possono sempre *riunire* in un'altra che comprende tutti e soli gli elementi di C e C'; e se le due classi hanno elementi comuni, esiste sempre una classe equivalente a C', che non ha elementi comuni con C.

D'altra parte la *serie infinita* dei numeri naturali

$$1,\ 2,\ 3 \ldots.\ n \ldots,$$

o qualunque altra *serie numerata* di cui essi porgano i numeri d'ordine, può essere caratterizzata direttamente mercè le considerazioni che seguono.

Si abbia una qualsiasi relazione R, dipendente da un numero x: se questa relazione è verificata per $x = 1$, e se dall'essere verificata per $x = n$, si deduce ch'essa sussiste per $x = n + 1$, allora la relazione sussiste in generale per tutti i valori di $x = 1, 2, 3 \ldots. n \ldots.$; in simboli: se

$$R(1) = 0,$$

e da

$$R(n) = 0,$$

si deduce

$$R(n+1) = 0,$$

si ha

$$R(m) = 0,$$

m designando un numero comunque grande.

Il principio qui enunciato è appunto il *principio d'induzione matematica*, ed il suo riconoscimento come principio logico risale a MAUROLICO.

Con esso s'introduce in una maniera precisa il postulato razionalistico, che assume come *teoricamente illimitata* la ripetibilità di atti del pensiero cui, nell'esperienza pratica, non si può segnare un limite determinato, e si enuncia che questa ripetizione conduce in effetto a *tutti i numeri*.

Perciò il detto principio è suscettibile di apparire, come proprietà caratteristica della serie infinita dei numeri naturali o delle serie numerate.

Invero CANTOR (1883) ha notato che vi sono *serie ben ordinate* (come la $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} .... 0)$ *che si prolungano al di là della serie dei numeri naturali*, e i cui elementi vengono rappresentati da numeri d'ordine non più finiti, ma *transfiniti*. La serie dei numeri naturali appare dunque come *serie minima* fra le serie infinite, ben ordinate; ed è appunto tale proprietà di minimo che si esprime col principio d'induzione matematica.

Questa considerazione appartiene a DEDEKIND (l. c., 1887) che l'ha svolta nella maniera seguente.

Si assuma una classe (infinita) C equivalente ad una sua parte propria C': si avrà dunque un'operazione φ che ad ogni elemento, a, di C, fa corrispondere un elemento, a', di C'; e, se a non appartiene a C', la serie S degli omologhi

$$a, \ a' = \varphi(a), \ a'' = \varphi(a')....$$

resulta infinita, poichè nessuno degli elementi di S può coincidere con uno dei precedenti, e dopo ogni elemento (b) vi è sempre un successivo ($\varphi(b)$) (1).

Orbene della serie infinita (numerata) $S = a\, a'\, a''....$ DEDE-

(1) Più precisamente, nel suo sistema — che per il rigore logico e filosofico segna uno dei punti più alti della critica aritmetica — DEDEKIND definisce la serie

$$a \ a' \ a''$$

catena dell'elemento a, come l'*interferenza di tutte le catene che contengono* a, dove il termine «catena» significa in generale per lui una qualsiasi parte di C che contenga la sua immagine rispetto a φ.

Dopo avere così definito le serie ben ordinate minime, l'A. – con-

KIND (l. c.) dimostra che appartiene per intero ad ogni classe R che goda delle due proprietà seguenti:

1) R contiene a;

2) se R contiene b, contiene anche l'elemento successivo, $\varphi(b)$.

E l'A. riconosce in questa proprietà della serie S il principio d'induzione matematica, che si tradurrà nella maniera ordinaria ove si sostituisca, nell'enunciato, la *classe* R colla *relazione* che vale a determinarla estensivamente (ogni a appartiene ad R).

Nella stessa forma indicata da DEDEKIND, anche PEANO (l. c.), considera il principio d'induzione come proprietà della serie dei numeri ordinali 1, 2...., n....; ma tuttavia non s'indugia a dimostrare tale proprietà, deducendola da un presupposto di *minimo* della serie stessa, ed all'opposto l'assume come *postulato*, ad indicare che la serie data non si prolunga al di là dei termini raggiungibili con una successione di operazioni φ.

Pertanto le proprietà caratteristiche della serie dei numeri, vengono raccolte da PEANO, nel *sistema di postulati* seguente:

1) I *numeri* sono elementi d'una classe (N):

2) Esiste un'operazione (*successivo di* = *suc*) che trasforma ogni numero in un numero;

$$\text{se } a \text{ è un } N, \; suc\ a \text{ è un } N.$$

3) L'operazione *suc* non può essere invertibile in più modi diversi:

se $$suc\ x = suc\ y,$$

segue $$x = y.$$

4) Esiste un numero «*lo 1*» (1) che non è successivo ad alcun altro, sicchè qualunque sia N

$$suc\ N \neq 1$$

frontando le diverse serie possibili – definisce i termini « d' ugual posto » e ne trae per astrazione i *numeri ordinali*.

Il lavoro di DEDEKIND apparirà, tradotto in italiano e illustrato da note storico-critiche per cura di O. ZARISCHI, nella collezione « Per la storia e la filosofia delle matematiche » che F. ENRIQUES, prepara per l'editore Stock. A questa pubblicazione dovrà ricorrere il lettore che ami allargare la conoscenza critica moderna, toccante i principî dell'Aritmetica, e comprenderne più profondamente lo sviluppo.

(1) In esposizioni successive, PEANO ha cambiato qui «lo 1» con «lo 0», per motivi di semplicità algoritmica.

5) *Principio d'induzione*: se R è una classe contenente 1, e se dall'ipotesi che R contenga N si deduce che contiene il *suc* N, allora R contiene tutti gli N.

D'accordo colle osservazioni del § 5 si può notare soltanto che il sistema predetto, piuttostochè la serie dei numeri naturali, vale a caratterizzare le *serie numerate*, dal cui confronto come già avvertiva DEDEKIND, sorgono per astrazione i numeri ordinali (cfr. § 15).

Più brevemente i postulati 1).... 5) si lasciano riassumere nella definizione: *Serie numerata è una serie bene ordinata* (di cui ogni parte ha un primo elemento, cfr. § 15) *soddisfacente al principio d'induzione.*

E i numeri naturali 1, 2.... n.... sono i numeri d'ordine degli elementi delle serie numerate, poste tra loro in corrispondenza biunivoca ordinata.

Rileviamo esplicitamente che la considerazione di serie bene ordinate non soddisfacenti al postulato 5), conduce ad estendere il concetto ordinario dei numeri ordinali, considerando *numeri ordinali infiniti*: tali sono *i numeri transfiniti* di CANTOR, cui già innanzi si è accennato incidentalmente.

Si abbia una serie bene ordinata, S, che non soddisfi al postulato 5); allora vi sono in essa degli elementi successivi a quelli che portano un qualsiasi numero d'ordine n per quanto grande; la serie di tali elementi, S_1 (successivi alla serie 1, 2, 3....) è una parte di S, e perciò possiede un primo elemento ω; il successivo di ω si può designare con $\omega + 1$ e così via.

Si ha così una serie

$$S = 1, 2, 3...., \omega, \omega + 1, \omega + 2...., 2\omega, 2\omega + 1,...., ...$$

che si può immaginare indefinitamente proseguita.

Il simbolo ω che designa il primo elemento della serie successivo ai numeri naturali (finiti) si può considerare come il più piccolo numero ordinale infinito (transfinito).

Se nella serie vi è un elemento successivo ad

$$\omega,\ 2\omega,\ 3\omega....,$$

questo si può designare con ω^2. Si comprende quindi la possibilità che la serie contenga anche elementi

$$\omega^3\ \omega^4....,\ \omega^\omega \text{ ecc.}$$

La serie dei numeri transfiniti qui considerati, trova un immagine geometrica in una serie di punti che si costruisca opportunamente sopra la retta in guisa che : ω *corrisponda ad un punto limite dalla serie* 1, 2, 3...., ; 2ω *ad un punto limite della serie* $\omega + 1$, $\omega + 2$.... ; ω^2 *ad un punto limite della serie* ω, 2ω, 3ω..., ecc.

Aggiungiamo che il ragionamento per induzione matematica si estende anche alle serie che contengono elementi ω, nella forma dell'*induzione transfinita* : se una classe C contiene il primo elemento della serie, e se dall'ipotesi ch'essa contenga tutti i precedenti di un elemento b si deduce che contiene anche b, la C contiene tutta la serie.

Nota I. — Riguardando alle serie bene ordinate che contengono elementi transfiniti, appare che in esse esiste sempre, oltre il primo, almeno un elemento, ω, che non ha un *precedente* immediato (di cui è il successivo). A quest'osservazione si lega la forma degli assiomi aritmetici assunti da Pieri (1), il quale postula che :

1) i numeri formano una classe (non illusoria), N ;

2) dopo un numero vi è un susseguente ;

3) vi è un solo numero che non è il susseguente di alcun altro ;

4) in ogni classe di numeri, vi è sempre un numero che non è susseguente ad alcun numero della classe.

Invero questi assiomi portano che gli N formino una serie ben ordinata [4], in cui ogni elemento che non sia il primo ha sempre un precedente [3] (2).

Nota II. — Quando la serie dei numeri transfiniti è comunque prolungata mediante una costruzione mentale, *dipendente da un numero finito di convenzioni*, immaginando un successivo ω^ω dopo ω, ω^2, ω^3...., e quindi un successivo dopo ω^ω, $\omega^{2\omega}$, $\omega^{3\omega}$.... ecc., si cade sempre in *classi numerabili*.

Si può anche dimostrare (facendo uso di un ragionamento che svolgeremo nell'ultimo capitolo di questo Articolo) che *ogni serie ben ordinata di punti susseguentisi sopra la retta* (serie a cui conduce l'immagine geometrica dei transfiniti definita innanzi) è numerabile.

(1) *Sopra gli assiomi aritmetici.* « Bollettino dell'Accademia Gioenia di Catania » (serie 2ª, 1908).

(2) Giova rilevare : il surrogato del principio d'induzione non consiste tanto nel post. 4 (come l'A. sembra credere) bensì nel 3°, che lo completa ed esclude i transfiniti.

Nasce ora la questione se sia possibile disporre i punti di un continuo (per es. d'un segmento) in una serie bene ordinata, diguisachè il numero cardinale che designa la potenza del continuo, si presenti come un numero della serie dei transfiniti. Tale questione, proposta da CANTOR, ha dato luogo a numerosi tentativi; in particolare ZERMELO ha creduto di risolverla affermativamente in base al postulato che abbiamo enunciato alla fine del § 13. Ma, per l'osservazione ivi fatta, questa dimostrazione non può ritenersi come concludente o in alcun grado persuasiva. Perchè non soltanto si assume in essa la possibilità di compiere effettivamente col pensiero infinite operazioni di scelta non predeterminate da qualche criterio esterno, ma — ciò che è più incomprensibile — di prolungare queste operazioni in un modo *trascendentemente infinito*, al di là del numerabile. Presupposizioni trascendenti di questo genere hanno condotto nella teoria degl'insiemi a certi *paradossi* caratteristici; per es. l'ipotesi che sia lecito considerare come un oggetto logico la serie di *tutti* i numeri transfiniti, conduce al cosiddetto *paradosso* di BURALI-FORTI, dove si dimostra che quella serie possiede e non possiede un ultimo elemento: onde il concetto di essa si palesa contraddittorio.

Or dunque nello stato attuale della questione — nonostante i consensi che il lavoro di ZERMELO ha trovato presso una parte dei matematici (a tendenze *realiste*) (1) — *rimane dubbio se il continuo*

(1) Chi vuol avere un' idea delle discussioni intorno a quest'argomento veda gli articoli contenuti nel volume 50 dei « Math. Annalen » e le cinque lettere sulla teoria degl'insiemi nel « Bullettin de la Société mathématique de France », tome 33. Conviene anche ricordare particolarmente i lavori di HILBERT citati alla fine del § 5, in cui si fa dipendere il postulato di ZERMELO da un nuovo *principio d' esistenza d' una funzione transfinita*, e le critiche che esso ha già sollevato da parte di M. CIPOLLA (« Annali di Matematica », 1923).

Il punto vero della questione toccato anche da B. LEVI (in una lettera a HILBERT pubblicata nei « Math. Annalen », 90), è che, come abbiamo accennato nel § 13, il postulato di ZERMELO o il principio di HILBERT, non sono affatto *postulati* nel senso di « condizioni » restrittive del concetto del continuo (che è perfettamente definito dai postulati ordinari). Vogliam dire che vi è in essi un *assioma*, esprimente una legge operativa della nostra mente? Ebbene, il meno che si possa osservare è che questa legge non è legge per tutte le menti. Onde accade in fatto che le dimostrazioni con cui si dovrebbe rispondere al dubbio « se il continuo possa essere ben ordinato » non hanno forza di convincere nessuno di quelli che veramente ne dubitano.

possa essere bene ordinato. Perchè tale buon ordinamento avesse un senso *positivo* bisognerebbe farlo dipendere da un criterio determinato, o determinabile a partire da una realtà data, mediante un numero finito di atti arbitrari del pensiero; èd un siffatto criterio non sembra potersi assegnare. La prova *negativa* esigerebbe invece di dedurre una contraddizione dall'ipotesi di una serie ben ordinata avente la potenza del continuo: ma non sembra doversi affermare che l'impossibilità di una costruzione positiva implichi necessariamente la possibilità di questa dimostrazione negativa.

Anche a prescindere dalla probabile impossibilità di estendere la serie dei transfiniti fino ad avere una serie ben ordinata della potenza del continuo, l'estensione dei *numeri cardinali* conduce a *una specie diversa di numeri infiniti,* poichè dal punto di vista cardinale si avrebbe

$$\omega = \omega + 1 = ... = 2\omega = ... = \omega^2 = ...,$$

ciascuno di questi numeri corrispondendo ugualmente ad un insieme numerabile.

IV. — Le operazioni fondamentali dell'Aritmetica.

§ 18. **Introduzione.** — Le quattro operazioni fondamentali dell'Aritmetica sono: *l'addizione,* la *moltiplicazione* e le *operazioni inverse* a queste: *sottrazione* e *divisione.*.

La teoria delle operazioni (tranne per quanto concerne l'estenzioni *dirette*: addizioni e moltiplicazioni.
sione del campo dei numeri) si può dunque limitare alle due opera-

Noi esporremo due modi di sviluppo di siffatta teoria:

1) sviluppo fondato sul principio d'invarianza del numero, che vale ad associare numeri cardinali ed ordinali;

2) e sviluppo fondato sul principio d'induzione, caratteristico per la serie infinita dei numeri ordinali. Come vedremo, la prima teoria, che fa capo al concetto del numero (cardinale) degli oggetti d'una classe, può assumere una forma sintetica in cui i numeri su cui si opera ricevono il significato di cardinale, ed una forma più analitica dove essi sono interpretati come ordinali: nella quale si rende esplicita l'applicazione del teorema d'invarianza del § 16.

§ **19. L'addizione.** — L'addizione di due o più numeri, pensati come cardinali, si lascia definire nella maniera seguente.

Si considerino due o più classi finite senza elementi comuni:

$$(A) = (A_1\, A_2 .... A_a)$$
$$(B) = (B_1\, B_2 .... B_b)$$
$$(C) = (C_1\, C_2 .... C_c)$$

e si scriva:

$$a = \text{num.}\ (A), \quad b = \text{num.}\ (B), \quad c = \text{num.}\ (C)....,$$

l'addizione o somma dei numeri a, b, c.... *è il numero degli oggetti della classe che si ottiene riunendo* (A), (B), (C)....:

$$a + b = \text{num.}\ (A + B)$$
$$a + b + c = \text{num.}\ (A + B + C)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Come già si è rilevato nel § 17, la possibilità (illimitata) dell'addizione implica un postulato esistenziale (esistenza di classi equivalenti senza elementi comuni ecc.) che abbiamo appunto denominato «*postulato esistenziale della somma*».

Ora, gli assiomi logici che caratterizzano l'operazione del riunire conducono alle *proprietà fondamentali dell'addizione* dei numeri. Anzitutto, poichè la riunione di più classi è definita in modo simmetrico per riguardo alle classi addende, indipendentemente dal loro ordine: *l'addizione gode della proprietà commutativa*

$$a + b = b + a, \quad a + b + c = a + c + b \text{ ecc.}$$

Inoltre la proprietà associativa del riunire si traduce nella *proprietà associativa dell'addizione*:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) \text{ ecc.}$$

Invece di definire la somma facendo appello al significato dei numeri come cardinali (che implica il presupposto dell'invarianza del numero) si può ricondurci al loro significato primitivo come ordinali, ed allora il principio d'invarianza appare esplicitamente nella dimostrazione delle sue proprietà fondamentali.

Due serie perfette, senza elementi comuni,

$$A_1 A_2 .... A_a$$
$$B_1 B_2 .... B_b$$

si possono aggiungere, pensando gli elementi della seconda di seguito a quelli della prima, e si ottiene la serie perfetta

$$S = A_1 A_2 \,....\, A_a B_1 B_2 \,....\, B_b :$$

allora a + b *è il numero d'ordine di* $\mathrm{B_b}$ *in* S.

La somma $a + b + c$ viene definita analogamente e si ha, in modo immediato,

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c),$$

cioè la proprietà associativa.

Ma la *proprietà commutativa*

$$a + b = b + a,$$

esige qui una dimostrazione, perchè la definizione della somma dipende dall'ordine degli addendi. A tal uopo basta osservare che « *il numero d'ordine di* $\mathrm{B_b}$ *in* S *è uguale a quello di* $\mathrm{A_1}$ *nella serie inversa* » : principio che è un semplice corollario dell' invarianza del numero.

§ 20. **La sottrazione e lo zero.** — La *sottrazione* di due numeri

$$c = a - b$$

si definisce come *operazione inversa* dell' addizione, proponendosi la risoluzione dell'equazione

$$a = b + x,$$

che dà, ove la sottrazione sia possibile,

$$x = c = a - b.$$

Per interpretare la sottrazione pei numeri cardinali a, b, si deve supporre

$$a = \text{num.}\,(A),\ b = \text{num.}\,(B),$$

allora fra le due classi (A), (B) si può sempre porre una *corrispondenza similare* (univoca in un senso, ma non invertibile) in cui ad una delle due classi corrisponde biunivocamente una *parte* dell'altra, mentre gli elementi della parte *residua* non hanno corrispondente nella prima; precisamente a (B) corrisponde una parte di (A) se $(A) \geq (B)$ ed invece ad (A) una parte di (B) se $(B) \geq (A)$. *La sottrazione delle due classi* (A) (B) *è la costruzione della classe determinata come residuo della corrispondenza similare fra* (A), (B). È inteso che questo residuo è *la classe nulla* se (A) (B) sono equivalenti.

La classe nulla (O) è definita comprensivamente in modo unico, perchè di ogni elemento A si nega che esso appartenga ad (O), perciò se

$$(A) = (B) = (C)....,$$

si ha

$$(O) = (A - A) = (B - B) = (C - C)....$$

Ora, *dati due numeri disuguali* a, b (corrispondenti alle classi (A), (B)) *vi è sempre uno ed uno solo di essi che è maggiore dell'altro* (minore) *e può ritenersi come somma di questo con un terzo numero*; in altre parole *è possibile la sottrazione* a — b *o* b — a. Si può togliere il *caso d' eccezione* corrispondente all'uguaglianza dei due numeri, introducendo il *numero* 0 come numero cardinale della classe nulla, e quindi ponendo per definizione

$$a + 0 = a, \ 0 = a - a = b - b = ...$$

Le proprietà della somma ci danno subito le seguenti, dove si suppongano possibili (pur conducendo a 0) le sottrazioni indicate:

$$\begin{aligned} a + (b - c) &= (a + b) - c \\ a - (b + c) &= (a - b) - c \\ a - (b - c) &= (a - b) + c. \end{aligned}$$

Occorre notare che, qualora, invece che a numeri cardinali, ci si riferisca a numeri ordinali, la sottrazione $a - a$ riesce impossibile nella serie

$$1, 2, 3, ... a ....$$

Ma se si vuole ristabilire la corrispondenza ordinata fra la serie dei numeri cardinali e quella degli ordinali, quando s' includa nella prima « il numero degli oggetti della classe nulla » si è condotti a premettere all' 1, un nuovo numero « lo 0 ». Allora si ha la serie

$$0, 1, 2 .... a ....$$

in cui il numero a non è più il numero d'ordine dell'elemento che porta questo nome, ma il *numero d'ordine* dell'elemento stesso *a contare dopo lo* 0, preso come origine della numerazione.

§ 21. **La moltiplicazione.** — La moltiplicazione di due o più numeri cardinali si può definire (con CANTOR e CAPELLI) nel seguente modo:

Si abbiano due o più classi *non nulle*:

$$(A) = (A_1 \ldots\ldots A_i \ldots\ldots A_a),$$
$$(B) = (B_1 \ldots\ldots B_r \ldots\ldots B_b)$$
$$(C) = (C_1 \ldots\ldots C_s \ldots\ldots C_c) \text{ ecc.}$$

Formiamo la classe

$$(AB) = (\ldots\ldots A_i B_r \ldots\ldots)$$

che ha come elementi le coppie formate associando un qualsiasi elemento di (A) con un qualsiasi elemento di (B).

Il prodotto dei due numeri a, b, *diversi da* 0, *si definisce ponendo*

$$ab = \text{num.}\ (AB).$$

Analogamente

$$abc = \text{num.}\ (ABC),$$

dove la classe (ABC) contiene le terne $A_i\ B_r\ C_s$ ecc.

La moltiplicazione delle classi è definita in modo simmetrico, quindi *vale per il prodotto di più numeri la proprietà commutativa*:

1) $$ab = ba,\ abc = bac \text{ ecc.}$$

Inoltre l'associazione degli elementi $A_i\ B_r\ C_s$ può esser fatta associando prima $A_i\ B_r$ e poi C_s alla coppia così ottenuta, quindi *vale la proprietà associativa*:

2) $$abc = (ab)c.$$

Si ha poi *la proprietà distributiva*:

3) $$(a + b)\, c = ac + bc,$$

quindi:

$$(a + b + c)\, d = ad + bd + cd \text{ ecc.}$$

Infatti combinando per moltiplicazioni le classi $(A + B$ e (C) si ottiene appunto la riunione delle classi (AC) e (BC) ecc.

Notiamo infine che:

4) $$a.1 = a.$$

Infatti moltiplicando la classe (A) per un'altra contenente un solo elemento, si dà luogo ad una classe i cui elementi corrispondono biunivocamente a quelli di (A).

Ora, nella dimostrazione delle proprietà fondamentali del prodotto (come per la somma) si può rendere esplicita l'applicazione del principio d'invarianza del numero, interpretando i numeri su cui si opera come ordinali anzichè come cardinali.

Invero si considerino le classi ordinate

$$(A) = (A_1\, A_2 \dots\, A_a)$$
$$(B) = (B_1\, B_2 \dots\, B_b)\,;$$

la classe (AB) può essere ordinata in guisa da costituire la serie (perfetta)

$$S = A_1B_1, A_2B_1 \dots A_aB_1, A_1B_2, A_2B_2 \dots A_aB_2 \dots A_1B_b, A_2B_b \dots A_aB_b,$$

ed allora il *prodotto* ab *designa il numero d'ordine dell'ultimo elemento*, $A_a\, B_b$, *in* S. Questa definizione si riconduce alla forma consueta: *il prodotto* ab *è la somma di* b *numeri uguali ad* a.

Quindi, per stabilire la proprietà commutativa del prodotto, basta osservare che la S può essere ordinata come segue:

$$A_1B_1,\ A_1B_2 \dots A_1B_b,\ A_2B_1,\ A_2B_2 \dots A_2B_b \dots A_aB_1,\ A_aB_2 \dots A_aB_b,$$

ed allora il numero d'ordine dell'ultimo elemento è $b\ a$; il principio d'invarianza dà dunque

$$a\ b = b\ a.$$

È interessante avvertire che questa dimostrazione non fa che esprimere in forma logicamente precisa il ragionamento consueto dei trattati, in cui si scrive:

$$(a\, b) = (a + a + \dots + \underset{b}{a}) =$$

$$= (1 + 1 \dots + \underset{a}{1}) + (1 + 1 + \dots + \underset{a}{1}) + \dots + \underbrace{(1 + 1 + \dots + \underset{a}{1})}_{b} =$$

$$= (1 + 1 + \dots + \underset{b}{1}) + (1 + 1 + \dots + \underset{b}{1}) + \dots + \underbrace{(1 + 1 + \dots + \underset{b}{1})}_{a} =$$

$$= b + b + \dots + \underset{a}{b} = ba.$$

Dopo ciò passiamo a stabilire la *proprietà distributiva* del prodotto:

$$(a + b)\, c = ac + bc.$$

A tal uopo partiamo dalle serie

$$A_1 A_2 \dots A_a, \quad B_1 B_2 \dots B_b, \quad C_1 C_2 \dots C_c:$$

formiamo le due serie

$$A_1 C_1, \dots A_a C_1, B_1 C_1, \dots B_b C_1, A_1 C_2 \dots A_a C_2, B_1 C_2 \dots B_b C_2, \\ \dots A_1 C_c, \dots A_a C_c, B_1 C_c \dots B_b C_c,$$

$$A_1 C_1 \dots A_a C_1, A_1 C_2 \dots A_a C_2, \dots A_1 C_c \dots A_a C_c, B_1 C_1 \dots B_b C_1, \\ \dots B_1 C_c \dots B_b C_c$$

che sono costituite cogli stessi elementi presi in diverso ordine; nella prima l'ultimo elemento ha il numero d'ordine $(a + b)\, c$, nella seconda $ac + bc$, e dunque resulta

$$(a + b)\, c = ac + bc.$$

Più in generale si avrà

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)\, b = a_1 b + a_2 b + a_n b.$$

Infine, la proprietà associativa del prodotto

$$(ab)\, c = a\, (bc)$$

resulta immediatamente in modo sintetico dalla formazione della serie corrispondente $A_i B_r C_s \dots$, e d'altronde si deduce analiticamente dalle altre due proprietà, riferendosi alla definizione di $a\, b$ come somma di b addendi uguali ad a; si avrà invero

$$(ab)c = (ac)b,$$

e quindi

$$(ab)c = (ca)b = (cb)a = a(cb) = a(bc).$$

Innanzi di terminare questo paragrafo noteremo che, dalle proprietà stabilite per il prodotto, segue la formula

$$a\, (b - c) = ab - ac,$$

giacchè, posto $b - c = d$, si ha $ab = a(c + d) = ac + ad$.

Questa formula estesa convenzionalmente al caso $b = c$, conduce alla *definizione del prodotto di due numeri di cui uno* (almeno) *sia uguale a* 0:

$$5) \qquad a\,0 = 0;$$

d'accordo anche colla formula

$$0a = 0 + 0 + \dots = 0.$$

Qui conviene notare esplicitamente che — secondo la definizione sintetica data innanzi — il prodotto di due numeri diversi da 0 è sempre un numero diverso da 0, e così: *Condizione necessaria e sufficiente per l'annullarsi d'un prodotto è l'annullarsi di uno* (almeno) *dei fattori.*

§ 22. **Fondazione dell'aritmetica nel sistema induttivo.** — Indichiamo ora come si pongano le definizioni e dimostrazioni delle proprietà fondamentali dell'Aritmetica sulla base del principio d'induzione, cioè nell'indirizzo di GRASMANN-DEDEKIND-PEANO.

Assumiamo la serie dei numeri N:

$$0,\ 1,\ 2\dots\ n\dots$$

richiamando le sue proprietà elementari 1).... 5) del § 17, e ponendo per definizione $suc\ a = a + 1$.

Ecco in breve l'ordine delle proposizioni elementari che qui si stabiliscono.

SOMMA. — *Definizione induttiva* di $a + b$ in base alle condizioni iniziali:

$$a + 0 = a$$
$$a + (b + 1) = (a + b) + 1.$$

Si tratta di provare che queste condizioni determinano un'operazione in virtù della quale dati due numeri a, b resta definito un numero $a + b$, e poi di stabilire le proprietà associativa e commutativa di quell'operazione.

Al primo scopo si osserva che la proposizione « $a + b$ è un N » è vera per $b = 0$, e dall'ipotesi

$$a + b = N$$

segue

$$a + (b + 1) = N + 1$$

quindi induttivamente la proposizione anzidetta risulta dimostrata.

Proprietà associativa :

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Si dimostra induttivamente perchè :

$$(a+b)+0=a+(b+0),$$
$$(a+b)+1=a+(b+1),$$

e dall'ipotesi

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

segue

$$\begin{aligned}(a+b)+(c+1)&=a+\{(b+c)+1\}=\\&=a+\{b+(c+1)\}.\end{aligned}$$

Proprietà commutativa :

$$a+b=b+a.$$

Dimostrazione induttiva in due tempi :

$$0+0=0,$$

e da

$$0+a=a$$

segue

$$0+(a+1)=(0+a)+1=a+1,$$

quindi

$$0+a=a;$$

ora si ha

$$0+a=a+0,$$

e da

$$b+a=a+b$$

segue

$$(b+1)+a=a+(b+1)$$

Infatti si ha:

$$\begin{aligned}(b+1)+a&=b+(1+a)\\&=b+(a+1)\\&=(b+a)+1\\&=(a+b)+1\\&=a+(b+1)\end{aligned}$$

quindi si ha induttivamente

$$b+a=a+b.$$

NOTA. — Questa proprietà non sussiste pei transfiniti di CANTOR; invero

$$1 + \omega = 2 + \omega = ... = \omega$$

e non

$$1 + \omega = \omega + 1 \text{ ecc.}$$

SOTTRAZIONE. — Se

$$a + c = b + c$$

si deduce

$$a = b.$$

Dimostrazione induttiva partendo dal fatto che $a + 0 = b + ($ porta $a = b$.

PRODOTTO. — *Definizione induttiva* di ab in base alle condizioni iniziali

$$a0 = 0$$
$$a(b + 1) = ab + a.$$

Segue

$$a1 = a, \quad a2 = a + a.$$

Si prova in generale che

$$ab \text{ è un } N,$$

induttivamente, perchè la proposizione vale per $b = 0$, e dall'essere

$$ab = N$$

si deduce

$$a(b + 1) = N + a.$$

Proprietà distributiva:

A destra

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Si ha

$$a(b + 0) = ab + a0$$

e da

$$a(b + c) = ab + ac$$

segue

$$a(b + \{c + 1\}) = a(\{b + c\} + 1)$$
$$= a(b + c) + a = (ab + ac) + a = ab + a(c + 1),$$

quindi induttivamente.

A sinistra

$$(a+b)c = ac + bc.$$

Dimostrazione analoga.

Proprietà commutativa :

$$ab = ba.$$

Dimostrazione induttiva in tre gradi.

Anzitutto

$$00 = 0, \; 0.1 = 0,$$

e da

$$0a = 0$$

segue

$$0(a+1) = 0a + 0,$$

quindi induttivamente

$$0a = 0 = a0.$$

Ora

$$1 . 0 = 0$$

e da

$$1a = a1$$

segue

$$1(a+1) = (a+1)1$$

quindi induttivamente

$$1a = a1.$$

Finalmente da

$$ba = ab$$

si deduce

$$(b+1)a = ba + 1a = ab + a1 = a(b+1)$$

e perciò induttivamente

$$ba = ab.$$

Proprietà associativa :

$$(ab)c = a(bc).$$

Si ha

$$(ab)0 = 0 = a(b0)$$

e da

$$(ab)c = a(bc)$$

segue
$$\begin{aligned} ab(c+1) &= (ab)c + ab = \\ &= a(bc) + ab = a(bc + b) = \\ &= a\{b(c+1)\}, \end{aligned}$$

quindi induttivamente
$$(ab)c = a(bc).$$

Annullamento del prodotto. — Se
$$ab = 0 \quad \text{e} \quad a \neq 0$$
si ha
$$b = 0.$$

DIVISIONE. — Se
$$ac = bc \quad \text{e} \quad c \neq 0,$$
$$a = b.$$

Parte seconda. — ***I numeri razionali.***

I. — ESTENSIONI DEL CONCETTO DI NUMERO.

§ 23. **Introduzione storica.** — I numeri interi trovano un'estensione naturale e necessaria nelle *frazioni*, quando si adoperano per la misura di grandezze, a significare quante volte una grandezza data contenga una certa unità. Sotto questo aspetto non si potrebbe dubitare che i numeri frazionari siano stati in qualche modo conosciuti dall'antichità più remota, se anche mancassero testimonianze positive, come quelle che si desumono dal PAPYRUS RHIND (attribuito allo scriba egiziano AHMES, circa 1700 a. C. e interpretato dall' EISENLOHR (1)) : dove si trova una *tavola d'addizione*, che insegna a trasformare frazioni con denominatori diversi in altre con dato denominatore, in guisa da ottenere la somma.

Qui basterà aggiungere che il nostro simbolo di frazione ordinaria sembra provenire dagli Arabi e fu divulgato da LEONARDO PISANO nel *Liber Abaci* (1202).

Ora, la misura delle grandezze conduce, oltre i numeri frazionari, alla considerazione di *numeri irrazionali* o rapporti di

(1) *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypten*, Lipsia, 1877.

grandezze incommensurabili; e poichè la scoperta di segmenti incommensurabili appartiene alla scuola pitagorica, si può ritenere che anche quest'estensione del concetto (se pure non ancora del « nome ») di numero risalga ai Greci: ma di ciò discuteremo più avanti nella Parte terza del presente Articolo.

Più tardi appaiono invece, nella storia, i *numeri negativi*, che sembrano trarre origine dal progresso formale del calcolo algebrico. Già, nel periodo ellenistico, DIOFANTO ha avuto luogo di osservare che quando si sviluppa il prodotto $(a - b)\ (c - d)$, si deve porre $(- b)\ (- d) = + bd$, e — d'altra parte — il matematico indiano BRAHMEGUPTA (secolo VI dell'e. v.) porge alcune regole pratiche per l'addizione di crediti e debiti; ma tracce più definite d'un vero calcolo con numeri negativi si trovano solo nel matematico indiano BHASKARA (n. 1114), che distingue il valore positivo e negativo delle radici quadrate e scrive indifferentemente, in una somma, i numeri negativi prima dei positivi. Forse dagl' Indiani provengono gli accenni ai numeri negativi che s'incontrano presso gli autori Arabi.

I numeri negativi compaiono in Europa soltanto verso la metà del XV o nel XVI secolo presso matematici come PACIOLI, CARDANO, STIEFEL, che li designavano *aestimationes falsae aut fictae*, o *numeri surdi*.

Da questi stessi nomi appare la repugnanza che non può a meno di suscitare il numero negativo a chi cerchi in esso un'estensione del numero cardinale (o del concetto di grandezza) anzichè del numero ordinale.

Un uso più libero dei numeri negativi ricorre in TH. HARRIOT (1600) e in DESCARTES, che colla rappresentazione analitica dei punti del piano (se pure non ancora espressa nella forma attuale (1)) doveva preparare la più larga interpretazione estensiva dei numeri ordinali, quali *ascisse* di punti o estremi di *segmenti orientati* sopra la retta. Quindi il concetto dei numeri negativi viene affermato esplicitamente da NEWTON nel cap. V dell'*Arithmetica universalis*: « Quantitates vel Affirmativae sunt, seu nihilo majores, vel Negativae, seu nihilo minores. Sic in rebus humanis possessiones dici possunt bona positiva, debita verum bona negativa.... Et ad eundem modum in Geometria, si linea

(1) Cfr. E. BOMPIANI, *Che cosa contiene la Géométrie di Cartesio?* « Periodico di Matematiche », 1921.

versus plagam quamvis ducta affirmativa habeatur, negativa erit quae versus plagam oppositam ducitur ».

Conviene aggiungere che, nella considerazione di matematici posteriori, non sempre i numeri relativi sono stati riguardati sotto l'aspetto di « quantità o grandezze orientate », ma spesso invece concepiti come « quantità da aggiungere o togliere » : così, nella scuola stessa di Newton, il MAC LAURIN, e in Francia LACROIX e CAUCHY (*Analogie algébrique*, 1821), preludendo alla moderna teoria astratta dei numeri relativi quali « operatori ».

Dal precedente esame resulta :

1) che le frazioni si sono introdotte naturalmente nell'Aritmetica per il loro significato *sintetico*, come misure, porgendo così un'interpretazione generale della « divisione » anche nel caso in cui il dividendo non riesca multiplo del divisore ;

2) che invece i numeri negativi traggono origine dalla convenienza *analitica* di usare in generale il simbolo della « sottrazione », anche quando il diminuendo è minore del diminutore. Tuttavia l'uso di tali numeri è parso primamente giustificato da un'interpretazione *sintetica*, in rapporto alla rappresentazione di « quantità orientate », sebbene anche il concetto di « quantità additive e sottrattive » si sia rivelato sufficiente a conferire legittimità ai calcoli su numeri relativi.

Nella storia dell'immaginario (che viene illustrata dall'articolo di GIGLI nel vol. II di questa raccolta) si riscontra un analogo progresso d'idee. Il simbolo $\sqrt{-a}$ (con a positivo) si presenta nella formula di risoluzione delle equazioni cubiche con CARDANO e TARTAGLIA, e precisamente nel cosiddetto *caso irriducibile* corrispondentemente a soluzioni reali del problema geometrico, e di qui ha origine (con BOMBELLI) il calcolo sui numeri che noi diciamo immaginari o complessi. Ma la legittimità logica di tali sviluppi è stata riconosciuta universalmente solo quando ARGAND e GAUSS hanno pôrto la nota rappresentazione dei detti numeri, come indici dei punti del piano.

Tuttavia, per riguardo alle questioni concrete dell'*analisi applicata*, il caso degli immaginari si presenta diverso da quello dei numeri frazionari e negativi, giacchè le soluzioni immaginarie del problema, a differenza delle reali, restano il più delle volte prive di senso.

Questa circostanza genera naturalmente l'idea che l'interpretazione sintetica (vettoriale) dei numeri complessi valga soprattutto a stabilire la possibilità logica di usare nei calcoli il simbolo $i = \sqrt{1-}$; onde il desiderio di giustificare *a priori* codesta possibilità, senza ricorso ad interpretazioni sintetiche, con un'esposizione analitica-formale della teoria, quale viene pôrta da HERMANN HANKEL (1): il quale, riprendendo una veduta già affacciata da G. PEACOCK (2), ha formulato in questa occasione il *principio di permanenza delle proprietà formali* delle operazioni, che stabilisce il criterio generale delle diverse estensioni del concetto di numero.

Al lume di questo principio ogni estensione consiste semplicemente:

1) nell'attribuire il nome di « numero » a simboli o complessi di simboli, che non rappresentino già numeri del campo dato, cui si possa conferire un significato qualsiasi;

2) e nel definire pei nuovi numeri le operazioni fondamentali dell'Aritmetica e il concetto d'uguaglianza, in guisa che *si conservino le proprietà formali delle operazioni* (dirette), che costituivano le regole di calcolo nel campo numerico ristretto.

Questa condizione acquista un significato preciso quando si enuncino le suddette proprietà formali che noi abbiamo riassunto nei §§ 19-22 e che sono, in generale, traducibili con *uguaglianze* (*non* con *disuguaglianze*).

HANKEL ha messo in opera l'applicazione del suo principio, costruendo una teoria analitica dei numeri complessi $\alpha + i\,\beta$, che vengono definiti, sostanzialmente, come coppie ordinate (α, β) su cui si opera colle regole di calcolo convenienti.

Più tardi, la tendenza aritmetizzante della scuola di Berlino, ha portato la costruzione di *teorie analitiche dei numeri fratti e negativi*, e si sono costruite, precisamente: una *teoria delle congruenze* (KRONECKER, l. c., 1887) e le *teorie delle coppie* (3) e *degli operatori* (4).

(1) *Theorie der complexe Zahlen*, Lipsia, 1867.

(2) *Symbolical Algebra*, Cambridge, 1845.

(3) O. STOLZ, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, Lipsia, 1885. J. TANNERY, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, Parigi, 1886.

(4) C. MÉRAY, *Théorie élémentaire des fractions dégagée de toute considération impliquant soit la subdivision de l'unité abstraite, soit l'intervention des grandeurs*. « Nouvelles Annales de Mathématiques », 1889; *Les fractions et les quantités négatives*. Parigi, 1890; G. PEANO, *Aritmetica generale*, Torino, 1902.

§ 24. **Osservazioni sulla teoria analitica.** — Il rapido esame storico delle estensioni del concetto di numero, ci ha portato a distinguere, per ciascuna classe estesa, *teorie sintetiche* e *teorie analitiche*.

Lo scopo della teoria analitica dei numeri consiste nel giustificare l'*uso nel calcolo di formule* che, rispetto al concetto dato dei numeri naturali, sono *prive di senso*, come: $a - b$ per $a < b$, $\frac{a}{b}$ quando a non è multiplo di b, ecc.

Limitiamoci — per semplicità di discorso — alla teoria dei numeri fratti e negativi; lo scopo della teoria analitica di questi numeri si può ridurre più precisamente alla dimostrazione del seguente resultato:

Si operi nel calcolo algebrico (o aritmetico) fingendo sempre possibili le quattro operazioni: addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione, e supponendo formalmente le loro proprietà fondamentali (§§ 19-22); *se per tal modo, a partire da date uguaglianze fra numeri naturali, si deducono altre uguaglianze fra numeri naturali, quest'ultime sono legittimamente dedotte, comunque si sieno rappresentate nelle formule di passaggio delle operazioni impossibili, e quindi* ***la*** *deduzione sia avvenuta attraverso formule vuote di senso.*

Esempio. — Nel paese X sono nati, durante un anno, 6 uomini ogni 5 giorni, quanti uomini sono nati in tutto l'anno?

Si ha la proporzione

$$365 : 5 = x : 6,$$

che (resultando x intero) esprime un'uguaglianza fra numeri naturali. Trasformiamola scrivendo

$$x = 365 \cdot \frac{6}{5}$$

$$\frac{6}{5} = \left(1 + \frac{1}{5}\right)$$

$$x = 365 \left(1 + \frac{1}{5}\right) = 365 + \frac{365}{5} = 365 + 73 = 438.$$

Il valore di x così dedotto è quello stesso che si ottiene calcolando $\frac{365 \cdot 6}{5} = 73 \cdot 6$. E non pertanto eseguendo i calcoli nel primo modo siamo passati attraverso una formula assurda in sè, secondo la quale si suppone sia nato — ogni giorno — un uomo e $\frac{1}{5}$ di uomo. Nessuno penserà che per giustificare il calcolo si debbano effettivamente frazionare gli uomini!

Ora si tratta di vedere in qual modo il resultato precedente possa essere stabilito in generale.

Anzitutto, di fronte al presentarsi di simboli d'operazioni impossibili, o non bene definite, si possono osservare due atteggiamenti opposti:

1) l'atteggiamento prudente e rigoroso che si arresta di fronte al simbolo privo di significato e ne rifiuta l'uso;

2) l'atteggiamento ardito del ricercatore che accorda fiducia al calcolo istituito su simboli non definiti e procede in esso, colla speranza di *scoprire* nuove relazioni — se pure non giustificate — che sarà facile di giustificare poi con metodi rigorosi.

Questa diversità d'atteggiamento divide per es. — nei suoi inizi — gli oppositori e i fautori del Calcolo infinitesimale, questi ultimi potendosi riunire sotto l'insegna di D'Alembert « continuez, la foi viendra! »; e — più di recente — gli oppositori ed i fautori dell' « immaginario ».

Dal punto di vista logico, l'atteggiamento ardito del ricercatore può essere giustificato come l'accoglimento di un'*ipotesi di lavoro*. In tal senso il ricercatore sviluppa le conseguenze di un'ipotesi che — a volta a volta — si appresta a sottomettere ad un diretto controllo.

Ma, quando questo controllo riesce, senza eccezione, in un seguito di casi, si produce nelle menti una specie di *certezza pratica* che l'ipotesi adottata sia giusta; ed infatti se i vari tentativi sono apprezzati con cauto giudizio, se ne ha in un certo senso una *prova sperimentale*.

Fin qui siamo sul terreno della Logica. Ora bisogna fare i conti colla Psicologia!

Lo spirito umano aborre dal dubbio, e questo aborrimento si manifesta non solo come amore della verità più sicura, cioè come ricerca di mezzi di prova più rigorosi, ma anche come amore dell'illusione; così avviene che il successo parziale si scambia non di rado colla presunzione della vittoria definitiva, il resultato sperimentale col principio preteso *a priori*, la Fisica colla Metafisica.

Nel campo matematico di cui stiamo trattando, la certezza empirica sopra accennata, congiunta alla *superstizione del forma-*

lismo, conduce spesso ad un *sofisma*, più o meno apertamente dichiarato, che tien luogo di prova logica: *operando nel calcolo sopra dei simboli, ci è indifferente il significato concreto che questi possono ricevere compatibilmente colle proprietà formali del nostro sistema d'operazioni; quindi il processo formale è legittimo indipendentemente da codesto significato concreto e però anche se — durante il processo — si è fatto uso di simboli privi di senso.*

Questo sofisma compare travestito in varie teorie formali dei numeri fratti o negativi, che pure sembrano essere state diffuse in alcuni circoli di discepoli di WEIERSTRASS; dove s'introduce *per definizione* accanto all'unità $e = 1$ un'unità *opposta* e' tale che

$$e + e' = O, \quad e' = -1,$$

e accanto ad ogni numero naturale n un numero *contrario* $n' = \frac{1}{n}$, per modo che sia

$$n\,n' = 1.$$

E non si avverte che se e' ed n' non hanno ancora ricevuto un senso, *a fortiori* non hanno nemmeno senso la somma $e + e'$ o il prodotto $n\,n'$, resultati di operazioni sopra di essi!

Vi è qui un'assunzione implicita, cioè che *un simbolo rappresenti senz'altro un oggetto del pensiero logico.*

Nondimeno quest'assunzione si riconosce falsa in esempi volgari: si supponga per es. che sia lecito di operare, colle ordinarie regole di calcolo, sul simbolo $\frac{a}{0}$; si avrà allora

$$1\,.\,0 = 0 \qquad 2\,.\,0 = 0$$

$$\frac{0}{0} = 1 \qquad \frac{0}{0} = 2$$

$$1 = 2 \ !$$

Questo semplice esempio (ed altri che si potrebbero trarre dalle serie divergenti o indeterminate ecc.) ci avverte che la giustificazione formale è insufficiente ad autorizzare l'uso di simboli corrispondenti ad operazioni impossibili, giacchè gli stessi principî del pensiero logico (identità, contraddizione) valgono solo per ciò che rappresenta un *possibile oggetto*, mentre un oggetto impossibile può dare origine ad una contraddizione intrinseca (esempi: limite d'una serie indeterminata, classe di tutte le classi, ecc.).

Ora vi è luogo a distinguere intorno alla *possibilità degli enti astratti* :

1) una possibilità (fisica,...) relativa a certe interpretazioni di altri enti da cui i dati dipendono, per es. $\frac{1}{3}$ è fisicamente impossibile se l'unità è l'uomo ;

2) una *possibilità logica*, che spetta ad ogni concetto non contraddittorio.

Dopo ciò lo scopo della teoria analitica dei numeri negativi e fratti si può chiarire dicendo che essa si propone di : *mostrare la possibilità logica dei simboli* a — b, $\frac{a}{b}$, *in un sistema di enti e di operazioni che si suppone governato dalle proprietà fondamentali dell'Aritmetica dei numeri naturali.*

In qual senso possa stabilirsi una tale possibilità logica, verrà lumeggiato dalle considerazioni che seguono.

§ 25. **Rapporti fra la teoria analitica e la teoria sintetica.** — Per dimostrare la possibilità logica di un concetto astratto basta far vedere ch'esso può ricevere un'*interpretazione concreta*; in questo senso per es. si fa vedere che i numeri transfiniti di CANTOR sono logicamente possibili, ricorrendo alle serie di punti considerate al § 17.

Così per mostrare la possibilità logica di un oggetto, che soddisfi alle proprietà formali dei numeri e sia rappresentato dal simbolo $\frac{1}{3}$, basta supporre che la classe rispetto a cui si considerano i numeri 1, 2, 3.... sia formata di elementi divisibili in tre parti : in tal modo — nonostante l'impossibilità fisica di $\frac{1}{3}$ d'uomo — si conclude alla possibilità logica di $\frac{1}{3}$, per ciò che esiste $\frac{1}{3}$ di metro.

In generale si può dire che una teoria sintetica dei numeri fratti o negativi dimostra in questo senso la possibilità logica dei simboli $\frac{a}{b}$, $a - b$. Ma qui interviene un'*osservazione delicata*.

Si abbiano due diverse interpretazioni concrete del concetto di numero, per es.:

A) numero = numero d'uomini,

B) numero = numero di metri.

Supposto che il numero a non sia multiplo di b, il simbolo $\frac{a}{b}$ ha senso rispetto all'interpretazione B) mentre è privo di senso rispetto ad A). Ora l'uso dei numeri fratti $\frac{a}{b}$ può condurre ad alcune relazioni fra numeri naturali a, b,..., che risultano così dimostrate pei numeri concreti della classe B). Queste stesse relazioni aritmetiche potranno ancora ritenersi valevoli pei numeri della classe A) ?

In altre parole: la possibilità — relativa a certe interpretazioni concrete del numero — di estendere il campo dei numeri naturali, non potrebbe — per avventura — tradursi in un nuovo postulato dell'Aritmetica, da cui seguano, per la serie stessa dei numeri naturali, proprietà incompatibili con alcune speciali interpretazioni del numero ?

Se così fosse si sarebbe necessariamente condotti a distinguere *varie Aritmetiche*, in alcune delle quali il simbolo $\frac{a}{b}$ o $a - b$ potrebbe dar luogo ad una incompatibilità con certe proprietà dei numeri, e quindi rappresentare in questo senso (relativo) una impossibilità logica.

Prima di rispondere al dubbio critico sollevato dalle precedenti riflessioni, vogliamo porgere un esempio che valga a mostrare come esso debba ritenersi, *a priori*, logicamente fondato.

Si cerchi di fondare la Geometria del piano assumendo dall'intuizione alcuni postulati fondamentali relativi ai *punti* (elementi della classe « piano »), alle *rette* (classi di punti contenute nel piano), e ai *movimenti* del piano su se stesso (corrispondenze fra i punti del piano).

Supponiamo dunque di avere enunciato:

1) i postulati relativi alla determinazione di una retta per mezzo di due punti e all'intersezione di due rette (postulato d' EUCLIDE sulla unicità della parallela);

2) i postulati relativi all'ordine dei punti sulla retta, o dei raggi d'un angolo ecc., esclusa la continuità (Articolo Quinto);

3) i postulati che caratterizzano i *movimenti del piano su sè stesso*, a cui si riattacca la proposizione che « due triangoli aventi uguali due lati a due lati e *direttamente uguali* gli angoli compresi, sono uguali ».

Su queste basi si potrà edificare, *nel piano*, una teoria dell'uguaglianza (congruenza) dei triangoli, la quale tuttavia avrà un contenuto più ristretto della teoria euclidea ordinaria. Infatti non ci è dato di dedurre che sono uguali due triangoli (inversamente uguali) la cui sovrapposizione esige un ribaltamento del piano, e quindi implica l'ipotesi che il piano sia contenuto in uno spazio a tre dimensioni.

La possibilità di questa estensione del piano si traduce qui in un nuovo postulato della Geometria piana, a cui si riattacca per es. la proprietà che « gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali fra loro ». Precisamente HILBERT ha provato che questo postulato è indipendente da 1) 2) 3), per modo che è possibile assegnare un'interpretazione concreta del concetto astratto di piano, definito dai postulati 1) 2) 3), dove non valga la proprietà degli angoli alla base del triangolo isoscele.

Questo esempio ha un significato logico generale :

La estendibilità di una classe di enti astrattamente definita, in rapporto a certe relazioni postulate in essa, può tradursi in qualche postulato essenzialmente nuovo che esprima una relazione degli enti **entro** *la classe data,* tale relazione essendo compatibile con alcune interpretazioni concrete dei supposti enti astratti e incompatibile con altre interpretazioni di essi.

Dopo ciò ritorniamo alla nostra Aritmetica. È possibile che vi siano diverse Aritmetiche dei numeri naturali, per modo che in qualcuna di esse sussistano relazioni compatibili coll'estensione del campo dei numeri, e in qualche altra vi siano relazioni incompatibili con una siffatta estensione ?

A questa domanda si risponde :

No, il dubbio critico sollevato innanzi può essere rifiutato in base alla seguente considerazione, che si riattacca allo stesso processo di definizione dei numeri naturali (cardinali o ordinali) :

Qualunque sia il significato concreto che vogliasi attribuire ai numeri delle due serie :

A) $\quad 0, 1, 2, 3, \ldots. n$

B) $\quad 0, 1, 2, 3, \ldots., \bar{n}$

si può sempre porre fra le due serie una *corrispondenza ordinata* $n = \bar{n}$, la quale trasforma la somma $m + n$ in $\bar{m} + \bar{n}$, il prodotto mn in $\overline{mn}$ ecc. ; mediante questa corrispondenza tutte le proprietà dei numeri A) in ordine alle operazioni fondamentali si traducono in proprietà analoghe dei numeri B), e viceversa, quindi *le due serie di numeri godono sempre delle stesse proprietà aritmetiche.*

Vi è dunque *una sola Aritmetica dei numeri naturali*, l' unicità dell'Aritmetica derivando dal modo di costruzione dei numeri, come enti astratti che rappresentano le corrispondenze possibili fra classi o serie d'oggetti.

Pertanto se l' uso incondizionato dei simboli $a-b$, $\frac{a}{b}$ viene giustificato per riguardo ad una particolare interpretazione concreta dei numeri naturali a, b,...., esso risulta parimente giustificato, come possibilità logica, per riguardo ad ogni altra interpretazione concreta dei numeri. Cioè: *la teoria analitica dei numeri negativi e fratti può esser fondata ricorrendo ad una qualsiasi teoria sintetica di essi.*

Si può anche dire che ogni teoria analitica dei numeri negativi e fratti è (astrattamente parlando) una teoria sintetica, in quanto raggiunge il suo resultato fondamentale colla costruzione di una serie di enti, comprendente la serie dei numeri naturali; per quanto la serie estesa venga qui definita senza alcun riguardo all' *uso ordinario* dei numeri negativi e fratti. Ma — dal punto di vista filosofico della teoria della conoscenza — vi è fra la teoria analitica e la teoria sintetica questa differenza importante: *la teoria sintetica dei numeri negativi o fratti* ecc. *si basa sopra postulati, in quanto suppone una realtà — o la rappresentazione concettuale di una realtà — esterna, a cui i nuovi numeri si riferiscono; invece la teoria analitica porge una costruzione puramente logica dei numeri estesi, a partire dalla serie dei numeri naturali che esclusivamente si suppone data*; qui i numeri estesi non s' introducono *mediante postulati*, ma mediante *definizioni* o *convenzioni.*

Perciò la teoria sintetica — più chiara ed interessante dal punto di vista fisico — è senz'altro preferita dagli empiristi, fautori dell'*Aritmetica a posteriori*, laddove la teoria analitica risponde al punto di vista dei fautori dell'*Aritmetica a priori.*

II. — Teorie sintetiche.

§ 26. **I numeri negativi.** — Dal punto di vista sintetico, il concetto di numero negativo non si presenta come estensione del numero cardinale, ma soltanto del *numero ordinale.*

Infatti i numeri negativi s' introducono, accanto ai *positivi*, a costituire la classe più estesa dei *numeri con segno* o *numeri relativi*, per designare il posto (numero d'ordine) degli oggetti di una serie che procede illimitatamente non solo da ogni elemento ad un successivo, ma anche (in senso opposto) da ogni elemento ad un precedente.

Il modo più semplice di costruire una serie siffatta, consiste nel riunire due serie

$A)$ $\qquad 1,\ 2,\ 3 \dots n \dots$

$A')$ $\qquad 1',\ 2',\ 3' \dots n' \dots,$

convenendo che gli elementi di $A')$ succedano a quelli di $A)$ nell'ordine inverso all'ordine di successione 1, 2, 3... , per modo che

1′ preceda 1,
2′ » 1′ e così via;

si ottiene per tal modo la serie

$$\dots 4',\ 3',\ 2',\ 1',\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \dots$$

il cui ordine designeremo brevemente usando delle espressioni: *a destra* e *a sinistra*.

I numeri d'ordine relativi agli elementi di questa serie danno luogo alla possibilità illimitata dell'addizione e della sottrazione, l'addizione essendo definita dal punto di vista ordinale.

Per $b = 1,\ 2,\ 3 \dots$:

$a + b$ è il numero d'ordine dell'elemento che si trova al posto b dopo a a destra (nel verso della serie);

$a - b$ è il numero d'ordine dell'elemento che si trova al posto b dopo a a sinistra (nel verso opposto a quello della serie);

Per $b' = 1',\ 2',\ 3' \dots$:

$a + b'$ è il numero d'ordine dell'elemento che si trova al posto b' dopo a a sinistra;

$a - b'$ è il numero d'ordine dell'elemento che si trova al posto b' dopo a a destra. E ciò comunque a appartenga alla serie 1, 2, 3 .... o alla 1′, 2′, 3′ ..... .

In conseguenza si può porre

$$1' = 1 - 1 = 0,$$
$$2' = 0 - 1,$$
$$3' = 0 - 2 \dots,$$

mentre

$$\begin{aligned}1 &= 0 + 1\\ 2 &= 0 + 2\\ 3 &= 0 + 3 \ldots\ldots\end{aligned}$$

Quindi, tralasciando la ripetizione del simbolo 0, *i numeri d'ordine degli elementi della serie vengono rappresentati dai numeri con segno*:

$$\ldots\ldots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3 \ldots\ldots;$$

si ha allora:

$$\begin{aligned}+a + (+b) &= +(a+b)\\ +a + (-b) &= +(a-b) \qquad (a > b)\\ \text{oppure} \quad &= -(b-a) \qquad (b < a)\\ +a - (+b) &= +a + (-b)\\ +a - (-b) &= +(a+b)\\ -a + (+b) &= +b + (-a)\\ -a + (-b) &= -(a+b)\\ -a - (+b) &= -a + (-b)\\ -a - (-b) &= -a + (+b);\end{aligned}$$

formule che contengono le regole ordinarie della somma algebrica.

L'addizione e la sottrazione resultano così illimitatamente possibili, e vengono soddisfatte la proprietà commutativa e associativa.

Nota. — Un punto degli sviluppi precedenti merita un'osservazione particolare: i numeri a, a' delle due serie $A)$ $A')$ non vengono rappresentati simmetricamente dai numeri con segno, perchè

$$\begin{aligned}a &= +a,\\ a' &= -(a-1).\end{aligned}$$

Questo inconveniente si verifica per es. nella numerazione degli anni secondo l'*êra storica*, p. C. e a. C.; gli anni a. C. vengono designati: l'anno precedente alla nascità di Cristo col numero 1 (a. C.), l'anno precedente a questo con 2 (a. C.) ecc. Ne segue per es. che la differenza fra due avvenimenti relativi ad uno stesso mese dell'anno n p. C. e dell'anno n a. C. è $2n - 1$ (e non $2n$); così in particolare gli anni bisestili che si succedono (ogni 4 anni) coi numeri d'ordine 4, 8 ...., per gli anni p. C., per quelli a. C. portano i numeri d'ordine 1, 5, 9....

Tale circostanza diventa specialmente pregiudizievole alla brevità dei calcoli degli astronomi, i quali appunto da ciò sono stati tratti a modificare la cronologia ordinaria della storia antecristiana, indicando con 0 l'anno che termina colla nascita di G. C., con 1 l'anno precedente ecc.: gli anni a. C. dell'*êra astronomica* portano dunque un numero d'ordine che differisce di un' unità da quello relativo all'êra storica.

L' inconveniente testè indicato nella formazione della serie corrispondente ai numeri con segno, si elimina in generale, se in luogo delle serie A) A') comincianti dal numero 1, si riuniscono in modo analogo due serie comincianti collo 0:

$$\begin{array}{l} 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots. \\ 0',\ 1',\ 2',\ 3' \ldots. \end{array}$$

facendo però coincidere gli elementi 0, 0'. Allora

$$\ldots.\ 2' = -2,\ 1' = -1,\ 0 = 0',\ 1 = +1,\ 2 = +2 \ldots.$$

L'addizione e la sottrazione dei numeri con segno vengono definite insieme al processo medesimo di definizione di codesti numeri. Per *estendere la moltiplicazione* si terrà ferma la definizione ordinale

$$ab = \underset{1}{a} + \underset{2}{a} + \ldots. + \underset{b}{a},$$

anche nel caso in cui (essendo sempre b positivo) a sia negativo; si porrà quindi

$$(-a)b + -ab.$$

Dopo ciò per conservare la proprietà commutativa si dovrà porre

$$a(-b) = -ab,$$

e, affinchè questa formula sia valida anche per a negativo:

$$(-a)(-b) = ab.$$

Risultano quindi soddisfatte tutte le proprietà fondamentali della moltiplicazione.

§ 27. **La serie dei numeri relativi caratterizzata da postulati.** — In luogo di partire da due serie

$$\begin{matrix} 0, & 1, & 2, & 3 \ldots. \\ 0', & 1', & 2', & 3' \ldots. \end{matrix}$$

per costruire la serie illimitata nei due versi

$$\ldots.\, 3', \quad 2', \quad 1', \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots.$$

che corrisponde ai numeri con segno, è conforme al punto di vista sintetico di presupporre data quest'ultima serie illimitatamente estesa nei due versi opposti. Allora si è condotti a surrogare il sistema di postulati che caratterizza la serie numerata dei numeri naturali con un *sistema di postulati che caratterizza senz'altro le serie che si possono porre in corrispondenza ordinata colla serie dei numeri relativi:* da cui questi numeri nascono per astrazione.

A tale scopo porremo la seguente

DEFINIZIONE. — Una serie si dice *quasi ben ordinata* se ogni parte di essa, costituita da elementi successivi ad un elemento qualsiasi, ammette un *primo* elemento.

Si noti che la differenza intercedente fra una serie quasi ben ordinata e una serie ben ordinata, è la mancanza di un primo elemento della serie totale.

TEOREMA. — *Una serie* S, *in corrispondenza ordinata colla serie dei numeri relativi*

$$\ldots.\, -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \ldots.$$

è caratterizzata dalla condizione di essere quasi ben ordinata insieme all'inversa.

La numerazione di una tal serie dipende dalla scelta arbitraria dell'elemento che si fa corrispondere allo 0.

Sia S una serie che soddisfi alle condizioni enunciate. In S ogni elemento ha *un* successivo ed *un* precedente. Scelto in S un elemento che si faccia corrispondere a 0, designamo il suo successivo con 1, il successivo di 1 con 2 ecc.; similmente designamo il precedente di 0 con -1, il precedente di -1 con -2 ecc. Per tal modo si costruisce entro S una serie S' corrispondente ordinatamente alla serie dei numeri relativi. Si tratta di far vedere che S' esaurisce S. Infatti, se così non fosse, ci sarebbe in S un primo elemento *dopo* S', e questo non avrebbe un precedente immediato, oppure ci sarebbe un ultimo elemento fra quelli che precedono S' e questo non avrebbe un successivo immediato.

NOTA 1ª. — Per stabilire una corrispondenza ordinata fra la serie S e i numeri relativi si ha la scelta arbitraria dell'*origine* 0.

Segue da ciò che la serie S ammette infinite *trasformazioni ordinate* in sè, dove all'elemento 0 si faccia corrispondere $\pm n$; queste rispondono all'operazione di somma:

$$y = x \pm n.$$

NOTA 2ª. — L'analisi dei postulati che caratterizzano la serie dei numeri relativi è stata svolta criticamente, in rapporto ad una completa teoria delle operazioni, da A. PADOA, il quale parte dalle relazioni di ordine (successivo di) e di simmetria (rispetto ad un elemento = 0).

Egli enuncia quindi, in una forma appropriata, il principio d'induzione che caratterizza qui la *minima serie quasi bene ordinata e infinitamente estesa nei due versi*, e riesce così ad adattare alle operazioni sui numeri relativi il sistema induttivo grassmanniano (§ 22).

La via che qui abbiamo indicato, ove s'introduce la considerazione della serie inversa, conduce d'altronde ad estendere il principio d'induzione posto per la serie dei numeri naturali. Il principio esteso costituisce un teorema dimostrabile, per es., nella forma seguente:

Se una classe contiene il numero 0, ed è tale che insieme ad ogni numero relativo debba appartenere ad essa il suo successivo e il suo precedente, la classe C contiene tutti i numeri relativi.

§ 28. I numeri fratti come rapporti di grandezze commensurabili. — I numeri fratti $\frac{a}{b}$ si possono far nascere da un'estensione dei numeri cardinali o dei numeri ordinali: soltanto nel primo caso occorre limitarsi ai numeri assoluti che s'identificano coi positivi.

L'osservazione che dà origine ai numeri fratti cardinali è la seguente: nella costruzione dei numeri cardinali

$$1, \quad 2 = 1 + 1, \quad 3 = 1 + 1 + 1 \ldots.$$

si può supporre che l'oggetto designato coll'unità sia esso stesso una classe e possa quindi considerarsi come una somma di b *unità di 2° ordine*:

$$1 = 1_2 + 1_2 + \dots + 1_2.$$

Allora il numero $\frac{a}{b}$ designa semplicemente la somma di a unità di 2° ordine.

In realtà occorre considerare accanto alle frazioni $\frac{a}{b}$ anche frazioni come $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{d}$ ecc. e ciò illimitatamente, sicchè l'ipotesi che l'*unità primitiva sia una somma di unità inferiori*, deve essere modificata progressivamente in corrispondenza a nuovi denominatori. Se infine si vuole esprimere il contenuto dell'ipotesi più generale che corrisponde all'integrità dei numeri fratti, si è condotti a determinare l'oggetto unità della classe primitiva come una *grandezza divisibile*. Da questo punto di vista *i numeri fratti s'introducono come rapporti in un sistema di grandezze commensurabili.*

Occorre perciò postulare le relazioni fondamentali di *uguaglianza* e di *somma* che caratterizzano, nel modo più generale, il concetto di un tale sistema.

Si abbia un sistema di enti (A, B, C....) i quali si trovino distribuiti in classi per mezzo di una relazione riflessiva simmetrica e transitiva (*uguaglianza*), enti uguali appartenendo ad una medesima classe. Gli astratti di tali enti, rispetto all'uguaglianza considerata, costituiscono un *sistema di grandezze commensurabili*, se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1) Esiste un'operazione univoca, la *somma*, che a due grandezze A, B fa corrispondere *una* grandezza $A + B$ dello stesso sistema.

Quindi data una grandezza A vi è nel sistema una grandezza *multipla* secondo n:

$$nA = \underbrace{A + A + \dots + A}_{n}.$$

2) Date due grandezze A, B avviene sempre uno e uno solo fra i tre casi seguenti:

$$A = B,$$
$$A = B + C, \text{ cioè } (A > B),$$
$$B = A + C, \text{ cioè } (A < B).$$

3) La somma gode delle proprietà commutativa e associativa:

$$A + B = B + A,$$
$$(A + B) + C = A + (B + C) \;\; (= A + B + C).$$

4) Essendo n un qualsiasi numero intero e positivo ed A una grandezza del sistema, esiste nel sistema stesso *una* grandezza

$$B = \frac{A}{n}$$

tale che

$$nB = A.$$

(*Divisibilità* delle grandezze).

5) Date, nel sistema, due grandezze qualsiasi A, B esiste sempre nel sistema una terza grandezza C di cui entrambe sono multiple:

$$A = nC, \quad B = mC.$$

(Naturalmente A e B sono multiple anche di $\frac{C}{p}$. Si dimostra che il noto processo euclideo delle divisioni successive conduce ad una grandezza C che è massima fra tutte quelle di cui A, B sono multiple, ed ogni altra grandezza di cui A e B siano multiple risulta allora summultipla di C).

Si noti che per il postulato 1), se

$$A = A', \quad B = B'$$
$$A + B = A' + B'$$

ed

$$nA = nA';$$

per il postulato 4), se

$$A = A'$$

anche

$$\frac{A}{n} = \frac{A'}{n}.$$

In base ai suddetti postulati, definiremo il *numero fratto*

$\frac{m}{n}$, *rapporto* $B : A$ *di due grandezze* del sistema, dicendo che il rapporto $B : A$ è $\frac{m}{n}$ quando, posto

$$C = \frac{A}{n} \text{ e quindi } A = nC,$$

sia

$$B = mC \ (= \frac{m}{n} A).$$

Questo rapporto dicesi anche la *misura* di B rispetto ad A, presa come *unità*.

Per definizione, presa un' altra grandezza D summultipla di A e B per cui

$$A = qD, \quad B = pD,$$

si ha

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}.$$

In tal caso, ponendo

$$C = rE, \quad D = sE,$$

si trova

$$A = nrE = qsE.$$
$$B = mrE = psE,$$

e perciò

$$nr = qs, \quad mr = ps,$$

quindi

$$qmrs = pnrs,$$

e

$$qm = pn.$$

Viceversa, se

$$qm = pn,$$

posto,

$$A = nC, \quad B = mC$$
$$A = qD, \quad B' = pD,$$

e come innanzi,

$$C = rE, \quad D = sE \qquad \text{(post. 6)}.$$

si deduce

$$A = nrE, \quad A = qsE,$$

quindi (post. 4)

$$nr = qs;$$

ma poichè

$$qmrs = pnrs,$$

segue

$$mr = ps,$$
$$B = mrE, \quad B' = psE$$
$$B = B',$$

cioè, per definizione,

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}.$$

In particolare resulta di qui:

$$\frac{m}{n} = \frac{mr}{mr}.$$

Quando il numeratore è multiplo del denominatore i numeri fratti si riducono al tipo $\frac{m}{1}$, e s'identificano cogl'interi m, che esprimono i rapporti $mA : A$:

$$\frac{m}{1} = m.$$

Ora si possono definire le operazioni sui numeri fratti:

1) La *somma* di due numeri fratti

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$$

corrisponde alla somma delle due grandezze da essi misurate.

Poniamo

$$B = \frac{m}{n} A, \quad C = \frac{p}{q} A.$$

$$B + C = D = \frac{r}{s} A,$$

sarà

$$\frac{r}{s} = \frac{m}{n} + \frac{p}{q};$$

ma

$$\frac{m}{n} = \frac{mq}{nq}, \quad \frac{p}{q} = \frac{np}{nq},$$

sicchè, posto

$$\frac{A}{nq} = E,$$
$$B = mqE, \quad C = npE$$
$$D = B + C = (mq + np)E,$$

quindi

$$\frac{r}{s} = \frac{mq + np}{nq}.$$

2) Per definire il *prodotto* di due numeri fratti $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$, si è condotti ad estendere la definizione del prodotto di due numeri cardinali (§ 21) mercè le considerazioni che seguono.

Consideriamo le *coppie* non ordinate ((BC) = (CB)) formate colle grandezze del nostro sistema, si tratta di vedere come si possono definire per tali coppie la *somma* e una relazione — riflessiva, simmetrica e transitiva — di *uguaglianza*, in guisa che le coppie suddette diano luogo ad un sistema di grandezze soddisfacenti ai postulati 1).... 5).

Porremo a tale scopo:

$$(B, C) + (B, D) = (B, C + D),$$

quindi

$$(B, C) = (nB, \frac{C}{n}),$$

e più in generale

$$(B, C) = (n\frac{B}{m}, m\frac{C}{m}).$$

Ciò posto è facile verificare che gli astratti delle coppie (B, C), in ordine all'uguaglianza sopra definita, dan luogo ad un nuovo sistema di grandezze per cui sono soddisfatte le condizioni 1).... 5). Se per es. le grandezze date sono « segmenti », le nuove grandezze costruite sono « aree di rettangoli ».

Ora se

$$B = \frac{m}{n}A, \quad C = \frac{p}{q}A$$

si definirà il *prodotto* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}.\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$ *come il rapporto della grandezza* (BC) *ad* (AA).

Ma
$$(B,\ C) = \left(nB, \frac{C}{n}\right) = \left(mA, \frac{p}{nq}\ A\right) = \frac{1}{nq}(mA, pA) =$$
$$= \frac{1}{nq}(mpA,\ A) = \frac{mp}{nq}(AA),$$
quindi il prodotto
$$\frac{m}{n}\frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}.$$

È chiaro che questa definizione del prodotto è la diretta estensione di quella data pei numeri (interi) cardinali.

D'altra parte anche la formula
$$ab = \underbrace{a + a + ... + a}_{b},$$
si può estendere osservando che il rapporto di (BC) a (BA) uguaglia il rapporto di C ad A, e il rapporto di (BA) ad (AA) uguaglia il rapporto di B ad A; quindi: *il prodotto* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$ *è la misura rispetto ad* A *di una grandezza* $\mathrm{D} = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}\mathrm{B}$, *la cui misura rispetto a* $\mathrm{B} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}\mathrm{A}$ *è* $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$.

Quest'ultima definizione del prodotto lascia subito scorgere come si effettui la *divisione* = operazione inversa della moltiplicazione:
$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n}\frac{q}{p} = \frac{mq}{np}.$$

§ 29. **Numeri razionali ordinali.** — I numeri fratti, introdotti come rapporti di grandezze commensurabili, si lasciano *ordinare in una serie*, secondo l'ordine delle grandezze crescenti di cui esprimono il rapporto all'unità; si ha così
$$\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$$
se
$$mq > np$$
$$\left(\frac{m}{n} = \frac{p}{q} + \frac{r}{s},\quad \frac{r}{s} = \frac{mq - np}{nq}\right).$$

Da questo punto di vista i numeri fratti appariscono come *numeri d'ordine degli elementi di una serie* e sono quindi suscettibili di estensione quanto al *segno*.

Per introdurre i numeri fratti come numeri ordinali bisogna caratterizzare la serie da essi formata. Ed è subito da notare che *questa serie non è più bene ordinata*. chè dopo un elemento qualsiasi $\frac{m}{n}$ non vi è più un successivo immediato, come non vi è *un* precedente.

Nondimeno la serie dei numeri fratti si lascia formare mediante successive costruzioni di serie ben ordinate, secondo ci proponiamo di esporre.

Riferiamoci per semplicità ai numeri positivi e partiamo quindi dalla serie S_1 dei numeri naturali:

$$0, \quad 1, \quad 2\ldots, \quad n\ldots,$$

Consideriamo le trasformazioni della serie S_1 che nascono *per moltiplicazione*:

$$y = nx.$$

Una trasformazione di questo tipo cambia S_1 nella serie S_n:

$$0, \quad n, \quad 2n\ldots,$$

la quale è ben ordinata come S_1; la relazione fra S_1 e S_n si può esprimere dicendo che S_1 contiene S_n, e che fra due elementi consecutivi di S_n vi sono $n - 1$ elementi di S_1.

Ora supponiamo che sia data una *regola per cui si possano inserire* n — 1 *elementi intermedi fra due qualsiansi elementi consecutivi* m *ed* m + 1 *di* S_1; questa costruzione dà una serie $S_{\frac{1}{n}}$ la quale può dirsi ottenuta da S_1, mercè una *divisione* per n, poichè $S_{\frac{1}{n}}$ moltiplicata per n si trasforma in S_1.

Supponiamo che:

1) dato un qualsiasi numero $n = 2, 3\ldots$, sia possibile la divisione per n della serie S_1;

2) la divisione di S_1 per nm equivalga alla divisione successiva di S_1 per n e di $S_{\frac{1}{n}}$ per m.

L'insieme di tutte le serie ottenute in tal modo colla divisione della serie principale S_1 *costituisce una serie* S *ordinata come quella dei numeri fratti*; l'elemento m^{mo} della serie $S_{\frac{1}{n}}$ corrisponde ad $\frac{m}{n}$, e si ritrova nella serie $S_{\frac{1}{nr}}$ colla designazione $\frac{mr}{nr}$.

La costruzione sopra indicata si può ripetere prendendo come serie principale S_1 la serie quasi bene ordinata dei numeri interi relativi; si ottiene così la serie fondamentale che corrisponde ordinatamente ai numeri fratti positivi e negativi cioè ai numeri *razionali*; questa serie si potrà designare brevemente col nome di *serie razionale*.

Come esempio concreto della costruzione precedente si può addurre la costruzione di una serie razionale di punti sopra la retta, effettuabile in diversi modi mediante semplici operazioni geometriche.

La più semplice costruzione si ottiene considerando nel piano la rete determinata da due sistemi di rette parallele, che sono rappresentati — in coordinate cartesiane — dalle equazioni:

$$x = m, \quad y = n \qquad \begin{pmatrix} m = 0, 1, 2.... & \text{o} & = -1, -2.... \\ n = 0, 1, 2.... & & \end{pmatrix}.$$

I vertici della rete corrispondono alle coppie di numeri interi n, m. Proiettiamo la serie dei vertici della rete appartenenti alla retta $y = n$ (> 0) dal punto $(0, -1)$ sopra la retta $y = 0$; si ottiene allora su questa retta la serie $S_{\frac{1}{n+1}}$, che si estende a destra e a sinistra dello zero.

La serie razionale così costruita corrisponde a quella stessa che viene determinata comparando all'unità le grandezze dei segmenti ad essa commensurabili, aventi come origine 0.

Anche a prescindere da questa particolare determinazione metrica, si può costruire sulla retta una serie razionale mediante successive costruzioni di quarti armonici a partire da tre punti dati, ciò che dà luogo alle così dette *coordinate proiettive*.

Ritorniamo ora alla considerazione generale di una serie razionale S costruita a partire da una serie principale quasi ben ordinata S_1, e vediamo di estendere in rapporto ad S la definizione ordinale della somma e del prodotto di due numeri interi.

Osserviamo anzitutto che alla serie fondamentale S, appartengono infinite serie quasi ben ordinate, *generatrici* di S, le quali dànno per divisione successiva la stessa serie razionale, per modo che ciascuna di esse può essere assunta in luogo di S_1 come *serie principale*. Tali sono in primo luogo le serie S_n e $S_{\frac{1}{n}}$ ottenute dalla moltiplicazione e divisione di S_1, in secondo luogo tutte le serie da cui si ottiene per divisione una di queste.

La determinazione più generale di una serie generatrice entro la serie razionale S, dipende dalla scelta arbitraria di due elementi O, U, susseguentisi in S_1, che si assumono come 0, 1. Se, rispetto ad una numerazione di S (e quindi alla scelta di una serie principale S_1), O, U hanno rispettivamente i numeri d'ordine $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ $\left(\frac{c}{d} > \frac{a}{b}\right)$, vi è *una* serie generatrice di S in cui U è *il successivo* di O: tale serie è contenuta in $S_{\frac{1}{bd}}$, e divisa per $bc - ad$ dà appunto questa $S_{\frac{1}{bd}}$.

L'osservazione precedente si può anche esprimere dicendo che *la numerazione degli elementi di una serie razionale* S *dipende dalla scelta arbitraria degli elementi* 0, 1.

Ciò posto si supponga data una prima numerazione della serie razionale S; l'addizione e la moltiplicazione dei numeri razionali si lascia definire, in rapporto alla serie stessa, come segue:

1) Si cambi l'origine 0 nell'elemento $\frac{a}{b}$ trasportando contemporaneamente l'elemento $1 = \frac{b}{b}$ in $\frac{a+b}{b}$; con ciò si dà origine ad una nuova numerazione di S e quindi ad una *trasformazione ordinata* di S in sè stessa, dove si prende come serie principale quella $S_{\frac{1}{b}}$ che contiene 0 e $\frac{a}{b}$. In questa trasformazione l'elemento $\frac{c}{d}$ viene trasportato in un nuovo elemento che si *definisce come somma*:

$$\frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

Considerando la serie $S_{\frac{1}{bd}}$ che contiene i tre elementi 0, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, si trova
$$\frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{bc}{bd} + \frac{ad}{bd} = \frac{bc + ad}{bd}.$$

2) Si lasci ferma l'origine 0 e si cambi l'elemento 1 in $\frac{a}{b}$; con ciò si dà luogo ad una trasformazione ordinata della serie S in sè stessa: l'elemento che in questa trasformazione corrisponde a $\frac{c}{d}$ si *definisce come prodotto* $\frac{c}{d}\,\frac{a}{b}$. Considerando la serie $S_{\frac{1}{bd}}$ a cui appartengono entrambi gli elementi $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ si trova

$$\frac{c}{d}\,\frac{a}{b} = \frac{ac}{bd}.$$

Così *la somma e il prodotto risultano definiti nella serie razionale dalla doppia arbitrarietà che appartiene alla numerazione ordinata della serie, in rapporto alla scelta degli elementi* 0 *e* 1.

Queste definizioni inerenti alle trasformazioni ordinate della serie in sè stessa, in rapporto al cambiamento dell'origine 0 e dell'elemento unità, hanno il vantaggio di condurre insieme all'addizione e alla sua operazione inversa « sottrazione », alla moltiplicazione e alla sua operazione inversa « divisione ».

NOTA. — Il cambiamento più generale degli elementi 0, 1, conduce alla trasformazione di S rappresentata da

$$y = \frac{a}{b}\, x + \frac{c}{d}.$$

La serie S ammette altre trasformazioni *ordinate* in se stesse; per es. :

$$y = x \text{ per } x \leq 1, \qquad y = 2x \text{ per } x > 1\,;$$

ma le precedenti trasformazioni si distinguono da queste per la proprietà di cambiare ogni serie generatrice di S in una serie generatrice: due serie generatrici di S dando luogo come abbiam detto, per divisione, ad una medesima serie, in cui è solo determinata diversamente l'origine.

§ 30. **Postulati che caratterizzano la serie razionale.** — Cerchiamo di approfondire l'analisi delle proprietà che definiscono una serie razionale S.

Il concetto della serie razionale è definito come concetto astratto in rapporto al gruppo delle trasformazioni $y = \alpha x + \beta$ dalle seguenti proprietà :

1) È dato un ordine s, degli elementi di S.

2) Dati due elementi A, B di S, susseguentisi in s, viene determinato *un* elemento C che succede a B in s, e che diremo *il successivo* (*di rango* 1) *dopo* A, B ; quindi viene determinato *un* elemento C successivo dopo B, C o successivo *di rango* 2 dopo A, B ; e così di seguito.

3) Esiste un elemento P (*il precedente* ad A, B) tale che B è il successivo dopo P, A.

4) Esiste *un* elemento X, compreso fra A, B in s, tale che B è il successivo di rango n (= 1, 2, 3....) dopo A, X: X si dirà *il medio di rango n* fra A, B ;

5) Dati tre elementi A, B, C, susseguentisi in s, si può sempre determinare (in diversi modi) un elemento Y, compreso fra A e B, per modo che B e C appartengano alla serie dei successivi (di rango $n = 1, 2, \ldots$) dopo A, Y; oppure

5') a partire da due elementi qualsiansi della serie S, eseguendo ripetutamente la costruzione del successivo, del precedente e del medio di rango $n = 1, 2, \ldots$ in rapporto a tutte le possibili coppie di elementi dati e costruiti, si ottengono *tutti* gli elementi di S.

Questi postulati esprimono i fatti fondamentali inerenti alla generazione della serie razionale S, mercè la divisione successiva di una serie principale quasi bene ordinata.

Sono serie generatrici di S quelle costituite dai successivi e dai precedenti (di rango $n = 1, 2 \ldots$) di due elementi dati. Ognuna di queste serie può essere presa come serie principale corrispondente alla serie dei numeri interi relativi; la numerazione di essa viene fissata tosto che si scelgano due elementi successivi come 0, 1, e dopo ciò resta anche fissata la corrispondenza fra gli elementi di S e i numeri razionali.

Secondo la definizione che risulta dai postulati precedenti, il concetto di serie razionale implica, non soltanto un ordine di questa, ma anche un *criterio associativo* per cui *ad ogni coppia* di elementi viene associato *un successivo*; si tratta di una vera generalizzazione del concetto di serie ben ordinata o quasi ben ordinata.

Ora supponiamo che sia data una serie ordinata di elementi, S, e cerchiamo di determinare le condizioni perchè fra gli elementi di questa possa stabilirsi un criterio associativo, in guisa da dare origine ad una serie razionale; in altre parole cerchiamo le condizioni perchè possa porsi una corrispondenza ordinata fra S e la serie dei numeri razionali.

A tale domanda rispondono i seguenti teoremi: di CANTOR (1895).

La classe dei numeri razionali è numerabile.

Si considerino anzitutto le frazioni positive $\frac{a}{b}$ ridotte al minimo denominatore. Possiamo ordinarle in una serie, ponendo

$$\frac{a}{b} \text{ prima di } \frac{c}{d}$$

se

$$a + b < c + d,$$

e

$$\frac{a}{b} \text{ prima di } \frac{c}{d}$$

se

$$a + b = c + d$$
$$a < c.$$

In tal modo si ottiene una serie ben ordinata:

$$\frac{1}{1}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{2}{1}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{3}{1}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{3}{2}, \ \frac{4}{1} \ldots$$

che contiene tutte le frazioni positive ed i cui termini corrispondono a un numero d'ordine progressivo

$$1, \ 2, \ 3, \ 4 \ldots$$

Similmente si possono far corrispondere le frazioni negative ai numeri

$$-1, \ -2, \ -3 \ldots$$

Con ciò gli elementi della classe data (numeri razionali) vengono fatti corrispondere ai numeri relativi

$$\ldots -2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ldots;$$

ma la serie di questi si può numerare, designando

$$\begin{array}{rcl} 0 & \text{con} & 1, \\ n & \text{con} & 2n \\ -n & \text{con} & 2n+1. \end{array} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Quindi gli elementi della classe data vengono fatti corrispondere ai numeri naturali 1, 2, 3.... c. d. d.

Affinchè una serie S *possa porsi in corrispondenza ordinata colla serie dei numeri razionali è necessario e sufficiente che:*

1) *l'insieme degli elementi di* S (a prescindere dall'ordine) *costituisca una classe numerabile*;

2) *l'ordine di* S *sia tale che non vi sia nè primo nè ultimo elemento e che fra due elementi qualsiansi vi siano sempre elementi intermedi.*

Nelle ipotesi enunciate gli elementi della classe S si trovano disposti in due ordini diversi: in un ordine s appartenente alla serie S, e in un ordine a che viene stabilito in virtù della corrispondenza fra gli elementi di S e i numeri naturali. Ciò posto si designino rispettivamente con 0, 1 gli elementi che in a portano i numeri d'ordine 1, 2; fra gli elementi che succedono a questi in s si considererà quello che ha il più piccolo numero d'ordine in a e si designerà con 2; quindi fra gli elementi che succedono a questo in s si considererà quello che ha il più piccolo numero d'ordine in a e si designerà con 3; e così di seguito. Poi, fra gli elementi che precedono in s il primo designato con 0, si considererà quello che ha il più piccolo numero d'ordine in a, designandolo con -1. Così seguitando si è costruita in S una serie principale

$$\ldots\ -2,\quad -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\ldots$$

Per determinare la numerazione degli elementi di S che, rispetto ad s sono compresi fra due successivi m, $m+1$, della anzidetta serie principale, si procederà come segue:

Si considererà l'elemento compreso fra m, $m+1$ nell'ordine che porta il più piccolo numero d'ordine in a e si designerà con $m+\frac{1}{2}$; si considererà l'elemento compreso fra m, $m+\frac{1}{2}$ che porta il più piccolo numero d'ordine in a, e si designerà con $m+\frac{1}{2\cdot 3}$; quindi l'elemento compreso fra $m+\frac{1}{2\cdot 3}$ ed $m+\frac{1}{2}$ che porta il più piccolo numero d'ordine in a, e si designerà con $m+\frac{2}{2\cdot 3}=m+\frac{1}{3}$; l'elemento fra $m+\frac{1}{2}$ e $m+1$ che porta il più piccolo numero d'ordine in a, e si designerà con $m+\frac{4}{2\cdot 3}$; l'elemento fra questo ed $m+1$ che porta il più piccolo numero d'ordine in a. e si designerà con $m+\frac{5}{2\cdot 3}$. È ormai chiara la legge con cui si determineranno successivamente gli elementi che verranno designati con

$$m+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4},\ m+\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4},\ldots,m+\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4}\text{ e quindi } m+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\text{ ecc.}$$

Resta da provare che la serie razionale così generata in S esaurisce tutti gli elementi di S, cioè che ogni elemento di S trova posto nella numerazione definita innanzi. Anzitutto si consideri un qualsiasi elemento P di S e si faccia vedere che P, ove non appartenga alla serie principale, trovasi compreso fra due elementi m e $m+1$ di questa. A tal fine, posto che P succeda a 0 (o come diremo brevemente che sia a destra di 0), basterà far vedere che esiste qualche elemento della serie principale suddetta, a destra di P. Ora, se P porta in a il numero d'ordine n, ogni elemento della serie principale che porti in a un numero d'ordine $> n$ trovasi a destra di P.

Posto dunque che P sia compreso fra i due elementi della serie principale di S, designati con m e $m+1$, si tratta di far vedere che la serie dei medi inseriti fra questi contiene P. Ma ciò si dimostra per assurdo : infatti se la suddetta serie dei medi non contenesse P, si troverebbero infiniti elementi di essa, a destra e a sinistra di P, che dovrebbero portare in a un numero d'ordine $< n$. Con ciò il teorema è dimostrato.

III. — Teorie analitiche.

§ 31. **La teoria delle coppie: numeri relativi.** — Le teorie analitiche dei numeri relativi e dei numeri fratti, si presentano fra loro strettamente connesse. Si hanno in fatto tre teorie principali : *la teoria delle coppie, la teoria degli operatori* e *quella delle congruenze* (di Kronecker) che ha il vantaggio di estendersi anche al caso dei numeri irrazionali algebrici.

La prima teoria, che si può riattaccare — come si è detto — ad Hankel (1867), è stata sviluppata da O. Stolz (1885) e da J. Tannery (1886); ripresa poi con lievi varianti da diversi critici matematici (Russell, Padoa ecc.). Vediamo come essa conduca a introdurre i numeri relativi. Qui si tratta in sostanza di dedurre la costruzione della serie

$$\ldots. -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3 \ldots.$$

da un'unica serie data. All'uopo la teoria delle coppie, considera al posto dei numeri naturali a, b, le *coppie ordinate* (ab), ponendo per definizione :

$$(ab) = (cd)$$

se

$$a + d = b + c.$$

La relazione così definita è un'uguaglianza — soddisfacendo alle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva — sicchè è lecito formare una *clàsse di coppie uguali*:

$$(ab) = (cd) = (ef)...,$$

e costruire quindi il *concetto astratto della coppia rispetto alla classe suddetta*; questo concetto astratto fornisce il *numero relativo*

$$a - b = c - d = e - f .....$$

I numeri relativi così definiti si possono *ordinare in una serie ponendo*

$$a - b > a' - b'$$

se

$$a + b' > b + a',$$

e si ottiene allora la serie:

$$.... 0 - 3, \quad 0 - 2, \quad 0 - 1, \quad 0 - 0, \quad 1 - 0, \quad 2 - 0, \quad 3 - 0...,$$

equivalente a

$$..... -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3....$$

Le operazioni sui numeri relativi si definiscono mediante le formule:

$$(a - b) + (c - d) = a + c - (b + d)$$
$$(a - b) - (c - d) = a + d - (b + c)$$
$$(a - b)(c - d) = ac + bd - (ad + bc),$$

provando che: se

$$a - b = a' - b', \quad c - d = c' - d'$$

anche

$$(a - b) \pm (c - d) = (a' - b') \pm (c' - d')$$

e

$$(a - b)(c - d) = (a' - b')(c' - d');$$

per il che basta verificare che: se

$$a + b' = a' + b$$

e

$$c + d' = c' + d,$$

si deduce

$$a + c + b' + d' = a' + c' + b + d,$$
$$a + d + b' + c' = a' + d' + b + c,$$
$$ac + bd + a'd' + b'c' = a'c' + b'd' + ad + bc.$$

L'ultima formula si dimostra passando attraverso alla

$$(a - b)(c - d) = (a' - b')(c - d),$$

che importa

$$(ac - bc) + (bd - ad) = (a'c - b'c) + (b'd - a'd),$$

ossia

$$\left.\begin{array}{l} ac + b'c = bc + a'c \quad (= (a + b')c = (a' + b)c) \\ bd + a'd = b'd + ad \quad (= (b + a')d = (b' + a)d) \end{array}\right\}$$

Si verifica quindi che le operazioni sopra definite soddisfano alle proprietà formali delle operazioni sui numeri naturali: proprietà associativa e commutativa della somma e del prodotto, proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, condizione d'annullamento del prodotto.

§ 32. **I numeri fratti definiti per mezzo di «coppie».** — La teoria dei numeri fratti che ricorre alle «coppie» procede come quella dei numeri relativi, nella maniera seguente.

Consideriamo le coppie ordinate di numeri interi (positivi e negativi)

$$(ab), \quad (cd) ...,$$

e poniamo la *relazione d'uguaglianza*

$$(ab) = (cd)$$

se $$ad = bc:$$

che è invero una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva.

Definiamo il *numero fratto* $\frac{a}{b}$ come *concetto astratto* della coppia (ab) in ordine all'uguaglianza definita innanzi. Sarà in ispecie

$$\frac{a}{b} = \frac{ar}{br}.$$

Quindi definiamo la *somma* e il *prodotto* di due numeri fratti colle formule

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Affinchè queste definizioni siano legittime, occorre provare che: se

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'} \qquad (a'b=ab')$$

$$\frac{c}{d}=\frac{c'}{d'} \qquad (c'd=cd'),$$

anche

$$\frac{ad+bc}{bc}=\frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$$

e

$$\frac{ac}{bd}=\frac{a'c'}{b'd'},$$

cioè

$$b'd'\,(ad+bc)=bd\,(a'd'+b'c')$$

e

$$acb'd'=a'c'db.$$

La seconda uguaglianza è evidente.

Per dimostrare la prima, si procederà per gradi, mostrando che

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a'}{b'}+\frac{c}{d},$$

cioè che

$$\frac{ad+bc}{bd}=\frac{a'd+b'c}{b'd},$$

il che importa

$$b'd(ad+bc)=bd(a'd+b'c)$$

$$ab'd^2+cdbb'=a'bd^2+cdbb'$$

$$ab'd^2=a'bd^2,$$

$$ab'=a'b.$$

Ora si verificheranno le proprietà formali delle operazioni definite innanzi: le proprietà commutativa e associativa della somma

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{cb+da}{db}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{bd}+\frac{e}{f}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right);$$

e le proprietà commutativa, associativa e distributiva del prodotto

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}=\frac{ca}{db}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b},$$

$$\left(\frac{a}{b}\,\frac{c}{d}\right)\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}=\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\,\frac{e}{f}\right),$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\frac{e}{f}=\left(\frac{ad+bc}{bd}\right)\frac{e}{f}=\frac{ade+bce}{bdf}=$$

$$=\frac{ade}{bdf}+\frac{bce}{bdf}=\frac{ae}{bf}+\frac{ce}{df}=\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}+\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}.$$

La condizione d'annullamento del prodotto è evidente.

Infine si noterà che nel campo dei nostri numeri fratti, la *divisione* — operazione inversa della moltiplicazione — è sempre possibile:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc},$$

perchè

$$\frac{c}{d}\cdot\frac{ad}{bc}=\frac{adc}{bdc}=\frac{a}{b}.$$

Aggiungiamo che il sistema dei numeri fratti che abbiamo definito contiene i numeri $\frac{a}{1}$, la cui serie corrisponde ordinatamente a quella dei numeri a (interi, positivi e negativi), in guisa che ad $\frac{a}{1}+\frac{b}{1}$ e $\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{1}$ corrisponde rispettivamente $a+b$ e ab. Perciò $\frac{a}{1}$ si può identificare ad a (conforme al senso di $a:1$), e resta provato — senza far appello a giudizi sintetici (postulati) — che il sistema dei numeri interi si può estendere, conservando le proprietà fondamentali delle operazioni aritmetiche, per modo che la divisione riesca sempre possibile.

Nota. — In sostanza i numeri fratti sono introdotti, nella precedente teoria, col metodo euclideo, cioè con una definizione per astrazione del «rapporto (geometrico)», così come i numeri relativi vengono introdotti definendo la proporzionalità aritmetica o uguaglianza dei «rapporti aritmetici». Ora, al metodo delle coppie è stata mossa una critica concernente appunto il *significato logico delle definizioni per astrazione*, e toccante la forma che alcuni autori hanno dato alla teoria dei numeri fratti o relativi:

poichè qualcuno ha detto che i numeri anzidetti *sono* coppie $(a\ b)$ (per cui si definisce l'eguaglianza ecc.), anzichè astratti di esse in rapporto ad una classe di coppie, che è appunto definita dalla relazione d'uguaglianza.

Questa critica ha preso tanto più consistenza nella mente dei logici matematici della scuola di PEANO, per i motivi che abbiamo illustrato nella nota critica del § 9.

Quindi per RUSSELL e per PADOA, i numeri relativi o fratti diventerebbero addirittura « classi di coppie », e per BURALI-FORTI sarebbero « funzioni della coppia » che non si riesce a definire univocamente, perchè — egli dice — la scrittura

$$(ab) = (cd)$$

per

$$ad = bc,$$

definisce egualmente $\frac{a}{b}$ ed $f\left(\frac{a}{b}\right)$, con f funzione arbitraria.

A tutte queste difficoltà risponde la nota critica del § 9 sopra citata. Aggiungiamo soltanto che, per quanto concerne i numeri fratti, EUGENIO MACCAFERRI — per evitare l'astrazione — suggerisce di definirli riferendosi alle frazioni ridotte ai minimi termini, come « coppie di numeri primi fra loro ». La quale proposta risponde invero ad una determinazione particolare del concetto astratto (una qualunque delle coppie di numeri aventi ugual rapporto), che è perfettamente legittima.

§ 33. **Teoria dei numeri operatori.** — In luogo che come « coppie » o meglio come « rapporti (aritmetici o geometrici) di coppie » i numeri relativi e fratti si possono introdurre analiticamente come « operatori su numeri convenienti ». L'idea di costruire una siffatta teoria appartiene, come si è accennato, al MÉRAY che, nel 1889, ha riguardato appunto le frazioni quali « fattori fittizi », e l'anno appresso estendeva il medesimo concetto ai numeri negativi; PEANO, ed alcuni suoi discepoli, hanno accolto e sviluppato l'idea, introducendo il nome di « operatori ».

I numeri relativi s'introdurranno come « numeri da sommare o togliere da numeri naturali sufficientemente grandi »; a tal uopo, dopo aver osservato che per x assai grande esiste sempre

$$x + a - b,$$

si porrà per definizione

$$x + (a - b) = x + a - b,$$

e quindi

$$(a - b = (c - d)$$

se

$$x + (a - b) = x + (c - d).$$

Qui occorre avvertire che l'uguaglianza

$$x + (a - b) = x + (c - d)$$

porta

$$y + (a - b) = y + (c - d),$$

per qualunque y che renda possibili le operazioni indicate. E la condizione d'uguaglianza si traduce in quella dei rapporti aritmetici:

$$a + d = b + c.$$

Ma questa teoria presenta un vantaggio sulla teoria delle coppie, nella definizione della *somma*, che qui non appare puramente artificiosa.

Infatti la somma si definisce mediante la condizione:

$$x + \{(a - b) + (c - d)\} = \{x + (a - b)\} + (c - d),$$

donde resulta

$$(a - b) + (c - d) = a + c - (b + d).$$

Per definire il prodotto occorre postulare la proprietà distributiva di esso rispetto alla somma, che dà

$$(a - b)(c - d) = ac + bd - (ad + bc),$$

ed è necessario dimostrare — come nella teoria delle coppie — che « prodotti di numeri relativi uguali sono uguali ».

Un procedimento analogo vale a introdurre le frazioni $\frac{a}{b}$, come operatori sopra ogni numero intero x, tale che xa sia divisibile per b.

Si noterà che se

$$x\frac{a}{b}=x\frac{c}{d},$$

anche

$$y\frac{a}{b}=y\frac{c}{d},$$

purchè le operazioni indicate siano possibili; in tal caso dovremo ritenere:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Ciò importa

$$xad=xbc$$

e quindi

$$ad=bc.$$

Ora s' introducono la *somma* e il *prodotto* dei numeri fratti mercè le definizioni:

$$x\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=x\frac{a}{b}+x\frac{c}{d}$$

$$x\left(\frac{a}{b}\frac{c}{d}\right)=\left(x\frac{a}{b}\right)\frac{c}{d},$$

supposto sempre che le operazioni indicate siano possibili.

Dalla prima formula si ricava:

$$x\frac{a}{b}+x\frac{c}{d}=x\frac{ad}{bd}+x\frac{bc}{bd}=x\frac{ad+bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

E dalla seconda:

$$\left(x\frac{a}{b}\right)\frac{c}{d}=x\frac{ac}{bd},$$

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

La teoria si riduce dunque a quella delle coppie, su cui ha il vantaggio di giustificare le definizioni di somma e di prodotto. Di più resta qui inutile dimostrare che per

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'} \quad \frac{c}{d}=\frac{c'}{d'},$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'},$$

giacchè le uguaglianze

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'} \quad \frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}$$

(che si traducono in

$$ab' = a'b, \ cd' = c'd),$$

denotano l' identità delle operazioni

$$x\frac{a}{b} \text{ e } x\frac{a'}{b'}, \qquad x\frac{c}{d} \text{ e } x\frac{c'}{d'}.$$

Nota. — L' introduzione dei numeri relativi o fratti come operatori si può fare anche in modo sintetico anzichè analitico, cioè interpretando i numeri come « operatori su grandezze » (Burali-Forti). In tal guisa si ritrova uno dei modi con cui i numeri negativi sono apparsi nella storia (cfr. § 23), e per le frazioni si ritorna senz'altro al concetto della misura o del rapporto.

§ 34. Il significato dei numeri estesi secondo Kronecker. — Ricorderemo infine, per la sua importanza storica e per la sua capacità di estendersi anche agl' irrazionali algebrici, l' interpretazione analitica dei numeri relativi e fratti, che abbiam detto essere stata data da Leopoldo Kronecker (1887) : il quale, del resto, — valendosi dell' introduzione delle indeterminate, dovuta a Gauss — non ha fatto che riprendere un' idea affacciata da Cauchy (1) per l' immaginario.

Osserviamo che l'uguaglianza di due numeri relativi

$$a - b = a' - b',$$

(1) « Exercices d'Analyse et de Physique mathématique », t. IV, 1847.

che porta $$a + b' = a' + b,$$

si riduce ad una congruenza rispetto al modulo $x + 1$:

$$a + bx \equiv a' + b'x \pmod{x + 1}.$$

Quindi il numero relativo $a - b$, si può sempre surrogare con «l'espressione $a + bx$, considerata rispetto al modulo $x + 1$». Le operazioni sopra i numeri relativi non esigono allora una speciale definizione; in primo luogo:

$$(a + bx) + (c + dx) = a + c + (b + d)x$$

e però *a fortiori*

$$(a + bx) + (c + dx) \equiv a + c + (b + d)x \pmod{x + 1};$$

in secondo luogo:

$$(a + bx)(c + dx) = ac + (ad + bc)x + bdx^2,$$

e poichè

$$bd\,x^2 \equiv bd \pmod{x + 1},$$
$$(a + bx)(c + dx) \equiv (ac + bd) + (ad + bc)x \pmod{x + 1}.$$

In modo analogo s' interpretano le relazioni d'eguaglianza tra frazioni, sostituendo l' unità frazionaria $\frac{1}{b}$ con un' indeterminata, e ponendo al posto della frazione $\frac{a}{b}$ l'espressione ax, considerata rispetto al modulo $bx - 1$: occorre tuttavia introdurre tante indeterminate e tanti moduli, quante sono le unità frazionarie che entrano in considerazione.

Infatti l'eguaglianza di due frazioni

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

si tradurrà ora nella congruenza

$$ax \equiv cy \pmod{bx - 1,\ dy - 1},$$

che le è equivalente in forza dell'identità

$$ax - cy = cy(bx - 1) - ax(dy - 1),$$

da cui si ottiene annullando i moduli.

Anche le formule della somma e del prodotto di due frazioni, si traducono nelle congruenze :

$$\left.\begin{array}{l} ax + cy \equiv (ad + bc)\, z \\ ax \cdot cy \equiv acz \end{array}\right\} \text{mod.}\ (bx - 1, dy - 1, bdz - 1)$$

che ad esse equivalgono in forza delle identità

$$\begin{gathered} ax + cy = (ad + bc)\, z + adz\, (bx - 1) + \\ + bcz\, (dy - 1) - (ax + cy)\, (bdz - 1), \\ ax \,.\, cy = acz + acd\, y\, z\, (bx - 1) + acz\, (dy - 1) - ac\, xy\, (bdz - 1). \end{gathered}$$

NOTA. — Il metodo di KRONECKER permette più generalmente di conferire significato alle formule contenenti irrazionali algebrici ; in particolare le formule d'uguaglianza fra numeri complessi $a + bi$ ($i = \sqrt{-1}$) si traducono in congruenze rispetto al modulo $x^2 + 1$ (CAUCHY).

Parte terza. — *I numeri irrazionali.*

I. — NUMERI E GRANDEZZE.

§ 35. **Introduzione storico-critica.** — I numeri irrazionali s'introducono nell'Aritmetica :

1) da un punto di vista sintetico, per misurare grandezze (come quelle dei segmenti) che possono essere incommensurabili rispetto all' unità scelta nel sistema, o per rappresentare con un numero d'ordine i punti di una serie continua — come la retta — che non è esaurita dalla costruzione di un sistema di punti corrispondenti ai numeri fratti ;

2) da un punto di vista analitico, per dare un significato ad alcune operazioni fuori delle condizioni in cui esse riescono possibili. Le operazioni a cui qui si allude sono di due specie :

a) l'estrazione di radice, il logaritmo ecc. che conducono a *classi ben definite di numeri irrazionali* e non mai alla totalità di essi: per es. la possibilità illimitata dell' operazione $\sqrt{}$, portante su numeri positivi, richiede solo l'introduzione di numeri corrispondenti ai punti che si costruiscono sulla retta *colla riga e col compasso* a partire da 0, 1 (cfr. la Parte II e precisamente il vol. III di questa raccolta) ;

b) i *processi infiniti*: *serie, frazioni continue* ecc. nelle condizioni di *convergenza* che assicurano la *possibilità logica* dei simboli corrispondenti.

Ora si deve notare che le operazioni *a*) si riducono anch'esse — mercè il calcolo approssimato — a processi infiniti. Perciò la teoria analitica degli irrazionali, quale si sviluppa di solito corrispondentemente alle operazioni *b*), dà luogo alla *classe di numeri più estesa*. Ma ciò non toglie interesse all'indirizzo di ricerca in cui si studino successivamente i *più piccoli campi di numeri* (razionali e irrazionali) dove sono possibili certe operazioni.

A tale indirizzo appartengono alcune ricerche algebriche o aritmetiche menzionate negli Articoli della Parte II di questa raccolta.

Nel seguito di questo Articolo ci occuperemo della *teoria generale dei numeri irrazionali* che ha per iscopo di definirne la totalità.

Per la storia, diremo che la teoria (cardinale) dei numeri irrazionali, come rapporti di grandezze incommensurabili, trovasi sviluppata implicitamente sotto forma geometrica nel Libro V di Euclide da cui, secondo Duhamel e Stolz, si può trarre una vera teoria di codesti numeri.

Si fa risalire a Pitagora (500 a. C.) la scoperta che la diagonale e il lato del quadrato sono incommensurabili; ma soltanto dopo la critica degli Eleati e segnatamente di Zenone, codesta scoperta fu posta nella sua vera luce. Da quel momento comincia l'elaborazione di una teoria generale delle grandezze che viene costruita da Eudosso di Cnido, teoria esposta appunto nel Libro V di Euclide, la quale nel pensiero dei Greci costituiva una vera estensione dell'Aritmetica dei numeri interi e fratti. Anzi, secondo lo Zeuthen (1), la costruzione eudossiana in cui il rapporto è definito per astrazione mediante la proporzionalità, terrebbe dietro ad uno sviluppo precedente in cui esso resulterebbe per approssimazione dal metodo delle divisioni successive (spiegato in Euclide, X) e però in sostanza con algoritmo non dissimile dalla «frazione continua», scoperta nella sua forma attuale da Pietro Cataldi (1597).

Comunque, l'affermazione esplicita di Euclide che le grandezze incommensurabili non si lasciano confrontare come i numeri,

(1) Cfr. T. Bonnesen, *Sur la théorie des nombres irrationnels de l'antiquité*. «Periodico di Matematiche», 1921.

non ci autorizza affatto a ritenere il punto di vista di EUCLIDE come più arretrato del punto di vista moderno, tranne perciò che concerne due ordini di progresso:

1) la designazione dei rapporti coi simboli dell'algebra;

2) il riconoscimento del postulato della continuità della retta e quindi la considerazione, almeno virtuale, del più ampio sistema costituito da tutti i possibili numeri irrazionali.

Gli Aritmetici e gli Algebristi del Medio Evo e del Rinascimento considerarono i rapporti di grandezze incommensurabili come *numeri ficti* o *numeri surdi*: così per es. LEONARDO FIBONACCI (*Liber abaci*, 1202). MICHELE STIEFEL nella sua *Arithmetica integra* (Norimberga, 1544), in rapporto al Libro X di EUCLIDE, parla espressamente di *numeri irrationales*, esprimendo anche la veduta che questi numeri occupano un posto determinato nella serie ordinata dei numeri, proprio come i numeri razionali. Quindi la prima considerazione esplicita degli irrazionali come numeri, fa appello al concetto ordinale.

La designazione del rapporto fra due segmenti con una *semplice lettera*, su cui si calcola *come sui numeri*, compare con DESCARTES; e nella *Arithmetica universalis* di NEWTON (1707) si trova la proposizione che ogni rapporto corrisponde ad un numero, posta come *definizione del numero*. «Per numerum non tam multitudinem unitatum, quam abstractam quantitatis cuiusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem, quae pro unitate habetur, rationem intelligimus. Estque triplex: Integer, Fractus et Surdus. Integer quem unitas metitur, fractus quem unitatis pars submultiplex metitur, et surdus cui unitas est incommensurabilis».

Gli sviluppi critici moderni cominciano colla teoria analitica di WEIERSTRASS — resa nota nei citati *Elementi* di E. KOSSAK (1872) e poi da O. BIERMANN (1) — e con quella di CH. MERAY (2) (1869-1872) e di G. CANTOR (3) (1872): il primo implicitamente, e gli altri esplicitamente, definiscono i numeri irrazionali come limiti di

(1) *Theorie der analytischen Functionen*, Lipsia, 1887. Cfr. S. PINCHERLE, *Saggio di una introduzione alle funzioni analitiche secondo il prof. O. Weierstrass*. «Giornale di Matematiche», 1880.

(2) «Revue des Sociétés savantes» (1869); «Nouveau Précis» (1872); cfr. il ch. II. delle «Leçons nouvelles sur l'analyse infinitesimale», Parigi, 1894.

(3) Contenuta in una memoria sulle serie trigonometriche in «Math. Annalen», 5, che precede l'attività dell'A. nel campo della teoria degli insiemi.

successioni. D'altra parte nello stesso anno 1872 appariva il lavoro di R. DEDEKIND che introduce codesti numeri mediante «sezioni, o partizioni in classi, del campo dei numeri razionali». CANTOR e DEDEKIND (1) — quest'ultimo illustrandone il contenuto geometrico nella forma più chiara — hanno anche riconosciuto il postulato di continuità della retta, per cui ad ogni numero irrazionale corrisponde un punto, e in forza del quale ai numeri irrazionali — da essi introdotti analiticamente per mezzo di convenzioni — viene conferito un significato sintetico.

Qui si deve rilevare il significato diverso che lo sviluppo della critica ha scoperto nelle due assunzioni, dei detti Autori, che essi stessi tenevano per equivalenti.

Il postulato della continuità, nella forma geometrica di DEDEKIND, porta che i segmenti rettilinei, o più in generale le grandezze d'un sistema per cui si ammetta valido, soddisfino al cosiddetto postulato d'ARCHIMEDE: «date due grandezze o in particolare due segmenti, esiste sempre un multiplo dell'una che supera l'altra». Questa dipendenza (che il lettore ha appreso nell'Articolo Quinto) è stata dimostrata da O. STOLZ (2), che ha anche dato il nome di Archimede alla precedente assunzione: mentre ZEUTHEN ha riconosciuto poi che essa deve farsi risalire a EUDOSSO di Cnido.

STOLZ scorgeva nel postulato di DEDEKIND soltanto una più precisa determinazione dell'«assioma di continuità» enunciato da CANTOR, dicendo che «ad ogni numero irrazionale — introdotto come limite d'una successione convergente — corrisponde un punto (o segmento) della retta», e (come CANTOR stesso) riteneva assurda la considerazione di grandezze non-archimedee, che porta (in senso relativo) all'«infinito» e all'«infinitesimo attuale». Ma quando la critica di G. VERONESE (3) (cfr. Articolo Quinto) — anche attraverso polemiche con CANTOR, STOLZ ecc. — ebbe mostrata la possibilità di codesta considerazione, si è riconosciuto che l'enunciato di CANTOR è suscettibile di essere tradotto con un'affermazione geometrica

(1) *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig, 1872. È notevole che questo studio precede di quindici anni quello sui numeri interi.

(2) *Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes*, «in Math. Annalen», 22 (1883). Cfr. *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik*, vol. I (1885).

(3) *Il continuo rettilineo e l'assioma V d'Archimede*, nelle «Memorie dell'Acc. dei Lincei», 1890; *Fondamenti di Geometria*, Padova, 1891.

meno significativa del postulato di DEDEKIND, in quanto si assuma come *condizione per l'esistenza d'un punto limite d'una successione*

$$a_1 \; a_2 .... \; a_n .... \; a_{n+r} ....$$

l'ipotesi che « dato un segmento ε piccolo ad arbitrio esista sempre un intero m tale che, per $n > m$, la distanza $a_n \, a_{n+r}$ — per qualunque valore di r — risulti minore di ε ».

Del resto quest'affermazione — che si accorda sostanzialmente col principio IV della memoria di VERONESE del 1890 (1) — può esprimersi in diverse forme e in ispecie suole ridursi al caso in cui la successione data (che può supporsi in generale oscillante) si rimpiazzi con due successioni

$$\begin{matrix} a_1 \; a_2 .... \; a_m .... \\ a'_1 \; a'_2 .... \; a'_n .... \end{matrix}$$

l'una di punti seguentisi verso destra, l'altra di punti procedenti verso sinistra, che convergano ad un limite comune (la distanza $a_n \, a'_n$ diventando più piccola d'un ε comunque prefissato).

Il postulato geometrico così ridotto, che risponde ad uno dei modi d'esposizione più frequenti della teoria degl'irrazionali di CANTOR (cfr. § 43) viene comunemente designato — specialmente dagli Autori italiani — col nome di *postulato di* CANTOR, e a quest'uso anche noi ci atterremo: sebbene a dir vero sarebbe più giusto designarlo come *postulato di* CANTOR-VERONESE, e ad ogni modo non si possa vedere nemmeno in questa designazione un significato storico preciso.

Termineremo queste note d'introduzione storico-critica, insistendo sul punto già accennato che costituisce la differenza più essenziale fra la teoria euclidea e le vedute moderne. EUCLIDE costruisce la dottrina generale delle grandezze raccogliendo i principî comuni che valgono nel confronto di diverse specie di grandezze geometriche: segmenti, aree, volumi, angoli e archi di cerchio. In questa dottrina, puramente *ipotetica*, non compare alcun *postulato esistenziale* relativo alla divisibilità delle grandezze o alla determinazione di una quarta proporzionale dopo tre grandezze date ecc.;

(1) Cfr. *Fondamenti*, Ip. VIII, p. 150.

ma sempre l'esistenza di grandezze soddisfacenti a date condizioni viene dimostrata, per ciascuna specie di grandezze, mediante *costruzioni geometriche.*

Si ammettano, accanto alla riga e al compasso usati da EUCLIDE, anche altri istrumenti costruttivi di ordine superiore, si riconosce allora in ciascuna delle classi considerate da EUCLIDE, l'esistenza di grandezze soddisfacenti a condizioni cui i mezzi euclidei non valgono a soddisfare.

Il punto di vista moderno oltrepassando i limiti segnati da ogni ordine particolare di costruzioni, pone alla bàse della teoria delle grandezze il postulato esistenziale di continuità che DEDEKIND ha aggiunto consapevolmente alla teoria antica, e da cui si deducono in ispecie la divisibilità delle grandezze e l'esistenza della quarta proporzionale (cfr. Articoli Quarto e Quinto); come vedremo, ciò corrisponde a considerare la classe di grandezze più estesa in cui può essere contenuto un sistema soddisfacente ai postulati euclidei.

Con questa modificazione indicheremo lo sviluppo della teoria dei rapporti di EUCLIDE, interpretata come teoria generale dei numeri reali positivi.

§ 36. **I numeri come rapporti di grandezze.** — Le *grandezze* di un sistema Γ sono definite per astrazione da una classe di enti in cui è posta una relazione di eguaglianza (riflessiva, simmetrica e transitiva).

Il concetto generale delle grandezze come enti d'un sistema per cui è definita l'uguaglianza, e poi anche la disuguaglianza e la somma, ha origine da H. GRASSMANN ed è stato svolto da O. STOLZ (l. c., 1883).

I postulati che caratterizzano in questo senso un sistema di grandezze, secondo la comune intuizione, verranno da noi riassunti come segue:

1) date due grandezze A, B, viene determinata in Γ una terza grandezza $A + B$, *somma* di quelle;

2) date due grandezze A, B, disuguali, una ed una sola di queste è *maggiore* dell'altra, cioè si può considerare come somma dell'altra e di una terza grandezza C (*differenza* tra le due $= A - B$):

$$A = B + C\,(A > B), \quad \text{oppure} \quad B = A + C\,(B > A);$$

da questo postulato di *sottrazione* o *di disuguaglianza* segue che le grandezze formano una serie ordinata, essendo

$$A > C \quad \text{se} \quad A > B, \quad B > C\,;$$

3) la somma gode delle proprietà commutativa e associativa;

4) data una grandezza A, esiste sempre in Γ una qualche grandezza B (minore di A) di cui A è maggiore; segue che date due grandezze disuguali vi sono sempre grandezze maggiori della minore e minori della maggiore;

5) il cosiddetto *postulato d'*ARCHIMEDE: date due grandezze, A, B esiste sempre un multiplo

$$nA > B \qquad (nA = \underbrace{A + A + \dots + A}_{n})\,;$$

6) il cosiddetto *postulato di* CANTOR (1): siano date due successioni (*convergenti*) di grandezze:

$$\begin{gathered} A_1\, A_2 \dots A_n \dots \\ B_1\, B_2 \dots B_n \dots, \end{gathered}$$

le prime crescenti, le seconde decrescenti, tutte maggiori delle prime, e tali che, presa una qualsiasi grandezza ε (piccola ad arbitrio) si possa sempre determinare un numero n per cui

$$B_n - A_n < \varepsilon\,;$$

allora esiste sempre una grandezza L (*limite comune* delle due successioni) maggiore delle grandezze A_i, e minore delle grandezze B_i.

Si noti che l'ipotesi implicata dall'affermazione di due successioni convergenti, porta l'unicità del loro limite comune.

Sulla base di questi postulati si può definire il «*rapporto di due grandezze*» come concetto astratto in ordine ad una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva, che si pone quale «uguaglianza di rapporti» (*proporzione*).

L'uguaglianza di rapporti o proporzione

$$A : B = C : D,$$

(1) Cfr. la notizia storica data nel § 43.

esprime che, per qualsiasi coppia di numeri interi e positivi m, n, secondochè

$$mA \gtreqless nB$$

anche

$$mC \gtreqless nD.$$

La definizione della proporzione mostra subito che si tratta di una relazione riflessiva e simmetrica:

$$A : B = A : B;$$

e se

$$A : B = C : D$$

anche

$$C : D = A : B;$$

anzi dalla stessa definizione risulta pure senz'altro la possibilità di un altro scambio di termini, per cui da

$$A : B = C : D$$

si deduce

$$B : A = D : C.$$

Infine dal confronto di due proporzioni

$$A : B = C : D$$
$$C : D = E : F,$$

si deduce

$$A : B = E : F$$

(*Elementi* d' EUCLIDE, Libro V, prop. 11); si ha così la proprietà transitiva che, insieme all'altre due, permette di considerare la proporzione come un'uguaglianza e di costruire rispetto a questa il concetto astratto di rapporto.

Ora il post. 5) permette di dimostrare che:

Date tre grandezze A, B, C esiste sempre una grandezza D tale che

$$A : B = C : D.$$

L'unicità di questa 4ª proporzionale risulta dal postulato d'Archimede.

Prendendo $A = nB$, il teorema precedente enuncia l'esistenza di $\frac{C}{n}$. Perciò il nostro sistema di grandezze contiene in sè un sistema di grandezze commensurabili.

Si passa quindi a definire la « somma e il prodotto di rapporti ».

Definiamo la somma di due rapporti, ponendo:

$$(B + C) : A = (B : A) + (C : A);$$

l'addizione di due rapporti che non hanno un termine comune si ridurrà a questo caso, trasformando uno dei due rapporti in un rapporto uguale. Ma *occorre dimostrare* che se

$$B : A = B' : A'$$

e

$$C : A = C' : A'$$
$$(B' + C') : A' = (B + C) : A.$$

È la prop. 24 d' Euclide (Libro V).

La somma di rapporti gode evidentemente della proprietà commutativa ed associativa.

Il *prodotto di due rapporti* si definisce ponendo:

$$(A : B) . (B : C) = A : C$$

e mostrando, con Euclide, che se

$$A : B = A' : B', \quad B : C = B' : C'$$

anche

$$A : C = A' : C',$$

cioè « ragioni composte di ragioni uguali sono uguali »; in virtù del qual principio si possono moltiplicare anche due rapporti non aventi un termine comune, trasformando uno di essi in un altro uguale. E la moltiplicazione gode quindi delle proprietà commutativa, associativa e distributiva.

Notisi che il prodotto di due rapporti si può anche definire formando un nuovo *sistema di grandezze* colle coppie (non ordinate) (AB) costruite colle grandezze del sistema dato, ove si ponga

$$(AB + AC) = (AB) + (AC),$$

ed

$$(AB) = (CD)$$

quando

$$A : C = D : B,$$

(aree dei rettangoli). Allora il prodotto

$$(A : B) \,.\, (C : D) = (AC) : (BD).$$

Come si è osservato le operazioni sopra definite fra « rapporti » danno luogo alle relazioni fondamentali dell'Aritmetica. Le operazioni inverse sono soggette alle stesse limitazioni che pei numeri razionali positivi; la divisione è sempre possibile, perchè:

$$(A : B) : (C : B) = (A : B) \,.\, (B : C) = A : C\,;$$

invece la sottrazione è possibile fra due rapporti disuguali, in un solo senso.

Se

$$(B : A) \neq (C : A),$$

si può trovare una coppia d'interi m, n tale che sia

$$nB > mA, \quad nC \leq mA$$

oppure viceversa

$$nB \leq mA, \quad nC > mA\,;$$

nel primo caso

$$B : A > C : A$$

nel secondo

$$B : A < C : A\,;$$

e se

$$B : A > C : A$$

anche

$$B > C,$$

(Euclide, Libro V, prop. X),

quindi

$$B = C + E$$
$$(B : A) = (C : A) + (E : A).$$

In definitiva *i rapporti fra le coppie di grandezze del nostro sistema fondamentale si possono considerare come formanti un sistema Σ di numeri assoluti che soddisfa alle proprietà fondamentali delle operazioni aritmetiche e comprende in sè il sistema* S *dei numeri razionali assoluti* cioè i rapporti delle coppie di grandezze commensurabili.

In ogni caso il numero-rapporto di due grandezze si potrà designare con un simbolo

$$\mu = A : B.$$

Si scrive à

$$\mu = \frac{m}{n}$$

se, essendo m e n interi,

$$A = \frac{m}{n} B ;$$

invece quando A e B sono incommensurabili (cioè non esistono due interi m, n per cui $A = {}_{n}B$) si dirà che μ è un *numero irrazionale*.

§ 37. **Continuità e integrità.** — I postulati che abbiamo dato come definizione implicita di un sistema di grandezze, aggiungono alle ipotesi euclidee l'ipotesi della continuità, formulata col postulato che abbiamo denominato da CANTOR.

Il significato di questa ipotesi si lascia comprendere mercè le riflessioni seguenti. Si considerino due sistemi di grandezze Γ, Γ' soddisfacenti ai postulati 1).... 5) del numero precedente: si supponga inoltre che Γ soddisfi al post. 6) (di CANTOR) e che in Γ' sia possibile la divisibilità delle grandezze {maggiore determinazione del post. 4), che resulta per Γ come conseguenza di 6)}. In tali ipotesi Γ e Γ' contengono ciascuno un sistema di grandezze commensurabili, che designeremo rispettivamente con G e G'; e fra G, G' si può porre una corrispondenza biunivoca.

Ora considerando l'ordine delle grandezze crescenti, il sistema Γ viene ordinato come una serie di elementi; altrettanto si dica di Γ'. Dato un elemento qualsiasi A' di Γ', che non appartenga a G', si possono costruire due successioni convergenti di grandezze appartenenti a G' ed aventi come limite comune A'; a tal uopo (in forza del post. d'ARCHIMEDE) basta considerare due grandezze B', C' comprendenti A', e quindi dividere successivamente per 2 la grandezza $D' = C' - B'$, formando le grandezze

$$B' + \frac{D'}{2}, \quad B' + \frac{D'}{4}, \quad B' + \frac{3D'}{4}, \text{ ecc.};$$

da questa serie si estraggono le successioni convergenti aventi per limite A'.

Ora a due successioni convergenti di Γ', formate con grandezze di G', corrispondono due successioni convergenti di Γ formate con grandezze di G, e quindi al limite comune A' di quelle successioni si può far corrispondere *un* elemento A di Γ, determinato come limite comune di queste. Con ciò si ottiene fra Γ' e Γ una corrispondenza univoca ordinata, dove a due qualsiansi grandezze di Γ' corrispondono due grandezze *proporzionali* di Γ; e questa corrispondenza non è generalmente invertibile, se non per gli elementi di una parte di Γ.

Dunque: *Ogni sistema di grandezze divisibili soddisfacente ai postulati* 1).... 5), *si può porre in corrispondenza proporzionale con una parte di una serie continua* (cioè di una serie soddisfacente anche al post. 6); o, in altri termini: *ogni sistema di grandezze divisibili soddisfacenti ai post.* 1).... 5), *si può astrattamente ritenere come parte di un sistema continuo, contenente tutte le grandezze possibili* (compatibilmente colle relazioni poste), *questo sistema integro corrispondendo all'ipotesi di* CANTOR 6).

Insomma il *postulato di continuità di* CANTOR *esprime l' integrità del sistema di grandezze* per cui si suppone valido.

Il ragionamento precedente prova anche che tutti i sistemi di grandezze, soddisfacenti ai post. 1).... 6) si possono porre l'uno coll'altro in *corrispondenza biunivoca proporzionale*, ed *astrattamente* ritenersi come *identici* dando luogo perciò agli stessi numeri; in particolare *ogni sistema Γ si può riferire proporzionalmente al sistema delle grandezze segmentarie*, rappresentate dai segmenti di una semiretta con una data origine.

In tale riferimento i postulati di somma e sottrazione delle grandezze si traducono nei postulati della congruenza segmentaria

(Articolo Terzo). Quindi in virtù degli sviluppi dell' Articolo Quinto possiamo affermare che:

L'insieme dei postulati d' ARCHIMEDE *e di* CANTOR 5), 6), *per un sistema di grandezze Γ soddisfacente ai post.* 1).... 4), *si può esprimere col postulato di continuità di* DEDEKIND, nella forma seguente:

se il sistema Γ viene diviso in due classi contigue, per modo che

a) ogni grandezza appartenga ad *una* delle due classi;

b) ogni grandezza della seconda classe sia maggiore di ciascuna delle grandezze della prima,

allora esiste un *massimo* delle grandezze della prima classe, o un *minimo* delle grandezze della seconda.

Il postulato di DEDEKIND si può considerare come una proprietà della *serie* delle grandezze disposte per ordine crescente e corrisponde ad una proprietà ordinale della serie dei segmenti o dei punti della retta o dei numeri, proprietà che darà luogo più avanti a nuove osservazioni.

§ 38. Espressione degli irrazionali per frazione continua. — L'integrità della serie dei numeri determinati come rapporti di grandezze d'un sistema continuo, corrisponde anche al fatto che si può costruire una generale espressione aritmetica dei numeri irrazionali, dipendente da una serie infinita di numeri naturali, nella quale questi numeri possono assumere tutti i valori possibili.

Una tale espressione aritmetica ci è fornita dal processo euclideo delle divisioni successive.

Si abbiano due grandezze

$$A, B, \quad A > B.$$

La divisione di A per B dà

$$A = aB + R_1 \qquad (a \text{ intero}, R_1 < B);$$

quindi proseguendo successivamente la divisione di B per R_1 e così di seguito:

$$\begin{aligned} B &= a_1 R_1 + R_2 \qquad (R_2 < R_1) \\ R_1 &= a_2 R_2 + R_3 \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Quando questo processo ha termine, A e B sono commensurabili e si ha

$$A : B = \mathrm{a} + \cfrac{1}{\mathrm{a}_1 + \cfrac{1}{\mathrm{a}_2 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{\mathrm{a}_n}}}}.$$

Quando le due grandezze sono incommensurabili, il processo illimitato delle divisioni successive simboleggiate dalla *frazione continua* :

$$\alpha = \mathrm{a} + \cfrac{1}{\mathrm{a}_1 + \cfrac{1}{\mathrm{a}_2 + \cfrac{1}{\mathrm{a}_3 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{\mathrm{a}_n + \ddots}}}}} \qquad (\mathrm{a}_i \geq 1)$$

si assumerà come espressione aritmetica del numero irrazionale

$$\alpha = A : B.$$

Questa definizione si basa sopra il teorema :

La frazione continua α *corrisponde univocamente al rapporto* A : B, *cioè se l'algoritmo euclideo delle divisioni successive applicato ad* A′, B′ *conduce alla frazione continua* α, *si ha* :

$$A : B = A' : B',$$

e viceversa.

Per dimostrare questo teorema si suppongano date A, B, B' e si determini A_1 in guisa che

$$A : B = A_1 : B' ;$$

si tratta di provare che

$$A_1 = A'.$$

A tale scopo si considerino le successive *ridotte* della frazione continua $\alpha - \mathrm{a}$:

$$\frac{p_n}{q_n} = \cfrac{1}{\mathrm{a}_1 + \cfrac{1}{\mathrm{a}_2 + \ddots + \cfrac{1}{\mathrm{a}_n}}};$$

si ha (in valore assoluto)

$$(A' - A_1) < \left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right)$$

Ora la legge di formazione delle successive ridotte di $\alpha - \mathrm{a}$ è data dalle relazioni ricorrenti

$$\begin{aligned} p_n &= \mathrm{a}_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= \mathrm{a}_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{aligned}$$

che si dimostrano verificandole per $n = 3$ e mostrando che, se esse sussistono per un certo valore di n, sussistono anche per $n+1$, cioè quando si cambia a_n in $\mathrm{a}_n + \frac{1}{\mathrm{a}_{n+1}}$

Si ha quindi

$$p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

e perciò

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}};$$

in conseguenza risulta che le successioni

$$\frac{p_2}{q_2}, \frac{p_4}{q_4}, \dots.$$
$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_3}{q_3}, \dots.$$

sono convergenti ed ammettono un limite comune; così, essendo in valore assoluto

$$A' - A_1 < \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{n(n+1)},$$

per qualunque valor di n, si ha

$$A' - A_1 = 0 \qquad \text{c. d. d.}$$

Vediamo di più che:

Ogni frazione continua

$$\alpha = \mathrm{a} + \cfrac{1}{\mathrm{a}_1 + \cfrac{1}{\mathrm{a}_2 + \ddots}},$$

dove $\mathrm{a} \geq 0$ *ed* $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2 \ldots.$ *assumono qualsiasi valore* ≥ 1, *rappresenta un numero irrazionale* che si può determinare come rapporto di una certa grandezza A alla grandezza B assunta in Γ come unità di misura.

Infatti le due successioni di grandezze

$$\left(\mathrm{a} + \frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)B$$

$$\left(\mathrm{a} + \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right)B \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots.),$$

sono convergenti ed il loro limite comune è una grandezza A tale che

$$A : B = \alpha.$$

NOTA. — Anche in altri modi si può assegnare un'espressione aritmetica infinita dei numeri irrazionali: ad es. ricorrendo alle *divisioni successive per eccesso.*

Supposto per semplicità $A < B$, si consideri il minimo multiplo

$$\mathrm{a}_1 A > B \qquad (\mathrm{a}_1 \geq 2)$$

e si scriva quindi

$$\mathrm{a}_1 A = B + R_1 \quad \text{con} \quad R_1 < B;$$

analogamente si ponga

$$\mathrm{a}_2 R_1 = B + R_2 \quad \text{con} \quad \mathrm{a}_2 \geq 2, \quad R_2 < B_2,$$

e così di seguito.

L'algoritmo conduce alla *frazione continua ascendente*

$$A:B=\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cdots}{a_3}}{a_2}}{a_1}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1\,a_2}+\frac{1}{a_1\,a_2\,a_3}+\ldots,$$

la quale termina dopo un numero finito di divisioni successive se A e B sono commensurabili: l'algoritmo infinito rappresenta il rapporto irrazionale $A:B$ se A e B sono incommensurabili.

Una espressione di questo genere è la nota espressione del numero irrazionale

$$e=2+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cdots}{4}}{3}}{2}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots,$$

base dei logaritmi neperiani.

II. — Numeri irrazionali ordinali.

§ 39. I numeri irrazionali come ascisse dei punti della retta. — Il sistema totale dei numeri reali e positivi permette di far corrispondere ai punti d'una semiretta di origine 0, i numeri-ascisse, che esprimono, per ogni punto X, il rapporto del segmento $0X$ al segmento unità $0A$.

Attribuendo ai suddetti numeri un segno, si riesce anche alla completa rappresentazione biunivoca ed ordinata della serie dei punti della retta col sistema dei numeri reali.

Da questo punto di vista i numeri reali appariscono come *numeri ordinali*, designando il posto occupato dai punti nella serie « retta punteggiata ».

Si può costruire una teoria ordinale dei numeri reali, prendendo come punto di partenza le seguenti ipotesi:

1) È data sulla retta una serie razionale S di punti, *ovunque densa*, cioè tale che fra due punti della retta (entro ogni segmento) vi sia qualche punto di S.

2) La retta è una serie di punti continua nel senso di DEDEKIND, cioè: se la retta (o un segmento di essa) è divisa in due parti formanti due classi contigue, per modo che: *a*) ogni punto appartenga ad *una* delle due parti; *b*) tutti i punti di una parte precedano (nell'ordine della retta) a quelli della seconda; allora esiste un *punto di separazione* delle due classi, che è ultimo della prima classe o primo della seconda.

In tali ipotesi si ha:

ogni punto non avente un'ascissa razionale *divide* la serie S dei punti razionali in *due parti* che formano due *classi contigue*, diguisachè: *a*) ogni punto razionale appartiene all'una *o* all'altra parte; *b*) i punti della prima classe precedono a ciascun punto della seconda, cioè le ascisse dei primi sono minori di quelle dei secondi.

Viceversa:

se la serie dei punti razionali viene divisa in due parti formanti classi contigue, si ottiene anche una divisione in parti contigue della retta e quindi, in forza del postulato della continuità, esiste un *punto di separazione*: il quale può dar luogo a due casi, secondochè:

a) appartiene ad una delle due classi contigue di punti razionali, e quindi è l'*ultimo* punto della prima o il *primo della* seconda;

oppure *b*) non appartiene al sistema dei punti razionali e però consegue a tutti i punti della prima classe e precede a tutti quelli della seconda.

Per designare il posto occupato nella serie dei punti della retta dai punti non razionali, si possono introdurre i numeri irrazionali, come numeri d'ordine corrispondenti alle partizioni dei numeri razionali in classi contigue.

Si ottiene così la definizione seguente:

Sia data una serie continua d'elementi Σ e, sopra a questa, una serie S in corrispondenza ordinata coi numeri razionali che formi un *insieme denso* su Σ (in guisa che fra due elementi di Σ sia sempre compreso qualche elemento di S); allora il posto di ogni elemento di Σ rispetto ad S è determinato in modo che, data un'altra serie continua Σ' contenente un analogo sistema S', vi è fra Σ e Σ' una determinata corrispondenza ordinata in cui si corrispondono gli elementi di S, S' portanti lo stesso numero (razionale).

Associando per tal modo tutte le possibili serie analoghe Σ,

Σ'..., si dà luogo al *concetto astratto di un elemento di Σ considerato nell'ordine della serie rispetto ad* S; questo concetto astratto generalizzante il numero razionale ordinale, è il *numero ordinale reale*: razionale ed irrazionale.

Se l'ordine della serie si esprime colla relazione «*maggiore*» ($>$) e «*minore*» ($<$), il *numero irrazionale* è per definizione *maggiore di tutti i numeri razionali* che corrispondono agli elementi precedenti e *minore di tutti i numeri razionali seguenti*, i numeri razionali maggiori e minori formando le due classi contigue che lo definiscono.

§ 40. **Somma e prodotto.** — Le operazioni sui numeri irrazionali, o su irrazionali e razionali, risultano definite dalla condizione che *valgano per tutti i numeri reali e positivi le disuguaglianze seguenti*: se

$$\begin{gathered} \mathrm{a} > b, \\ \mathrm{a} + c > b + c \\ \mathrm{a}c > bc. \end{gathered}$$

In forza di queste disuguaglianze si definiranno le operazioni sui numeri reali e positivi come segue; si aggiungeranno poi la regola dei segni e la legge d'annullamento:

$$\mathrm{a} \,.\, 0 = 0.$$

Si abbiano due numeri reali α, β e si considerino tutti i numeri razionali a, a', b, b', per cui

$$\begin{gathered} \mathrm{a} < \alpha < \mathrm{a}' \\ b < \beta < b', \end{gathered}$$

sarà

$$\mathrm{a} + b < \alpha + \beta < \mathrm{a}' + b', \quad \mathrm{a}b < \alpha\beta < \mathrm{a}'b',$$

e queste disuguaglianze definiscono in generale la *somma* $\alpha + \beta$ e il *prodotto* $\alpha\beta$. Infatti:

1) per il postulato di continuità la serie Σ contiene un elemento x che consegue agli $\mathrm{a} + b$ e precede gli $\mathrm{a}' + b'$, e così pure un elemento y che consegue agli $\mathrm{a}b$ e precede gli $\mathrm{a}'b'$;

2) non vi possono essere due elementi, x, x_1, di Σ compresi

fra $a + b$, $a' + b'$ o fra ab, $a'b'$; altrimenti si avrebbe nel primo caso (supposto $x \geqq x_1$) :

$$x - x_1 < (a' + b') - (a + b)$$
$$x - x_1 < (a' - a) + (b' - b),$$

mentre si possono scegliere a, a', b, b' in guisa che sia

$$\alpha - a < \frac{x - x_1}{4} \qquad a' - \alpha < \frac{x - x_1}{4}$$
$$\beta - b < \frac{x - x_1}{4} \qquad b' - \beta < \frac{x - x_1}{4},$$
$$a' - a < \frac{x - x_1}{2} \qquad b' - b < \frac{x - x_1}{2};$$

e similmente si avrebbe nel secondo caso

$$x - x_1 < a'b' - ab$$
$$x - x_1 < (a' - a)\, b + (b' - b)\, a + (a' - a)(b' - b),$$

mentre si possono scegliere a, a', b, b' in guisa che sia

$$a' - a < \frac{x - x_1}{3b} \qquad b' - b < \frac{x - x_1}{3a}$$
$$(a' - a)(b' - b) < \frac{x - x_1}{3},$$

e quindi

$$(a' - a)b + (b' - b)a + (a' - a)(b' - b) < x - x_1.$$

È poi chiaro che la somma e il prodotto sopra definiti pei numeri reali soddisfano sempre alle proprietà fondamentali : commutativa, associativa e distributiva.

§ 41. **Continuità e buon ordinamento di una serie.** — La proprietà della serie dei numeri interi relativi di essere quasi ben ordinata (cioè ben ordinata a parte l'esistenza d'un primo termine della serie totale) si lascia decomporre nelle due affermazioni seguenti :

1) dopo ogni numero vi è *un* successivo;

2) se la serie dei numeri è divisa in due parti formanti due *classi contigue*, vi è fra queste un *elemento di separazione*, potendosi assumere ad arbitrio come tale il massimo della prima classe o il minimo della seconda.

Quest'ultimo enunciato è identico al postulato di DEDEKIND, che si pone ad affermare la *continuità* di una serie in cui (contrariamente all'ipotesi 1) si trovino elementi compresi fra due qualsiansi.

Già nella costruzione della serie dei numeri razionali, che estende quella dei numeri interi, si lascia cadere volontariamente la proprietà 1), assumendo che fra due elementi qualsiansi sia sempre compreso qualche elemento intermedio.

Dopo ciò si constata che cade anche la proprietà 2), giacchè per es. i numeri $> \sqrt{2}$ e $< \sqrt{2}$ danno luogo ad una divisione della classe razionale in due classi contigue, che non ammette entro questa un elemento di separazione.

Col postulato di continuità si ammette che: *data una serie razionale di elementi* S, *sia possibile determinare una serie continua che la contiene*, per modo che:

a) fra due elementi della serie totale si trovi sempre qualche elemento intermedio;

b) questa serie soddisfi alla proprietà 2) (postulato di DEDEKIND).

Dunque *il postulato di* DEDEKIND *esprime che la proprietà della serie degli interi, successivi ad un intero qualsiasi, di essere ben ordinata, si ritrova in una classe più estesa contenente quella dei numeri razionali.*

Ora giova fare la seguente avvertenza. È possibile che esistano diverse serie continue contenenti la serie razionale S; ma una serie Σ sopra cui S sia *ovunque densa*, è *minima* fra tutte le serie anzidette, nel senso che in ognuna di queste si può trovare una parte in corrispondenza ordinata con Σ (gli elementi di S corrispondendo a sè stessi).

In altre parole: *l'aggiunta dei numeri irrazionali ai numeri razionali dà luogo alla minima estensione della serie di questi che renda soddisfatto il postulato di continuità* (*di* DEDEKIND).

D'altra parte se si suppone che una serie contenente una serie razionale possa riguardarsi come una serie di grandezze, il postulato di DEDEKIND (o quello di CANTOR che ne deriva come conseguenza) porta, come abbiam visto, che la serie continua abbia la massima estensione possibile; perciò se una serie razionale S è contenuta in una serie continua Σ, e gli elementi di questa possono ritenersi formare un sistema di grandezze ordinate secondo i postulati di somma e sottrazione, S dovrà esser ovunque densa sopra Σ.

Questa affermazione si riduce in sostanza al teorema (dimostrato nell'Articolo Quinto per i segmenti) che il postulato di DEDEKIND porta come conseguenza quello di ARCHIMEDE.

Per un'analisi approfondita delle proprietà che definiscono il continuo numerico come serie ordinata, cfr. IV, § 46.

III. — LE TEORIE ANALITICHE DEI NUMERI IRRAZIONALI.

§ 42. **La teoria di Dedekind.** — La teoria dei numeri irrazionali ordinali che sopra abbiamo costruito, non è altro che un'esposizione della teoria di DEDEKIND (l. c., 1872) secondo una veduta sintetica. Ma l'A., che pure ha dato col postulato di continuità la base di questa concezione sintetica (soggiacente, per così dire, alla sua costruzione) introduce i numeri irrazionali mediante semplici convenzioni, mostrando così che il postulato esistenziale, legato alla intuizione del continuo rettilineo, non è affatto necessario. Infatti, partendo dalla serie dei numeri razionali, egli riesce a *costruire una serie continua minima* che la contenga, ed edifica così una *teoria analitica dei numeri irrazionali* (1).

(1) La teoria di DEDEKIND è stata svolta in diverse esposizioni p. es. da ULISSE DINI nei *Fondamenti di una teorica delle funzioni di variabile reale* (Pisa, 1878), da JULES TANNERY, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variabile* (2ª ed., 1904, Ch. II: la 1ª ed. risale al 1886), come pure da GREGORIO RICCI in due memorie degli «Atti del R. Istituto Veneto», serie VII, 18, e del «Giornale di Napoli», vol. 34.

ALFREDO CAPELLI nel *Saggio sulla introduzione dei numeri irrazionali col metodo delle classi contigue* («Giornale di Napoli», 1897) e nelle *Lezioni sui numeri reali*». Estratto dalle «Istituzioni d .nalisi algebrica», Napoli, 1903, ha modificato il metodo di DEDEKIND fondendolo per così dire con quello di CANTOR, in quanto egli intende per «classi contigue» due classi in cui si trovano elementi vicini quanto si vuole, senza esigere che esse comprendano nel loro insieme tutti i numeri (ciò che dispensa dall'enunciare esplicitamente la condizione d'avvicinamento). Questo metodo, sebbene a nostro avviso *non* rappresenti *un miglioramento* di quello di DEDEKIND, ha trovato qualche favore nei trattati scolastici italiani.

Esponiamo i principî di questa teoria:

1) Ad ogni numero razionale a, corrisponde una *partizione o sezione del campo dei numeri razionali in due classi contigue*, che si ottiene ponendo nella prima classe tutti i numeri $\leq a$, e nella seconda i numeri $> a$.

La partizione in classi contigue soddisfa alle due proprietà fondamentali che: ogni numero razionale appartiene ad una e ad una sola delle due classi, e che ogni numero della prima classe è minore di ciascun numero della seconda. La partizione da noi definita in rapporto ad un numero razionale ha questo numero come *massimo*.

2) Consideriamo tutte le possibili partizioni dei numeri razionali in classi contigue, escludendo le partizioni in cui la seconda classe ha un minimo.

Tutte le partizioni anzidette si possono riguardare come gli elementi di una serie Σ. La quale viene ordinata in base alla seguente convenzione: date due partizioni (aa'), (bb') si pone

$$(bb') > (aa')$$

se esistono un b ed un a' tali che

$$b > a'.$$

(Nell'ipotesi opposta o $(aa') > (bb')$, oppure si ha sempre

$$a < b', \quad a' < b$$

e le due partizioni coincidono).

3) La serie Σ contiene un sistema S di elementi corrispondenti ordinatamente ai numeri razionali: sono le «partizioni» in cui la classe inferiore ha un massimo. Gli altri elementi di Σ sono definiti dal posto che occupano rispetto ad S, poichè ciascuno di essi separa gli elementi di S in due classi contigue corrispondenti a quelle di numeri razionali da cui è definito.

Ciò posto *gli elementi di Σ* («partizioni» dei numeri razionali) sono ordinati in guisa che i loro numeri d'ordine *definiscono* per astrazione *i numeri reali*, aggiungendo ai numeri razionali, che corrispondono agli elementi di S, i *numeri irrazionali*, che corrispondono a «partizioni dei numeri razionali in classi contigue non dotate di massimo (nè di minimo)».

Dal § 39 segue che la serie Σ è astrattamente identica alla serie dei numeri reali ordinali che nascono come ascisse dei punti della retta.

Ora si definiranno le operazioni sui numeri reali riferendosi per semplicità ai numeri reali positivi ed aggiungendo poi la regola dei segni e la convenzione

$$a0 = 0.$$

Lemma. — Se un numero α è definito dalle classi contigue (aa') si può sempre trovare un numero a ed un a' che differiscano fra loro di un numero $\frac{1}{n}$ piccolo ad arbitrio.

Infatti si costruisca la serie dei multipli di $\frac{1}{n}$; in questa si troveranno due multipli consecutivi, uno appartenente alla classe (a) l'altro ad (a').

Ciò posto siano dati due numeri reali e positivi α, β, definiti per mezzo delle classi contigue di numeri razionali e positivi

$$(aa') \quad \text{e} \quad (bb').$$

Formiamo le classi

$$(a + b) \quad (a' + b').$$

Se ogni numero razionale (positivo) appartiene all'una o all'altra di dette classi, queste sono classi contigue $(a' + b' > a + b)$ ed esiste quindi un numero irrazionale:

$$(a + b, \quad a' + b'),$$

che si definirà come *somma*

$$(aa') + (bb').$$

Pongasi invece che esista un numero razionale

$$x > a + b, \quad x < a' + b';$$

in tal caso si dimostra che non vi può essere un secondo numero

$$x_1 > a + b, \quad x_1 < a' + b'.$$

Infatti, supposto

$$x > x_1,$$

si avrà

$$x - x_1 > \frac{1}{n}$$

(n intero assai grande), e quindi

$$a' + b' - (a + b) > \frac{1}{n}$$

mentre si possono scegliere a, a', b, b' in guisa che sia

$$a' - a = \frac{1}{2n}, \quad b' - b = \frac{1}{2n}$$

$$(a' + b') - (a + b) = \frac{1}{n}.$$

Pertanto, se esiste x, si attribuirà, come massimo, alla classe $(a + b)$, e si porrà

$$x = (a + b, a' + b') = (aa') + (bb').$$

Parimente, per definire il prodotto, formiamo le classi

$$(ab) \quad (a'b').$$

Se ogni numero razionale appartiene all'una o all'altra, queste sono classi contigue ed esiste quindi un numero irrazionale

$$(aa', \quad bb').$$

che si definirà come *prodotto*

$$(aa'). \quad (bb').$$

Pongasi invece che esista un numero razionale

$$x > ab, \quad x < a'b' ;$$

in tal caso si dimostra che non può esistere un secondo numero x_1 tale che

$$x_1 > ab, \quad x_1 < a'b'.$$

Infatti, supposto

$$x > x_1,$$

si avrà

$$x - x_1 > \frac{1}{n}$$

(n intero assai grande) e quindi

$$a'b' - ab > \frac{1}{n};$$

ma, all'opposto, preso un intero m comunque grande si possono scegliere a, a', b, b' in guisa che sia

$$a' - a = \frac{1}{m}, \quad b' - b = \frac{1}{m}$$

e però

$$(a' - a)(b' - b) = \frac{1}{m^2};$$

allora sarà

$$a'b' - ab = (a' - a)b + (b' - b)a + \\ + (a' - a)(b' - b) = \frac{b}{m} + \frac{a}{m} + \frac{1}{m^2},$$

e quindi si potrà rendere

$$a'b' - ab < \frac{1}{n}$$

È poi chiaro che l'addizione e la moltiplicazione così estese ai numeri reali soddisfano alle proprietà fondamentali di queste operazioni.

§ 43. **Teoria di Méray-Cantor.** — La teoria degl'irrazionali di Dedekind è preferibile a tutte le altre teorie analitiche:

1) per la corrispondenza immediata ch'essa ha colla teoria ordinale (rappresentazione numerica del continuo rettilineo);

2) per il legame concreto che essa pone fra il numero irrazionale e una determinata partizione che gli corrisponde;

3) per la semplicità che ne deriva nella definizione delle operazioni di somma e prodotto.

Tuttavia da altri punti di vista sono apprezzabili anche le teorie di Weierstrass e di Méray-Cantor che introducono gl'irrazionali facendo capo ai *processi d'approssimazione* più direttamente usati nei calcoli.

La teoria di MÉRAY-CANTOR (l. c., 1872) considera esplicitamente il numero irrazionale come *numero-limite d'una successione convergente di numeri razionali*, nel modo più generale. Se

$$a_1\ a_2 \ldots.\ a_n \ldots.\ a_{n+r} \ldots.$$

è una successione che ammette un limite razionale l, per ogni ε, piccolo ad arbitrio, si può sempre trovare un m abbastanza grande in modo che quando

$$n > m$$

sia in valore assoluto

$$|l - a_n| < \varepsilon.$$

Di qui si deduce che, per $n > m$, si ha anche, qualunque sia r,

$$|a_n - a_{n+r}| < \varepsilon.$$

Orbene, se questa condizione è soddisfatta e non esiste un numero razionale

$$l = \lim a_n,$$

si può tuttavia introdurre un *numero-limite di nuova specie*, che si dirà appunto un *numero irrazionale*: naturalmente per tali numeri occorre definire «l'uguaglianza», rispetto a cui essi vengono definiti per astrazione, e le operazioni fondamentali dell'Aritmetica, in guisa da conservarne le proprietà formali.

Questo modo di costruzione, in un senso puramente analitico, è stato svolto, nello stesso tempo che da MÉRAY e CANTOR, anche da HEINE (1), che tuttavia dichiara di utilizzare le vedute comunicategli verbalmente da WEIERSTRASS e da CANTOR, e che insiste sul carattere formale della teoria, in cui si chiamano numeri soltanto dati «segni» scambiabili con determinate regole operative.

Altre esposizioni della teoria trovansi nei trattati di R. LIPSCHITZ (2) e di O. STOLZ (3). In Italia il primo sviluppo di essa è

(1) «Journal für Mathematik», tome 74, p. 192, 1872.
(2) *Grundlage der Analysis*, Bonn, 1877.
(3) *Vorlesungen*, op. cit., 1885.

dovuto ad A. Grandi (1) e poi a C. Arzelà (2). Ora, già in Lipschitz e in Arzelà e ancor più in esposizioni posteriori, appare la tendenza, didatticamente giustificata, a ricondurre la considerazione generale della successione

$$a_1\ a_2 \dots\ a_n \dots,$$

a quella di *due successioni monotone, l'una sempre crescente e l'altra decrescente, convergenti ad un limite comune.*

A questa considerazione più determinata si è condotti invero — per semplice decomposizione — nel caso d'una successione oscillante, e in altro modo anche nel caso d'una successione monotona

$$a_1\ a_2 \dots\ a_n \dots;$$

poichè se questa è, per esempio, una successione crescente a termini positivi, i cui elementi tendano al limite con approssimazioni convenienti $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \dots\ \varepsilon_n \dots$ (lim. $\varepsilon_n = 0$), si potrà avere una successione decrescente

$$a_1 + \varepsilon_1,\ a_2 + \varepsilon_2, \dots\ a_n + \varepsilon_n \dots$$

che tende allo stesso limite.

D'altronde la determinazione d'un numero irrazionale come limite comune di due successioni convergenti corrisponde al caso più importante per la pratica, in cui il numero è definito con *procedimenti d'approssimazione per difetto e per eccesso,* quale è la misura delle grandezze o la frazione continua che ne porge l'espressione analitica.

Perciò daremo la preferenza a questo *modo d'esposizione della teoria di* Méray-Cantor.

Senza preoccuparci dell'algoritmo che le genera, consideriamo le *coppie di successioni convergenti*:

$$a_1 a_2 \dots a_n \dots,\quad b_1 b_2 \dots b_m \dots,$$

definite dalle condizioni seguenti:

1) i numeri della prima successione vanno indefinitamente crescendo, e quelli della seconda decrescendo; cioè

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n \dots,$$
$$b_1 > b_2 > \dots > b_m \dots;$$

(1) *Cronache del R. Liceo Forteguerri di Pistoia,* 1874-75.

(2) Nel suo noto *Trattato elementare d'Algebra,* 1883.

2) i numeri della seconda successione sono tutti maggiori di quelli della prima:

$$b_m > a_n ;$$

3) dato ad arbitrio un numero ε piccolo ad arbitrio si può determinare un numero s tale che per $n > s$, $m > s$, sia sempre

$$b_m - a_n < \varepsilon.$$

Dalla definizione precedente segue che la successione $a_1 a_2 \ldots$ non ammette un *massimo*, nè la $b_1 b_2 \ldots$ un *minimo*. Perciò, dato un numero razionale c, accade uno e uno solo dei tre casi seguenti:

α) vi è nella successione degli a un termine $a_n \geq c$; allora, per $m > n$, $a_m > c$;

β) vi è un $b_n \leq c$: allora, per $m < n$, $b_m < c$;

γ) per ogni valore di n

$$c > a_n, \quad c < b_n.$$

Nell'ipotesi γ) il numero c dicesi *numero-limite* delle successioni convergenti $a_1 a_2 \ldots$, $b_1 b_2 \ldots$: le differenze

$$c - a_n \quad \text{e} \quad b_n - c$$

divengono, per n assai grande, piccole ad arbitrio. È poi chiaro che non può esistere un secondo numero-limite c' delle medesime successioni, diverso da c; infatti se per es.

$$c > c',$$

sarebbe

$$c - a_n > c - c'$$

per qualunque valore di n, mentre si può trovare un n così grande per cui

$$c - a_n < b_n - a_n < c - c'.$$

Ora si confrontino due coppie di successioni convergenti

$$a_1\, a_2 \ldots, \quad b_1\, b_2 \ldots,$$
$$a'_1 a'_2 \ldots, \quad b'_1 b'_2 \ldots;$$

si avrà:

I) Se queste ammettono uno stesso numero-limite c, per ogni valore di n, m,

$$a_n < c < b_m, \quad a'_n < c < b'_m;$$
$$a_n < b'_m, \quad a'_n < b_m.$$

II) Viceversa, se la prima coppia di successioni convergenti ammette il numero-limite c, e se, per qualunque valore di n, m,

$$a_n < b_m', \quad a_n' < b_m$$

sarà anche c numero-limite della seconda coppia di successioni, cioè:

$$a_n' < c < b_m'.$$

Infatti, se così non fosse, il numero c si troverebbe rispetto alle successioni a', b' nell'ipotesi α) o β); fermandosi ad es. sulla prima ipotesi c'è un termine $a_n' > c$; ma allora il numero a_n' rispetto alle successioni a, b, non può trovarsi che nell'ipotesi β), cioè deve esistere un termine

$$b_m < a_n',$$

contro il supposto.

III) Astrazion fatta dall'esistenza d'un numero-limite c, le disuguaglianze

$$a_n < b_m', \quad a_n' < b_m,$$

pongono fra le due coppie di successioni convergenti una relazione (*equivalenza*) che è riflessiva, simmetrica e transitiva, cioè possiede gli attributi logici di un'uguaglianza.

Ciò posto il *concetto astratto delle coppie di successioni convergenti che si equivalgono* fornisce un concetto più generale del *numero-limite*, comprendente, accanto ai numeri *razionali* (coppie di successioni convergenti verso un numero intero o fratto), i numeri *irrazionali*, corrispondenti a coppie di successioni convergenti per cui non esiste un numero-limite razionale.

Le operazioni sui numeri reali (razionali ed irrazionali) si definiscono nel modo più semplice incominciando dal caso dei numeri positivi, limiti di successioni convergenti a termini positivi.

Si tratta di provare che date due coppie di successioni convergenti formate di numeri positivi:

$$a_1 a_2 \ldots, \quad b_1 b_2 \ldots,$$

e

$$c_1 c_2 \ldots, \quad d_1 d_2 \ldots,$$

sono pure successioni convergenti le seguenti:

$$a_1 + c_1, \quad a_2 + c_2 \ldots, \quad b_1 + d_1, \quad b_2 + d_2 \ldots,$$

e

$$a_1 c_1, \quad a_2 c_2 \ldots, \quad b_1 d_1, \quad b_2 d_2 \ldots ;$$

inoltre che: se le coppie di successioni convergenti

$$a_1' a_2' \ldots, \quad b_1' b_2' \ldots.$$

e

$$c_1' c_2' \ldots. \quad d_1' d_2' \ldots.$$

equivalgono rispettivamente alle precedenti a, b e c, d, sono pure equivalenti le coppie di successioni convergenti

$$\begin{gathered} a_1 + c_1, \quad a_2 + c_2 \ldots, \quad b_1 + d_1, \quad b_2 + d_2 \ldots. \\ a_1' + c_1', \quad a_2' + c_2' \ldots, \quad b_1' + d_1, \quad b_2' + d_2' \ldots, \end{gathered}$$

e le

$$\begin{gathered} a_1 c_1, \quad a_2 c_2 \ldots, \quad b_1 d_1, \quad b_2 d_2 \ldots. \\ a_1 c_1, \quad a_2' c_2' \ldots, \quad b_1' d_1', \quad b_2' d_2' \ldots. \end{gathered}$$

Del resto gli sviluppi qui occorrenti si riconducono a quelli del DEDEKIND, per mezzo del seguente teorema che stabilisce il *Passaggio dalla teoria di* MÉRAY-CANTOR *a quella di* DEDEKIND.

A tutte le coppie equivalenti di successioni convergenti

$$\begin{gathered} a_1 a_2 \ldots, \quad b_1 b_2 \ldots. \\ a_1' a_2' \ldots. \quad b_1' b_2' \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

corrisponde una medesima partizione del campo dei numeri razionali in classi contigue, partizione ottenuta attribuendo alla prima classe ogni numero a che verifichi le disuguaglianze

$$a < b_n \qquad (n = 1, 2 \ldots.),$$

oppure

$$a < b_n'$$

e all'altra classe tutti gli altri numeri razionali b (per ciascun dei quali esiste un n tale che $b > b_n$, $b > b_n'$).

Viceversa tutte le coppie di successioni convergenti che determinano in questo senso una medesima partizione del campo dei numeri razionali in classi contigue, sono equivalenti.

Data una partizione dei numeri razionali in classi contigue (a, b) si potranno costruire due successioni convergenti corrispondenti allo stesso numero-limite operando come segue: si considerino tutte le frazioni di denominatore n e si distinguano quelle appartenenti alle classi (a) e (b); la massima delle prime e la minima delle seconde danno luogo a due numeri

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{m+1}{n};$$

al crescere di n, ad es. per $n = 10, 100....$, la prima frazione dà origine ad una successione crescente, e la seconda ad una successione decrescente: sono due successioni convergenti tendenti al limite (ab).

(Perchè si tratti di successioni realmente illimitate occorre solo far crescere n in modo conveniente nel caso in cui (ab) sia un numero razionale).

§ 44. **Sviluppi che si riattaccano alle idee del Weierstrass.** — Come già abbiamo accennato, accanto a Cantor (che indipendentemente si riavvicina a Méray) e probabilmente prima di lui, anche Weierstrass aveva riflettuto sui numeri irrazionali, ed era riuscito a concepirli in qualche modo come numeri limiti. Tuttavia la successione tendente al limite è contenuta solo implicitamente nel concetto di Weierstrass. In sostanza questi decompone un numero assoluto a in una *serie o somma di numeri frazionari assoluti*:

$$a = a_1 + a_2 + \quad .... + a_n + ... ;$$

ma concepisce a come riunione di infinite unità di specie diverse, cioè di un'*unità principale* che entra a costituire la parte intera e di *unità frazionarie*, ognuna delle quali entrerà in a, come *elemento*, un numero finito di volte. La somma di un numero qualunque di elementi di a ne costituirà una *parte integrante*, e si dirà *contenuto* in a ogni numero che sia una parte integrante o minore d'una parte integrante.

Il numero a è *finito* (cioè la serie è convergente) se si può trovare un numero, intero o frazionario, maggiore di una sua parte integrante. L'uguaglianza, la disuguaglianza e le operazioni sui numeri finiti composti d'infiniti elementi, si definiscono quindi mediante le relazioni e operazioni sulle parti integranti.

Ora la teoria di WEIERSTRASS si lascia sviluppare naturalmente in una *teoria dei numeri reali assoluti definiti per mezzo di serie o somme d'un numero infinito di termini*, che può presentarsi come segue.

Una serie a termini positivi (o assoluti)

$$a_1 + a_2 + \ldots.,$$

considerata nel campo dei numeri razionali, ammette un *limite* (*somma*) se esiste un numero razionale a tale che, dato un ε piccolo ad arbitrio, vi è un m così grande che per $n > m$

$$a - (a_1 + a_2 + \ldots. + a_n) < \varepsilon,$$

la differenza che compare nel primo membro essendo positiva. Si scrive

$$a = \lim_{n=\infty} (a_1 + \ldots. + a_n)$$

oppure

$$a = a_1 + a_2 + \ldots,$$

e si riconosce che, se

$$a' = \lim_{n=\infty} (a_1 + \ldots. + a_n).$$

deve essere

$$a = a'.$$

Ora si consideri una serie

$$a_1 + a_2 + \ldots.$$

che non ammette un limite razionale. Nasce la domanda: si può generalizzare il concetto del numero-limite d' una serie, trattando la serie anzidetta (senza limite razionale) come rappresentante un *oggetto logicamente possibile*? e più precisamente, si può far questo operando sulle serie nel modo che viene indicato dalla teoria delle serie possedenti un limite?

A queste domande non si può dare una risposta affermativa assolutamente generale, perchè le *serie divergenti* (prese in relazione alle regole operative anzidette) *non rappresentano oggetti logicamente possibili*, visto che il loro uso conduce a conseguenze assurde.

Ma le serie che posseggono un limite razionale rientrano tuttavia, come caso particolare, in una classe di serie « le *serie convergenti* », che rappresentano oggetti logicamente possibili e danno luogo ad una estensione della teoria dei numeri razionali. Quando si suppongono già introdotti i numeri irrazionali le serie convergenti si trattano come serie aventi un limite.

La nostra teoria si può riguardare come una *teoria delle serie convergenti* (a termini positivi) *fondata nel campo dei numeri razionali*. Ci limiteremo a indicare qui gli sviluppi occorrenti:

1) Le serie

$$a_1 + a_2 + \dots,$$

tendenti ad un numero-limite razionale danno luogo alle seguenti relazioni:

α) Soddisfano alla *condizione di convergenza*, che per esse si riduce all'esistenza d'un valore maggiorante M tale che, per qualunque n,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n < M.$$

β) Serie

$$a_1 + a_2 + \dots,$$
$$b_1 + b_2 + \dots,$$

tendenti allo stesso limite soddisfano alla *condizione di equivalenza*, cioè: per ogni ε piccolo ad arbitrio esiste un n così grande che per $m > n$ sempre

$$|(a_1 + a_2 \dots + a_m) - (b_1 + b_2 \dots + b_m)| < \varepsilon.$$

Se questa condizione è soddisfatta ed una delle due serie ammette un limite razionale, questo è anche limite dell'altra serie.

γ) Date due serie

$$a_1 + a_2 \dots,$$
$$b_1 + b_2 \dots,$$

tendenti a limiti razionali, la somma e il prodotto di questi sono rispettivamente limiti delle serie

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots,$$
$$(a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots.$$

2) Si considerino ora serie soddisfacenti alla condizione di convergenza 1) α); indipendentemente dall'esistenza di un numero razionale limite si può provare che:

α) Se due serie soddisfano alla condizione d'equivalenza (1) β)) e una di esse è convergente, anche l'altra è convergente.

β) La condizione d'equivalenza esprime fra le serie una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva.

γ) Date due serie soddisfacenti alla condizione di convergenza:

$$a_1 + a_2 + \dots,$$
$$b_1 + b_2 + \dots,$$

anche le serie

$$S_{ab} = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots,$$
$$P_{ab} = (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots,$$

soddisfano alla medesima condizione.

d) Date due serie convergenti

$$a_1 + a_2 + \dots.$$
$$b_1 + b_2 + \dots.$$

se le serie

$$a_1' + a_2' + \dots.$$
$$b_2' + b_2' + \dots.$$

sono rispettivamente equivalenti ad esse, saranno pure equivalenti le serie

$$S_{ab}, \quad S_{a'b'}$$

e le

$$P_{ab}, \quad P_{a'b'}.$$

In base a queste proposizioni ogni serie convergente, insieme a quelle che le sono equivalenti, definisce un ente « il concetto astratto della classe di serie equivalenti », che si può riguardare come un *numero*, e sui « *numeri* » così introdotti sono definite le operazioni dell'Aritmetica soddisfacenti alle note proprietà fondamentali; inoltre i suddetti «numeri» comprendono come caso particolare i numeri razionali.

NOTA. — Si può *passare* nel modo più rapido *dalla teoria degli irrazionali* che traduce, nel modo anzidetto, le idee di WEIERSTRASS *a quella di* DEDEKIND. Essendo data la serie a termini positivi

$$a_1 + a_2 + \dots,$$

corrispondente ad un numero irrazionale, la partizione in classi contigue che corrisponde a questo numero si ottiene ponendo:

1) nella prima classe (inferiore) ogni numero razionale a per cui esiste un n tale che

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n > a,$$

2) nella seconda classe (superiore) ogni numero b tale che per qualunque n

$$b > a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

§ 45. **Calcolo approssimato sui numeri decimali.** — Una determinazione particolare della teoria esposta nel precedente paragrafo, che sembra essere alla base delle idee di WEIERSTRASS e di CANTOR e che conduce a sviluppi assai semplici, consiste nel considerare i *numeri decimali con infinite cifre*, cioè le serie del tipo

$$\Sigma \frac{a_n}{10^n}$$

dove a_n assume uno dei dieci valori 0, 1.... 9.

I decimali *non periodici* corrispondono a numeri irrazionali.

Ora all' uso dei decimali con infinite cifre si riattaccano i principî del *calcolo delle approssimazioni* di cui vogliamo dare un cenno.

Osserveremo anzitutto che se di un numero a si trascurano le cifre decimali dopo la n^{ma}, si ha un *valore approssimato* di a a meno di $\frac{1}{10^n}$.

Ciò posto risolviamo le seguenti questioni:

1) Dati due numeri a e b, quante cifre decimali occorre calcolare di essi per avere un valore approssimato di $a + b$ a meno di $\frac{1}{10^n}$?

Sommando $a - \varepsilon_1$ e $b - \varepsilon_2$, si ha

$$a + b - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

e se

$$\varepsilon_1 < \frac{1}{10^x} \quad \varepsilon_2 < \frac{1}{10^y}$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \frac{1}{10^x} + \frac{1}{10^y}.$$

Affinchè sia

$$\frac{1}{10^x} + \frac{1}{10^y} < \frac{1}{10^n}$$

basta prendere

$$x \geq n + 1, \; y \geq n + 1.$$

Dunque per rispondere alla domanda *si calcoleranno* n + 1 *cifre decimali* di a e b.

2) Quante cifre decimali occorre calcolare di a, b per avere un valore approssimato del prodotto ab a meno di $\frac{1}{10^n}$?

Moltiplicando

$$a - \varepsilon_1, \; b - \varepsilon_2,$$

si ha

$$(a - \varepsilon_1)(b - \varepsilon_2) = ab - (\varepsilon_1 b + \varepsilon_2 a - \varepsilon_1 \varepsilon_2).$$

Posto

$$\varepsilon_1 < \frac{1}{10^x} \quad \varepsilon_2 < \frac{1}{10^y},$$

si tratta di ridurre

$$\frac{b}{10^x} + \frac{a}{10^y} < \frac{1}{10^n}.$$

Perciò *se le parti intere di* a e b *contengono rispettivamente* r, s *cifre* ($a < 10^r$, $b < 10^s$), basterà prendere

$$x - s < n, \; y - r < n$$
$$x = n + s + 1, \; y = n + r + 1;$$

dunque *si calcoleranno* a e b *rispettivamente con* n + s + 1 *e con* n + r + 1 *cifre decimali.*

In particolare: se a è un numero di r cifre seguìto da decimali, per calcolare a^2 a meno di $\frac{1}{10^n}$ basta tenere $n + r + 1$ cifre decimali di a.

3) Si voglia calcolare un valore approssimato di $\sqrt{a}$ a meno di $\frac{1}{10^n}$, si domanda quante cifre decimali occorre tenere nel numero a, ed a quale approssimazione è sufficiente spingere il calcolo della radice. Pongasi

$$a = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots.$$
$$\varepsilon = 0{,}00 \dots 0_s a_{s+1} a_{s+2} \dots$$

e quindi sia

$$a - \varepsilon = a_0, a_1 a_2 \dots a_s,$$

il valore approssimato di a a meno di $\frac{1}{10^s}$.

Pongasi ancora

$$\sqrt{a - \varepsilon} = b_0, b_1 b_2 b_3 \dots.$$
$$\tau = 0, 0\, 0 \dots 0_t b_{t+1} b_{t+2} \dots,$$

sicchè

$$\sqrt{a - \varepsilon} - \tau = b_0, b_1 b_2 \dots b_t$$

sarà il valore approssimato di $\sqrt{a - \varepsilon}$ a meno di $\frac{1}{10_t}$.

Infine pongasi

$$\sqrt{a} - b_0, b_1 b_2 \dots b_t = \sigma,$$

per modo che σ designa la differenza fra $\sqrt{a}$ e il suo valore approssimato:

$$\sqrt{a} - (\sqrt{a - \varepsilon} - \tau) = \sigma,$$

cioè

$$\sqrt{a} - \sqrt{a - \varepsilon} = \sigma - \tau.$$

Moltiplichiamo i due membri di quest'uguaglianza per

$$\sqrt{a} + \sqrt{a - \varepsilon},$$

avremo

$$\varepsilon = (\sigma - \tau)(\sqrt{a} + \sqrt{a - \varepsilon})$$

e poichè

$$\sqrt{a} + \sqrt{a - \varepsilon} > 2\sqrt{a - \varepsilon},$$

si ricava

$$\varepsilon > 2(\sigma - \tau)\sqrt{a - \varepsilon}.$$

Per approfondire l'analisi conviene distinguere i due casi:

I) la parte intera di a sia $a_0 > 0$,

II) la parte intera di a sia nulla:

$$a_0 = 0.$$

I) Sia $a_0 \geq 1$.

Dalla relazione precedente si deduce

$$\varepsilon > 2(\sigma - \tau)\sqrt{a_0},$$

$$\sigma < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{a_0}} + \tau,$$

e *a fortiori*

$$\sigma < \varepsilon + \tau,$$

Ora perchè resulti

$$\sigma < \frac{1}{10^n}$$

basterà che si abbia

$$\frac{\varepsilon}{2\sqrt{a_0}} < \frac{1}{10^{n+1}}, \qquad \tau < \frac{1}{10^{n+1}}$$

e quindi

$$\varepsilon < \frac{2\sqrt{a_0}}{10^{n+1}}.$$

Supposto quindi che il numero a_0 sia di r cifre, sicchè

$$10^{r-1} \leq a_0,$$

e posto

$$q = \left[\frac{r-1}{2}\right],$$

$$10^{2q} \leq 10^{r-1},$$

si ricava

$$10^{2q} \leq a_0,$$

$$10^q \leq \sqrt{a_0},$$

e perciò si raggiungerà la voluta approssimazione prendendo

$$\varepsilon < \frac{1}{10^{n+1-q}}.$$

In conclusione: *se la parte intera del radicando è di* r ($>$ o) *cifre si avrà* $\sqrt{\mathrm{a}}$ *approssimata a meno di* $\frac{1}{10^n}$, *ritenendo*

$$\mathrm{n} + 1 - \left[\frac{\mathrm{r}-1}{2}\right]$$

cifre decimali di a *e calcolando la radice con* n + 1 *cifre decimali.*

II) Sia $a_0 = 0$.

Questo caso si tratta analogamente, introducendo la prima cifra decimale non nulla, a_p, del radicando a : *per avere* $\sqrt{\mathrm{a}}$ *coll'approssimazione di* $\frac{1}{10^n}$, *è sufficiente ritenere le prime* n + 1 + p *cifre decimali di* a *e calcolare la radice con* n + 1 *cifre decimali* (1).

IV. — La potenza del continuo.

§ 46. **Continuo numerico.** — Colla progressiva estensione del concetto di numero abbiamo costruito successivamente

1) la classe dei numeri interi relativi,
2) la classe dei numeri fratti o razionali,
3) la classe dei numeri reali (razionali e irrazionali).

Si possono comparare queste classi alla classe dei numeri naturali 1, 2, 3..., dal punto di vista della loro *potenza* (Cantor), domandandosi se si può stabilire una corrispondenza biunivoca (non ordinata) fra i numeri naturali e i numeri delle classi 1) 2) 3).

Abbiamo già avuto occasione di dimostrare (§. 30) che:

L'insieme dei numeri razionali (*e in particolare quello dei numeri interi e relativi*) *è numerabile.*

Ora dimostreremo che:

L'insieme di tutti i numeri reali o anche solo l'insieme dei numeri reali compresi fra 0 *e* 1, *non è numerabile.*

(1) Cfr. A. La Barbera, *Calcolo approssimato delle radici dei numeri reali nel sistema decimale.* « Periodico di Matematiche », vol. III, n. 4 (1923). Vedasi anche l'opuscolo dello stesso A. sulla *Teoria dei numeri reali.* Per una più estesa trattazione dei problemi d'approssimazione si può vedere: E. Maccaferri, *Calcolo numerico approssimato*: U. Hoepli, Milano, 1919.

Consideriamo tutti i numeri reali fra 0 e 1 scrivendoli sotto forma di decimali con infinite cifre. Suppongasi che questo insieme possa essere ordinato in guisa che ad ogni numero

$$0, a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

corrisponda un numero naturale n. Immaginiamo quindi di scrivere la serie dei numeri secondo l'ordine anzidetto:

1) $0, a_1 a_2 a_3 \ldots.$
2) $0, b_1 b_2 b_3 \ldots.$
. . . .

Si possono fare due ipotesi:

a) Nella serie anzidetta si può trovare un numero

$$0, c_1 c_2 \ldots. c_n c_{n+1} \ldots,$$

tale che non esista alcun altro numero della serie

$$0, c_1 c_2 \ldots. c_n c'_{n+1} \ldots,$$

possedente le stesse n cifre decimali $c_1 c_2 \ldots. c_n$ dopo la virgola.

In questa ipotesi la nostra serie non può contenere — come si suppone — *tutti* i numeri reali compresi fra 0 e 1, perchè — essendo $c'_{n+1} \neq c_{n+1}$ — il numero

$$0, c_1 c_2 \ldots. c_n c'_{n+1}$$

non le appartiene.

β) Dato nella serie un numero

$$0, c_1 c_2 c_n \ldots,$$

esistono sempre in essa altri numeri che posseggono le medesime cifre c_1 $c_2 \ldots.$ c_n dopo la virgola e differiscono dal numero dato per qualcuna delle cifre successive.

In questa ipotesi formiamo un numero decimale con infinite cifre nel modo seguente:

prendiamo come prima cifra la prima cifra a_1 del numero 1) della serie;

consideriamo fra i termini successivi della serie quello r, più vicino al 1) che comincia colla stessa cifra a_1, e prendiamo altre n_r (≥ 1) cifre di esso fino a comprendere la prima cifra per cui r) diversifica da 1);

consideriamo fra i termini successivi ad r) il primo s) che comincia colle n_r cifre suddette e prendiamone altre n_s (> 1) cifre, fino a comprendere la prima cifra per cui s) diversifica da r); e così di seguito.

È chiaro che per il fatto di cominciare con a_1, il numero decimale che abbiamo costruito non può occupare nella serie data un numero d'ordine compreso fra 1 ed r; ma per il fatto di contenere poi le n_r cifre assegnate esso diversifica da 1) e non può neppure occupare un posto compreso fra r) ed s); quindi, per le n_s cifre successivamente date, esso diversifica da r) e dai numeri successivi ad s) che non cominciano colle $1 + n_r + n_s$ cifre considerate ecc. In ultima analisi si vede che: *il numero decimale illimitato che abbiamo costruito non può appartenere alla serie dei numeri* 1) 2) 3)..., nella quale pure avevamo supposto che trovassero posto *tutti* i numeri reali compresi fra 0 e 1.

Dunque l'insieme dei numeri reali fra 0 e 1 non è numerabile. *A fortiori* non può essere numerabile l'insieme di tutti i numeri reali, giacchè è chiaro che « ogni parte d'un insieme numerabile è numerabile ».

L'insieme dei numeri reali fra 0 e 1 corrisponde all'insieme dei punti d'un segmento (continuo). Perciò si può dire che: l'insieme dei punti d'un segmento non è numerabile; ossia: *il continuo unidimensionale ha una potenza superiore a quella della classe dei numeri naturali.*

§ 47. **Continuo a più dimensioni.** — Introduciamo un simbolo Ω per designare la potenza del continuo rettilineo e fermiamoci un momento a mettere in luce qualche proprietà di questo *numero cardinale infinito.*

Secondo la definizione cardinale del prodotto, Ω^2 designerà la *potenza di un quadrato*, Ω^3 la *potenza di un cubo* ecc.

Ora si ha il teorema (di Cantor):

Il quadrato e il segmento suo lato hanno la stessa potenza, quindi

$$\Omega = \Omega^2 = \Omega^3 = ...$$

Consideriamo un quadrato di lato 1. I punti del suo lato essendo forniti dalla frazione continua illimitata

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\ddots}}}},$$

ad ognuno di essi si può far corrispondere biunivocamente il punto del quadrato che ha per coordinate

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_5+\ddots}}} \qquad \cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_4+\cfrac{1}{a_6+\ddots}}}$$

Lo stesso ragionamento si estende al confronto del segmento col cubo ecc.

Risulta quindi che *il continuo a più dimensioni non si distingue dal continuo a una dimensione per la maggiore estensione (potenza) della classe dei punti o elementi che lo costituiscono, ma per la distribuzione di questi,* che viene data col concetto del continuo suddetto (cfr. § 59).

Parte quarta. — *I numeri non-archimedei e la generalizzazione del continuo numerico.*

I. — I NUMERI NON-ARCHIMEDEI.

§ 48. **Riassunto delle proprietà dei numeri reali.** — Riassumiamo le principali proprietà dei numeri reali.

1) (*Operazioni*). I numeri reali costituiscono un *corpo* di enti trasformato in se stesso dalle operazioni di *somma* e *prodotto* : $a + b$, ab.

2) (*Proprietà fondamentali delle operazioni*). La somma e il prodotto soddisfano alle proprietà commutativa e associativa :

$$a + b = b + a, \qquad ab = ba$$
$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (ab)c = a(bc),$$

e il prodotto anche alla proprietà distributiva

$$(a + b)c = ac + bc.$$

3) (*Proprietà dello zero*). Esiste un numero ben determinato «lo *zero* (0)», che, per qualunque valore di a, soddisfa alla condizione:

$$a + 0 = a$$
$$(a - a = b - b....).$$

Si ha, qualunque sia a,

$$a0 = 0.$$

Si ha, se

$$ab = 0,$$
$$a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0.$$

4) (*Operazioni inverse*). I numeri reali costituiscono un corpo rispetto all'operazione inversa della somma, cioè è sempre possibile la *sottrazione*: a — b.

I numeri reali, *tolto lo zero*, costituiscono pure un corpo rispetto all'operazione inversa della moltiplicazione, cioè è sempre possibile la *divisione*: $\frac{a}{b}$.

5) (*Ordinamento*). I numeri reali formano una serie ordinata, cioè: se $a \neq b$ o $a > b$ o $b >$ (ossia $a < b$), e se $a > b$, $b > c$, anche $a > c$.

6) (*Continuità*). La serie ordinata dei numeri reali è *continua, nel senso di* DEDEKIND, cioè: se la serie stessa è divisa in due parti (*classi contigue*) per modo che ogni numero appartenga ad *una* delle due parti, ed ogni numero della prima parte sia minore di ciascun numero della seconda, allora esiste un *massimo* della prima parte o un *minimo* della seconda.

(Segue che la serie dei numeri susseguenti ad un dato, o quella dei numeri susseguenti ad un dato e precedenti ad un altro, sono pure continue).

7) (*Numeri positivi*). I numeri reali susseguenti allo 0 (*positivi*, cioè > 0) formano un corpo rispetto alle operazioni di somma, prodotto e divisione.

8) (*Condizione di disuguaglianza o di sottrazione*). Se a, b sono due numeri reali e positivi, ed

$$a > b,$$

esiste fra i numeri reali e positivi la differenza:

$$c = a - b \quad (\text{per cui } a = b + c);$$

viceversa se — essendo a, b, c positivi —

$$c = a - b \quad (a = b + c),$$

si ha

$$a > b.$$

9) (*L'unità*). Esiste un numero positivo ben determinato «l'*unità*: 1» tale che, qualunque sia il numero reale a,

$$a1 = a,$$

$$\left(\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \ldots\right).$$

10) (*Gl'interi*). I numeri somme di unità (*interi positivi* o «numeri naturali») formano entro la serie ordinata dei numeri reali una serie *bene ordinata* (in cui ad n succede $n + 1$).

I numeri interi e positivi formano un corpo rispetto alla somma, e soddisfano alla *condizione di disuguaglianza*, cioè: se a e b sono interi positivi ed $a > b$, $a - b$ è un numero intero positivo.

11) (*Proposizione d'* ARCHIMEDE). Dati due numeri reali e positivi a, b, esiste sempre qualche intero positivo n per cui

$$na > b.$$

Queste proprietà dei numeri reali si riattaccano al duplice aspetto in cui essi si presentano, cioè al fatto che la totalità dei numeri reali nasce dall'estensione dei numeri naturali ordinali, ed i numeri reali positivi nascono come estensione dei numeri naturali cardinali; per es. sono essenzialmente *proprietà cardinali* le prop. 7) 8) 11).

L'insieme delle proprietà cardinali dei numeri reali e positivi, corrisponde alla condizione che questi numeri si possano riguardare come «rapporti di grandezza» o come «trasformazioni di un sistema di grandezze in se stesso (moltiplicazioni)»: e ciò per riguardo ad un *sistema di grandezze* caratterizzato dalle seguenti proprietà:

Sommabilità. — Somma commutativa e associativa. — Ordinamento soddisfacente alla condizione di disuguaglianza. — Postulato d'ARCHIMEDE. — Continuità o integrità.

Ora poichè queste proprietà delle grandezze sono anche proprietà dei numeri reali e positivi, così può dirsi che «*i numeri reali* *e positivi formano, essi stessi, un* (particolare) *sistema di grandezze soddisfacente alle condizioni indicate* ». La maggiore determinazione del sistema dei numeri è in rapporto colla definizione di una seconda operazione oltre la somma : il prodotto, rispetto a cui le grandezze numeriche formano pure un corpo.

La relazione frá numeri e grandezze può anche essere espressa sotto la forma geometrica. La serie dei numeri reali si può porre in corrispondenza biunivoca ordinata coi punti d'una retta, e la serie dei numeri reali e positivi colla serie dei punti d'una semiretta. Allora *le proprietà per cui i numeri reali positivi formano un sistema di grandezze si traducono nei postulati di* : *congruenza fra segmenti, ordine continuo dei segmenti crescenti, postulato d'*ARCHIMEDE (cfr. Articolo Quinto).

In particolare appare di qui che la prop. d'ARCHIMEDE (11) è conseguenza della continuità nel senso di DEDEKIND (prop. 6). (Cfr. Articolo Quinto).

§ 49. **I trasfiniti di Cantor come numeri non-archimedei.** — Ci proponiamo ora di estendere il concetto del numero reale lasciando cadere la condizione d'ARCHIMEDE, per modo che la serie dei nuovi numeri (*non-archimedei*) comprenda un *infinito* ω o un *infinitesimo attuale* η rispetto all'unità :

$$n < \omega \quad \text{o} \quad n > \eta,$$

per qualunque intero positivo n $(n = n \,.\, 1)$.

Si tratta di vedere fino a che punto si possono conservare pei numeri non-archimedei le proprietà dei numeri ordinari sopra riassunte.

Anzitutto le proprietà dei numeri interi.

Una generalizzazione dei numeri interi positivi è data dai trasfiniti di CANTOR

$$0, 1, 2 \ldots, \quad \omega, \omega + 1 \ldots, \quad \ldots,$$

comprendente un infinito attuale ω. Ma abbiamo già osservato che *se si conserva pei trasfiniti di* CANTOR *il concetto ordinale della somma*, ritenendo che $n + \omega$ designi « il numero immediatamente successivo alla serie

$$n + 1, \quad n + 2, \quad \ldots,$$

si trova

$$1 + \omega = 2 + \omega = \ldots . = \omega,$$

e quindi *non vale la proprietà commutativa* della somma

$$1 + \omega \neq \omega + 1.$$

Si può togliere questo inconveniente modificando la definizione della somma, e precisamente ponendo:

$$(a\omega + b) + (c\omega + d) = (a + c)\omega + (b + d).$$

Tuttavia questi trasfiniti non soddisfano interamente alle proprietà (10) dei numeri interi positivi: formano una serie ben ordinata, costituiscono un corpo rispetto alla somma, ma *non verificano la condizione di sottrazione* poichè, pur essendo

$$\omega < b \qquad (b = 1, 2...,),$$

non esiste

$$\omega - b.$$

Se si vuole soddisfatta questa condizione aggiungendo ai precedenti trasfiniti:

$$\omega - 1, \quad \omega - 2, \quad ...,$$

si perde la condizione che i trasfiniti stessi formino una serie ben ordinata, poichè non esiste un minimo della serie decrescente

$$\omega - 1, \quad \omega - 2....$$

Così la proprietà dei numeri interi positivi di formare una serie ben ordinata appare incompatibile colle altre proprietà (10) dei numeri interi positivi in un sistema non-archimedeo.

*Questa incompatibilità di una serie ben ordinata d'interi positivi non-archimedei coi postulati delle grandezze numeriche, si riconduce al legame per cui la condizione d'*ARCHIMEDE *dipende come conseguenza dalla continuità nel senso di* DEDEKIND.

Infatti se si considerano i numeri

$$a\omega + b$$

per b reale ≥ 0 e per a intero e positivo, si ottiene una serie continua nel senso di DEDEKIND (prop. 6), poichè la partizione in classi contigue

$$a\omega + b, \quad b \ (\text{per } a > 0)$$

ammette (come ogni altra partizione analoga) un numero limite (ω). Ora se la serie suddetta potesse riguardarsi come una serie di grandezze, soddisfacente alla condizione di disuguaglianza, si dedurrebbe la prop. d'ARCHIMEDE, in contrasto coll'ipotesi:

$$\omega > n.$$

Una serie di numeri non-archimedei positivi $a\omega + b$, soddisfacente alla condizione di sottrazione, conterrà non solo i numeri corrispondenti a b positivo, ma anche quelli corrispondenti a b negativo. Una serie siffatta

$$a\omega \pm b, \qquad (b \geq 0)$$

non sarà più continua nel senso di DEDEKIND, ma sarà una *serie continua nel senso del cosiddetto postulato di* CANTOR *se è continua rispetto* a b. Infatti due successioni una crescente e l'altra decrescente di numeri

$$a_n\,\omega + b_n, \qquad a_n'\,\omega + b_n',$$

saranno da ritenere convergenti solo nel caso che — per n assai grande — sia

$$a_n = a_n' = a_{n+1} = a_{n+1}' \dots = a,$$

e che

$$b_n\, b_{n+1} \dots, \quad b_n'\, b_{n+1}' \dots$$

formino successioni convergenti, nel qual caso ammettono il numero-limite $a\omega + \lim b_n$; in ispecie le successioni 1, 2, 3..., ω, $\omega - 1$, $\omega - 2$..., non sono convergenti perchè è $(\omega - n) - n > n$.

Si noti che il sistema $a\omega \pm b$, ove a percorre valori interi, corrisponde al continuo non-archimedeo di cui si è data la rappresentazione geometrica nell'Art. Quinto: sistema di rette parallele prese nell'ordine di successione da sinistra a destra e dal basso all'alto.

Si può generalizzare il sistema stesso facendo *variare anche* a *in modo continuo.* Con ciò non cessa di valere la continuità nel senso di CANTOR-VERONESE e si conservano del pari le proprietà delle grandezze numeriche. A questa estensione si è condotti intanto dalla condizione che *esista*, per a qualunque, *il prodotto* $a\omega$. Ma la condizione che i numeri non-archimedei formino un corpo rispetto ad un'operazione avente le proprietà del prodotto porta altre conseguenze che dobbiamo esaminare più da vicino.

§ 50. **Prodotto di numeri non-archimedei.** — Prendiamo come punto di partenza il sistema non-archimedeo più generale

$$a\omega + b,$$

dove a e b percorrono tutti i valori reali, positivi o negativi, e dove

$$a\omega + b > c\omega + d$$

se

$$a > c$$

o se

$$a = c, \quad b > d.$$

Si tratta di vedere se possa definirsi il prodotto

$$(a\omega + b)\,(c\omega + d)$$

in guisa che il sistema suddetto formi un corpo, e soddisfacendo alle proprietà commutativa, associativa e distributiva.

Evidentemente *una tale definizione dipende dalla posizione*

$$\omega^2 = \alpha\omega + \beta,$$

perchè

$$(a\omega + b)(c\omega + d) = ac\omega^2 + (bc + ad)\omega + bd.$$

Così nella teoria dei numeri complessi ordinari si soddisfa alle condizioni enunciate ponendo

$$\omega^2 = -1.$$

Ma facendo in tal guisa, e in generale se

$$\alpha < 0 \text{ o } \alpha = 0, \beta < 0,$$

non si soddisfa alla condizione 7) che «*i numeri positivi* (> 0) *formino un corpo rispetto al prodotto*».

Poniamo

$$\omega^2 = \alpha\omega + \beta \quad \text{con} \quad \alpha \geq 0,$$

e domandiamoci se l'insieme dei numeri positivi

$$a\omega \pm b \quad (a > 0),$$

può costituire un corpo rispetto al prodotto così definito.

A tal fine si considerino due numeri

$$\omega - x, \quad \omega - y \qquad (x > 0, y > 0);$$

si avrà

$$(\omega - x)(\omega - y) = \omega^2 - (x + y)\,\omega + xy = \\ = \{ \alpha - (x + y) \} \,\omega + (xy + \beta),$$

e però

$$(\omega - x)(\omega - y) < 0$$

se

$$x + y > \alpha.$$

Dunque *i numeri positivi* a$\omega \pm$ b *con* a $>$ 0, *non possono formare un corpo rispetto ad un'operazione che goda delle proprietà del prodotto.*

NOTA. — L'ipotesi precedente ($a \geq 0$) è incompatibile anche colle proprietà dello zero rispetto alla totalità dei numeri $a\omega \pm b$: esistono dei *divisori dello zero*, cioè dei numeri diversi da 0 il cui prodotto è 0.

Invero, se $\beta \geq 0$, si può rendere

$$(\omega - x)(\omega - y) = 0,$$

determinando x, y in modo che

$$\omega^2 - (x + y)\omega + xy = 0, \\ \{ \alpha - (x + y) \} \,\omega + (\beta + xy) = 0, \\ x + y = \alpha \qquad xy = -\beta;$$

e queste equazioni definiscono dei valori reali di x, y. Se invece $\beta < 0$, si può rendere analogamente

$$(\omega - x)(\omega + y) = 0.$$

§ 51. **Corpo di numeri non-archimedei.** — Abbiamo dimostrato che se si parte da un sistema di grandezze non-archimedeo, contenente una sola specie di unità infinite attuali rispetto all'unità principale, si ottiene un sistema di numeri $a\omega \pm b$ ($a \geq 0$), che non può formare un corpo relativamente ad un'operazione soddisfacente alle proprietà del prodotto. Un corpo di numeri non-archimedei positivi (in cui si supponga definito il prodotto) deve essere più esteso, e precisamente deve contenere una nuova unità ω^2, infinita d'ordine superiore rispetto ad ω; d'accordo coll'intuizione per cui

$$\omega^2 > n\omega,$$

per $n = 1, 2, 3....$

Ora richiamando le proprietà dei numeri a più unità (Articolo di GIGLI nel vol. II della Parte I di questa raccolta) si ha che un sistema di numeri della forma $a\ \omega^2 + b\omega + c$ non può in alcun caso formare un corpo rispetto a due operazioni cui spettino le proprietà della somma e del prodotto: quindi si è condotti a considerare ω^3 come una nuova unità infinita d'ordine superiore rispetto ad ω^2, e così via di seguito.

I numeri della forma

$$a_n\,\omega^n + a_{n-1}\,\omega^{n-1} + ... + a_1\,\omega + a_0$$

dove n percorre tutti i valori 0, 1, 2, 3..., e, dentro il sistema di questi, i numeri positivi ($a_n > 0$), danno luogo ad un corpo di numeri non-archimedei soddisfacente alle proprietà della somma e del prodotto, alla continuità nel senso di CANTOR, e alla condizione di disuguaglianza delle grandezze numeriche.

Ma nel sistema anzidetto non è possibile la divisione.

Per rendere possibile la divisione occorre:

1) aggiungere la serie delle unità infinitesime

$$\eta = \frac{1}{\omega}, \quad \eta^2 = \frac{1}{\omega^2}....;$$

2) considerare numeri formati con *infinite unità infinitesime* quali risultano per es. dalla divisione

$$\frac{1}{a+b\omega} = \eta\,\{b + a\eta\}^{-1};$$

sviluppando $(b + a\eta)^{-1}$ colla serie binomiale.

In conclusione *un corpo di numeri non-archimedei positivi, entro cui siano possibili le operazioni di somma, prodotto e divisione, contiene numeri con un numero arbitrariamente grande (ma finito)* *di unità infinite e con un numero infinito di unità infinitesime, della forma*

$$a) \qquad a_n\omega^n + a_{n-1}\,\omega^{n-1} + \ldots + a_1\omega + a_0 + \sum_1^\infty b_m\,\eta^m.$$

La *condizione di continuità* di CANTOR non dice più nulla rispetto a numeri di questa forma, ma essa può surrogarsi colla condizione che « *ogni sistema di numeri formati con un numero finito di unità sia continuo* (*nel senso di* CANTOR).

Questa condizione importa la *continuità rispetto ai coefficienti* $a_0 a_1 a_2 \ldots$, $b_1 b_2 \ldots$, alla quale si perviene ugualmente — in base alla possibilità del prodotto — se si suppone che uno solo dei coefficienti *varii* in modo continuo.

Il sistema a) corrisponde ai corpi continui di numeri non-archimedei, contenenti il *minimo sistema* possibile *di unità irriducibili*. Si possono ottenere corpi più generali in cui si considerino anche potenze non intere di ω; tali sono i corpi di numeri di VERONESE (1) e quelli dei *monosenii* di LEVI-CIVITA (2).

Ma, tralasciando questa possibile generalizzazione, noi ci proponiamo di vedere ora come si possa effettivamente costruire un corpo minimo di numeri non-archimedei.

§ 52. **Numeri funzionali non-archimedei.** — Per costruire effettivamente un corpo minimo di numeri non-archimedei soddisfacente alle condizioni indicate innanzi, ricorreremo all'idea genialmente svolta da HILBERT, cui daremo uno sviluppo adatto allo scopo che qui viene proposto.

Consideriamo le funzioni razionali fratte del tipo:

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)} = \frac{a_n\,t^n + \ldots + a_1\,t + a_0}{b_m t^m + \ldots + b_1\,t + b_0}.$$

Due funzioni siffatte

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)},\quad \frac{\chi(t)}{\psi(t)}$$

(1) *Fondamenti di Geometria*, Padova, 1891.

(2) *Sugli infiniti e sugli infinitesimi attuali.* « Atti del R. Istituto Veneto », 1893.

si possono confrontare per t assai grande: accade allora che (escluso il caso d' uguaglianza) da un certo punto in poi

$$\frac{f}{\varphi}-\frac{\chi}{\psi}>0$$

o

$$\frac{f}{\varphi}-\frac{\chi}{\psi}<0.$$

Nel primo caso scriveremo

$$\frac{f}{\varphi}>\frac{\chi}{\psi},$$

nel secondo

$$\frac{f}{\varphi}<\frac{\chi}{\psi}.$$

Con ciò le funzioni anzidette vengono ordinate in una serie di funzioni crescenti. Gli enti di questa serie (le funzioni) che succedono alla costante 0 (>0), si possono riguardare come numeri positivi, costituenti un corpo rispetto alle operazioni di somma, prodotto e divisione, definite ponendo:

$$\frac{f}{\varphi}+\frac{\chi}{\psi}=\frac{f\psi+\chi\varphi}{\varphi\psi},$$

$$\frac{f}{\varphi}\cdot\frac{\chi}{\psi}=\frac{f\chi}{\varphi\psi},$$

$$\frac{f}{\varphi}:\frac{\chi}{\psi}=\frac{f\psi}{\chi\varphi}.$$

L' insieme dei numeri-funzioni $\lesseqgtr 0$, forma anche un corpo rispetto alla sottrazione.

Ora i numeri che abbiamo definito sono numeri non-archimedei riducibili alla forma

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots\ldots + a_0 + \frac{b_1}{t} + \frac{b_2}{t^2} + \ldots.,$$

ossia

$$a_n\omega^n + a_{n-1}\,\omega^{n-1} + \ldots. + a_0 + b_1\,\eta + b_2\,\eta^2 + \ldots.,$$

dove

$$\omega = t, \quad \eta = \frac{1}{t}.$$

NOTA. — Una critica adeguata dei lavori precedentemente citati, e specialmente di HILBERT, ha condotto SCHÖNFLIES a questa forma dei numeri non-archimedei, che abbiamo dimostrato nel § 51.

Riguardo all'*estensione* del corpo così definito, avvertiamo che pei numeri hilbertiani *si possono assumere ad arbitrio quanti si vogliano coefficienti*

$$a_n, a_{n-1} \ldots, a_0, b_1, b_2, \ldots, b_m,$$

ma *non la serie infinita*

$$b_1\, b_2 \ldots .$$

Si può generalizzare i numeri funzionali suddetti, considerando *le più generali serie convergenti*

$$a_n t^n + \ldots + a_0 + \sum_1^\infty b_m t^{-m}$$

(anche non nascenti dalla divisione di funzioni razionali fratte) e comparandole nel modo indicato innanzi per le funzioni razionali. Allora la serie dei coefficienti

$$b_1\, b_2 \ldots .$$

si può assumere ad arbitrio compatibilmente con certe disuguaglianze.

È lecito del resto togliere anche questa restrizione, considerando le *serie divergenti* $\Sigma b_m\, t^{-m}$, purchè si modifichi il modo di confronto di

$$\Sigma b_m\, t^{-m}, \quad \Sigma c_m\, t^{-m},$$

cercando quale sia il segno della differenza

$$\sum_1^n b_m\, t^{-m} - \sum_1^n c_m\, t^{-m},$$

per n *e* t *crescenti, dove* t *si faccia crescere assai rapidamente rispetto ad* n.

§ 53. **Confronto dei numeri non-archimedei coi numeri reali.** — Confrontiamo i numeri non-archimedei costruiti testè come numeri funzionali (hilbertiani) coi numeri reali ordinari, tenendo presenti le proprietà 1) .... 11) di questi, enunciate al § 48. Vediamo allora che i nostri numeri non-archimedei soddisfano come i numeri reali alle condizioni 1) 2) 3) 4) 5) 7) 8) 9) cioè :

L' insieme dei numeri non-archimedei forma un corpo rispetto alle operazioni di somma e prodotto 1) e alle loro inverse, sottrazione e divisione 4) ; quelle operazioni danno luogo alle proprietà commutativa, associativa e distributiva 2) e alle proprietà dello zero 3) e dell' unità 9).

L' insieme dei numeri non-archimedei è ordinato per numeri crescenti in guisa che fra due numeri disuguali ne esiste sempre qualcuno maggiore dell' uno e minore dell'altro 5). I numeri non-archimedei seguenti allo zero (positivi) formano un corpo rispetto alla somma, al prodotto e alla divisione 7) e soddisfano alla condizione di sottrazione delle grandezze 8).

L'abbandono della condizione d'ARCHIMEDE 11) ci ha portato a *modificare necessariamente* le proprietà 6) 10).

Non vale per la serie dei numeri non-archimedei la continuità nel senso di DEDEKIND 6). In luogo di essa si ha che *ogni sistema di numeri formato con un numero finito d'unità irriducibili infinite ed infinitesime è continuo nel senso di* CANTOR *e però integro* (i coefficienti percorrono tutti i valori reali). La condizione d' integrità si può render soddisfatta — come si è detto — anche per il sistema dei numeri formati con infinite unità.

I numeri non-archimedei interi e positivi :

$$a_n \omega^n + ... + a_0 + \Sigma b_n \eta^n$$

(con a, b interi, $a_n > 0$) *non formano più una serie ben ordinata* 10), ma costituiscono sempre un corpo rispetto alla somma e al prodotto.

In sostanza tutte le proprietà cardinali dei numeri reali (eccezione fatta per la prop. d'ARCHIMEDE) appartengono ai nostri numeri non archimedei ; le proprietà ordinali si estendono solo in parte, modificandosi le 6) 10).

II. — Su alcune possibili interpretazioni dei numeri non-archimedei.

§ 54. **Ordini d' infinito di Du Bois Reymond.** — Nella teoria dell'accrescimento delle funzioni di Du Bois Reymond si sogliono confrontare gli *ordini d' infinito* o *d' infinitesimo delle funzioni* d'una variabile t, crescenti o decrescenti oltre ogni limite (ad es. per $t = \infty$). Essendo $f(t)$ e $\varphi(t)$ due funzioni crescenti si cerca se

$$\lim_{t=\infty} \frac{f(t)}{\varphi(t)} = \infty$$

$$\lim_{t=\infty} \frac{f(t)}{\varphi(t)} = \text{cost} \ (\neq 0)$$

$$\lim_{t=\infty} \frac{f(t)}{\varphi(t)} = 0\,;$$

nei tre casi si dice rispettivamente che l'ordine d' infinito di f è maggiore, uguale o minore di quello di φ.

Analogamente si dica per gli ordini d' infinitesimo salvo lo scambio delle parole « maggiore » e « minore ».

In particolare gli ordini d' infinito delle funzioni

$$a_1 t + a_0, \quad a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \,....,$$

sono rispettivamente uguali a quelli di

$$t, \ t^2 \,....,$$

e si lasciano rappresentare coi numeri naturali

$$1, \ 2 \,....$$

La costante a_0 può considerarsi come un *infinito d'ordine* 0; e gl' infinitesimi

$$\frac{1}{t}, \quad \frac{1}{t^2} \,...,$$

come *infiniti d'ordine negativo*

$$-1, \ -2 \,....$$

Si possono *considerare ordini d'infinito fratti ed irrazionali* corrispondenti a potenze t^x con x fratto o irrazionale.

Ma *i numeri reali non esauriscono la serie dei possibili ordini d'infinito delle funzioni.*

Infatti :

1) l'ordine d'infinito di alcune funzioni per es. di e^t è superiore ad ogni numero reale e positivo n :

$$\lim_{t=\infty} \frac{e^t}{t^n} = \infty ;$$

2) l'ordine d'infinito di alcune funzioni, per es. di $\log t$, deve ritenersi > 0 ma inferiore ad ogni numero reale e positivo n :

$$\lim_{t=\infty} \frac{\log t}{t^n} = 0 ;$$

3) esistono funzioni crescenti il cui *ordine d'infinito* è *incomparabile* perchè $\frac{f(t)}{\varphi(t)}$ per t crescente può non tendere ad un limite ed oscillare fra 0 e ∞.

Supponiamo di aver delimitato un corpo di funzioni comprendente t^x per x reale qualsiasi, i cui ordini d'infinito siano comparabili. Questi ordini d'infinito, in cui si trovano infiniti ed infinitesimi attuali rispetto ad 1, costituiscono una *classe di grandezze non-archimedee* ; potranno riguardarsi come numeri soddisfacenti alle proprietà indicate nel precedente paragrafo ?

Si tratta per ciò di vedere come possano definirsi la *somma* e il *prodotto* di due ordini α, β.

La somma si definisce subito : se

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{ord. inf. } f(t) \\ \beta &= \text{ord. inf. } \varphi(t), \\ \alpha + \beta &= \text{ord. inf. } f\varphi ; \end{aligned}$$

e rimangono soddisfatte le proprietà associativa e commutativa.

Postulando ora la proprietà distributiva del prodotto si avrà per n intero e positivo

$$n\alpha = \text{ord. inf. } f^n(t),$$

formula che per estensione conduce alla definizione generale de prodotto :

$$\beta\alpha = \text{ord. inf. } \varphi\{f(t)\}.$$

Ma *il prodotto così definito non gode della proprietà commutativa*, giacchè, ponendo per es.

$$\lg = \text{ord. inf. } \log t,$$

si avrà

$$n \lg = \text{ord. inf. } \log^n t$$
$$\lg \cdot n = \text{ord. inf. } \log t^n$$
$$= \text{ord. inf. } n \log t,$$

mentre

$$\lim_{t=\infty} \frac{\log^n t}{n \log t} = 0,$$

sicchè

$$n \lg < \lg \cdot n.$$

§ 55. **Probabilità.** — I numeri non-archimedei trovano applicazione in un problema di probabilità che qui citiamo a titolo di esempio d' una classe più generale. Si supponga di far cadere un punto P entro un quadrato, e si postuli che:

1) date nel quadrato due *aree equivalenti* vi sia *uguale probabilità* che P cada nell' una o nell'altra;

2) date due *linee di ugual lunghezza* vi sia pure *ugual probabilità* che P cada sull' una o sull'altra.

Ciò posto si consideri la probabilità che P cada in un luogo $S + s$ contenuto nel quadrato e costituito da un'area S (contorno incluso) e da una linea s fuori di S; questa *probabilità è espressa da un numero della forma*

$$a + b\eta,$$

dove $0 < a < 1$, ed η è un infinitesimo.

Se $c + d\eta$ corrisponde alla probabilità che P cada in un luogo analogo $S' + s'$, la *somma*

$$(a + b\eta) + (c + d\eta) = (a + c) + (b + d)\eta$$

corrisponde alla probabilità che P cada entro

$$S + S' + s + s',$$

supposto tuttavia che S, S', s, s' non abbian parti comuni; questa condizione può sempre soddisfarsi sostituendo ad S', s' un'area equivalente e una linea d' ugual lunghezza, purchè sia

$$a + c < 1.$$

Il *prodotto*

$$(a + b\eta)(c + d\eta) = ac + (ad + bc)\eta + bd\eta^2,$$

corrisponde alla *probabilità composta* che lanciando due punti P, Q questi cadono rispettivamente in $S + s$ ed $S' + s'$. Analogamente si definiscono i prodotti di più numeri.

I numeri misuranti le probabilità così definite sono numeri non-archimedei ordinari compresi fra 0 *e* 1, *ma l' interpretazione diventa difettosa per i numeri con coefficienti negativi*

$$a - b\eta.$$

Infatti si consideri un rettangolo A d'area $a < 1$, con un lato l di lunghezza 1 ; si presenta l'idea di misurare con $a - \eta$ la probabilità che un punto cada entro il rettangolo *escluso il lato* ; ma allora sommiamo ad A un rettangolo B d'area b $(< 1 - a)$ avente comune con A il lato l ; la probabilità che P cada in $A + B$ viene data da

$$a - \eta + b = a + b.$$

NOTA. — *Per rimuovere quest'inconveniente* si sarebbe indotti a porre opportune convenzioni, operando su *aree prive di una parte del contorno* che possono sommarsi dando luogo ad aree analoghe ; ad esempio le aree rettangolari colla base orizzontale private di due lati consecutivi (a destra e in alto) soddisfano a tale proprietà.

§ 56. **Angolo di due curve.** — Due curve tangenti, ad es. un cerchio con una sua tangente, formano un angolo che non può dirsi nullo ma è inferiore ad ogni angolo rettilineo (come già osservava EUCLIDE). Questo angolo fu considerato da GIORDANO NUMERARIO (1220) sotto il nome di « angulus contingentiae », e CAMPANO, alla fine del secolo XIII, ebbe ad osservare che esso non è una grandezza della stessa specie degli angoli rettilinei.

Le discussioni intorno alla suddetta grandezza infinitesima, assai vive nel periodo di elaborazione del calcolo infinitesimale, condussero con NEWTON a comparare fra loro gli angoli di contingenza mercè le derivate d'ordine superiore delle funzioni.

Ora possiamo mostrare che gli angoli di contingenza, considerati accanto agli angoli rettilinei ordinari, danno luogo ad un concetto più generale dell'*angolo di due linee* (analitiche) come elemento d'una *classe di grandezze non-archimedee misurabili da numeri della forma*:

$$b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + \ldots. \qquad (b \geq 0).$$

A tale scopo si considerino due parabole d'ordine $n + 1$, C, C', aventi un contatto d'ordine n nel punto (00):

$$y = a_1x + \ldots. + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1}$$
$$y = a_1x + \ldots. + a_nx^n + a'_{n+1}x^{n+1},$$

limitandosi agli archi di esse che sono da una parte dell'origine. per es. per $y > 0$.

Le due curve C, C' insieme al cerchio

$$x^2 + y^2 = r^2$$

determinano un'area $a(r)$ che diventa infinitesima d'ordine $n + 1$ con r; il $\lim\limits_{r=0} \frac{a(r)}{r^{n+1}} = b$ corrisponderà alla *misura dell'angolo di* C, C', che si assumerà per definizione data da $b\eta^n$.

In particolare si può così esprimere l'angolo di contingenza di una parabola C:

$$y_1 = a_1x + a_{n+1}x^{n+1},$$

colla retta: $$y_1 = a_1x$$

che ha con essa un contatto d'ordine n, o l'angolo di contingenza di una parabola C:

$$y = a_1x + \ldots. + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1},$$

con la parabola C':

$$y = a_1x + \ldots. + a_nx^n,$$

questa retta o curva C' venendo considerata come una parabola d'ordine $n + 1$ corrispondente ad

$$a'_{n+1} = 0.$$

Ciò posto si può definire in generale l'angolo di due qualsiansi curve analitiche

$$y_1 = a_1 x + a_2 x^2 + \dots.$$
$$y_1 = a'_1 x + a_2' x^2 + \dots,$$

passanti per l'origine 0 e considerate da una parte di 0 (ad es. per $y > 0$).

Questa definizione si lascia ridurre, mediante somma e differenza, al caso più semplice dell'angolo compreso fra una curva

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

ed una retta

$$y_1 = a_1' x\,;$$

il quale si esprime mediante un numero della forma:

$$b_0 + b_1 \eta + b_2 \eta^2 + \dots,$$

determinando b_0, b_1, $b_2 \dots$ nel modo seguente:

1) b_0 è l'angolo delle due rette

$$y = a_1 x, \quad y = a_1' x\,;$$

2) $b_1 \eta$ è l'angolo di contingenza della parabola

$$y = a_1 x + a_2 x^2$$

colla sua tangente

$$y = a_1 x,$$

preso positivamente o negativamente secondochè l'elemento di parabola che si considera si trova da parte opposta della retta $y = a_1' x$ rispetto alla tangente suddetta, oppure dalla medesima parte;

3) $b_2 \eta^2$ è l'angolo di contingenza delle parabole osculatrici

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$
$$y = a_0 x + a_2 x^2,$$

preso negativamente o positivamente secondochè esso è contenuto o no nell'angolo determinato dalla seconda parabola colla retta $y = a_1'x$ ecc.

Con ciò si ha una semplice interpretazione geometrica dei numeri non-archimedei

$$b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + \dots$$

come misure delle grandezze di un sistema ; ma in questo sistema non vi sono grandezze corrispondenti ai numeri infiniti ω, $\omega^2 \dots$ che nascerebbero dalla divisione dei precedenti

$$\left(\omega = \frac{1}{\eta}, \quad \omega^2 = \frac{1}{\eta^2} \text{ ecc.}\right).$$

III. — Condizioni che caratterizzano il continuo numerico come serie ordinata.

§ 57. **Condizioni di riferibilità d'una serie continua al continuo numerico.** — Colla costruzione dei numeri non-archimedei abbiamo investigato particolarmente le proprietà cardinali dei numeri reali, ponendone in luce i legami. Ora vogliamo studiarne più profondamente le proprietà ordinali, analizzando le condizioni che caratterizzano il continuo numerico come serie ordinata.

Una *serie* Σ di elementi si dirà *continua* se :

1) è dato in essa un ordine degli elementi che non ammette primo nè ultimo elemento, e tale che fra due elementi vi è sempre qualche elemento intermedio ;

2) l'ordine della serie Σ soddisfa al postulato di Dedekind, cioè ogni partizione della serie in classi contigue è operata mediante un elemento di separazione, che è primo elemento di una delle parti o ultimo dell'altra.

Ora si ha il teorema di Cantor (1) :

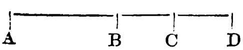
Affinchè una serie continua di elementi, Σ, si possa porre in corrispondenza ordinata colla serie dei numeri reali (continuo numerico) è necessario e sufficiente che si possa determinare in Σ

(1) Cfr. G. Cantor, « Math. Annalen », 46, 1895.

un insieme di elementi, S, *numerabile e ovunque denso sopra* Σ, cioè tale che fra due elementi di Σ vi sia sempre qualche elemento di S.

La condizione precedente è evidentemente necessaria. Dimostriamo che è sufficiente. A tale scopo notiamo che — nell'ipotesi fatta — la serie numerabile S (ordinata secondo l'ordine di Σ) è tale che fra due elementi di essa vi è certo qualche elemento di S, quindi si può porre in corrispondenza ordinata colla serie dei numeri razionali (§ 30); ma poichè S è densa su Σ, questa riesce in corrispondenza ordinata colla serie dei numeri reali.

Nota. — Si abbia una serie continua Σ cui appartenga una serie numerabile S, tale che fra due elementi di S vi sia sempre qualche elemento di S. Se S non è ovunque densa sopra Σ non segue che Σ possa riferirsi ordinatamente al continuo numerico. Ma non segue neppure il contrario. L'unica deduzione che se ne trae è che « S è contenuta in una serie minima Σ' riferibile al continuo numerico, che è parte di Σ ». Così ad es. si consideri un gruppo numerabile di punti S, ovunque denso sopra l'insieme dei segmenti AB, CD (vedi figura) e si supponga che tutt'al più uno dei due estremi B, C appartenga ad S; in questo caso Σ' è costituito dall'insieme dei due segmenti $AB + CD$, escluso uno degli estremi B, C; Σ è il segmento AD di cui $AB + CD$ è una parte.



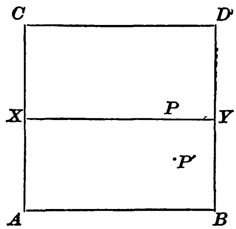
§ 58. **Ordine continuo di specie superiore al continuo numerico.** — Ora nasce la questione se la condizione di Cantor, cioè l'esistenza d'un insieme di elementi numerabile e ovunque denso su Σ, sia o no conseguenza dell'ipotesi che Σ sia una serie continua, in altre parole « se ogni serie continua possa o no riferirsi al continuo numerico ». Ben inteso che la serie continua è definita nel modo ordinale colle condizioni 1) 2) del numero precedente, prescindendo da ogni *relazione* (come la *congruenza* pei segmenti rettilinei) che permetta di ritenere Σ una serie di grandezze.

A tale questione si risponde negativamente costruendo *un ordine continuo di specie superiore al continuo numerico*, cioè « una serie ordinata per modo che fra due elementi qualsiansi di essa vi sia sempre qualche elemento intermedio e che ogni partizione in classi contigue sia operata mediante un elemento di separazione (continuità di DEDEKIND), ma pur tale che non possa farsi corrispondere ordinatamente alla serie dei numeri reali » (1).

A questo scopo consideriamo un quadrato $ABCD$ (vedi fig.). I punti di questo quadrato verranno ordinati in questa guisa:

1) dati due punti P, P' si dirà che P *segue* a P' se P si trova *più alto* di P' (più distante dal lato AB);

2) se P, P' appartengono ad uno stesso segmento XY parallelo ad AB, cioè sono ugualmente alti, si dirà che P *segue* a P' se P si trova *a destra* di P' (più lontano da AB).



Si ottiene così una serie ordinata di punti Σ, che ha come primo elemento A e come ultimo elemento D.

L'ordine è tale che fra due punti vi è sempre qualche punto intermedio, ed è continuo nel senso di DEDEKIND perchè per ogni partizione della serie in classi contigue esiste un segmento XY parallelo ad AB tale che:

a) la partizione stessa dà luogo ad una partizione analoga sopra XY, e allora vi è su questo segmento un punto di separazione (ultimo elemento della classe inferiore o primo della separazione);

b) oppure i punti della classe superiore sono i punti più alti di XY, e allora Y è l'ultimo elemento della classe inferiore;

c) oppure i punti della classe inferiore sono i punti più bassi di XY, e allora X è primo elemento della classe superiore.

L'ordine della serie Σ gode così delle proprietà che spettano all'ordine di un ordinario segmento MN; togliendo gli estremi AD, si ha un ordine Σ' analogo a quello dei punti di una retta.

Si tratta di dimostrare che « non si può porre una corrispondenza ordinata fra i punti di Σ e i punti d'un segmento MN, o fra i punti di Σ' e i punti d'una retta ».

La seconda tesi si riconduce alla prima perchè i punti d'una retta si possono proiettare sui punti d'un semicerchio dal centro di questo, e quindi il semicerchio si lascia proiettare sopra un segmento rettilineo MN da un punto del semicerchio complementare.

Supponiamo dunque che si abbia una corrispondenza ordi-

(1) Cfr. ENRIQUES, « Rendiconti della R. Accad. di Bologna », 1912.

nata fra i punti di Σ e i punti d'un segmento MN, avente una certa lunghezza l. Ad ogni segmento XY del quadrato $ABCD$, parallelo ad AB ed avente i vertici su AC e BD rispettivamente, corrisponde un segmento $X'Y'$ contenuto in MN; ed a segmenti XY che si succedono per altezza crescente nel quadrato, corrispondono segmenti $X'Y'$ successivi senza punti comuni entro MN.

Ciò posto si consideri un intero positivo n arbitrariamente dato: fra le immagini di segmenti analoghi ad XY entro MN, ve ne sono certo *meno di* n, la cui lunghezza è $\geq \frac{l}{n}$.

Pertanto i segmenti XY paralleli ad AB si lasceranno classificare come segue:

1) un primo gruppo, contenente al più 1 segmento, la cui immagine in MN è $\geq \frac{l}{2}$;

2) un secondo gruppo, contenente al più 2 segmenti, la cui immagine in MN è $\geq \frac{l}{3}$;

. . . .

n) un n^o gruppo, contenente al più $n-1$ segmenti, la cui immagine in MN è $\geq \frac{l}{n}$;

. . . .

La serie dei gruppi così formata comprende certo *tutti* i segmenti XY poichè ciascun di questi ha un'immagine non nulla in MN. Di più i segmenti dello n^o gruppo si possono prendere in un determinato ordine di successione, per es. nell'ordine secondo cui si succedono in Σ. Con ciò la serie dei segmenti XY viene fatta corrispondere ordinatamente alla serie dei numeri naturali. Ma questa conclusione è assurda poichè l'anzidetta serie, come l'insieme dei punti X del segmento AC, ha una potenza superiore ad un gruppo numerabile. c. d. d.

§ 59. **Continuo a più dimensioni.** — L'esempio addotto nel numero precedente, mostra l'indipendenza dei tre postulati che, secondo il § 57, caratterizzano il continuo numerico come serie ordinata, cioè delle condizioni 1) 2) inerenti alla continuità della serie, e della condizione di Cantor affermante l'esistenza d'un insieme denso e numerabile di elementi.

Invero quest'ultima condizione è di natura speciale e diversa dalle altre due; data una serie continua come puro ordine, non si ha in essa alcuna operazione costruttrice d'un tale insieme, alcun legame fra la scelta d'un insieme siffatto (nell'ipotesi che esista) e il concetto della serie data.

Si potrebbe presumere che questa difficoltà, relativa alla definizione del continuo numerico come serie ordinata o *varietà ad una dimensione* (in senso astratto = *linea*), si rispecchiasse ugualmente nella definizione delle *varietà continue a due o più dimensioni*, che si trovano in corrispondenza continua col continuo numerico (xy) o (xyz) ecc.

Invece la definizione del continuo a più dimensioni si presenta sotto un nuovo punto di vista.

Limitiamoci ad indicare il teorema fondamentale che concerne la definizione genetica del continuo a due dimensioni (astrattamente = *superficie*) (1).

Anzitutto si *postuli* che: Gli elementi «*punti*» di una *superficie* v_1 (semplicemente connessa, aperta) si possono distribuire in una *distribuzione reticolare* costituita da *due fasci di linee generatrici* v_1 per modo che:

1) Ogni v_2 sia una serie continua (nel senso di Dedekind = ipotesi 1) 2) del § 42);

2) Ogni punto di v_2 appartenga ad *una* linea d'un fascio e ad *una* dell'altro;

3) Una linea d'un fascio e una dell'altro abbian comune *un* punto (intersezione);

4) Tre linee d'un fascio intersechino due linee dell'altro in punti che si susseguono nel medesimo ordine sulle due linee.

(Segue il concetto d'*intorno* d'un punto su v_2 rispetto alla distribuzione reticolare considerata e quindi di *punto limite* di una serie di punti, sempre relativo alla distribuzione suddetta).

5) Due distribuzioni reticolari diverse di v_2 siano tali che un punto limite d'una serie rispetto all'una sia pure limite della serie stessa rispetto all'altra distribuzione.

Questi postulati definiscono il concetto della superficie v_2 *come*

(1) Cfr. F. Enriques, *Sulle ipotesi che permettono l'introduzione delle coordinate....* «Rendiconti Circolo Mat. di Palermo», 1898. Cfr. pure l'Art. III, I di F. Enriques nella «Encyclopedie der Math. Wissenschaften», n. 15.

concetto astratto in ordine alle trasformazioni continue (conservanti i punti limiti).

Si accordi ora il postulato esistenziale:

6) *Esistono in* v_2 *almeno tre fasci di linee generatrici unisecantisi*, che combinati a coppie dan luogo a (tre) diverse distribuzioni reticolari di v_2.

In base a questo postulato esistenziale si può porre una corrispondenza continua fra i punti di v_2 *e le coppie di numeri* (x, y), in modo che le linee di due dei fasci considerati vengano rappresentate da $x =$ cost, $y =$ cost.

Ciascuna di queste varietà unidimensionali v_1 risulta riferibile al continuo numerico $\{(y)$ o $(x)\}$ per il fatto di assere generatrice di un continuo duodimensionale, *che ammette generazioni diverse*, quantunque non si sia postulato in principio, per la v_1 stessa, l'esistenza d'una serie numerabile e densa secondo l'ipotesi di CANTOR.

§ 60. **Osservazioni finali.** — Nell'analisi del concetto di numero siamo partiti da due operazioni logiche fondamentali:

1) *riunire* o *associare* più oggetti dati in una classe;

2) *ordinare* più oggetti dati in una serie.

A queste due operazioni si riattacca la genesi dei due concetti di *numero cardinale* ed *ordinale*; la serie dei numeri naturali risulta già dal subordinare a queste operazioni i dati elementari di ogni pensiero dotato di *riflessività* su se stesso.

Lo sviluppo del concetto di numero ci mostra in qual modo si riesca a subordinare progressivamente alle stesse operazioni fondamentali del riunire e dell'ordinare, delle intuizioni che sono suggerite alla nostra mente da realtà esterne sempre più vaste, quali sono specialmente le intuizioni geometriche elaborate nei concetti di grandezza e di linea (superficie ecc.).

Appaiono quindi in luce le condizioni in cui i concetti generalizzati del numero cardinale ed ordinale si possono unificare in una veduta più astratta.

Questo processo d'unificazione e d'astrazione è parte integrante dell'adattamento che si compie nello sviluppo storico dei concetti. Infatti su questa base si è costituita la Matematica moderna, identificando — dopo DESCARTES — l'Analisi e la Geometria nella Geometria analitica.

Sarebbe errore storico e logico non vedere in siffatta identificazione che « un metodo di soluzione dei problemi geometrici come applicazione dell'Analisi ». La Geometria analitica ha avuto ed ha altrettanto valore per l'Analisi che per la Geometria, foggiando in modo più generale i concetti analitici sulle intuizioni geometriche: ciò appare lumeggiato negli sviluppi successivi del Calcolo infinitesimale, e nella formazione di alcune fra le più alte teorie dell'Analisi moderna (teoria dei gruppi di trasformazione di S. LIE, teoria delle funzioni algebriche, curve, superficie, ecc.).

Così, la critica delle nozioni fondamentali e lo studio dei rapporti annodantisi fra le più evolute dottrine matematiche, la filosofia e la storia, conducono ugualmente ad una veduta unificatrice, avversa al particolarismo scientifico che pretende classificare entro quadri rigidamente distinti i vari ordini di concetti, costruiti a rappresentare una medesima realtà.

II. - Su alcune possibili interpretazioni dei numeri non archimedei.

III. — Condizioni che caratterizzano il continuo numerico come serie ordinata.

QUESTIONI

RIGUARDANTI

LE MATEMATICHE ELEMENTAR

RACCOLTE E COORDINATE

DA

FEDERIGO ENRIQUES

PARTE PRIMA

CRITICA DEI PRINCIPII

VOLUME II - ARTICOLI DI

U. AMALDI - R. BONOLA - E. BOMPIANI - O. CHISINI - F. ENRIQUES - D. GIGLI

TERZA EDIZIONE

BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

EDITORE

ARTICOLO DODICESIMO

Spazio e tempo davanti alla critica moderna, di Federigo Enriques a Roma.

§ 1. **Lo spazio per i Greci.** — La questione « che cos'è lo spazio? » non ha cessato di sollevare discussioni tra i filosofi fino dall'antichità. Nell'Articolo primo abbiamo già ricordato che PARMENIDE d'Elea (4° sec. a. C.) identifica *lo spazio* (l'ente) *colla materia* — qualitativamente indifferenziata — che lo occupa, la quale non lascerebbe posto a vuoti, il vuoto essendo concepito come « non ente ». Questa tesi dà luogo ad una doppia difficiltà: in quanto ponendo una materia compatta ed omogenea rende impossibile di assegnare una ragion sufficiente al processo cosmico; e d'altra parte, identificando lo spazio colla materia, fa apparire il moto dei corpi come puramente relativo; quest'ultima deduzione, sviluppata da PARMENIDE e specialmente dal suo scolaro ZENONE, ci è stata tramandata sotto una forma paradossale come « negazione del movimento ». [1]

LEUCIPPO di Mileto e DEMOCRITO d'Abdera, sostituiscono alla materia compatta un aggregato di *atomi*, ugualmente indifferenziati) e così risolvono insieme le due difficoltà sopra accennate: poichè lo *spazio vuoto* (il non-ente) diventa per essi qualcosa d'*esistente* di per sè, *indipendentemente dai corpi*, e quindi viene pôrto al moto di questi un sistema di riferimento, che possiamo dire assoluto.

Tali vedute, rispondenti al bisogno di costituire una scienza razionale del moto, s' inquadravano, del resto, in un elevato sistema scientifico, che — attraverso i progressi dei filosofi

[1] Cfr. ENRIQUES, *La relatività del movimento nell' antica Grecia*, in « Periodico di Matematiche » n. 2, Marzo 1921.

precedenti — aveva svolto il pensiero relativistico del vecchio ANASSIMANDRO di Mileto, sciogliendosi in gran parte dalla concezione geocentrica ed antropocentrica. Ma contro queste idee, secondo lo spirito di SOCRATE, reagisce la filosofia di PLATONE e d'ARISTOTELE.

La dottrina aristotelica — che doveva esercitare tanto vasta influenza durante il Medio Evo — riprende la negazione eleatica del vuoto, ma assegna ai corpi un *luogo naturale*, che ciascuno tende ad occupare, e che — pur serbandosi la nozione acquisita della rotondità della terra — è concepito secondo le apparenze della caduta dei gravi e del salire della fiamma.

Ora, sorvolando sulle discussioni dei filosofi medio-evali, vediamo il Rinascimento tornare — attraverso PLATONE ed ARISTOTELE — alle idee dei più grandi naturalisti che li precedono nella cultura greca.

§ 2. **Opinioni sullo spazio di Descartes, Galileo, Newton e Leibniz.** — Le concezioni degli antichi, sopra ricordate, si ritrovano ancora, nei secoli 17° e 18°, alla base dello sviluppo della scienza e del pensiero moderno.

RENATO DESCARTES, coll' idea d' una *materia estesa* priva di qualità, riempiente lo *spazio* (1), non fa che riprendere la tesi della scuola d'Elea; e ne trae similmente la conseguenza della relatività del moto: sebbene a dir vero vi sia qualche difficoltà a accordare tale veduta col principio del movimento naturale in linea retta, che l'A. introduce al n. 39 del suo trattato.

Al contrario GALILEO GALILEI, pur senza discutere la questione filosofica e sebbene non osi accogliere apertamente l'atomismo democritico, sembra non rifiutare l'idea di uno *spazio vuoto*; e d'altra parte egli accoglie anche il «movimento assoluto», che — nel concetto di DEMOCRITO — sarebbe appunto definito come «movimento rispetto al vuoto». Queste vedute vengono esplicitamente affermate da ISACCO NEWTON: (2) lo *spazio assoluto* che questi tiene per «sensorium Dei», è un essere in sè, a prescindere dai corpi che vi si muovono, e porge appunto una differenza al moto, che riceve così un senso ugualmente assoluto. Quanto alla materia, NEWTON adotta più o

(1) «Principia philosophiae» II, 11-30.

(2) Cfr. NEWTON *Principi di filosofia naturale*, con note critiche di F. Enriques e U. Forti ed. Stock, 1925.

meno esplicitamente, la supposizione atomica di DEMOCRITO, rinnovata dal suo contemporaneo ROBERTO BOYLE.

Ma GALILEO e NEWTON, cercando di soddisfare le esigenze della meccanica, non hanno approfondito il problema filosofico dello spazio, che invece forma oggetto della riflessione di GOFFREDO GUGLIELMO LEIBNIZ. La polemica epistolare di questi col newtoniano CLARKE spiega bene i pensieri del sommo filosofo tedesco. Non vi è spazio reale assolùto — dice chiaramente la seconda replica a CLARKE — vale a dire che lo *spazio non è qualcosa di definito in sè*, ma ha soltanto un senso relativo ai corpi come «*ordine delle coesistenze*», così come il *tempo* è l'«*ordine delle successioni*». E poichè CLARKE obietta che, se così fosse, un movimento dell'universo in linea retta non farebbe uscire i corpi dal luogo che occupano, LEIBNIZ (nella lettera seguente) spiega che difatti un movimento in linea retta comunicato a tutti i corpi non ha alcun senso; e questa interpretazione positivistica del principio di relatività di GALILEO, viene da lui ribadita e precisata nella quinta lettera (n. 52) ove afferma che il movimento dei corpi non può avere altro significato che quello d'un cambiamento osservabile dei loro rapporti: ed anche che, se non vi è cambiamento osservabile, non vi è affatto cambiamento.

§ 3. **La critica empiristica di Berkeley.** — Una veduta comune sembra collegare i filosofi cui sopra abbiamo accennato, in quanto sono, più o meno consapevolmente, dei razionalisti. La geometria sussiste per essi incondizionatamente, come verità di ragione. Si fa valere qui l'antico principio di PARMENIDE, DEMOCRITO e PLATONE, per cui il concetto viene assunto a criterio del vero. DESCARTES lo rinnova, proclamando il valore delle idee chiare e distinte, e così giustificando a priori le nozioni comuni, per la loro evidenza.

Ora, mentre GASSENDI e HOBBES discutono di questa facoltà d'intuizione concettuale che si vorrebbe conferire allo spirito umano — e riconducono il «concepire» all'«immaginare», cioè al richiamare le rappresentazioni sensibili — sorge l'idea che i principii a priori della scienza (e in particolare gli assiomi geometrici) sieno di natura logica. Per HOBBES: definizioni arbitrarie; per LEIBNIZ: definizioni o analisi dei concetti reali, e giudizii identici (o analitici), che sono le verità prime a cui tutte le altre verità debbono ricondursi per mezzo delle definizioni. [1]

Ma contro questo logicismo, e in genere contro il razionalismo metafisico di cui esso esprime la forma più raffinata, si leva la critica degli empiristi inglesi. JOHN LOCKE non sa dividere l'apprezzamento di LEIBNIZ sui giudizii identici, ch'ei tiene per futili ed irrilevanti ai fini della conoscenza.

Però il colpo più forte viene recato al razionalismo dalla critica di GIORGIO BERKELEY. Il significato della quale verrà chiarito dalle considerazioni che seguono.

Giova anzitutto ricordare che l'elaborazione del concetto della materia presso i Greci [2] aveva portato a distinguere due ordini di proprietà, che LOCKE doveva poi denominare «qualità primarie e secondarie»: le qualità primarie — estensione, impenetrabilità ecc. — sono riguardate appartenere alle cose in se stesse e riflettersi nelle proprietà del concetto della materia estesa; invece le qualità secondarie — colore, odore, sapore ecc. — vengono considerate mere apparenze sensibili, pertinenti al soggetto che le percepisce. GALILEO e DESCARTES avevano accolto similmente questa concezione democritea che, come abbiamo accennato, è stata poi adottata e volgarizzata da LOCKE.

Ma l'analisi da BERKELEY istituita della «Theory of Vision», viene a toglierne il fondamento. Nemmeno le proprietà primarie, in ispecie le estensive, possono riconoscersi indipendenti dalle sensazioni del soggetto, chè anzi si riducono a sensazioni tattili e visive convenientemente associate. Perciò è affatto arbitrario ritenere il concetto della materia come rappresentante d'una realtà o d'un'esistenza ultrasensibile; tutta la realtà non è infine — per noi — che possibilità di sensazioni:

esse est percipi.

Critica penetrante e decisiva, per quanto paradossale, che — completata dall'analisi della causalità di DAVID HUME — rimane uno dei pochi acquisti sicuri della filosofia!

(1) Cfr. ENRIQUES, *Per la storia della logica.* Bologna, Zanichelli 1922 (Cap. II).

(2) Cfr. EHRIQUES, *Le venerabili proprietà della materia,* in «Periodico di Matematiche», 1922.

Aggiungasi che BERCKELEY, in opposizione a NEWTON, ha misurato le conseguenze della sua dottrina rispetto ai principii della meccanica. Il movimento è essenzialmente relativo, quello cosidetto assoluto è privo di significato; così immaginando scomparsi tutti i corpi salvo uno solo, diventerebbe impossibile riconoscere qualsiasi movimento di questo; ed ugualmente se nell'universo esistessero soltanto due globi, sarebbe impossibile riconoscere il movimento della coppia intorno al comune centro di massa; ciò diventa possibile soltanto perchè è dato il cielo delle stelle fisse, e con riferimento alle diverse parti del cielo.

§ 4. **Spazio e tempo secondo Kant.** — La critica empiristica della scuola inglese nel secolo decimottavo, distruttiva del razionalismo metafisico, parve ad EMANUELE KANT minacciare anche la possibilità della scienza teorica. Svegliato — per opera di HUME — dal sonno dogmatico, KANT, rimprovera a costui di non avere considerato il problema della conoscenza in tutta la sua universalità; «se questo avesse fatto — dice nell' Introduzione alla critica della ragion pura (VI) — si sarebbe accorto che, secondo i suoi argomenti, non vi sarebbe più nemmeno la matematica pura, poichè questa contiene certo dei principii sintetici a priori, e il suo buon senso l'avrebbe quindi trattenuto dal concludere in tal modo».

Nel linguaggio di KANT, i giudizii *sintetici* si distinguono dai giudizii *analitici* perchè, a differenza di questi ultimi, aggiungono al soggetto qualcosa che non è contenuto logicamente nel suo concetto. I giudizii matematici, ed anche quelli che stanno a base della Meccanica o della Fisica pura, sono sintetici eppure a priori. Nella prima tesi KANT si accorda con LOCKE, negando ogni valore scientifico costruttivo ai giudizii identici di LEIBNIZ; ma per la seconda, si allontana dalla filosofia empirica della scuola inglese: la scienza è un fatto poichè si sono costruite la geometria d'EUCLIDE e la meccanica di NEWTON; il filosofo critico — non abbastanza critico per domandarsi fino a che punto o grado valgano queste costruzioni — le prende per verità necessarie, che oltrepassano la esperienza fornendo anzi il criterio interpretativo d'ogni esperienza possibile; e si chiede quindi su quale fondamento riposi tale criterio. La risposta è che lo spirito umano non riceve passivamente le sensazioni, ma colla sua propria attività costruttiva trae dal loro caos un ordine, inponendo ad esse le forme a priori della sensibilità e le categorie dell' intelletto. Le forme della sensibilità sono: lo *spazio, ordine della sensibilità esterna*, e il *tempo, ordine della sensibilità interna*.

Per ciò che concerne la concezione kantiana dello spazio, la differenza in confronto a LEIBNIZ è puramente metafisica, e svanisce sul terreno della scienza positiva: perchè, in luogo d'un ordine di coesistenza delle cose in sè, KANT pone un ordine delle sensazioni, che ha una realtà puramente fenomenale; ma questa realtà non è meno rigidamente determinata dalle leggi dello spirito che — per la circostanza di oltrepassare il criterio logico — non restano meno necessarie. Così — secondo la dottrina kantiana — i principii della geometria euclidea s'impongono alla nostra esperienza, che, fuori di essi, non sarebbe affatto possibile.

§ 5. **La necessità degli assiomi geometrici di fronte alla geometria non euclidea.** — Ora la geometria non-euclidea, (Art. 11) già con GAUSS e poi con LOBACEFSKI viene a contraddire al tempo stesso il logicismo leibniziano e la dottrina kantiana dello spazio.

Anzitutto è stabilito che il postulato delle parallele può negarsi senza contraddizione, in un sistema geometrico coerente edificato sui primi principii dello stesso Euclide. È vano dunque il tentativo di fondare la geometria sopra semplici verità identiche o analitiche! E l'idea stessa di LEIBNIZ, che stà alla base d'un tentativo di codesto genere, si dimostra così veramente priva di valore.

Ma, ciò che più importa, cadendo il postulato V d'EUCLIDE, si ha una geometria più generale che dipende da una costante arbitraria k (la curvatura dello spazio) e si riduce al caso euclideo per $k=0$. Vi è dunque, a priori, una serie di spazi possibili, e sembra arbitrario affermare che la possibilità dell'esperienza richieda precisamente la condizione $k=0$. Al contrario si sarà naturalmente condotti a chiedere all'esperienza stessa la valutazione di k, che sarà fornita dalla misura della somma degli angoli d'un triangolo: e se si trovi una somma minore di due angoli retti, seguirà $k<0$, il difetto essendo uguale a k moltiplicato per l'area del triangolo.

Questo pensiero spinge GAUSS [1] ad esaminare con cura il triangolo geodetico BROCKEN-HOHEHAGEN-INSELBERG i cui lati sono circa m. 69, 85, 197; ma dall'esame segue la validità della gometria euclidea nei limiti d'approssimazione delle misure geodetiche.

Più tardi LOBACEFSKI, riprendendo l'idea di SCHWEIKART che all'ipotesi non-euclidea aveva dato il nome di «astrale», si volge ad esaminare le parallassi delle stelle, arrivando alla stessa conclusione nell'ordine delle misure astronomiche. Infatti nella memoria di LOBACEFSKI sui «Nuovi fondamenti della geometria con una completa teoria delle parallele» (1835-38), che si può leggere nella traduzione di F. ENGEL (N. I. L. «Zwei geometrische Abhandlungen», Teubner, Lipsia 1899), si trovano i resultati seguenti.

Se si suppone che lo spazio fisico sia non-euclideo, le parallassi delle stelle conducono a determinare un limite inferiore per l'unità di misura che nel sistema geometrico compare come naturale o assoluta (cfr. Art. undecimo): invero la parallasse d'una stella S, il cui raggio visuale si assuma perpendicolare alla congiungente del sole e della terra, fornisce un limite superiore per la differenza fra 90° e l'angolo di parallelismo relativo a codesta distanza. Così dalla parallasse di Sirio, che ritiene $1'',24$ LOBACEFSKI deduce che l'unità anzidetta supera 170 mila volte il diametro dell'orbita terrestre. Ma in realtà la parallasse di Sirio vale soltanto $0'',37$, e vi sono stelle la cui parallasse è minore di $0'',1$: quindi l'unità di misura dello spazio non-euclideo dovrebbe superare un milione di volte, cioè resulta praticamente infinita (come per $k=0$)!

I tentativi accennati mostrano che la costruzione non-euclidea è stata interpretata dai costruttori in un senso empirico, conforme alle idee della scuola inglese; e la critica di HELMHOLTZ viene continuata nel medesimo senso. L'argomento della inconcepibilità o non intuibilità dello spazio non-euclideo, lungi dall'arrestare questi filosofi, viene superato mercè una considerazione assai ingegnosa, che si trova ugualmente in REIMANN, HELMHOLTZ e CLIFFORD.

Si imaginino dei piccoli animaletti a due dimensioni

[1] *Disquisitiones circa superficies curvas*, 428.

striscianti sopra una superficie curva. Questi animaletti, possedendo una ragione umana e dedicandosi a rappresentare geometricamente la loro superficie-ambiente, riusciranno a concepirla semplicemente come piana (curvatura nulla) se la sua curvatura è in fatto tale da sfuggire alla loro piccolezza.

Questo argomento d'analogia conserva la sua forza anche per chi non ammetta che l'intuizione spaziale sia formata dall'esperienza ed invochi a tal uopo qualche elemento strutturale della psiche umana: in ogni caso appare che l'intuizione d'una superficie piana (curvatura nulla) fornirebbe perfettamente ai nostri piccoli animali un criterio interpretativo della loro esperienza, e nessun disaccordo risulterebbe per essi da tutte le esperienze possibili entro un conveniente raggio d'azione.

Così la pretesa realtà dei giudizii sintetici a priori, che KANT deduce dal fatto della possibilità dell'esperienza, e il dilemma ch'ei pone fra l'accoglimento di tali principii e l'impossibilità della scienza, non resiste all'esame: poichè codesto dilemma contempla lo schema d'una esperienza rigorosa, che sostituisce arbitrariamente le nostre esperienze approssimate, le sole che ci sia dato di tentare!

§ 6. Il problema psicologico dell' acquisto delle nozioni spaziali. — Le riflessioni precedenti pongono il problema dell'acquisto dei concetti spaziali. Già in BERKELEY è segnato quell'indirizzo di ricerca psico-fisiologica che tenterà di derivare tali concetti dalle sensazioni. Per contro la teoria kantiana suggerisce la veduta che l'intuizione dello spazio tenga alla struttura della psiche umana, e quindi alle leggi organiche secondo cui il cervello elabora i dati dei sensi, queste medesime leggi essendo concepite in maniera preformistica.

Ora si tratta di conciliare le due vedute in una spiegazione genetica positiva delle nozioni e dei postulati della geometria.

Nella *Psicologia fisiologica* (da HELMHOLTZ, WUNDT...) si istituiscono esperienze atte a decidere quali proprietà geometriche sieno contenute immediatamente nei dati delle varie sensazioni. Ma per interpretare tali esperienze occorre conoscere i rapporti fra i concetti a cui le dette proprietà si riferiscono, onde si possa separare dalla nozione d'un fatto tutto ciò che non è ad essa indissolubilmente legato. Qui soccorrono alcuni resultati generali della critica dei principii.

Nella geometria elementare abbiamo considerato, come enti fondamentali, il *punto*, la *retta* e il *piano*, a cui si riferiscono le proprietà d'*appartenenza* (Art. 2), di *divisione in parti* o di *ordine* (Art. 2, 5), di *congruenza* o di *movimento* (Art. 3).

Questi concetti si presentano all'intuizione in una certa relativa dipendenza, sicchè ad es. le proprietà della congruenza si esprimono in rapporto alla retta e al piano ecc. Ma essi trovano uno sviluppo più generale ed indipendente in alcuni rami elevati della geometria. La *geometria proiettiva* considera i concetti di retta e di piano, prescindendo da ogni nozione di eguaglianza e di movimento ; essa considera dunque l'insieme delle *proprietà grafiche*, ad esclusione delle *proprietà metriche* (che entrano soltanto in alcune sue applicazioni). All'opposto invece i concetti metrici ricevono uno sviluppo indipendente dalle nozioni di retta e piano, nella *geometria sopra le superficie o le varietà più volte estese* (studiata di solito coi metodi differenziali), dove all'idea dell'*eguaglianza di segmenti o distanze* si sostituisce l'idea più generale della *ugual lunghezza di archi di linea*, e quindi l'espressione dell'*elemento lineare* (RIEMANN).

Ebbene a questi due rami della geometria corrispondono due indirizzi principali nelle ricerche sui fondamenti della geometria (1), i quali pongono in luce l'assoluta indipendenza fra i concetti grafici e metrici, che rispettivamente in ciascuno di essi vengono scelti come punto di partenza. E quei due rami hanno pur comuni alcune proprietà che insieme costituiscono una teoria distinta : la generale *teoria del continuo o Analysis situs* ; che viene edificata sui concetti primi e generalissimi di linea, superficie, varietà a più dimensioni e dà luogo ad una ricerca critica preliminare, indipendente dalla proiettiva e dalla metrica.

Ora quale rapporto intercede fra questi sviluppi critici e il problema fisio-psicologico sopra accennato?

Anzitutto si può osservare (con HELMHOLTZ e KLEIN) che la vista dà, in modo immediato, soltanto, le nozioni grafiche

(1) Cfr. Art. undecimo §§ 14 e seguenti. Cfr. pure ENRIQUES, *Prinzipien der Geometrie*, art. III A, B 1, nella « Enciclopädie der mathematischen Wissenschaften ».

e non le metriche. All'opposto invece dalle sensazioni tattili-muscolari, si acquista la conoscenza immediata delle proprietà (metriche) della congruenza, e solo in via subordinata quelle della retta e del piano. Ma, se si distinguono le sensazioni tattili-muscolari generali, da quelle del tatto speciale, si ha di più che le prime — fino a che non sia localizzata per abitudine una sede di paragone — sono incapaci di dare la nozione della congruenza; il loro contenuto — per quanto riguarda le cognizioni spaziali — si limita alle relazioni più generali inerenti a linee e superficie, che abbiam detto costituire l'oggetto della teoria del continuo, ed essere comune fondamento delle proprietà grafiche e delle metriche.

Onde: *i tre rami della geometria in essa differenziatisi, cioè la teoria del continuo, la geometria metrica e la proiettiva, avuto riguardo all'acquisto psicologico dei loro concetti fondamentali, appaiono connessi a tre ordini di sensazioni: rispettivamente alle sensazioni generali tattili-muscolari, a quelle del tatto speciale e della vista.*

Non enteremo nelle discussioni che occorrerebbero per giustificare questa conclusione, e dovremo pure arrestarci dinnanzi ai problemi più determinati che qui si riattaccano: come da ciascun gruppo di sensazioni traggano origine i concetti geometrici fondamentali, e come essi si leghino fra loro secondo le leggi logiche e associative, le quali trovano poi la loro espressione nei postulati. Quest'analisi è stata da noi ampiamente sviluppata nell'articolo «*sulla spiegazione psicologica dei postulati della Geometria*» (Rivista filosofica, Pavia 1901), e nel cap. IV dei «*Problemi della Scienza*» (Bologna, 1906).

Ed essa ci ha permesso di render conto del sentimento d'evidenza o necessità che accompagna assiomi o postulati, ravvisando in questi la sovrapposizione di principii logici a certe condizioni associative onde sorgono i concetti.

Ma vogliamo richiamare, a questo proposito, l'osservazione che vi è differenza tra postulati aventi il loro fondamento in un sol gruppo di sensazioni, e postulati che nascono dall'associare sensazioni appartenenti a gruppi diversi. È naturale che questi ultimi abbiano in confronto ai primi un minor grado d'evidenza.

Si ha qui, in qualche modo, una ragione dei tentativi, annoverati dalla storia delle matematiche per bandire dalla geometria il *postulato delle parallele* (cfr. Art. undecimo). La sua minore evidenza si spiega osservando che esso è un *postulato d'associazione fra le sensazioni ottiche e le sensazioni tattili-muscolari o meccaniche.* Infatti se cerchiamo di comprendere la repugnanza che proviamo a contraddire l'ipotesi d'un'unica parallela ad una retta data, passante per un punto dato, riconosciamo che essa dipende dal doppio modo di rappresentarci le parallele: come limiti di due rette che si tagliano, ove il punto comune si allontani indefinitamente in un verso determinato, e come linee *equidistanti.* In questo doppio modo di rappresentazione vi è un fatto d'associazione ottico-meccanica, che riposa appunto sulla sensibile validità del postulato delle parallele.

§ 7. **Poincarè e la dottrina della geometria convenzionale.** — Ma, qualunque sia il grado d'evidenza del postulato d'Euclide, abbiam detto che la sua necessità psicologica, rispetto alla nostra intuizione, non si traduce in una necessità per la scienza dello spazio fisico.

Nondimeno le verificazioni tentate nel campo geodetico-astronomico sono riuscite a confermare la geometria euclidea entro l'ordine di precisione che è al limite delle nostre osservazioni.

Sarà possibile superare questo limite con adeguate esperienze e scoprire un giorno il carattere non-euclideo dello spazio?

No, risponde Poincarè [1], perchè le nostre esperienze non portano sullo spazio e nemmeno sui rapporti di spazio, ma sui corpi, di cui mettono in giuoco le proprietà fisiche. Così la verità o la falsità della geometria euclidea non è una questione di fatto, ma una pura *convenzione* : si tratta di sapere a quali proprietà fisiche si vuol fare appello per definire la linea retta ecc.

È chiaro che un argomento specioso di questo genere si può ripetere press'a poco per ogni problema scientifico: di ciascuno si potrà dire che isolandolo dal corpo della scienza

[1] *Science et hypothèse, La valeur de la Science.* Parigi, Flammarion 1903-5.

non contiene un fatto ma si riduce a una convenzione arbitraria. Così il recente *pragmatismo* riesce a negare il valore della scienza.

Noi abbiamo già avuto occasione di combattere lo spirito di questo convenzionalismo [1], la scelta d'un linguaggio o di definizione convenienti rende certo possibile di cambiare formalmente l'espressione d'un fatto, come chi dica p. es. che il «bianco» è «nero»; ma quest'aspetto arbitrario della verità non tiene che ad una considerazione nominalistica del fatto, astrattamente isolato; mentre nell'insieme delle sue relazioni si ritrova qualcosa d'invariante, che risponde giusto al nostro concetto del vero.

Pure POINCARÈ non spingeva la sua dottrina fino alle estreme conseguenze del pragmatismo. Egli tentava anzi di sfuggire alle suggestioni scettiche della relatività dell'esperienza, ammettendo stabilita una gerarchia naturale delle nostre conoscenze in cui la fisica è subordinata alla geometria: *geometria convenzionale, fisica scienza di fatti.*

Si è giustamente ravvicinato lo spirito che muove questa dottrina di POINCARÈ a quello di KANT. Infatti la critica kantiana è egualmente ispirata dal bisogno di sfuggire alle conseguenze scettiche dell'empirismo e del nominalismo: avendo riconosciuto che l'interpretazione dei dati sperimentali si fa alla luce di conoscenze presupposte, si erigono queste a principii, ponendo un ordine necessario della scienza. POINCARÈ non fa che sostituire alla necessità l'arbitrarietà dei principii (convertiti in definizioni mascherate), ma non tocca il posto privilegiato che viene loro conferito nell'ordine naturale delle nostre conoscenze.

D'altronde questa specie d'investitura per diritto divino che KANT accorda agli assiomi regolatori dell'esperienza (le forme della sensibilità e le categorie dell'intelletto), implicando l'accettazione della geometria d'EUCLIDE e della meccanica di NEWTON, riesce infine a confermare quello stesso ordine dogmatico della classificazione delle scienze che AUGUSTO COMTE, secondo uno spirito somigliante di conservazione, doveva ritrovare più tardi sul terreno della storia.

Ma è facile scoprire qui una sopravvivenza del razionalismo metafisico. Riferimmo già (Art. primo § 11, Vol. I,

[1] *Problemi della scienza* e *Scienza e razionalismo*, Bologna, 1912.

pag. 30) l'opinione di ARISTOTILE che ritiene i principii della scienza precedere naturalmente alle conclusioni e costituirne la causa. Questo canone della logica dimostrativa è d'accordo colla veduta ontologica, per cui le idee appaiono disposte secondo un ordine di comprensione crescente o di generalità decrescente, che fornisce appunto l'ordine naturale delle deduzioni scientifiche.

Ora i pensatori moderni sono stati condotti a discutere assai del procedimento — che ARISTOTELE riteneva come circolo vizioso — in cui vogliönsi provare le premesse ipotetiche per mezzo delle conseguenze che ne dipendono; ma non sembra che KEPLERO, GALILEO o DESCARTES, e nemmeno NEWTON (1), sieno mai arrivati a dubitare della possibilità teorica di principii atti a fondare un ordine deduttivo naturale del sapere, che risponda alla conoscenza delle cause. Quanto a LEIBNIZ e LAMBERT, li vediamo tentare addirittura un'analisi dei concetti volta a definire le idee prime, assolutamente semplici, che per combinazione dovrebbero dare tutto lo scibile (2).

Soltanto la critica di HUME, riducendo il rapporto di causa a una successione invariabile di fenomeni e togliendo così ogni base reale alla pretesa di scoprirvi un rapporto di dipendenza concettuale, colpisce l'idea che sta a fondamento d'una gerarchia naturale delle conoscenze. Tuttavia abbiam visto che questa sopravvive come un'esigenza nel pensiero di COMTE alla stessa guisa che in quello di KANT, e si ritrova perfino in POINCARÈ: giacchè la possibilità della scienza sembra venir meno se non si abbia un ordine dei concetti che, collegando i fatti, costituisca il quadro del reale universo.

Orbene, la critica degli assiomi geometrici che principalmente accompagna la geometria non-euclidea, è riuscita a distruggere ogni assoluto logico: la deduzione ha un carattere puramente relativo; quindi la scelta dei principii d'una teoria deduttiva è sottomessa soltanto a criterii di convenienza o d'economia, restando logicamente arbitraria.

Di più anche dal punto di vista psicologico, abbiamo riconosciuto possibili diversi ordini d'intuizione, che rispondono a diverse costruzioni scientifiche storicamente sviluppatesi.

(1) Cfr. *Optices liber III*, Patavii, 1741 pag. 165, ENRIQUES, *Per la storia della logica*, § 31, pag. 219.

(2) Cfr. ENRIQUES, ibidem §§ 15, 19.

È poi chiaro che la comprensione relativa dell'ordine dei concetti e dei postulati entro il campo d'una teoria deduttiva, conduce infallibilmente a considerare come relativa ed arbitraria anche la subordinazione d'una teoria ad un'altra. La geometria non può conservare il suo posto privilegiato rispetto alla fisica!

§ 8. **La geometria estesa ad una successiva approssimazione nella meccanica.** — Riprendiamo ora la domanda: che senso può avere la ricerca sulla validità della geometria euclidea o non-euclidea?

I motivi della critica di KANT, ripresi da POINCARÈ, non ci permettono di ritornare semplicemente alla posizione dell'empirismo nominalistico. Occorre dunque approfondire il significato delle esperienze tentate dai geometri non euclidei per valutare la curvatura dello spazio, attraverso la misura della somma degli angoli d'un triangolo.

È evidente che questo procedimento mette in giuoco le proprietà fisiche dei corpi: ciò è già vero se si operi su triangoli costruiti in carta od in legno ecc. Pure, se per questi si scoprisse che la somma degli angoli differisce sensibilmente da due retti, il carattere non-euclideo dello spazio ne resulterebbe stabilito. Poichè il fatto geometrico sarebbe così separato dalle proprietà specifiche della materia, per mezzo di quegli stessi procedimenti statistici che valgono ad isolare l'azione delle cause generali, in mezzo alle complicazioni accidentali della realtà concreta.

Similmente non era escluso a priori che l'esame di triangoli di maggiori dimensioni, sulla terra o nel cielo, potesse condurre ad una curvatura dello spazio minore di zero, per quanto l'aprezzamento di cause perturbatrici indirette dovesse dar luogo qui a più forti difficoltà. Comunque la possibilità d'una conclusione positiva dipenderebbe strettamente da ciò che i difetti misurati oltrepassino certi limiti, in rapporto all'esattezza delle osservazioni.

Al contrario abbiamo visto (§ 5) che nessun difetto di questo genere ha potuto essere messo in evidenza. Dunque lo spazio ha realmente curvatura nulla o almeno così piccola che, da un punto di vista positivo, è indifferente supporla nulla.

Qui la riflessione del filosofo si risveglia: come è possibile che ipotesi contraddittorie sieno *indifferenti* per lo sviluppo della scienza? Questo può accadere in un certo ordine d'esperienze che comportano un certo ordine d'approssimazioni, ma chi oserebbe ipotecare le esperienze future, negando che anche le conseguenze indirette delle nostre ipotesi rechino il segno d'una differenza, che si è tenuta per trascurabile?

A priori non si può rifiutare siffatta possibilità; tuttavia occorre comprendere meglio il significato della questione.

Il procedimento statistico con cui si riesce a separare i rapporti geometrici concepiti come parte della realtà sperimentale, non costituisce soltanto un metodo di verifica, ma anche la vera *definizione della geometria,* per colui che riguardando le cose sotto l'aspetto positivo non saprebbe accordarle un senso trascendente l'esperienza. Ora codesto procedimento si fonda sul paragone di misure d'ordine diverso, sicchè al di là d'un certo limite, l'ipotesi geometrica diventa una vuota astrazione, priva di significato: in quest'ordine, geometrico e fisico si confondono, cioè le esperienze indirette con cui si vorrebbe verificare le nostre ipotesi, metterebbero in giuoco contemporaneamente quei principii ed altri ancora, reggenti un campo più esteso di previsioni fisiche.

Più precisamente, la geometria esprime un insieme di proprietà relative al *movimento dei corpi* e alla *propagazione della luce*, che si ottengono facendo astrazione dal *tempo* e dalle *forze*. Si avrà dunque un'estensione naturale della geometria ed un grado d'approssimazione successivo alla realtà, prolungando la geometria nella *cinematica,* che è la teoria del movimento rispetto allo spazio-tempo; e a sua volta la cinematica si prolungherà nella *dinamica* che, dando ragione delle forze, toccherà ad un grado più concreto della realtà fisica.

Questo concepimento d'una fisica estensione della geometria, a cui riesce la critica del problema dello spazio [1], ha acquistato un'importanza eccezionale nella scienza contemporanea, grazie allo sviluppo che esso riceve nella teoria di ALBERTO EINSTEIN, a cui quella critica costituisce la naturale preparazione filosofica.

§ 9. **Il tempo: successione e durata.** — Sebbene oggi il «tempo» si accompagni generalmente allo «spazio» nella di-

[1] Cfr. ENRIQUES, *Problemi della scienza* (1906) Cap. V, VI.

scussione filosofica, vi è per gli antichi una differenza peculiare che li distingue: giacchè, pensando lo spazio in concreto, come materia estesa, quei filosofi vedono in esso il tipo di ciò che immutabilmente *esiste*, mentre il tempo mal si accorda coll'idea che si formano dell'esistenza. Del resto questa difficoltà o oscurità metafisica nasce dal concepire il tempo come qualcosa d'attinente al movimento, mettendolo in rapporto coi moti celesti che ne porgono la misura.

Per i PITAGORICI (FILOLAO?) «la terra è un astro che ruotando attorno ad un fuoco centrale è come l'organo del tempo, causa dei giorni e delle notti» ([1]), mentre per altri (DEMOCRITO?) il tempo sarebbe «il movimento del mondo ovvero la sfera stessa di questo» ([2]). PLATONE, nel «Timeo», definisce il tempo come «immagine mobile dell'eternità che procede secondo numeri» (37 *D*) e lo concepisce generato coll'ordine del cielo, da cui derivano i giorni e le notti, i mesi e gli anni: aggiunge che il sole, la luna e i cinque astri detti pianeti, sono deputati a distinguerne e conservarne i numeri.

ARISTOTELE, si occupa a lungo dell'argomento nel «De Coelo»; ivi dopo aver richiamato le precedenti definizioni (*l. c.*), definisce il tempo come «numero del movimento, quando si considera in questo un precedente ed un successivo», pur rilevando che la natura di codesta nozione presenta qualcosa d'oscuro.

Fra i moderni GALILEO ([3]) sopra tutti sembra avere riflettuto sulla misura del tempo, a cui attribuisce un significato naturale per riguardo alla sensazione del ritmo nella musica e alla battuta del polso. Infatti a questi mezzi egli accenna, in primo luogo, per misurare le durate nelle esperienze.

In altre esperienze più precise ricorre poi alla caduta dell'acqua da un secchio per un cannellino ([4]) — espediente già messo in opera nella *clessidra* con cui i Romani limitavano il tempo agli oratori nel foro — ed infine si vale dell' isocronismo delle piccole oscillazioni del pendolo: questa proprietà fu da lui scoperta fin da giovane; osservando la famosa

([1]) ARISTOTELE. *De Coelo* B 13. 293^a 18 in *Diels* «Vorsokratiker B 37, 30. (Vol. I, pag. 356, 24).

([2]) ARISTOTELE. *Phys.* Δ 10. 218^a 33 in *Diels* «Vors» B 33 (I 355, 5).

([3]) *Opere*, ed. naz. IV, 723, e VII, 46, 54, 180.

([4]) ibidem VIII, 213.

lampada nel duomo di Pisa (1583) (di cui misurava la durata delle oscillazioni mercè le battute del polso e della musica), e confrontando poi sperimentalmente pendoli d' ugual lunghezza, fatti oscillare con diversa velocità. Infine lo stesso GALILEO ideò l'orologio meccanico, che nella forma più perfetta fu costruito più tardi da HUYGHENS (1).

GALILEO non si era indugiato in disquisizioni sulla natura del tempo, limitandosi a riportare le definizioni di PLATONE ed ARISTOTELE (2). Una analisi più filosofica si trova in LEIBNIZ (cfr. § 2) che definisce il tempo come «ordine delle successioni». Pure questa formula — a prescindere da altri rilievi— accenna soltanto ad un elemento del tempo la *successione*, e non alla *misura* degli intervalli di tempo, cioè alla *durata*.

NEWTON (3), pone invece un concetto del tempo perfettamente analogo a quello dello spazio assoluto, cui si riferiscono i moti: il *tempo vero* o *matematico*, che importa una misura naturale in sè, indipendente dai fenomeni. E sebbene questo concetto sollevi le obiezioni di BERKELEY, bisogna giungere fino a ERNESTO MACH (4) per vederlo sottoposto ad una critica approfondita.

EMANUELE KANT, considerando il tempo accanto allo spazio quale forma della sensibilità, non fa che mutare la definizione metafisica leibniziana in quella di un «ordine della sensibilità interna», dove non si scorge il fondamento della misura: sebbene sembri d'altra parte accettare il «tempo vero» di NEWTON, come un presupposto necessario della nostra intuizione, fondamento della dinamica.

Ora, lasciando da parte altri sviluppi metafisici per istituire una critica positiva del «tempo», si è condotti anzitutto a domandare se oltre alla nozione che esso implica di un «ordine di successione» dei fenomeni, contenga anche un criterio di misura delle durate. A tal uopo si avvertirà che l'ordine d'una qualsiasi serie fenomenica, permette di associare gl'i-

(1) Cfr. il rapporto di VIVIANI in GALILEO, *Opere*, XIX, 648. HUYGHENS, *Orologium oscillatorium* (1658).

(2) *Opere*, IV, 211.

(3) *Philosophiae naturalis principia mathematica.* Cfr. trad. it. citata, Nota III.

(4) *Die Mechanik in ihrer Entwickelung*, Lipsia, 1883.

stanti successivi ad una quantità variabile t , e quindi ad assegnare una misura: in questo senso un punto mobile sopra una linea porge un possibile orologio, sebbene affatto convenzionale. Ma la misura così introdotta non è definita, potendosi sostituire a t una funzione arbitraria $f(t)$. Si pone quindi il problema se fra i diversi modi di misura possibili vi sia una ragione naturale di scelta che fornisca una misura, per così dire, assoluta: e ciò conduce a ricercare un criterio di confronto degli intervalli successivi, per cui questi abbiano a dirsi uguali o disuguali, riuscendo così a definire $f(t)$ a meno d'una sostituzione lineare.

Alla domanda se un siffatto criterio abbia un senso possibile, si risponde con Galileo, facendo appello al significato fisio-psicologico del ritmo musicale. La realtà «durata» riceve in tal guisa una prima definizione sensibile immediata, sebbene il *trasporto* che così è dato di fare d'un intervallo nel tempo sia assai ristretto e poco preciso. Ma tosto la costruzione di orologi (come le clessidre ecc.) permette di estendere e precisare tale trasporto.

In pari tempo la storia stessa di codesta costruzione, cui si è pur dianzi accennato, mette in evidenza un postulato — implicitamente accolto come criterio di misura — che trova conferma nell'accordo dei diversi orologi, rivelando quindi il significato più profondo della *realtà della durata*. La durata è un carattere dei fenomeni; in condizioni che stimiamo uguali, fenomeni uguali si ripetono in tempi uguali. Questo è il *postulato* generalissimo, che sta a base *della misura del* tempo, e che la nostra critica (1) ha messo esplicitamente in rilievo: sebbene l'enunciato possa apparire un po' vago, esso riceve nelle applicazioni pratiche una determinazione più precisa.

Aggiungiamo che l'anzidetto postulato, a chi ne esamini assai profondamente il significato, sembra richiedere una *ragion sufficiente*, attestando una certa *unità delle forze fisiche*. Esso riesce quindi a suffragare l'ipotesi, suggerita dalle recenti teorie elettro-magnetiche, che riconduce tutti i fenomeni al tipo elettrico e assegna agli atomi un modello costituito da elettroni girevoli attorno ad un nucleo centrale: si può dire dunque che l'elettrone rotante nel mondo atomico

(1) *Problemi della Scienza*, Cap. V.

porge un orologio elementare, che sta alla base delle comuni misure offerte da tutti gli orologi macroscopici.

In tal guisa viene definita la misura del tempo, in rapporto ad un osservatore legato ad un corpo o sistema di riferimento. Ma il confronto dei tempi appartenenti ad osservatori diversi dà luogo ad un nuovo problema, che mette in giuoco la relatività del movimento.

§ 10. **Relatività del movimento.** — Vedemmo già che tutti i pensatori per cui lo spazio non ha significato all'infuori dei corpi, sono condotti a ritenere il movimento di questi come puramente relativo. Così hanno opinato, nell'antichità Parmenide e Zenone d'Elea, e nei tempi moderni (pur con qualche oscillazione) Descartes e Leibniz.

Ma i creatori della dinamica (Galileo e Newton) concepivano come un'esigenza per la costruzione di questa, l'idea d'un movimento assoluto, che, ove si voglia definire in rapporto ad un sistema di riferimento, conduce alla veduta democritea che anche lo spazio vuoto sia qualcosa in sè stesso. Newton in particolare ha recato quì un argomento molto notevole, quale si ricava dai fenomeni che accompagnano e mettono in evidenza i moti di rotazione (assi permanenti di rotazione, forze centrifughe ecc.); in questo senso il pendolo di Foucault porgerebbe una prova della rotazione assoluta della terra rispetto a se stessa. Ma di ciò più avanti.

Frattanto altre concezioni fisiche venivano a collegarsi, in qualche modo, colla precedente veduta. Per quanto la dottrina newtoniana postuli un'azione reciproca dei corpi a distanza, questa forza *gravitazionale* fu accolta dallo stesso autore soltanto come l'espressione positiva di un fatto (i moti celesti vanno «come se»), che ipotesi ulteriori avrebbero dovuto spiegare (1); giacchè il nostro concetto della causa richiede la *contiguità dell'azione nello spazio e nel tempo.* E Newton stesso ha tentato di spiegare secondo questo spirito i fenomeni luminosi, ricorrendo ad un'ipotesi d'emissione della luce. La quale però, nello sviluppo della teoria, dovette cedere di fronte all'ipotesi ondulatoria, introdotta da Huyghens.

Ora quest'ultima ipotesi assume come sede dei fenomeni

(1) *Optices quaestio*, 313.

luminosi un *etere*, riempiente il cosidetto spazio vuoto. Era troppo naturale di prendere l'etere a sistema di riferimento del moto dei corpi, e di cercare se opportuni fenomeni — come l'aberrazione di BRADLEY — mettessero realmente in evidenza il movimento della materia rispetto ad esso, che legittimamente potrebbe tenersi per assoluto.

Però una critica approfondita doveva mostrare che i fenomeni osservati hanno un significato puramente relativo.

Ma, dopochè l'ottica fu ricondotta all'elettro-magnetismo da MAXWELL e HERTZ, apparve chiaro che una teoria elettromagnetica dei corpi in movimento, edificata, come quella di LORENTZ, sull'ipotesi d'un etere immobile, dovrebbe riuscire in qualche modo a riconoscere nell'esperienza il moto della materia rispetto all'etere. Con questa fiducia il fisico americano MICHELSON ha tentato nel 1881 le sue celebri esperienze, che pur ripetute con ogni scrupolo insieme a MORLEY nel 1887, hanno dato resultato negativo. Si trattava di mettere in evidenza il moto della terra: a tal uopo un raggio luminoso, emesso da una sorgente terrestre, veniva costretto a percorrere due cammini uguali d'andata e ritorno, uno nella direzione del moto della terra e l'altro in direzione perpendicolare; contrariamente alle previsioni della teoria di LORENTZ, i due tempi sono risultati uguali: così le tentate esperienze ottiche non consentono di riconoscere il movimento dei corpi rispetto all'etere!

Questo resultato negativo ha spinto i fisici FITZ — GERALD e LORENTZ a modificare la teoria elettromagnetica con alcune ipotesi complementari (contrazione longitudinale dei corpi in moto rispetto all'etere, tempo locale) che contrapponendo una realtà trascendente a un'apparenza sperimentabile — preparano la revisione critica dei concetti fondamentali da cui è uscita la *teoria della relatività ristretta* di ALBERTO EINSTEIN (1905-7).

EINSTEIN parte da una veduta filosofica: l'etere (almeno nel senso della fisica classica) è una finzione, lo spazio non è che un ordine di rapporti fra i corpi, quindi il moto rispetto all'etere o allo spazio è privo di senso; il principio di ragion sufficiente esige a priori la relatività del movimento. La relatività si estende a qualsiasi ordine d'esperienze; tuttavia essa concerne i moti traslatorii (più precisamente uniformi) e non quelli in cui si ha rotazione riguardo alle direzioni delle cosidette stelle fisse.

Questa distinzione è un po' delicata e del resto gli sviluppi ulteriori della teoria apprenderanno a superarla; intanto basti rilevare che l'esistenza di stelle lontanissime, le cui velocità relative non superano un certo limite, conduce a definire delle rette congiungenti le cui direzioni restano reciprocamente invariate, nell'ordine delle approssimazioni sperimentali: così appunto si definiscono le direzioni (sensibilmente) fisse, a cui si paragonano i moti rotatorii; ciò che, nell'argomento di NEWTON, era ritenuto come assoluto (o relativo allo spazio) appare dunque soltanto relativo al cielo delle stelle! (MÄCH).

Precisiamo ora il principio di relatività, considerando i *sistemi galileiani* (su cui non agiscono forze), cioè i sistemi *inerziali* che sono supposti moversi lontano da ogni materia circostante, in guisa che questa non eserciti su di essi alcuna azione sensibile. Due sistemi galileiani qualsiansi, A e B, possono essere in quiete o muoversi l'uno rispetto all'altro d'una traslazione uniforme (una traslazione non uniforme rispondendo a forze acceleratrici); ma le leggi della dinamica di GALILEO e NEWTON sono egualmente valide rispetto a qualsiasi sistema inerziale di riferimento, e però, con esperienze meccaniche interne ad uno qualunque di questi sistemi, p. es. a B, è impossibile discernere se esso sia in quiete o in moto rispetto ad A.

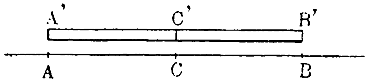
EINSTEIN estende questo principio di GALILEO ad esperienze qualsiansi, enunciando così il *postulato di relatività del movimento*. Il moto traslatorio uniforme d'un sistema inerziale, rispetto ad un altro, non può esser posto in evidenza da esperienze interne al dato sistema di qualsiasi specie, sia meccaniche che ottico-elettro-magnetiche.

Questo postulato conduce ora alla relatività del tempo.

§ 11. **Relatività del tempo.** — Abbiamo veduto come si ponga per un dato osservatore la misura del tempo; occorre ora paragonare i tempi di osservatori diversi, che in generale potranno muoversi comunque l'uno rispetto all'altro; ma, considerando i moti durante intervalli non troppo lunghi, si potrà limitare il paragone al caso elementare di due osservatori (appartenenti p. es. a due sistemi inerziali) che sieno dotati di traslazione uniforme l'uno rispetto all'altro.

Per accordare i loro orologi occorre definire gli avvenimenti che nei due sistemi sono da ritenere *simultanei*, e ciò può farsi in maniera positiva ricorrendo ad opportune *segnalazioni*.

Si consideri p. es. un treno o un'asta rigida $A' B'$, che si muova di moto traslatorio rispetto ad una strada rettilinea $A B$: in un certo istante un viaggiatore vede gli estremi $A' B'$ del treno coincidere coi punti A e B della strada. Per identi-



ficare un istante, due osservatori collocati in A e B possono ricorrere a segnalazioni di diversa natura: segnalazioni balistiche, acustiche, ottiche ecc. Tutte queste indicazioni portano egualmente a ritenere come simultanei due eventi in A e B che vengono segnalati contemporaneamente ad un osservatore collocato nel punto medio C del segmento $A B$.

Ora, se le stesse segnalazioni vengono fatte sul sistema mobile $A' B'$, l'idea che ci formiamo comunemente della simultaneità ci porta a credere che «avvenimenti simultanei per A e B saranno del pari simultanei per $A' B'$». E nella cinematica di GALILEO ciò accade realmente, almeno per segnalazioni balistiche: giacchè la velocità del segnale lanciato da A' si compone colla velocità di traslazione (p. es. positiva) di A', e quella del segnale lanciato da B' colla velocità (negativa) di B', sicchè i due segnali giungono contemporaneamente al punto C' che divide per metà il segmento $A' B'$, sebbene questo punto si sia nel frattempo spostato allontanandosi da C. Ma questa deduzione è legata alla legge di composizione per somma delle velocità, in una maniera invertibile: se gli eventi simultanei per A e B devono apparire simultanei anche per A' e B', bisogna che le velocità delle segnalazioni a mezzo delle quali si giudica della contemporaneità, si compongano colla velocità del sistema A' e B', secondo la legge cinematica galileiana.

Supponendo ancora valida questa cinematica, affinchè il giudizio di simultaneità conduca allo stesso resultato con segnalazioni ottiche, bisogna che anche la velocità della luce si componga con quella della sorgente, come avviene nell'ipotesi balistica (teoria dell'emissione) di NEWTON.

Invece si può chiarire ciò che accade secondo l'ottica ondulatoria di HUYGHENS fermàndoci un momento a considerare il caso delle segnalazioni acustiche, nell' aria. Se (movendosi $A' B'$ nell'aria che costituisce l'atmosfera terrestre) si ricorre a segnalazioni acustiche, la velocità dell'onda sonora non dipende da quella della sorgente e quindi i segnali partiti contemporaneamente da A' e B' non giungono insieme a C' : così il confronto dei tempi A' e B' con segnali balistici ed acustici dà luogo a una differenza, che vale a discernere il moto del sistema $A' B'$ *rispetto all'aria*, sede delle vibrazioni sonore.

Quel che si è detto per le segnalazioni acustiche rispetto all'aria, vale per le segnalazioni ottiche rispetto all'etere nella teoria ondulatoria di HUYGHENS.

Ora EINSTEIN, pur lasciando cadere l'ipotesi dell'etere supporto delle ondulazioni luminose, ha dovuto conservare una conseguenza positiva di questa teoria ondulatoria, a cui tale modello aveva familiarizzato i fisici per analogia col caso del suono : *la velocità della luce resta costante indipendentemente dal moto della sorgente.*

Questo principio ha assunto un'importanza così grande per lo sviluppo della teoria, che vale la pena di dire come esso sia confermato da osservazioni ed esperienze di vario genere : specie dalle osservazioni relative alle stelle doppie di DE SITTER, e dalle esperienze dirette di MAJORANA in cui intervengono sorgenti luminose terrestri (specchi) in rapido moto.

Ciò posto, ritorniamo alla considerazione del nostro treno $A' B'$. I due viaggiatori posti in A' e B', comunicando a mezzo di segnalazioni ottiche, debbono giudicare come simultanei due avvenimenti dei rispettivi luoghi, che sono successivi per un osservatore legato alla strada su cui corre il treno. E se vale la cinematica galileiana gli stessi osservatori avranno modo di discriminare la differenza, per mezzo di segnalazioni balistiche, onde infine riusciranno — con esperienze interne al loro sistema — a riconoscere il movimento traslatorio del sistema stesso. Vi è qui una palese contraddizione col postulato di relatività: se la strada $A\,B$ appartiene ad un sistema inerziale, anche $A'\,B'$ costituisce un sistema somigliante, e nessuna esperienza interna deve permettere di decidere del moto di questo rispetto a quello!

Il paradosso si risolve modificando opportunamente la legge galileiana di composizione delle velocità. Senza indugiarci sul calcolo che qui occorre, scriveremo la formula della cinematica einsteiniana, dove u e v sono le velocità componenti e w la resultante, c designa la velocità della luce:

$$w = \frac{u + v}{1 + \frac{u\,v}{c^2}}.$$

Da essa appare in particolare che se una delle due velocità componenti raggiunge c, anche w è uguale a c, che costituisce un *massimo delle velocità*.

La modifica della cinematica sopra esposta, risponde alla esigenza che per riguardo a due osservatori A' e B' del nostro sistema mobile, qualsiasi segnalazione balistica conduca al medesimo criterio della simultaneità di due avvenimenti che viene offerto dalle segnalazioni ottiche. Ma abbiamo già rilevato come tale criterio differisca da quello che appartiene ad un osservatore legato alla strada $A\,B$, rispetto a cui il nostro sistema $A'\,B'$ si muove. Pertanto *il giudizio di contemporaneità degli avvenimenti non è assoluto, ma relativo al moto dell'osservatore che li contempla.*

Due avvenimenti contemporanei per un certo osservatore saranno, per un altro, successivi in un certo ordine ovvero nell'ordine inverso.

Questo resultato critico porta una rivoluzione nelle idee ricevute intorno al tempo. Conviene rimuover subito la più grave difficoltà filosofica che osta ad accoglierlo. Se di due eventi P e Q, P precede Q, noi concepiamo che P possa influire sopra Q come causa o concausa; ma se la precedenza di P a Q è relativa, sicchè per un altro osservatore Q preceda P, sembra si vada incontro ad ammettere che un avvenimento possa influire sul passato allo stesso modo che sul futuro!

Questa difficoltà è molto grave, perchè tutti i criterii regolativi del determinismo scientifico ne sarebbero rovesciati.

Ma si muove osservando che nel sistema fisico einsteiniano ogni azione si propaga per contiguità con una certa velocità che — come accennammo — non può mai superare la velocità della luce: invece gli avvenimenti suscettibili di apparire simultanei a qualche osservatore, il cui ordine è puramente relativo o invertibile, sono quelli che non possono agire come causa l'uno dell'altro, perchè la loro distanza nel tempo rimane in ogni caso assai piccola in confronto alla distanza nello spazio, cioè inferiore a quella occorrente al propagarsi d'un'azione dall'uno all'altro colla velocità della luce.

Diciamo ora che la relatività del tempo, conseguita colle precedenti considerazioni, porta di conseguenza la *relatività delle lunghezze*: per misurare la lunghezza del treno $A' B' = A B$ occorre trasportare l'unità-metro lungo $A' B'$ un certo numero di volte, che dà appunto la misura cercata *per i viaggiatori*; ma per i cantonieri (posti sulla strada $A B$), A è la posizione della coda del treno ad un certo istante, mentre B è la posizione della testa in un istante successivo, così *la lunghezza apparente del treno* risulta *accorciata* per un osservatore che dalla strada lo vede muoversi.

Questi resultati si possono tradurre in formule precise, che ci limiteremo ad enunciare:

Se due sistemi S *ed* S' *si muovono l'uno rispetto all'altro colla velocità* v, *un intervallo di tempo che per un orologio entro* S' *venga misurato da* τ', *rispetto ad un orologio di* S *verrà misurato da*

$$\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}},$$

e l'intervallo di spazio fra due punti di S', *che entro* S' *ha la lunghezza* l' *avrà rispetto ad* S *la lunghezza*

$$l = l' \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}.$$

È appena necessario avvertire che per la velocità ordinaria (v molto piccolo in confronto alla velocità della luce c) il fattore di riduzione

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots$$

è vicinissimo all'unità: così, per un osservatore posto nel sole, il diametro terrestre (di circa 12740 km.) apparirà scorciato nella direzione del moto della terra, soltanto di cm. 6,4!

§ 12. **Lo spazio-tempo di Minkowsky.** — Gli sviluppi precedenti mettono in luce che lo spazio e il tempo sono soltanto due astrazioni, di fronte ad una realtà composita, che è lo spazio-tempo. Per comprendere questa conclusione fondamentale, cerchiamo di fissare un punto dello spazio: è ovvio che — per il relativista — la domanda non ha senso se non in rapporto ad un sistema materiale di riferimento. La mia casa rimane veramente nello stesso posto? Sì, per riguardo alla terra, ma un osservatore posto nel sole la vede muoversi trasportata dalla terra stessa. Che cosa occorre dunque per identificare i punti dello spazio? Che ci riferiamo ad un osservatore S e ad un determinato istante: i punti che egli può fissare simultaneamente (nel detto istante) sono così definiti, e il loro insieme è lo spazio. Ma ecco che passando ad un altro oservatore S' — mobile rispetto ad S — lo spazio di S subisce un cambiamento essenziale, perchè quegli eventi contemporanei di cui S si valeva per definire due punti, sono per S' eventi successivi e quindi la posizione relativa dei punti corrispondenti è divenuta per S' affatto diversa.

Ciò che riman fisso, in questa crisi dei nostri concetti più familiari, è la nozione dell'*evento*. Rispetto ad S si può introdurre un sistema di coordinate e determinare un punto (x, y, z) in un certo istante t: la quaterna di numeri x, y, z, t risponde ad un evento determinato, quale può osservarsi per esempio da S'; che a sua volta lo definirà con una quaterna di coordinate x', y', z', t'; comunque la coincidenza dei due eventi

$$(x\,y\,z\,t) \equiv (x'\,y'\,z'\,t')$$

ha un significato assoluto, cioè indipendente dall'osservatore che li contempla.

Ora quattro numeri-coordinate x, y, z, t, definiscono un *continuo a quattro dimensioni* che, in senso astratto, si può ancora chiamare uno *spazio*: questo è l'universo dei punti-eventi o lo *spazio-tempo* di Minkowsky. Anche prima di Einstein questa forma poteva essere definita (ed abbiamo invero la denominazione di *cronotopo* datale da GIOBERTI [1]; ma la realtà che essa esprime si presumeva potersi scindere in due altre, lo spazio e il tempo della comune intuizione, in quanto si attribuiva un senso reale asoluto alle varietà (o ipersuperficie)

$$t = \text{cost.}.$$

Oggi questa scomposizione appare (sia pure entro piccoli limiti) relativa alla scelta dell'osservatore o del sistema di riferimento, e quindi convenzionale. Veramente ha ragione MINKOWSKY di dire che lo spazio e il tempo sono ormai due cadaveri, di cui prende il posto lo spazio-tempo!

Giova però di considerare questo universo sotto la specie geometrica d'uno *spazio a quattro dimensioni*, S_4, in cui le equazioni lineari fra le coordinate x, y, z, t, rappresenteranno gl' *imperpiani* (S_3), secantisi a due a due secondo *piani* (S_2) e a tre a tre secondo *rette* (S_1) ecc.. Questo linguaggio geometrico offre una figurazione interessante della cinematica einsteiniana, di cui daremo solo un cenno fuggevole.

Cerchiamo di definire l'intervallo o *distanza* che separa due punti-eventi del nostro universo, cioè due punti dello S_4. Una misura di questo intervallo s'introduce naturalmente nel caso in cui i due punti-eventi possano ritenersi come uno stesso luogo per riguardo ad un sistema inerziale di Galileo (in moto traslatorio uniforme), poichè allora si è condotti a considerare il *tempo proprio* che separa i due eventi, cioè l'intervallo di tempo relativo ad un orologio portato dal sistema stesso (che ha il valor massimo in confronto al tempo misurato con orologi diversi): così l'intervallo di spazio-tempo che separa la mia casa di ieri da quella d'oggi, viene misurato dal tempo trascorso fra ieri ed oggi, in rapporto ad un orologio che si muove colla terra.

Applichiamo questa definizione a due *punti* (punti-eventi) dell'universo S_4, infinitamente vicini, come $(x\ y\ z\ t)$ e $(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)$: allora per un movimento infinitesimo — da ritenere traslatorio uniforme — che sovrappone i due punti, si trova il tempo proprio ds dato dalla formula

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}\,(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

[1] Cfr. R. MARCOLONGO, *Relatività*. Principato, Messina, 1921.

Questa formula si assumerà dunque, come definizione dell'intervallo o *distanza elementare* fra due *punti* dello S_4, e varrà a stabilire in questo spazio una *metrica convenzionale*. La quale ha invero molte analogie colla metrica che, secondo RIEMANN, s'introduce sopra una superficie o varietà [1], salvo la circostanza che la forma differenziale qui assunta per definire il quadrato dell'elemento lineare non è essenzialmente positiva. Comunque l'espressione data dal ds conduce a definire la *lunghezza d'una linea* qualunque segnata nello S_4 (distanza di due punti-eventi congiunti entro una serie continua). E si possono quindi definire nello S_4 le linee analoghe alle *geodetiche*, che sono le rette dello S_4; le quali invero — a motivo della natura segnalata della forma ds — corrispondono, non già ad un minimo, ma ad un *massimo* della lunghezza: $\int ds$..

Con queste convenzioni il *principio d'inerzia* di GALILEO riceve una nuova formulazione in linguaggio geometrico: *Il moto libero d'un punto* (traiettoria rettilinea descritta con velocità uniforme) *corrisponde ad una retta-geodetica dell'universo* S_4; ciò significa che «di più punti materiali partenti insieme da una medesima posizione e giungenti insieme ad un'altra, impiega il massimo tempo proprio il punto che si nuove di moto libero» non soggetto a forze.

§ 13. **Cenno sulla teoria generale della relatività di Einstein**. — Aggiungeremo un breve cenno sull'ulteriore sviluppo della dottrina di EINSTEIN, che è la sua nuova costruzione della dinamica (1914-17). Assegnare una legge (d'inerzia) per il moto libero dei punti materiali ed aggiungervi poi l'azione di *forze* modificanti il moto, è ancora un'astrazione. La quale risponderebbe invero alla realtà soltanto nel caso che la materia fosse disseminata in piccole masse, così lontane le une dalle altre da muoversi ciascuna indipendentemente, senza subirne l'influenza. Invece, nel nostro mondo, la materia, che vediamo muoversi, si trova sotto l'azione di altra materia, che — nella dinamica di NEWTON — viene ritenuta come causa di *forze gravitazionali*.

Così, nella realtà concreta, un sasso lasciato libero ad una

[1] Cfr. Art. undecimo, §§ 17, 19.

qualche altezza dalla terra, non si muove già in linea retta con velocità uniforme, bensì descrive in generale, con moto accelerato, una parabola. Rispetto a questa realtà, il linguaggio astratto della dinamica classica, che riduce il moto ad un moto traslatorio uniforme modificato continuamente dalla forza di gravità, è soltanto una *finzione* semplificatrice.

La rappresentazione geometrica dell'universo, S_4, porge un linguaggio atto ad esprimere la realtà dinamica in una maniera più concreta: purchè si modifichi la determinazione metrica stabilita innanzi nello S_4, mercè l'espressione della distanza elementare, ds, fra due punti-eventi. Perciò osserviamo che una qualsiasi distribuzione di forze, agenti sui punti materiali, dà luogo a modificare il tempo proprio elementare con cui si passa da un punto all'altro infinitamente vicino: l'espressione del ds^2 (che era una particolare forma differenziale quadratica in dx, dy, dz, dt) diventa quindi una forma quadratica qualunque nei differenziali dx, dy, dz, dt:

$$ds^2 = g_{11}\, dx^2 + \ldots + g_{44}\, dt^2 + 2\, g_{12}\, dxdy + \ldots + 2\, g_{34}\, dzdt.$$

Ora una formula siffatta ove le g sieno funzioni qualsiansi di z, y, z, t definisce nello S_4 una metrica riemanniana (cfr. Art. undecimo) che tuttavia qui occorre prendere in un senso più generale, prescindendo dall'ipotesi che la forma sia essenzialmente positiva. Si può dire dunque che «*ad ogni distribuzione di forze nello spazio fisico risponde una metrica dello spazio-tempo* S_4» e il principio newtoniano delle forze (la lex motus II) si lascia esprimere ora come un'*estensione del postulato d'inerzia di* GALILEO: al movimento d'un punto materiale libero entro un campo di forze, corrisponde una *linea geodetica* dello S_4; cioè:

Se, entro un campo di forze, si considerano due punti, materiali in due tempi successivi, fra tutte le linee che i due punti possono descrivere per giungere insieme dalla posizione iniziale alla finale, la traiettoria descritta secondo la dinamica newtoniana corrisponde ad un *massimo* del relativo *tempo proprio* (la proprietà di massimo essendo intesa, come nella geometria differenziale, per intervalli convenientemente ristretti).

Fin qui non abbiamo fatto che porgere una nuova rappresentazione di una vecchia teoria. Non vi sarebbe difficoltà a spingere avanti questo sviluppo, adottando per le forze l'ipotesi gravitazionale di NEWTON; allora si troverebbe, nello S_4, una metrica ben definita, corrispondente ad una certa espressione del quadrato dell'elemento lineare ds.

Ma EINSTEIN ha proceduto altrimenti, e il valore della sua ricerca sta in ciò che essa riesce a scoprire una nuova dinamica, rispetto a cui la dinamica newtoniana figura soltanto come un'approssimazione. Nella meccanica classica le forze gravitazionali danno luogo ad un *potenziale newtoniano,* che soddisfa ad una ben nota equazione a derivate parziali; ora a questa equazione deve corrispondere un sistema d'equazioni differenziali cui soddisfino i coefficienti g della forma ds. Per determinare tale sistema (oltre ad adottare qualche ipotesi matematica semplificativa) EINSTEIN si vale essenzialmente del *principio di relatività* preso nella sua più vasta estensione:

le leggi della natura debbono tradursi in proprietà dello spazio-tempo che sieno *intrinseche,* cioè non dipendenti dal particolare sistema di coordinate x, y, z, t rispetto a cui vengono espresse.

In altri termini, le equazioni a derivate parziali a cui soddisfano le g non debbono mutare di forma se si eseguisce sulle x, y, z, t una qualsiasi sostituzione, passando dunque ad un sistema di coordinate curvilinee affatto arbitrario. Questa condizione d'*invarianza* conduce a scrivere a priori le equazioni anzidette e così a definire (almeno virtualmente) il ds^2, e quindi la metrica dello S_4 e la dinamica dello spazio fisico.

La dinamica di EINSTEIN *contiene come approssimazione la dinamica di* NEWTON (forze centrali esercitantisi fra le masse in ragione inversa ai quadrati delle distanze), *ma importa una correzione* di questa, che dà luogo ad osservazioni o esperienze discriminatrici: è sopratutto importante a tale riguardo la spiegazione, che essa porge dell'anomalia osservata pel moto del perielio di Mercurio (circa 42″ in un secolo, secondo NEWCOMB), che restava inesplicata nella teoria newtoniana.

Ma qui ci fermiamo, senza addentrarci in un esame della dinamica einsteiniana. Basti dire che — per la grandiosità della sintesi di conoscenze diverse, meccaniche, ottico-elettro-magnetiche, non meno che per il soddisfacimento di esigenze razionali non appagate dalla dottrina di NEWTON — codesta dinamica rappresenta il grado più elevato raggiunto dalla scienza contemporanea. Il progresso è frutto, non soltanto di un lungo sviluppo delle teorie fisiche dell'elettro-magnetismo, bensì anche di una revisione filosofica dei concetti che stanno a base delle nostre costruzioni scientifiche, e in particolare della critica dei principii della geometria cui si aggiunge la critica del tempo. Mercè questa larga revisione critica la pseudo-evidenza o necessità dello spazio e del tempo assoluto sono state sacrificate a un più profondo apprezzamento delle ragioni sufficienti dei fenomeni che porta la relatività, e quindi il carattere invariante delle leggi della natura, la contiguità dell'azione causale ecc.

Il lettore che voglia approfondire lo studio di questi argomenti, potrà cominciare dalla critica dei fondamenti della meccanica come scienza locale, rendendosi conto del significato dei concetti e dei principii della dinamica relativa ad un sistema di riferimento qualsiasi, p. es., nei cap. V e VI dei nostri citati «Problemi della Scienza»; passando poi alla meccanica come scienza cosmica, egli troverà un'esposizione volgarizzata delle dottrine einsteiniane in ALBERTO EINSTEIN «sulla teoria speciale e generale della relatività», trad. Calisse, Bologna, Zanichelli, 1920; GUIDO CASTELNUOVO «Spazio e tempo secondo le vedute di A. EINSTEIN», Bologna, Zanichelli, 1923.